30/09/19 - 1ο μαθημα

Βασικες Εννοιες: → Πειραμα τυχης: πειραμα με αβεβαιο αποτελεσμα

→ Δειγματικος χωρος (Ω): συνολο των δυνατων αποτελεσματων ενος πειραματος τυχης

→ Δειγματικο σημειο: ενα αποτελεσμα του πειραματος τυχης

→ Ενδεχομενο: συνολο δυνατων αποτελεσματων = υποσυνολο του δειγματικου χωρου.

→ Πιθανοτητα ενδεχομενου: αριθμος που δηλωνει τον βαθμο βεβαιοτητας

Παραδειγμα 1:

Ριψη ζαριου:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ δειγματικος χωρος

Ενδεχομενα: A = (να ερθει αριθμος μικροτερος του 4) = $\{1, 2, 3\}$

B = (να ερθει περιττος αριθμος) = $\{1, 3, 5\}$

$P(A) = 50\% = \dfrac{\text{πληθος στοιχειων του A}}{\text{πληθος στοιχειων του δ.χ}}$

$P(B) = 50\%$

Παραδειγμα 2:

Σε ενα κουτι εχουμε 3 μπαλες: 1 κοκκινη 'Κ', 1 πρασινη 'Π', 1 μπλε 'Μ'. Εξαγουμε τις μπαλες μια-μια. Ενδιαφερομαστε για την σειρα εμφανισης των χρωματων.

1η	2η	3η	
Κ	Π	→ Μ	ΚΠΜ
	Μ	→ Π	ΚΜΠ
Π	Κ	→ Μ	ΠΚΜ
	Μ	→ Κ	ΠΜΚ
Μ	Κ	→ Π	ΜΚΠ
	Π	→ Κ	ΜΠΚ

δειγματικος χωρος: $\Omega = \{ΚΠΜ, ΚΜΠ, ΠΚΜ, ΠΜΚ, ΜΚΠ, ΜΠΚ\}$

Ενδεχομενα: A = (να τραβηξω πρασινη μπαλα στην 2η εξαγωγη) = $\{ΚΠΜ, ΜΠΚ\}$

B = (να τραβηξω τη πρασινη μπαλα πριν την κοκκινη) = $\{ΠΚΜ, ΠΜΚ, ΜΠΚ\}$

$P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$.

Ορισμοι Πιθανοτητας

1) Κλασσική πιθανοτητα
2) Γεωμετρική -//-
3) Εμπειρική -//-

} Αξιωματικος ορισμος πιθανοτητας

1. Κλασσική πιθανοτητα

$$\text{πιθανοτητα ενος ενδεχομένου} = \frac{\#\text{ ευνοϊκων αποτελεσματων}}{\#\text{ ολων των δυνατων αποτελεσματων}}$$

ή $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

→ Ο τροπος αυτος δεν μπορει να εφαρμοστει οταν το πληθος των στοιχειων του Ω δεν ειναι πεπερασμενο.

π.χ. Εχω ενα κουτι με 4 μπαλες: 2 κοκκινες, 1 πρασινη & 1 μπλε. Εξαγω μια μπαλα και ενδιαφερομαι για το χρωμα τους

$\Omega = \{Κ, Π, Μ\}$

Α = να μην ειναι κοκκινη $= \{Π, Μ\}$

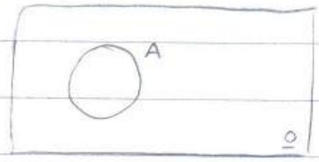
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{3}$ ΟΧΙ!

→ Ο κλασσικος ορισμος δεν εφαρμοζεται οταν τα στοιχεια του Ω δεν ειναι ισοπιθανα.

2. Γεωμετρική πιθανοτητα

Μπορει να εφαρμοστει αν ο δειγματικος χωρος παιρνει μορφη γεωμετρικου σχηματος

π.χ. ριψη βελους



$$P(A) = \frac{\text{εμβαδον του } A}{\text{εμβαδον του } \Omega}$$

3. Εμπειρική πιθανοτητα

Πιθανοτητα που βασιζεται στην προσωπική εκτιμηση.

π.χ. Η πιθανοτητα να περασω το μαθημα ειναι 80%.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χωρος πιθανοτητας

Ω: δειγματικός χωρος

$\mathcal{A}$: συνολο ενδεχομένων = συνολο υποσυνολων του Ω

P: συναρτηση πιθανότητας : $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Αξιώματα: 1. $P(\Omega) = 1$

2. Αν $A_1 \in \mathcal{A}$ τοτε $0 \leq P(A_1) \leq 1$.

3. Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$ ξενων ανα δυο, τοτε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ιδιοτητες:

4) $P(\emptyset) = 0$.

αποδειξη: Εστω $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$ ετσι ωστε $A_1 = \Omega$, $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$.

Εφ'οσου ειναι ξενα ανα δυο απο αξ. 3 $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

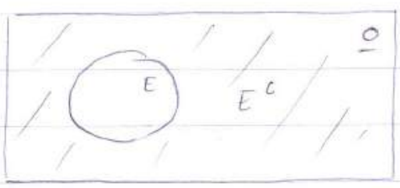
5) Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ξενα ανα δυο, τοτε $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

αποδειξη: Εστω $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$ ξενα ανα δυο με $A_j = \emptyset$ οπου $j = n+1, n+2, \dots$

Τοτε απο αξ. 3 $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)}_{\to 0}$

αρα, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

6) Αν $E \in \mathcal{A}$, τοτε $P(E^c) = 1 - P(E)$.



αποδειξη: Εστω $A_1 = E$ και $E^c = A_2$ τοτε

$A_1 \cup A_2 = \Omega$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ξενα.

Απο ιδιοτ. 5 $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$\Rightarrow P(\Omega) = P(E) + P(E^c) \Rightarrow$

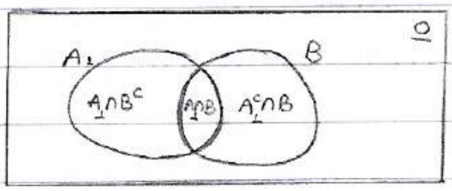
$\Rightarrow 1 = P(E) + P(E^c)$

$\Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$

02/10/19 - 2ο μαθημα

7) $P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) - P(A_1 \cap B) \quad \forall A_1, B \in \mathcal{A}$.

αποδειξη:



$$P(A_1 \cup B) = P(A_1B^c \cup A_1B \cup BA_1^c) \xrightarrow[\text{ιδιοτ. (5)}]{A_1B^c,\, A_1B,\, BA_1^c \text{ ξενα ανα 2}}$$

$$= P(A_1B^c) + P(A_1B) + P(BA_1^c) \quad (1).$$

$$P(A_1) = P(A_1B^c \cup A_1B) \xrightarrow[\text{ιδιοτ.(5)}]{A_1B^c,\, A_1B \text{ ξενα}} P(A_1B^c) + P(A_1B)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap B^c) = P(A_1) - P(A_1 \cap B) \quad (2).$$

$$P(B) = P(BA_1^c \cup A_1B) \xrightarrow[\text{ιδιοτ.(5)}]{BA_1^c,\, A_1B \text{ ξενα}} P(BA_1^c) + P(A_1B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap A_1^c) = P(B) - P(A_1 \cap B) \quad (3).$$

Επομένως $(1) \xRightarrow[(3)]{(2)} P(A_1 \cup B) = P(A_1) - P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B) + P(B) - P(A_1 \cap B)$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) - P(A_1 \cap B)$$

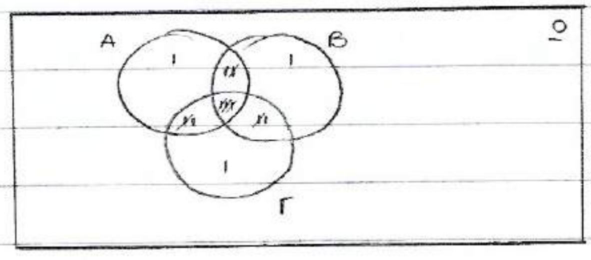
8) Αρχη Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$, A_i \in \mathcal{A}, \ i = 1, 2, \dots, n.$

Για $n=3$, η αρχη του εγκλεισμου - αποκλεισμου γραφεται

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$



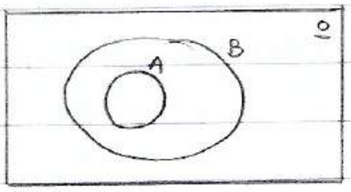
Για $n=4$: $P(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) + P(\Delta) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) -$

$- P(A \cap \Delta) - P(B \cap \Gamma) - P(B \cap \Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) + P(A \cap B \cap \Gamma)$

$+ P(A \cap \Gamma \cap \Delta) + P(A \cap B \cap \Delta) + P(B \cap \Gamma \cap \Delta) - P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta)$

9) Αν $A_1, B \in \mathcal{A}$ με $A_1 \subseteq B$ τοτε $P(A_1) \leq P(B)$.

αποδειξη:



$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) \xrightarrow[\text{ιδιοτ.}(5)]{A,\ B\cap A^c \text{ ξενα}}$$

$$= P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A).$$

10). Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,\dots$, τοτε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

αποδειξη:

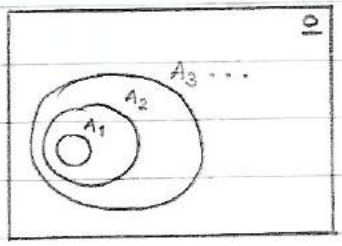
Εστω $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\dots$ και $F_1 = A_1$, $F_2 = A_2 \cap A_1^c$, $F_3 = A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c$, ...
με την ιδιοτητα $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \forall n$, F_i ξενα ανα δυο & $F_i \subseteq A_i \ \forall i$

Τοτε:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \xrightarrow[\text{ιδιοτ. } 3]{F_i \text{ ξενα}} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \underset{\text{ιδιοτ. } 9}{\overset{F_i \subseteq A_i}{\leq}} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

11) Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,\dots$ με $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, τοτε
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

αποδειξη:



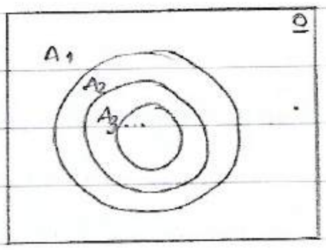
Εστω $A_i \in \mathcal{A}$ με $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$
και $F_1 = A_1$, $F_2 = A_2 \cap A_1^c$, $F_3 = A_3 \cap A_2^c$, ...
$F_n = A_n \cap A_{n-1}^c$. Τοτε τα F_i ειναι ξενα ανα δυο και $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n$.

Οποτε, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \xrightarrow[\text{ιδιοτ. } 3]{F_i \text{ ξενα}} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) \xrightarrow[\text{ιδιοτ.}(5)]{F_i \text{ ξενα}}$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

12). Αν $A_i \in \mathcal{A}$ με $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, τοτε $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

αποδειξη:



Εχουμε $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \Rightarrow A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq A_3^c \subseteq \dots$

τοτε απο ιδιοτ. (11):

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \xrightarrow{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c}$$

$$\Rightarrow P((\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \Rightarrow 1 - P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \lim_{n\to\infty} (P(A_n))$$

αρα, $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

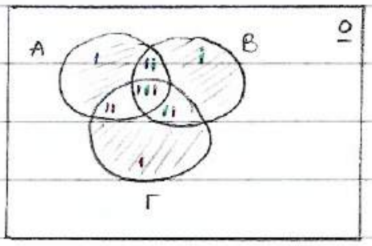
Παραδειγμα 1: Σε μια πολη υπαρχουν 3 εφημεριδες: Α, Β κ' Γ.
Οι Α κ' Β ειναι πρωινες κ η Γ απογευματινη. Εχουμε τα ενδεχομενα: Α = ο κατοικος διαβαζει την Α

Β = -//- -//- την Β

Γ = -//- -//- την Γ

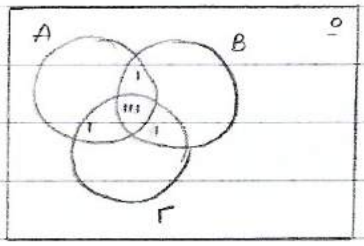
Γνωριζουμε οτι $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,3$, $P(\Gamma) = 0,05$, $P(A \cap B) = 0,08$, $P(B \cap \Gamma) = 0,04$, $P(A \cap \Gamma) = 0,02$, $P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,01$.

α) P(ο κατοικος να διαβαζει μια μονο εφημεριδα) = α = ;



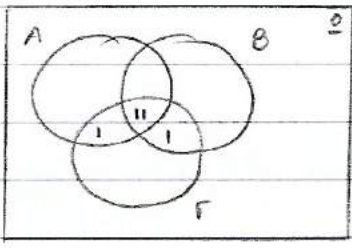
$\alpha = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2P(A \cap B) - 2P(B \cap \Gamma) - 2P(A \cap \Gamma) + 3P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,2$

β) P(ο κατοικος να διαβαζει τουλαχιστον 2 εφημεριδες) = β = ;



$\beta = P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - 2(A \cap B \cap \Gamma) = 0,12$

γ) P(ο κατοικος να διαβαζει 1 απογευματινη κ τουλαχιστον 1 πρωινη) = γ



$\gamma = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,05$

Παραδειγμα 2: Διλημμα Monty Hall

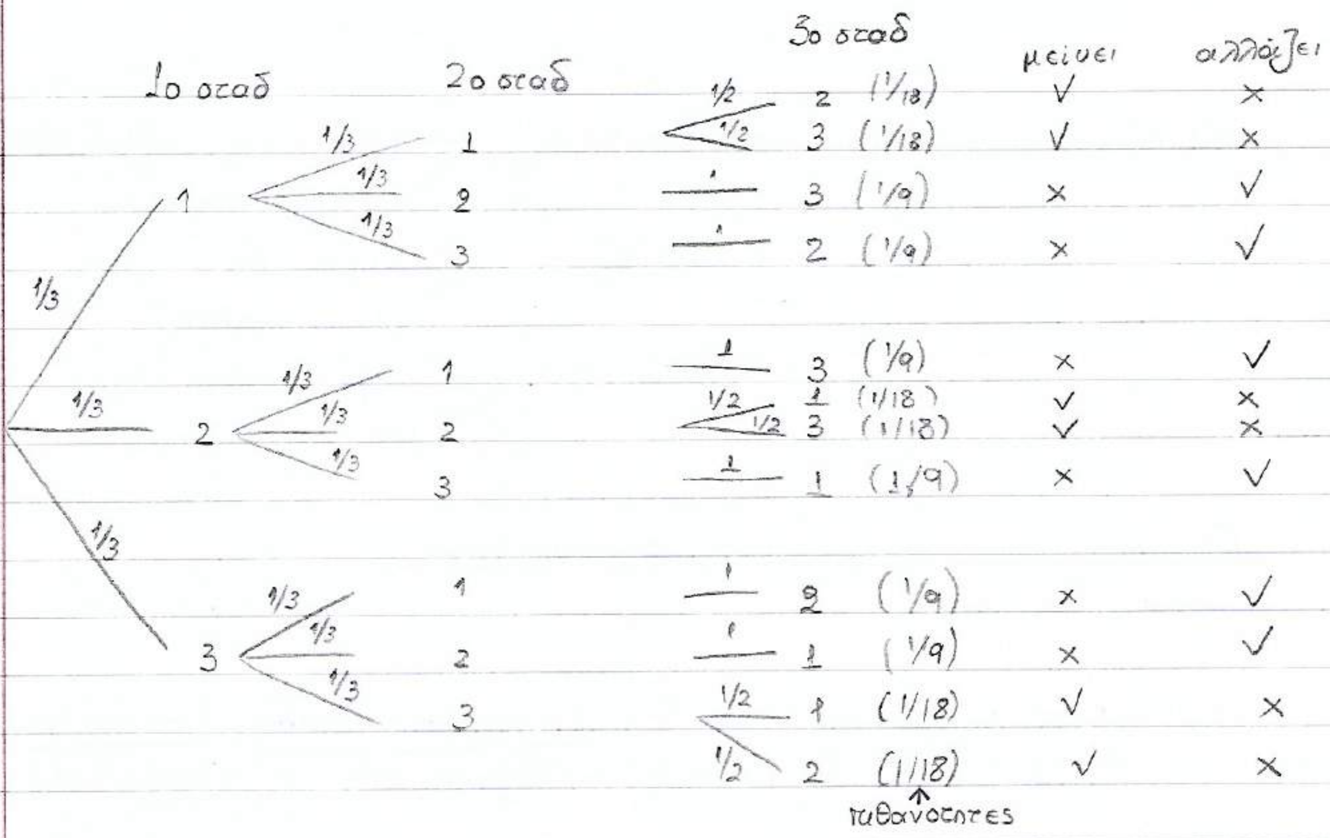
Εχουμε 3 πορτες.

1ο σταδιο: Ο παρουσιαστης επιλεγει μια απο τις πορτες

2ο σταδιο: Ο παικτης επιλεγει μια πορτα.

3ο σταδιο: Ο παρουσιαστης ανοιγει πορτα χωρις δωρο.

Στο τελος ο παικτης επιλεγει αν θα μεινει πιστος ή θα αλλαξει πορτα.



Αν μείνει πιστος εχει πιθανότητα $P = 1/3$ αν αλλάξει εχει $P = 2/3$ (το υπολογίζεις αν αθροισεις τις πιθανότητες)

04/10/19 - 3ο μαθημα.

<u>Στοιχεία συνδυαστικής για πιθανότητες</u>

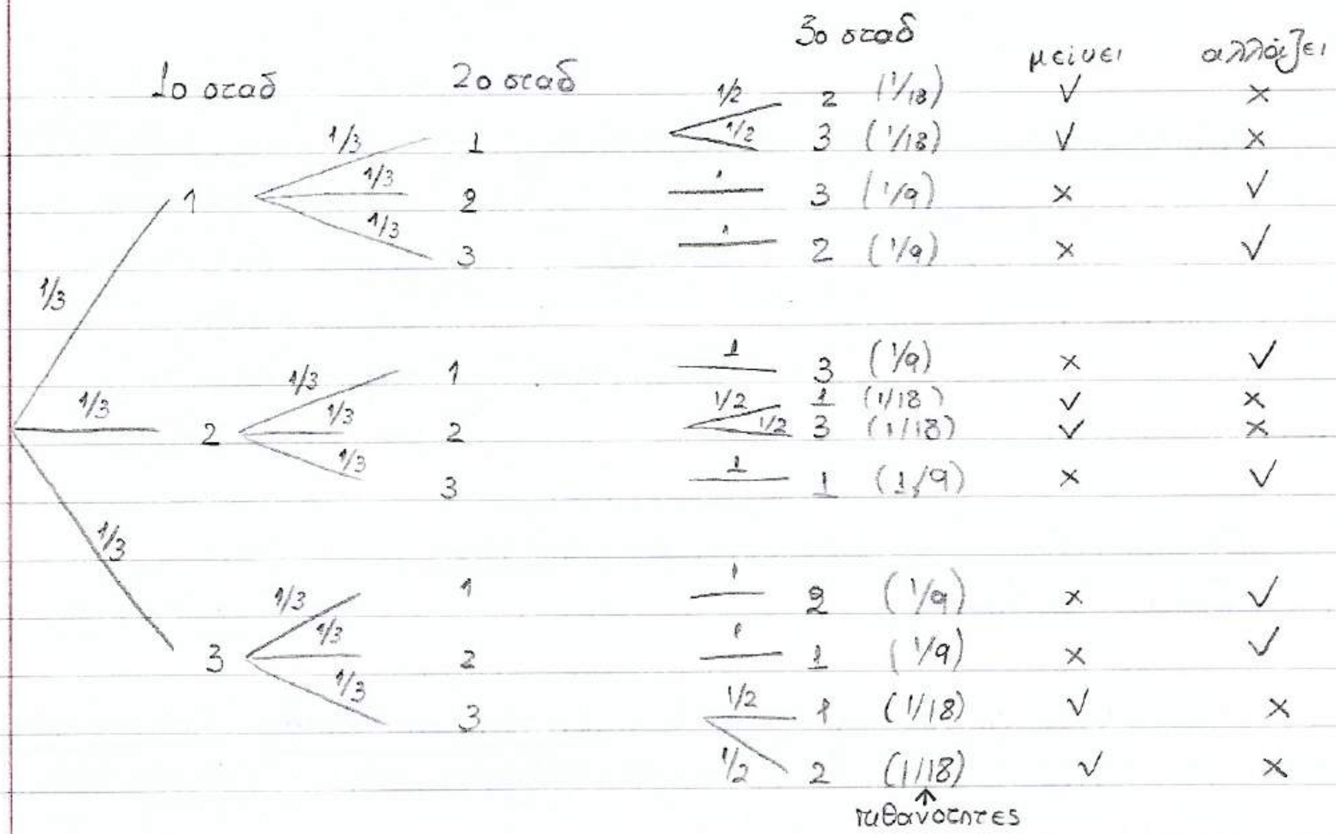
Παραδειγμα: Ένα κουτί εχει 5 αριθμημένες μπάλες. Εξαγουμε τις μπαλες μια-μια. Ποια η πιθανοτητα οι 2 πρωτες μπαλες να εχουν αρτιο αριθμο;

A: οι 2 πρωτες μπαλες να εχουν αρτιο αριθμο

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\#\text{ των διατεταγμενων 5-αδων οπου τα 2 πρωτα στοιχεια ειναι απο το } \{2,4\} \text{ και τα αλλα 3 στοιχεια απο } \{1,3,5\}}{\#\text{ των διατεταγμενων 5-αδων που φτιαχνω απο } \{1,2,3,4,5\}}$$

!! Για να υπολογίζω τετοιες πιθανότητες πρεπει να μπορω να κανω καταμετρηση σχηματισμων

Σχηματισμο ονομαζουμε ενα συνολο με συγκεκριμένη δομή.
Αντικειμενο της συνδυαστικής ειναι η καταμετρηση σχηματισμων.



Αν μενει πιστος εχει πιθανοτητα $P = 1/3$ αν αλλαξει εχει $P = 2/3$
(το υπολογιζεις αν αθροισεις τις πιθανοτητες)

04/10/19 - 3ο μαθημα.

Στοιχεια συνδυαστικης για πιθανοτητες

Παραδειγμα: Ενα κουτι εχει 5 αριθμημενες μπαλες. Εξαγουμε τις μπαλες μια-μια. Ποια η πιθανοτητα οι 2 πρωτες μπαλες να εχουν αρτιο αριθμο;

A: οι 2 πρωτες μπαλες να εχουν αρτιο αριθμο

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{\# των διατεταγμενων 5αδων οπου τα 2 πρωτα στοιχεια ειναι απο το } \{2,4\} \text{ και τα αλλα 3 στοιχεια απο } \{1,3,5\}}{\text{\# των διατεταγμενων 5αδων που φτιαχνω απο } \{1,2,3,4,5\}}$$

!! Για να υπολογιζω τετοιες πιθανοτητες πρεπει να μπορω να κανω καταμετρηση σχηματισμων

Σχηματισμο ονομαζουμε ενα συνολο με συγκεκριμενη δομη.
Αντικειμενο της συνδυαστικης ειναι η καταμετρηση σχηματισμων.

Κλασσικοί σχηματισμοί → Μεταθέσεις → κλασσικές
→ ν ειδών στοιχείων

→ Διατάξεις → χωρίς επανάληψη
→ με επανάληψη

→ Συνδυασμοί → χωρίς επανάληψη
→ με επανάληψη

Ορισμοί και καταμέτρηση σχηματισμών

Έστω $S = \{s_1, s_2, \dots, s_\nu\}$

1) Μετάθεση ν-στοιχείων του S = διατεταγμένη ν-αδα διακεκρ. στοιχείων του S
"βάζω σειρά" χωρίς επανάληψη

π.χ.: $(\underset{1η}{s_8}, \underset{2η}{s_3}, \underset{3η}{s_5}, \dots, \underset{νη}{s_{10}}) \leftrightarrow$ | s_8 | s_3 | s_5 | … | s_{10} |
1η 2η 3η νη

μεταθέσεων ν-στοιχείων $= n! = n \cdot (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$.

→ Παράδειγμα: $S = \{1, 2, 3\}$, # μεταθέσεων 3 στοιχείων = ;

3 τρόποι

1η 2η 3η

Φτιάχνω την μετάθεση σε 3 στάδια

1ο στάδιο Επιλέγω στοιχείο για την 1η θέση → 3 επιλογές
2ο στάδιο: -//- -//- για την 2η θέση → 2 επιλογές
3ο στάδιο: -//- -//- για την 3η θέση → 1 επιλογή

1ο στάδιο	2ο στάδιο	3ο στάδιο	
1	2	3	(1, 2, 3)
	3	2	(1, 3, 2)
2	1	3	(2, 1, 3)
	3	1	(2, 3, 1)
3	1	2	(3, 1, 2)
	2	1	(3, 2, 1).

Από πολλαπλασιαστική αρχή, # μεταθέσεων 3 στοιχείων $= 3 \cdot 2 \cdot 1$ ή $3! = 6$

Αποδειξη $\underset{1^{η}}{\sqcup}\underset{2^{η}}{\sqcup}\ \cdots\ \underset{ν^{η}}{\sqcup}$

Θα σπάσω την μετάθεση σε ν στάδια

1º σταδιο: Επιλογη στοιχειου για 1η θεση → ν τροποι

2º σταδιο: -//- -//- για 2η θεση → (ν-1) τροποι

3º σταδιο: -//- -//- για 3η θεση → (ν-2) τροποι

⋮

νº σταδιο -//- -//- για ν-η θεση → 1 τροπος.

Αρα # μεταθεσεων ν-στοιχειων $= ν\cdot(ν-1)\cdot(ν-2)\cdot\ldots\cdot 1 = ν!$

2) Διαταξη ν ανα κ = διατεταγμενη κ-αδα διακεκριμενων στοιχειων του S

π.χ: $(S_7, S_1, S_ν, \ldots, S_{12}) \Leftrightarrow \underset{1^η}{|S_7|}\underset{2^η}{S_1|}\underset{3^η}{S_ν|}\ \cdots\ \underset{κ^η}{|S_{12}|}$

$ν \quad (ν-1) \quad (ν-2) \quad \ldots \quad (ν-κ+1)$

Οποτε # διαταξεων ν ανα κ $= ν\,(ν-1)\ldots(ν-κ+1) = \dfrac{ν!}{(ν-κ)!} = (ν)_κ$: καθοδικο παραγοντικο κ-ταξης

3) Διαταξη ν ανα κ με επαναληψη = διατεταγμενη κ-αδα στοιχειων του S
επιτρεπεται η επαναληψη

π.χ: $(\underset{1^η}{S_3}, \underset{2^η}{S_5}, \underset{3^η}{S_3}, \ldots, \underset{(κ-1)^η}{S_ν}, \underset{κ^η}{S_5}) \Leftrightarrow \underset{1η}{|S_3|}\underset{2η}{S_5|}\underset{3η}{S_3|}\ \cdots\ \underset{κ^η}{|S_5|}$

$ν \quad ν \quad ν \quad \ldots \quad ν$

Οποτε # διαταξεων ν ανα κ με επαναληψη $= \underbrace{ν\cdot ν\cdot\ldots\cdot ν}_{κ-οροι} = ν^κ$

4) Συνδυασμος ν ανα κ = μη διατεταγμενη κ-αδα διακεκριμενων στοιχειων του S
= υποσυνολο του S με κ στοιχεια

συνδυασμος ν στοιχειων ανα κ $= \dfrac{\#\text{διαταξεων ν ανα κ}}{κ!} = \dfrac{ν!}{(ν-κ)!\,κ!} = \dbinom{ν}{κ}$

παραδειγμα: $S = \{1, 2, 3\}$

- διαταξεις των 3 στοιχειων ανα 2 : $\begin{cases} (1,2), (1,3), (2,1) \\ (2,3), (3,1), (3,2) \end{cases}$

- συνδυασμοι 3 στοιχειων ανα 2: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$.

$$(1,2)\ (2,1)\quad (1,3)\ (3,1)\quad (2,3)\ (3,2).$$

$$\#\text{ συνδυασμων 3 στοιχειων ανα 2} = \frac{\#\text{ διαταξεων 3 ανα 2}}{2!}$$

5) Μεταθεση ν στοιχειων στο S ανα $k_1, k_2, k_3, \dots, k_\nu$ =
= διατεταγμενη $(k_1 + k_2 + \dots + k_\nu)$-αδα στοιχειων του S οπου

τα s_1 εμφανιζεται k_1-φορες
τα s_2 -//- k_2-φορες
⋮
τα s_ν -//- k_ν-φορες

$$\#\text{ μεταθεσεων ν ανα } k_1, k_2, \dots, k_\nu = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_\nu)!}{k_1!\, k_2! \dots k_\nu!}$$

Παραδειγμα: $S = \{$ασπρη μπαλα (A.M.), μαυρη μπαλα (M.M.)$\}$.

ν.δ. → # μεταθεσεων των στοιχειων του S οπου η AM εμφανιζεται $\underset{k_1}{3}$-φορες και η M.M. εμφανιζεται $\underset{k_2}{2}$ φορες

πχ | AM | MM | AM | AM | MM |

1ο σταδιο: Επιλογη 3 θεσεων απο 5 για να τοποθετησω A.M.: $\binom{5}{3}$ τροποι.
2ο σταδιο: -//- 2 θεσεων απο 2 -//- -//- M.M: 1 τροπος

$$\#\text{ μεταθεσεων 2 στοιχειων ανα } 3, 2 = \binom{5}{3} 1 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!}$$

Αποδειξη: | | | . . . | |

$1^η \quad 2^η \quad \ldots \quad (k_1+k_2+\ldots+k_v)^η$

$1^ο$ σταδιο: Επιλογη k_1 θεσεων απο $k_1+k_2+\ldots+k_v$ για $S_1 \rightarrow \binom{k_1+k_2+\ldots+k_v}{k_1}$ τροποι

$2^ο$ σταδιο: Επιλογη k_2 θεσεων απο $k_2+k_3+\ldots+k_v$ για $S_2 \rightarrow \binom{k_2+\ldots+k_v}{k_2}$ τροποι

$3^ο$ σταδιο: Επιλογη k_3 θεσεων απο $k_3+\ldots+k_v$ για $S_3 \rightarrow \binom{k_3+\ldots+k_v}{k_3}$ τροποι

⋮

$v^ο$ σταδιο: Επιλογη k_v θεσεων απο k_v για $S_v \rightarrow \binom{k_v}{k_v} = 1$ τροπος

μεταθεσεων v ανα $k_1, k_2, \ldots, k_v$ $= \binom{k_1+k_2+\ldots+k_v}{k_1}\binom{k_2+\ldots+k_v}{k_2}\cdots\binom{k_{v-1}+k_v}{k_{v-1}}\binom{k_v}{k_v} = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_v)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_v!}$

07/10/19 - 4ο μαθημα

Υπενθύμιση!!!

Κλασσικοι Σχηματισμοι

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_v\}$ #

Μεταθεσεις $\rightarrow$ v στοιχειων $(S_1, S_7, S_5, \ldots, S_4)$: $v!$
$\quad\quad 1η \quad 2η \quad 3η \quad vη$

↳ v ειδων στοιχειων $(S_5, S_7, \ldots, S_2)$ ανα $k_1, k_2, \ldots, k_v$: $\frac{(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_v)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_v!}$

Διαταξη $\rightarrow$ v ανα k $(S_7, S_9, \ldots, S_{10})$: $(v)_k = \frac{v!}{(v-k)!}$

↳ v ανα k με επαναληψη $(S_8, S_5, \ldots, S_{11})$: v^k

Συνδυασμος $\rightarrow$ v ανα k $\underbrace{\{S_1, S_9, S_8, \ldots, S_{12}\}}_{k \text{ στοιχεια}}$: $\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!\,(v-k)!}$

↳ v ανα k με επαναληψη

Αποδειξη: $\underset{1^\eta}{|\_\_}\underset{2^\eta}{|\_\_}|\ \dots\ \underset{(k_1+k_2+\dots+k_\nu)^\eta}{|\_\_|}$

1^o σταδιο: Επιλογη k_1 θεσεων απο $k_1+k_2+\dots+k_\nu$ για $S_1 \rightarrow \binom{k_1+k_2+\dots+k_\nu}{k_1}$ τροποι

2^o σταδιο: Επιλογη k_2 θεσεων απο $k_2+k_3+\dots+k_\nu$ για $S_2 \rightarrow \binom{k_2+\dots+k_\nu}{k_2}$ τροποι

3^o σταδιο: Επιλογη k_3 θεσεων απο $k_3+\dots+k_\nu$ για $S_3 \rightarrow \binom{k_3+\dots+k_\nu}{k_3}$ τροποι

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

ν^o σταδιο: Επιλογη k_ν θεσεων απο k_ν για $S_\nu \rightarrow \binom{k_\nu}{k_\nu} = 1$ τροπος

$$\#\text{μεταθεσεων } \nu \text{ ανα } k_1,k_2,\dots,k_\nu = \binom{k_1+k_2+\dots+k_\nu}{k_1}\binom{k_2+\dots+k_\nu}{k_2}\cdots\binom{k_{\nu-1}+k_\nu}{k_{\nu-1}}\binom{k_\nu}{k_\nu} = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_\nu)!}{k_1!\,k_2!\dots k_\nu!}$$

07/10/19 - 4ο μαθημα

Υπενθυμιση!!!

Κλασσικοι Σχηματισμοι

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_\nu\} \qquad \#$$

Μεταθεσεις → ν στοιχειων $(\underset{1^\eta}{s_1}, \underset{2^\eta}{s_7}, \underset{3^\eta}{s_5}, \dots, \underset{\nu^\eta}{s_4})$: $\nu!$

↳ ν ειδων στοιχειων $(s_5, s_7, \dots, s_2)$ ανα $k_1, k_2, \dots, k_\nu$: $\dfrac{(k_1+k_2+k_3+\dots+k_\nu)!}{k_1!\,k_2!\dots k_\nu!}$

Διαταξη → ν ανα k $(S_7, S_9, \dots, S_{10})$: $(\nu)_k = \dfrac{\nu!}{(\nu-k)!}$

↳ ν ανα k με επαναληψη $(S_8, S_5, \dots, S_{11})$: ν^k

Συνδυασμος → ν ανα k $\underbrace{\{S_1, S_9, S_8, \dots, S_{12}\}}_{k \text{ στοιχεια}}$: $\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}$

↳ ν ανα k με επαναληψη

6). Συνδυασμος ν ανα κ με επαναληψη =

= μη διατεταγμενη κ-αδα στοιχειων του S με πιθανη επαναληψη

π.χ: $\underbrace{\{s_1, s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, \ldots, s_\nu, s_\nu\}}_{\kappa\text{-στοιχεια}}$

Παραδειγμα: $S = \{1,2,3\}$

\# συνδυασμων 3 στοιχειων (του S) ανα 4 με επαναληψη =;

π.χ: $\{1,1,2,3\}$

Υπαρχει αντιστοιχια με την τοποθετηση $\overset{3-1}{\overset{\shortparallel}{2}}$ "$\overset{\text{διαχωριστικό}}{\overset{\swarrow}{\text{1}}}$" και 4 "0".

0 | 0 0 | 0 $\Leftrightarrow \{1,2,2,3\}$

| 0 0 0 | 0 $\Leftrightarrow \{2,2,2,3\}$.

\# συνδυασμων 3 στοιχειων ανα 4 με επαναληψη =

= \# τοποθετησεων 3 - 1 = 2 "|" και 4 "0" =

= \# μεταθεσεων 2 ειδων στοιχειων {"|", "0"} ανα 2, 4 =

$= \dfrac{(2+4)!}{2!\,4!}$

Αρα,

\# συνδυασμων ν ανα κ με επαναληψη =

= \# τοποθετησεων ν-1 "|" και κ "0" =

= \# μεταθεσεων 2 ειδων στοιχειων ({"|", "0"}) ανα ν-1, κ

$= \dfrac{(\nu-1+\kappa)!}{\kappa!\,(\nu-1)!} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \left[\begin{matrix}\nu\\ \kappa\end{matrix}\right]$

Ασκηση 1η: (Ριψη νομισματος 4 φορες)

Πειραμα τυχης: Ριχνουμε ενα νομισμα 4 φορες

P (2 K και 2Γ) =;

P (3 K και 1Γ) =;

Λυση:

Δειγματικός χωρος: $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in \{K, \Gamma\},\ i = 1,2,3,4\}$

Τα στοιχεια του δ.χ ειναι οι διαταξεις των 2 ({K, Γ}) ανα 4 με επανάληψη

$N(\Omega) = 2^4$

A : το ενδεχομενο να εμφανιστουν 2 Κ και 2 Γ

Τα στοιχεια του Α ειναι ολες οι μεταθεσεις 2 ειδων στοιχειων (Κ, Γ) ανα 2, 2

Αρα $N(A) = \frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2!2!}$

Οποτε: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4!}{2!2! \cdot 2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

B: το ενδεχομενο να εμφανιστουν 3Κ και 1Γ

Τα στοιχεια του Β ειναι ολες οι μεταθεσεις 2 ειδων στοιχειων (Κ, Γ) ανα 3, 1

Άρα $N(B) = \frac{(3+1)!}{3!\,1!} = \frac{4!}{3!}$

Οποτε $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4!}{3!\,2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Ασκηση 2 (Ριψη ζαριου 3 φορες).

Πειραμα τυχης: Ο παικτης στοιχηματιζει στον αριθμο 6.

Ριχνουμε το ζαρι 3 φορές και ο παικτης κερδίζει αν ερθει τουλαχιστον 1 φορα το 6.

P (να κερδισει)=;

Λυση:

Δειγματικός χωρος $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \{1,2,3,4,5,6\},\ i \in (1,2,3)\}$

Τα στοιχεια του Ω ειναι ιδιας ταξης των 6 ανα 3 με επαναληψη

$N(\Omega) = 6^3$

A : το ενδεχομενο να ερθει τουλαχιστον 1 φορα το 6.

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ οπου A_i να ερθει 6 στην ριψη $i = 1,2,3$

A_1, A_2, A_3 οχι ξενα

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A$
$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (*)$.

6 επιλογες

$A_1 \quad (6, i, j) : N(A_1) = 6^2, \quad P(A_1) = 6^2/6^3$

$A_2 \quad (i, 6, j) : N(A_2) = 6^2, \quad P(A_2) = 6^2/6^3 = P(A_3)$

$A_1 \cap A_2 \quad (6, 6, i) : N(A_1 \cap A_2) = 6, \quad P(A_1 \cap A_2) = 6/6^3$ με ομοιο τροπο $P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = 6/6^3$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$: $(6, 6, 6)$ $\quad \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 1 \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/6^3$

Άρα $(*) = \frac{6^2}{6^3} + \frac{6^2}{6^3} + \frac{6^2}{6^3} - \frac{6}{6^3} - \frac{6}{6^3} - \frac{6}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{91}{216}$

2η Λυση:

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$.

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \quad \overbrace{(i, j, k)}^{5 \text{ τροποι}} \quad N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 5^3$

$\Rightarrow P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \frac{5^3}{6^3}$

Άρα $P(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$.

Ασκηση 3 (Ασανσερ).

20 επιβιβαζονται στο ισογειο και επιλεγουν τυχαια σε ποιον απο τους 5 οροφους θα αποβιβασθουν

P(να αποβιβαστει τουλαχιστον 1 ατομο σε καθε οροφο) = ;

Λυση:

Δειγματικος χωρος $\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{20}), a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1, .., 20\}$

$N(\Omega) = 5^{20}$

A: το ενδεχομενο να αποβιβαστει τουλαχιστον 1 ατομο σε καθε οροφο

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ οπου A_i = να κατεβει τουλ. 1 ατομο στον i-οροφο

Οποτε

$$P(A) = P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = 1 - P((\bigcap_{i=1}^{5} A_i)^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{5} A_i^c) =$$

$$= 1 - \Big[\sum_{i=1}^{5} P(A_i^c) - \sum_{1\le i<j\le 5} P(A_i^c \cap A_j^c) + \sum_{1\le i<j<k\le 5} P(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c) -$$

$$- \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} P(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c \cap A_l^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)\Big]$$

- A_1^c να μη κατεβει κανεις στον 1ο οροφο $\quad \overbrace{(\underset{1ος}{\ldots}, \underset{2ος}{\ldots}, \ldots, \underset{20ος}{\ldots})}^{4 \text{ επιλογες}} \quad N(A_1^c) = 4^{20}$

$P(A_1^c) = \frac{4^{20}}{5^{20}}$

Για τον ιδιο λογο $P(A_2^c) = P(A_3^c) = P(A_4^c) = P(A_5^c) = \frac{4^{20}}{5^{20}}$

- $A_1^c \cap A_2^c \quad \overbrace{(\underset{1ος}{\ldots}, \underset{2ος}{\ldots}, \ldots, \underset{20ος}{\ldots})}^{3 \text{ επιλογες}} \quad N(A_1^c \cap A_2^c) = 3^{20}$

$P(A_1^c \cap A_2^c) = \frac{3^{20}}{5^{20}}$

$\bullet\ A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ $\quad \big(\underset{1ος}{\ldots}, \underset{2ος}{\ldots}, \ldots, \underset{20ος}{\ldots}\big)$ 2 τροπους $\quad N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 2^{20}$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \dfrac{2^{20}}{5^{20}}$

$\bullet\ A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$ $\quad N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = 1^{20} = 1$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = \dfrac{1}{5^{20}}.$

Άρα $P(A) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{5} \dfrac{4^{20}}{5^{20}} - \sum_{1\le i<j\le 5} \dfrac{3^{20}}{5^{20}} + \sum_{1\le i<j<k\le 5} \dfrac{2^{20}}{5^{20}} - \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} \dfrac{1}{5^{20}} + 0 \right)$

$= 1 - 5\dfrac{4^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{2}\dfrac{3^{20}}{5^{20}} - \binom{5}{3}\dfrac{2^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{4}\dfrac{1}{5^{20}} =$

$= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \dfrac{(5-k)^{20}}{5^{20}}$

14/10/19 - 5ο μαθημα

Το Προβλημα των Γενεθλιων.

Σε μια ομαδα n ατόμων να βρεθουν οι πιθανοτητες των ενδεχομενων

A = ολα τα ατομα εχουν διαφορετική μερα γενεθλια

B = τουλαχιστον 2 ατομα να εχουν την ιδια μερα γενεθλια.

Γ = ακριβως k ατομα εχουν την ιδια μερα γενεθλια

Λυση:

Δειγμ. χωρος: Ω n-αδες $(\overset{1-365}{\_}\ \_\ \_\ \ldots\ \_\ \_\ \_)$

$\bullet\ P(A) = \dfrac{365 \cdot 364 \ldots (365-n+1)}{365^n} = \dfrac{(365)_n}{(365)^n}$

$\bullet\ B = A^c : \quad P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{(365)_n}{365^n}$

$\bullet\ P(\Gamma) = \dfrac{\overset{\text{κοινη η ημερομηνια κ-ατομων}}{365} \cdot \binom{n}{k} (364)_{n-k}}{365^n}$

Επιπλεον ερωτημα, ποσο ειναι το ελαχιστο n ωστε $P(B) \ge 1/2$;

n	$P(B)$
1	$1/365$
⋮	⋮
20	0,411
⋮	
23 ατομα	$0{,}507 \ge 1/2$

- $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ $\quad (\underset{1ος}{\ldots}, \underset{2ος}{\ldots}, \ldots, \underset{20ος}{\ldots})$ 2 τροποι $\quad N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 2^{20}$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \frac{2^{20}}{5^{20}}$$

- $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$ $\quad N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = 1^{20} = 1$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = \frac{1}{5^{20}}.$$

Αρα
$$P(A) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{5} \frac{4^{20}}{5^{20}} - \sum_{1 \le i < j \le 5} \frac{3^{20}}{5^{20}} + \sum_{1 \le i < j < k \le 5} \frac{2^{20}}{5^{20}} - \sum_{1 \le i < j < k < l \le 5} \frac{1}{5^{20}} + 0 \right)$$

$$= 1 - 5\frac{4^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{2}\frac{3^{20}}{5^{20}} - \binom{5}{3}\frac{2^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{4}\frac{1}{5^{20}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{20}}{5^{20}}$$

14/10/19 - 5ο μαθημα

Το Προβλημα των Γενεθλιων.

Σε μια ομαδα n ατόμων να βρεθουν οι πιθανοτητες των ενδεχομενων

A = ολα τα ατομα εχουν διαφορετική μερα γενεθλια

B = τουλαχιστον 2 ατομα να εχουν την ιδια μερα γενεθλια.

Γ = ακριβως k ατομα εχουν την ιδια μερα γενεθλια

Λυση:

Δειγμ. χωρος: Ω n-αδες $(\overset{1-365}{\_}\ \_\ \_ \ldots \_\ \_\ \_)$

- $P(A) = \dfrac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n} = \dfrac{(365)_n}{(365)^n}$

- $B = A^c$: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{(365)_n}{365^n}$

- $P(\Gamma) = \dfrac{\overset{\text{κοινη η ημερομηνια κ-ατομων}}{365} \cdot \binom{n}{k} (364)_{n-k}}{365^n}$

Επιπλεον ερωτημα, ποσο ειναι το ελαχιστο n ωστε $P(B) \ge 1/2$;

n	$P(B)$
1	1/365
⋮	⋮
20	0,411
⋮	
23 ατομα	0,507 $\ge 1/2$

Παιχνίδι Λόττο

Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε 6 νούμερα: 1 - 49

Κλήρωση για να προκύψει μια 6-άδα.

P(εξάρι), P(πεντάρι).

$$P(\text{εξάρι}) \overset{\text{ως πρόβλημα}}{\underset{\text{με στάδια}}{=}} \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!43!}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{49}{6}}$$ ← ο συνδυασμός των 49 ανά 6

αν επανάληψη

$\{1,1,1,1,1,1\}$: $1/49^6$

$\{1,2,3,4,5,6\}$: $6!/49^6$

έχω πετύχει τα 5 ή 1 λάθος

$$P(\text{πεντάρι}) = \frac{\binom{6}{5}\cdot 43\cdot 6!}{(49)_6} = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$$

Χέρι Πόκερ (52 φύλλα: 13 ♡, 13 ◇, 13 ♣, 13 ♠)

5 φύλλα χωρίς επανάληψη

- καρέ: 4 όμοια φύλλα + 1 διαφορετικό

(A A A A B)

$$P(\text{καρέ}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{13\cdot 12\cdot 4}{\binom{52}{5}}$$

- φουλ: 3 όμοια + 2 όμοια

(A A A B B)

$$P(\text{φουλ}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

- τριάρι: 3 όμοια + 2 διαφορετικά

(A A A B Γ)

$$P(\text{τριάρι}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^{-x}$$

- P (ολα διαφορετικά) $= \dfrac{\binom{13}{5}\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}}$

Το προβλημα του ταιριάσματος

N ανθρώπους, N καπελα, ανακατεμενα.

Ο καθε ανθρωπος διαλεξει 1 καπελο στην τυχη.

Ζηταω την πιθανοτητα να μη επιλεξει κανενας δικο του καπελο.

Λυση:

E_i = "ο i αντρας πετυχαίνει το καπελο του"

$$P = (E_1^c \cap E_2^c \cap \ldots \cap E_N^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i\right)$$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

πιθανοτήτων $= \binom{N}{n}$

αρα $\displaystyle\sum_{i_1<\ldots<i_n} P(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \binom{N}{n} \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{n!}$

Αρα $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{N+1}}{N!}$

Επομένως, $\displaystyle P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!}$

16/10/19 - 6ο μαθημα

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Ανοιγμα πορτας με κλειδι

Μια κλειδαρια ανοιγει με ενα συγκεκριμενο κλειδι απο ν που κρατάω στο χερι.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^{-x}$$

∘ P (όλα διαφορετικά) $= \dfrac{\binom{13}{5}\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}}$

Το πρόβλημα του ταιριάσματος

N ανθρώπους, N καπέλα, ανακατεμένα.

Ο κάθε άνθρωπος διαλέγει 1 καπέλο στην τύχη.

Ζητάω την πιθανότητα να μη επιλέξει κανένας δικό του καπέλο.

Λύση:

E_i = "ο i άντρας πετυχαίνει το καπέλο του"

$$P = (E_1^c \cap E_2^c \cap \ldots \cap E_N^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) -$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i\right)$$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

\# πιθανοτήτων $= \binom{N}{n}$

άρα $\displaystyle\sum_{i_1 < \ldots < i_n} P(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \binom{N}{n} \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{n!}$

Άρα $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{N+1}}{N!}$

Επομένως, $\displaystyle P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!}$

16/10/19 - 6ο μάθημα

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i^c\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{N \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Άνοιγμα πόρτας με κλειδί

Μια κλειδαριά ανοίγει με ένα συγκεκριμένο κλειδί από ν που κρατάω στο χέρι.

Πειραμα τυχης: Δοκιμη 1·1 κλειδιά χωρις επαναδοκιμή $k \le n$

α) Ποια η πιθανοτητα να "ανοιξω την πορτα μεχρι την κ-δοκιμη" → ενδεχόμενο A

β) Πιθανοτητα "να απαιτηθουν κ-δοκιμες" → ενδεχομενο B.

Λυση:

α) Ω κ-αδες απο $\{1, \dots, n\}$

$$P(A) = \frac{k\,(n-1)_{k-1}}{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)} = \frac{k\,(n-1)_{k-1}}{(n)_k} = \frac{k}{n}$$

β) $$P(B) = \frac{(n-1)(n-2)\dots 1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{1}{n}.$$

Παραδειγμα:

	E: Εργαζομενοι	E^c: Μη εργαζομενοι	
A: άντρες	350	50	400
Γ: γυναικες	150	150	300
	500	200	700 → S

$$P(\text{αντρες}/\text{εργαζομενοι}) = \frac{350}{500} = \frac{|A \cap E|}{|E|} = \frac{\frac{|A \cap E|}{|S|}}{\frac{|E|}{|S|}} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

$= P(A/E)$.

Ορισμος: Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και εστω $A \in \mathcal{A}$, A ενδεχομενο, $P(A) > 0$. Η συνολοσυναρτηση $P(\cdot \mid A)$, που οριζεται απο τη σχεση

$$P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{A},$$

ονομάζεται δεσμευμενη πιθανοτητα του B δοθεντος του A (δεδομενου του A).

- $P'(B) = P(B/A)$ ικανοποιει τα αξιωματα Kolmogorov

a_1) $P'(B) \geq 0$, $B \in \mathcal{A}$.

a_2) $P'(\Omega) = 1$.

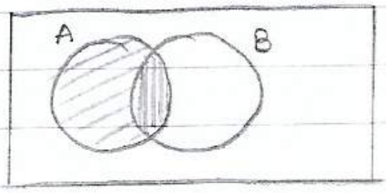
αποδειξη: $P'(\Omega) = P(\Omega / A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$

a_3) $P'\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \underset{\text{μεταξυ τους}}{\overset{B_i \text{ ξενα}}{=}} \sum_{i \in I} P'(B_i)$

Ιδιότητες:

1) $P(B^c/A) = \dfrac{P(B^c \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B\cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$

άρα, $P(B^c|A) = 1 - P(B|A)$



2) $P(B\cup\Gamma/A) = P(B/A) + P(\Gamma|A) - P(B\cap\Gamma/A)$.

- Εαν A,B ξενα μεταξυ τους, $P(B|A) = 0$ $(P(A)>0)$.
- Εαν $A \subseteq B$, $A\cap B = A$ τοτε $P(B\setminus A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- Εαν $B \subset A \subset \Omega$, τοτε: $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} > P(B)$.
- Εαν $B \subset A \subset \Omega$ τοτε: $P(B|A) < P(B)$.
- $\dfrac{P(A|B)}{P(B|A)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

Γενικα!! $P(A|B) \neq P(B|A)$.

Ασκηση:
Ενας ηλεκτρικός πίνακας περιεχει 25 ασφάλειες εκ των οποιων οι 4 καμμένες. Αφαιρουμε τυχαια μια ασφάλεια και στη συνέχεια μια αλλη. Να υπολογιστουν οι πιθανοτητες:

α) "και οι δυο ασφαλειες που αφαιρεθηκαν καμμένες"
β) "το πολυ μια απο τις δυο καμμενες"
γ) τουλαχιστον μια καμμενη
δ) ακριβως μια καμμενη

$\{KK, KOK, OKK, OKOK\}$ οπου K: καμμενη
OK οχι καμμένη

Λυση:

A_i = η i-ασφάλεια που αφαιρεσαι καμμενη $i = 1, 2$

α) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24}$

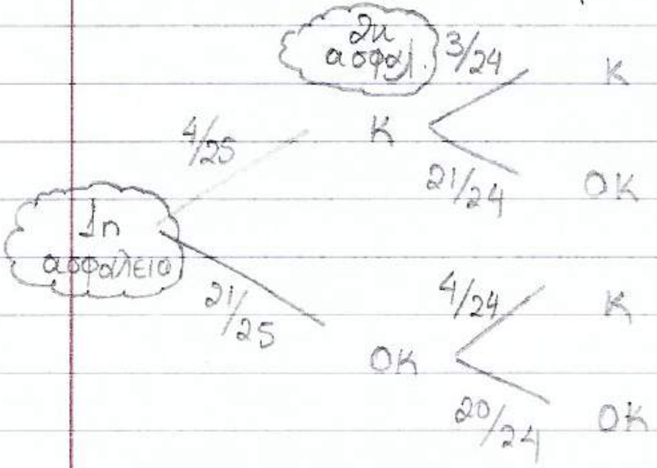
β) $P(\{KOK, OKK, OKOK\}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - \frac{4 \cdot 3}{25 \cdot 24}$

γ) $P(\text{τουλ. } 1 \text{ καμμενη}) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c)$

$P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c | A_1^c) = \frac{21}{25} \cdot \frac{20}{24}$

δ) $P\big((A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)\big) = P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c) =$

$= P(A_1^c) \cdot P(A_2 | A_1^c) + P(A_1) P(A_2^c | A_1) = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{4}{25} \cdot \frac{21}{24}$



Θα πρεπει οταν αθροισουμε ολες τις πιθανοτητες να βγει 1

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$ (απο ορισμό δεσμ.).

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας (κανονας γινομένου).
Εστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχομενα τ.ω. $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, τοτε:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

αποδειξη:

$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) =$

$= P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \ldots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$.

Άσκηση:

Σε μια ταξη με 4 μεταπτυχιακους και 12 προπτυχιακούς φοιτητες κανω χωρισμό σε 4 ομαδες: _ _ _ _ | _ _ _ _ | _ _ _ _ | _ _ _ _

P(καθε ομαδα να περιλαμβανει ενα μεταπτυχιακό φοιτητη) $= P(A) =$;

Λυση:

A_1 = " οι μεταπτυχιακοι φοιτητες 1 κ 2 σε διαφορετικές ομαδες "

A_2 = " -"- -"- -"- 1 κ 2 κ 3 -"- -"- "

A_3 = " -"- -"- -"- 1 κ 2 κ 3 κ 4 -"- -"-

αρα, $P(A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2)$

$$= \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13}$$

18/10/19 - 7ο μαθημα

Θεωρηματα της δεσμευσης

1. Πολλαπλασιαστικός Νομος.

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_v \in \Omega$ με $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, v-1$ και $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{v-1}) \neq 0$ τοτε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_v) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_v | A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{v-1})$$

αποδειξη:

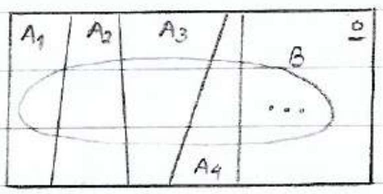
$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_v | A_1 \cap \ldots \cap A_{v-1}) =$$

$$= \cancel{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2)}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_v)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{v-1})} = P(A_1 \cap \ldots \cap A_v).$$

2. Θεωρημα Ολικης Πιθανοτητας

Εστω $B, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Omega$ με $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ και $P(A_i) \neq 0$ $i = 1, 2, \ldots$ τοτε:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$



αποδειξη:

$$B = B\Omega = B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i$$

οπου BA_i ειναι ξενα ανα δυο.

Οποτε $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(BA_i) \overset{\text{πολ/κός}}{\underset{\text{νομος}}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B | A_i)$

Ασκηση:

Σε μια ταξη με 4 μεταπτυχιακους και 12 προπτυχιακους φοιτητες κανω χωρισμό σε 4 ομαδες:

P(καθε ομαδα να περιλαμβανει ενα μεταπτυχιακό φοιτητη) $= P(A) =$;

Λυση:

$A_1 =$ " οι μεταπτυχιακοι φοιτητες 1 κ 2 σε διαφορετικές ομαδες"

$A_2 =$ " -"- -"- -"- 1 κ 2 κ 3 -"- -"- "

$A_3 =$ " -"- -"- -"- 1 κ 2 κ 3 κ 4 -"- -"-

αρα, $P(A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2)$

$$= \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13}$$

18/10/19 - 7ο μαθημα

Θεωρήματα της δεσμευσης

1. Πολλαπλασιαστικός Νομος.

Αν $A_1, A_2, \dots, A_\nu \in \Omega$ με $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, \nu-1$ και $P(A_1 \cap \dots \cap A_{\nu-1}) \neq 0$ τοτε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\nu) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_\nu | A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{\nu-1})$$

αποδειξη:

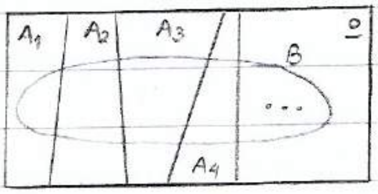
$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_\nu | A_1 \cap \dots \cap A_{\nu-1}) =$$

$$= P(\cancel{A_1}) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(\cancel{A_1})} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(\cancel{A_1 \cap A_2})} \cdots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_\nu)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{\nu-1})} = P(A_1 \cap \dots \cap A_\nu).$$

2. Θεωρημα Ολικης Πιθανοτητας

Εστω $B, A_1, A_2, A_3, \dots \in \Omega$ με $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ και $P(A_i) \neq 0$ $i = 1, 2, \dots$ τοτε:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$



αποδειξη:

$$B = B\Omega = B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i$$

οπου BA_i ειναι ξενα ανα δυο.

Οποτε $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(BA_i) \overset{\text{πολ/κός νομος}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B | A_i)$

3) Νομος του Bayes

Εστω $A, B \in \Omega$ με $P(A), P(B) \neq 0$ τοτε $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$

αποδειξη: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$.

Χρηση Θεωρηματων δεσμευσης.

Πειραμα με σταδια

- $P(1o\ σταδιο)$: υπολογιζεται ευκολα
- $P(2o\ σταδιο \mid 1o\ σταδιο)$: — // — — // —
- $P(1o\ σταδιο, 2o\ σταδιο, \dots, νo\ σταδιο)$: (Χρησιμοποιω πολ/στικό νομο.)

$= P(1o)\, P(2o \mid 1o)\, P(3o \mid 1o\, 2o) \dots P(ν\text{-}o \mid 1o\, 2o \dots (ν-1)o)$.

- $P(2o\ σταδιο) = \sum_{\substack{εναλλακτικης \\ 1ου\ σταδιου}} P(2o\ σταδιο \mid \substack{εναλλακτικη \\ 1ου\ σταδιου})\, P(\substack{εναλλακτικη \\ 1o\ σταδιο})$

(Χρησιμοποιώ Θεωρημα Ολικής Πιθανοτητας)

- $P(1o\ σταδιο \mid 2o\ σταδιο) = \frac{P(1o\ σταδιο)}{P(2o\ σταδιο)} P(2o\ σταδιο \mid 1o\ σταδιο)$

εκ των υστερων πιθανοτητα

(Χρησιμοποιω Νομο Bayes.)

Παραδειγμα 1: Ασφαλιστικη εταιρεια

$P(επιρρεπης\ σε\ ατυχημα) = 0,3 \Rightarrow P(A) = 0,3$

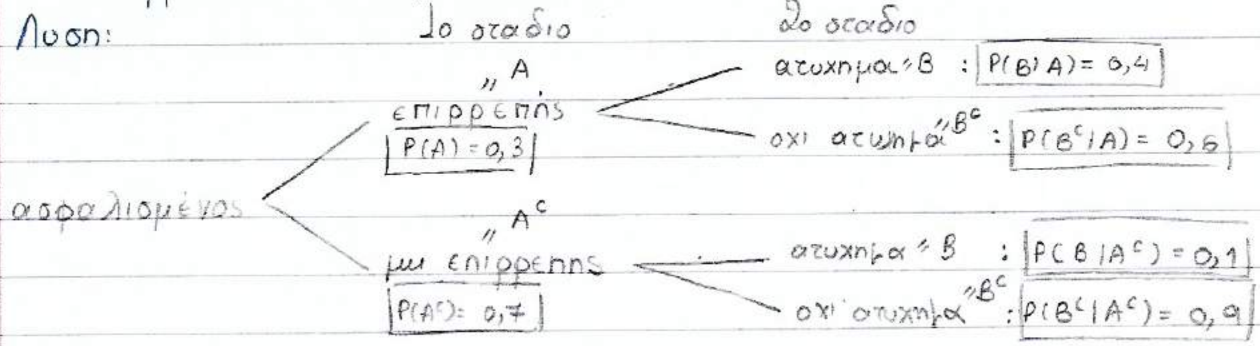
$P(ατυχημα \mid επιρρεπης) = 0,4 \Rightarrow P(B|A) = 0,4$

$P(ατυχημα \mid μη\ επιρρεπης) = 0,1 \Rightarrow P(B|A^c) = 0,1$

$P(ατυχημα) = ;\ (= P(B))$

$P(επιρρεπης \mid ατυχημα) = ;$

Λυση:



πιθανοτητα να συμβει ατυχημα

Αρα $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) =$ (Θεωρημα Ολικής Πιθανοτητας)

$= 0,4 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,19$

$P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} P(B|A) = \dfrac{0,3}{0,19} 0,4 = 0,65$

(A : επιρρεπής A^c : οχι επιρρεπης
B : ατυχημα B^c : οχι ατυχημα.)

Παραδειγμα 2 : Αιματολογικό τεστ για σπανιο ασθενεια.

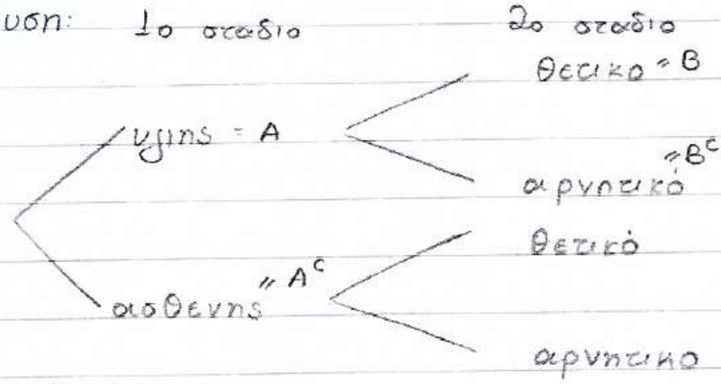
P(ασθενης) $= 1/1000 \Rightarrow P(A^c) = 1/1000$

P(θετικό | ασθενης) $= 99/100 \Rightarrow P(B|A^c) = 99/100$

P(θετικό | υγιης) $= 2/100 \Rightarrow P(B|A) = 2/100.$

P(ασθενης | θετικό) $=$; $(= P(A^c|B))$

Λυση:



υγιης: $P(A) = 1 - P(A^c) = \dfrac{999}{1000}$

ασθενης: $P(A^c) = \dfrac{1}{1000}$

$P(B|A) = \dfrac{2}{100}$, $P(B|A^c) = \dfrac{99}{100}$

$P(B^c|A) = \dfrac{98}{100}$, $P(B^c|A^c) = \dfrac{1}{100}$

$P(A^c|B) = \dfrac{P(A^c)}{P(B)} P(B|A^c)$

Πρεπει πρωτα να υπολογισω το $P(B)$

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \dfrac{2}{100} \dfrac{999}{1000} + \dfrac{99}{100} \dfrac{1}{1000} = \dfrac{2097}{100.000}$

αρα, $P(A^c|B) = \dfrac{P(A^c)}{P(B)} P(B|A^c) = \dfrac{\frac{1}{1000}}{\frac{2097}{100.000}} \cdot \dfrac{99}{100} = 0,04$

Παραδειγμα 3ο: (Λοττο) - Με πολλαπλασιαστικο νομο.

Επιλεγω 6 αριθμους απο 49

Εστω $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = A$

πιθανοτητα ολοι οι αριθμοι που εχεις επιλεξει να ειναι οι τυχεροι

$\leftarrow P(\text{εξαρι}) = P(1\eta \text{ εξαγωγη} \in A, 2\eta \text{ εξαγωγη} \in A, \ldots, 6\eta \text{ εξαγ.} \in A) =$

$= P(1\eta \text{ εξαγ.} \in A) \cdot P(2\eta \text{ εξ} \in A \mid 1\eta \text{ εξ} \in A) \cdot P(3\eta \text{ εξ} \in A \mid 1\eta, 2\eta \text{ εξ.} \in A) \cdot$

$\cdot \ldots \cdot P(6\eta \text{ εξ} \in A \mid 1\eta, 2\eta, 3\eta, 4\eta, 5\eta \text{ εξ.} \in A) =$

$$= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Παραδειγμα 3ο (Λοττο) - Με πολλαπλασιαστικό νομο.

Επιλεγω 6 αριθμους απο 49

Εστω $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = A$

πιθανοτητα όλοι οι αριθμοι που εχεις επιλεξει να ειναι οι τυχεροί

$P(\text{εξαρι}) = P(1\text{η εξαγωγη} \in A, 2\text{η εξαγωγη} \in A, \dots, 6\text{η εξαγ} \in A) =$

$= P(1\text{η εξαγ} \in A) \cdot P(2\text{η εξ} \in A \mid 1\text{η εξ} \in A) \cdot P(3\text{η εξ} \in A \mid 1\text{η}, 2\text{η εξ} \in A) \cdot$

$\dots \cdot P(6\text{η εξ} \in A \mid 1\text{η}, 2\text{η}, 3\text{η}, 4\text{η}, 5\text{η εξ} \in A) =$

$$= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

21/10/19 - 8ο μαθημα

Παραδειγμα (Τεστ πολλαπλης επιλογης)

Μια ερωτηση με m απαντησεις (1 σωστη, $m-1$ λαθος)

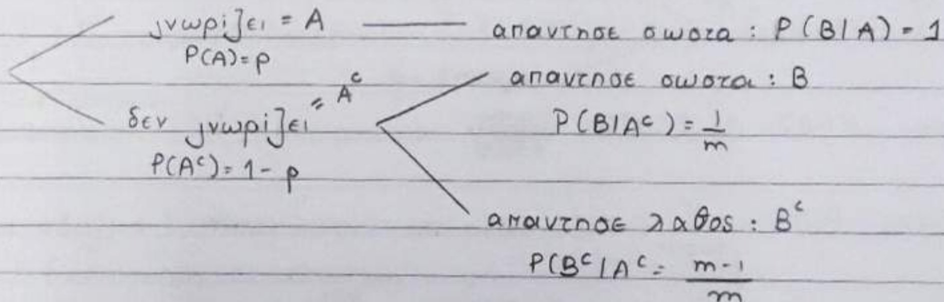
Ποσοστο φοιτητών που γνωριζουν την απαντηση : p

Οποιος δε γνωριζει επιλεγει μια απαντηση τυχαια

$p_1 = P(\text{γνωριζει, απαντησε σωστα}) = \alpha$

$p_2 = P(\text{απανταει σωστα}) = \beta$

$p_3 = P(\text{γνωριζει} \mid \text{απαντασε σωστα}) = \gamma$



Αρα $\alpha = P(A \cap B) \overset{\Pi N}{=} P(A)\, P(B \mid A) = p \cdot 1 = p$

$\beta = P(B) \overset{\Theta O\Pi}{=} P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^c)\, P(A^c) = 1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p) =$

$= \frac{1-p+mp}{m}$

$\gamma = P(A \mid B) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A)}{P(B)} P(B \mid A) = \frac{1}{\frac{1-p+mp}{m}} \cdot 1 = \frac{mp}{1-p+mp}$

Παραδειγμα: (Οικογενεια με 2 παιδια)

$p_1 = P(\text{το αλλο Κ} \mid \text{το ενα Κ})$

$p_2 = P(\text{το αλλο Κ} \mid \text{το πρωτοτοκο Κ})$

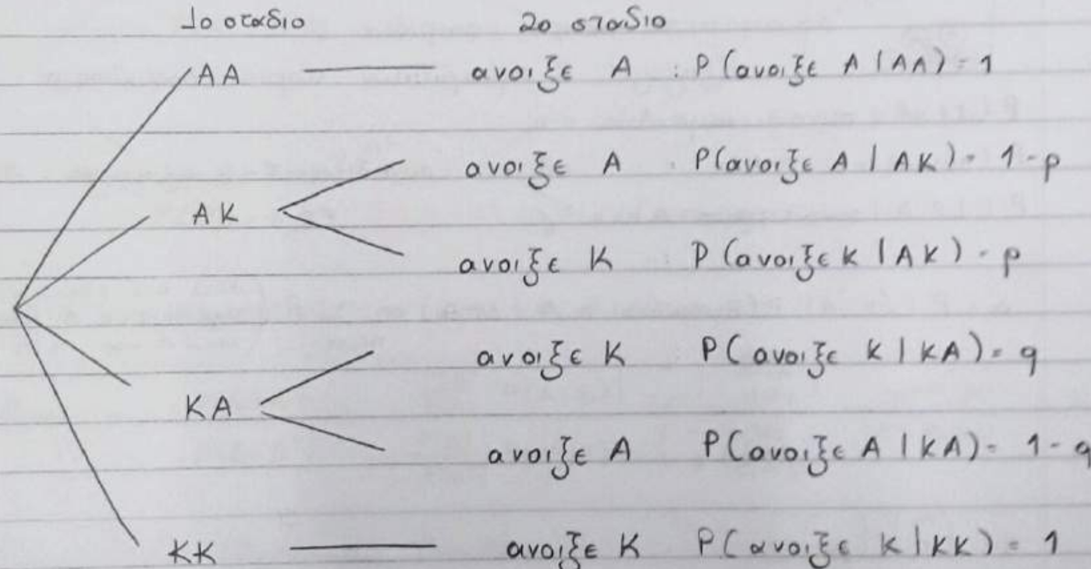
Παμε στο σπιτι και ανοιγει ενα παιδι

$p_3 = P(\text{το αλλο Κ} \mid \text{ανοιγει Κ})$

$\Omega = \{ΑΑ, ΚΑ, ΑΚ, ΚΚ\}$ ισοπιθανα

$$p_1 = \frac{P(\text{το αλλο Κ, το ενα Κ})}{P(\text{το ενα Κ})} = \frac{P(\{ΚΚ\})}{P(\{ΑΚ, ΚΑ, ΚΚ\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{P(\text{το πρωτοτοκο Κ και το αλλο Κ})}{P(\text{το πρωτοτοκο Κ})} = \frac{P(\{ΚΚ\})}{P(\{ΚΑ, ΚΚ\})} = \frac{1}{2} \left(= P(\text{2ο παιδι Κ})\right)$$



αρα, $p_3 = P(ΚΚ \mid \text{ανοιξε Κ}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(ΚΚ)}{P(\text{ανοιξε Κ})} P(\text{ανοιξε Κ} \mid ΚΚ)$

$$P(\text{ανοιξε Κ}) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(\text{ανοιξε Κ} \mid ΑΑ)\,P(ΑΑ) + P(\text{αν Κ} \mid ΑΚ)\,P(ΑΚ) + P(\text{αν Κ} \mid ΚΑ)\,P(ΚΑ) + P(\text{αν Κ} \mid ΚΚ)\,P(ΚΚ) =$$

$$= 0 + p\frac{1}{4} + q\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = \frac{1+p+q}{4}$$

αρα $p_3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1+p+q}{4}} \cdot 1 = \frac{1}{1+p+q}$

→ Αν είναι ισοπίθανο να ανοίξει το Α ή το Κ

δηλαδή $p = q = \frac{1}{2}$ τότε $p_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

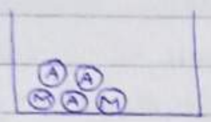
→ Αν το πρωτότοκο ανοίγει τότε $p = 0,\ q = 1$ άρα $p_3 = \frac{1}{1+0+1} = \frac{1}{2}$

→ Αν το αγόρι ανοίγει με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ όταν υπάρχει Α ή Κ

δηλαδή $p = \frac{1}{3},\ q = \frac{1}{3}$ τότε

$$p_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Παράδειγμα (Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη)



m άσπρα σφαιρίδια

n μαύρα σφαιρίδια

Εξαγωγή k σφαιριδίων χωρίς επανάληψη.

$P(1ο\ A,\ \text{συνολικά } r\ A) = \alpha$

$P(\text{συνολικά } r\ A) = \beta$ (συνολικά $r < k$ εξαγωγές: A)

$P(1ο\ A \mid \text{συνολικά } r\ A) = \gamma$

$$\alpha = P(1ο\ A)\, P(\text{συνολικά } r\ A \mid 1ο\ A) = \frac{m}{m+n} P\left(\begin{array}{l}\text{στις } k-1 \text{ εξαγωγές να} \\ \text{βγάλω } r-1\ A \text{ όταν έχω} \\ m-1\ A \text{ και } n\ M\end{array}\right)$$

$$= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\binom{m-1}{r-1}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n-1}{k-1}}$$

$$\beta = \frac{\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$$

$$\gamma \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(1ο\ A)\quad P(\text{συνολικά } r\ A \mid 1ο\ A)}{P(\text{συνολικά } r\ A)} = \frac{\frac{m}{m+n}}{\frac{\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}} \cdot \frac{\binom{m-1}{r-1}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n-1}{k-1}} =$$

Χρήσιμος Τύπος $\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!\,(v-k)!} = \frac{v\,(v-1)!}{k\,(k-1)!\,((v-1)-(k-1))!} = \frac{v}{k}\binom{v-1}{k-1}$

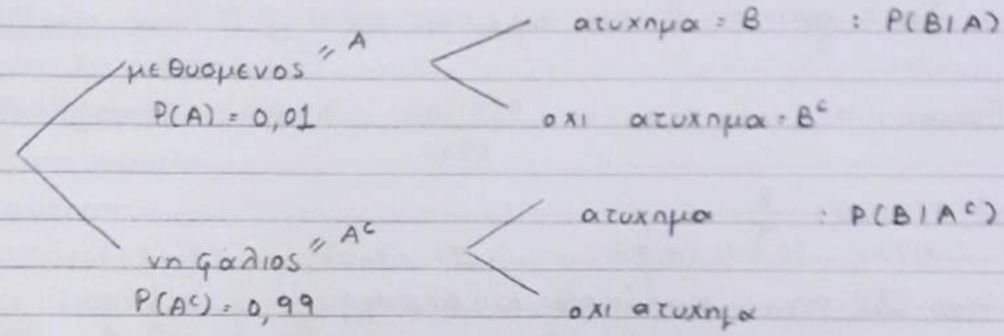
$$= \frac{\frac{m}{m+n}\binom{m-1}{r-1}\frac{m+n}{k}\binom{m+n-1}{k-1}}{\binom{m}{r}\binom{m-1}{r-1}\binom{m+n-1}{k-1}} = \frac{r}{k}$$

Παραδειγμα (Αντιπαραθεση)

* A: Μονο το 10% των ατυχηματων προκαλειται απο μεθυσμενους. Αρα οδηγηση υπο μεθη μπορει να επιτραπει

B: Μονο το 1% των οδηγων ειναι μεθυσμενοι

$$\alpha = \frac{P(\text{ατυχηματος} \mid \text{μεθυσμενος})}{P(\text{ατυχηματος} \mid \text{νηφαλιος})} \; ;$$



(*) : $P(A|B) = 0{,}10$ ⇝ αρα $P(A^c|B) = 0{,}90$

Αρα $\alpha = \dfrac{P(B|A)}{P(B|A^c)} = \dfrac{\frac{P(B)}{P(A)}P(A|B)}{\frac{P(B)}{P(A^c)}P(A^c|B)} = \dfrac{\frac{0{,}10}{0{,}01}}{\frac{0{,}90}{0{,}99}} = \dfrac{99{,}10}{1{,}90} = 11.$

Παραδειγμα (Προβλημα Γενεθλιων)

Εστω οτι καθε ετος εχει 365 μερες

ν ατομα

P(γενεθλια σε διαφορετικές μερες) = P(2ος διαφ 1ο, 3ος διαφ 1ο, 2ο, ... νος διαφ 1ο, 2ο, ..., (ν-1)ο)

$\overset{\Pi N}{=}$ P(2ος διαφ 1ο) · P(3ος διαφ 1ο & 2ο | 2ος διαφ 1ο)

· P(4ος διαφ 1ο, 2ο, 3ο | 1ος, 2ος, 3ος διαφ) ...

· P(νος διαφ 1ο, 2ο, ... (ν-1)ο | 1ος, 2ος, 3ος, ... (ν-1)ος διαφ) =

$$= \frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\,\frac{362}{365}\cdots\frac{365-(\nu-1)}{365} = \frac{(364)_{\nu-1}}{(365)^{\nu-1}}$$

23/10/19 · 9ο μαθημα

Παραδειγμα Εχουμε καλπη με 5 μαυρα (Μ) και 3 ασπρα (Α) σφαιριδια. Εξαγουμε 2 σφαιριδια διαδοχικα. Θεωρουμε τα εξης ενδεχομενα: A: Στην 1η εξαγωγη τραβαμε Α

B: Στην 2η εξαγωγη τραβαμε Α

Να βρεθουν οι $P(B|A)$ και $P(B)$ αν

α) εχουμε επανατοποθετηση σφαιριδιων μετα την 1η εξαγωγη

β) δεν εχουμε - " - - " - - " - - " -

Λυση:

α) $P(B|A) = \frac{3}{8}$

$P(B) = \frac{3}{8}$

Η γνωση οτι το Α πραγματοποιηθηκε δεν αλλαζει την πιθανοτητα πραγματοποιησης του Β τοτε λεμε οτι τα Α κ Β ειναι ανεξαρτητα.

Επισης, $P(B|A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

β) $P(B|A) = \frac{2}{8}$

$P(B) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{2}{7}\,\frac{3}{8} + \frac{3}{7}\,\frac{5}{8} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$

Η γνωση οτι το Α πραγματοποιηθηκε αλλαζει την πιθανοτητα πραγματοποιησης του Β, τοτε λεμε τα Α κ Β ειναι εξαρτημενα

Ορισμός (ανεξαρτητα ενδεχόμενα)

- Τα Α κ Β λεγονται (στοχαστικα) ανέξάρτητα ενδεχομενα αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Δυο ενδεχομενα που δεν ειναι ανεξαρτητα λεγονται εξαρτημενα

- Τα ενδεχομενο $A_1, \dots, A_n$ ειναι ανεξαρτητα αν για καθε υποσυνολο $A_{1'}, A_{2'}, \dots, A_{r'}$ αυτων ισχυει:

$$P(A_{1'} \cap A_{2'} \cap \dots \cap A_{r'}) = P(A_{1'}) \cdot P(A_{2'}) \dots P(A_{r'})$$

π.χ.

$$A, B, \Gamma \text{ ανεξαρτητα} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma) \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma) \\ P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma) \end{cases}$$

- Ενα απειρο συνολο ενδεχομενων λεγονται ανεξαρτητα τοτε καθε πεπερασμενο υποσυνολο ειναι ανεξαρτητο.

Ορισμος (Ανεξαρτησιας ανα 2)
Το $\{A_i, i\in I\}$ ειναι ανεξαρτητα ανα 2 αν $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ $\forall i,j \in I$ με $i \neq j$
Αρα ανεξαρτητα $\overset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow}$ ανεξαρτητα ανα 2

Παραδειγμα: Ριχνουμε ενα ζαρι 2 φορες. Θεωρουμε τα ενδεχομενα: A = Στην 1η ριψη να ερθει 3.
B = Στην 2η ριψη να ερθει 4
Γ = Το αθροισμα των ριψεων να ειναι 7.
Ειναι τα A, B και Γ
(α) ανεξαρτητα ανα 2;
(β) ανεξαρτητα;
Απαντηση
$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),\dots,(2,6),(3,1),\dots,(3,6),(4,1),\dots,(4,6),(5,1),\dots,(5,6),(6,1),\dots,(6,6)\}$
α) Για να ειναι ανεξαρτητα ανα δυο πρεπει:
$P(A\cap B) = P(B)P(A)$ (1)
$P(B\cap\Gamma) = P(B)P(\Gamma)$ (2)
$P(A\cap\Gamma) = P(A)P(\Gamma)$ (3)

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,

$P(\Gamma) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(A\cap B) = P(\{3,4\}) = \frac{1}{36}$

$P(A\cap\Gamma) = P(\{3,4\}) = \frac{1}{36}$

$P(B\cap\Gamma) = P(\{3,4\}) = \frac{1}{36}$

Οι (1), (2), (3) ισχυουν αρα ειναι ανεξαρτητα ανα 2 (β) Για να ειναι τα A, B, Γ ανεξαρτητα πρεπει να ισχυουν τα (1), (2), (3) και $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$ (4)

$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(\{3, 4\}) = \frac{1}{36}$

Η (4) δεν ισχυει Αρα δεν ειναι ανεξαρτητοι

Παρατηρησεις!!

1) Αν A, B ανεξαρτητα $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \xrightarrow{P(B) \neq 0} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$.

Ομοιως αν $P(A) \neq 0$: $P(B|A) = P(B)$

2) Ανεξαρτητα ≠ Ασυμβιβαστα

Ανεξαρτητα: Η γνωση οτι το ενα πραγματοποιηθηκε δεν αλλαζει αν η πιθανοτητα να συμβει το αλλο

Ασυμβιβαστα: Η γνωση οτι το ενα πραγματοποιηθηκε κανει αδυνατη την πραγματοποιηση του αλλου

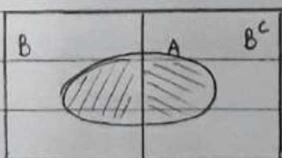
$P(A \cap B) = 0$, $A \cap B = \varnothing$.

3) Αν A, B ανεξαρτητα και ασυμβιβαστα, τοτε

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \underset{\text{ασυμβ.}}{\overset{A,B}{\Longrightarrow}} 0 = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$

4) Αν A ανεξαρτητο του B, τοτε ειναι και ανεξαρτητο του B^c

Πραγματι, $A = A \cap (\underbrace{B \cup B^c}_{\Omega}) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$



Οποτε, $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$\underset{\text{ξενα}}{\overset{A\cap B,\ A \cap B^c}{=\!=}} P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \xRightarrow{A,B \text{ ανεξ}}$

$\Rightarrow P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A)\,[1 - P(B)] = P(A \cap B^c)$

$\Rightarrow P(A) \cdot P(B^c) = P(A \cap B^c)$

5) Αν A, B κ̦ Γ ανεξαρτητα τοτε το A ειναι ανεξαρτητο απο καθε ενδεχομενο που φτιαχνουν τα B και Γ

Αν Α,Β,Γ ανεξαρτητα $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ ανεξαρτητο του } B \cup \Gamma \\ A \text{ -"- του } B \cap \Gamma \\ A \text{ -"- του } B \cap \Gamma^c \end{cases}$

6) Τα Β και Γ λεγονται ανεξαρτητα δεδομενου του Α αν

$$P(B \cap \Gamma \mid A) = P(B \mid A)\, P(\Gamma \mid A)$$

Παραδειγμα: Εχουμε μια τραπουλα: Α, 2, 3, ..., 10, J, Q, K ← 13

5 ♣, ♦, ♥, ♠ ← 4 χρωματα

Πειραμα 1 Τραβαω ενα φυλλο

Πειραμα 2 Αφαιρω το Α♦ και τραβαω ενα φυλλο.

Εστω τα εξης ενδεχομενα Α = να τραβηξω 9

Β = να τραβηξω ♣

Ειναι τα ενδεχομενα Α και Β ανεξαρτητα α) στο πειραμα 1;

β) στο πειραμα 2;

Λυση

(α) πειραμα 1: $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{12}$

$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ ισχυει.

Τα Α,Β ειναι ανεξαρτητα

(β) πειραμα 2: $P(A) = \frac{4}{51}$

$P(B) = \frac{13}{51}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{51}$

$P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B) \Rightarrow$ δεν ειναι ανεξαρτητο

Ορισμός (Λογος Πιθανοφανειας)

- Λογος πιθανοτητας του $A = \frac{P(A)}{P(A^c)}$

- Λογος πιθανοφανειας του A δεδομενου του E $= \frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$

- Σχεση συνδεσης του $\frac{P(A)}{P(A^c)}$ κ $\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$:

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} \overset{Bayes}{=} \frac{\frac{P(A)}{P(E)} P(E|A)}{\frac{P(A^c)}{P(E)} P(E|A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$$

Παραδειγμα: Ενα συρταρι περιεχει 2 νομισματα ενα καλπικο και ενα κανονικο.
Το κανονικο φερνει Κ ή Γ με πιθανοτητα $1/2$
Το καλπικο φερνει Κ με πιθανοτητα $3/4$ και Γ με πιθανοτητα $1/4$
Πειραμα: Επιλεγουμε νομισμα και το ριχνω 3 φορες.
Θεωρω τα ενδεχομενα: A = επιλογη καλπικου
B = ηρθε Κ-Κ-Κ

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{27}{8}$$

Ορισμός (Λόγος Πιθανοφάνειας)

- Λόγος πιθανότητας του $A = \frac{P(A)}{P(A^c)}$

- Λόγος πιθανοφάνειας του A δεδομένου του E $= \frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$.

- Σχέση σύνδεσης του $\frac{P(A)}{P(A^c)}$ κ $\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$:

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} \underset{=}{\overset{Bayes}{=}} \frac{\frac{P(A)}{P(E)} \cdot P(E|A)}{\frac{P(A^c)}{P(E)} \cdot P(E|A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$$

Παράδειγμα: Ένα συρτάρι περιέχει 2 νομίσματα: ένα κάλπικο και ένα κανονικό.
Το κανονικό φέρνει Κ ή Γ με πιθανότητα $1/2$
Το κάλπικο φέρνει Κ με πιθανότητα $3/4$ και Γ με πιθανότητα $1/4$
Πείραμα: Επιλέγουμε νόμισμα και το ρίχνω 3 φορές.
Θεωρώ τα ενδεχόμενα: A = επιλογή κάλπικου
B = ήρθε Κ-Κ-Κ.

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{27}{8}$$

30/10/19 - 10ο μάθημα

Τυχαίες Μεταβλητές

Παράδειγμα 1: Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου νομίσματος 3 φορές.

$\Omega = \{$ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ$\}$
3 2 2 1 2 1 1 0

X = # εμφανίσεων της ένδειξης Κ

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$X^{-1}(2) = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\} \in \mathcal{A}$

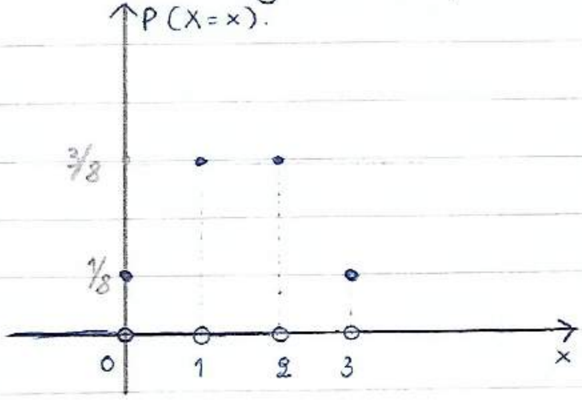
$X^{-1}([0{,}5\ ,\ 2{,}5]) = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\} \in \mathcal{A}$

Οι παραπανω αντιστροφες εικονες ειναι ενδεχομενα.
Ετσι, εχουμε τη δυνατοτητα να εκχωρησουμε πιθανοτητες στα αντιστοιχα υποσυνολα του $\mathbb{R}$

$P(X=2) = P(X(\omega)=2) = P(\{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}) = \frac{3}{8}$

$P(X\in[0{,}5,\ 2{,}5]) = P(X^{-1}([0{,}5,\ 2{,}5])) = \frac{6}{8}$

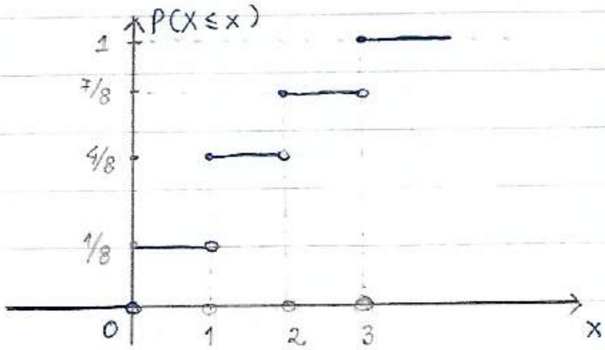
Η συναρτηση X λεγεται τυχαια μεταβλητη.
Η $P(X=x)$ λεγεται συναρτηση πιθανοτητας.
Η $P(X\le x)$ λεγεται (αθροιστικη) συναρτηση κατανομης



$P(X=0) = P(\{ΓΓΓ\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$



$P(X\le 0) = P(X=0) = 1/8$

Για $x\in(0,1)$: $P(X<x) = P(X=0) = 1/8$

$P(X\le 1) = P(X=0) + P(X=1)$
$= 4/8$

Ορισμός (Τυχαια Μεταβλητη)
Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενας χωρος πιθανοτητας
Μια συναρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ με την ιδιοτητα $X^{-1}(I) = \{\omega\in\Omega : X(\omega)\in I\}$
s.t. $X^{-1}(I)\in\mathcal{A}$ $\forall I\subseteq\mathbb{R}$, λεγεται τυχαια μεταβλητη.

Παρατηρήσεις!!

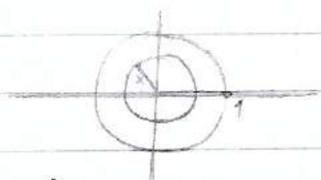
1) Διαισθητικά η τυχαια μεταβλητη ειναι ενα αριθμητικό χαρακτηριστικό του πειραματος τυχης.

2) Η τυχαια μεταβλητή ειναι συναρτηση οχι μεταβλητη.

Παραδειγμα 2: Πειραμα τυχης Επιλογή σημειου του μοναδιαίου δισκου ομοιομορφο $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

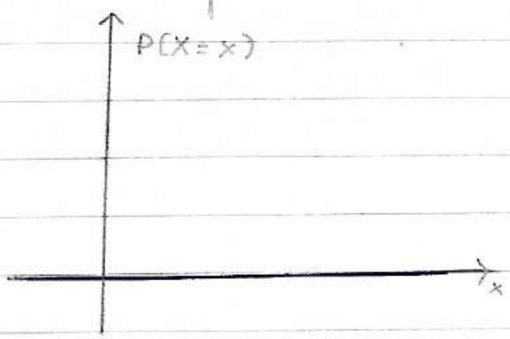
X : αποσταση σημειου απο κεντρο.

- $P(X=x) = ;\quad x \in \mathbb{R}$
- $P(X \leq x) = ;\quad x \in \mathbb{R}$.

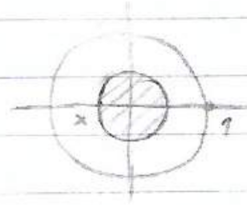


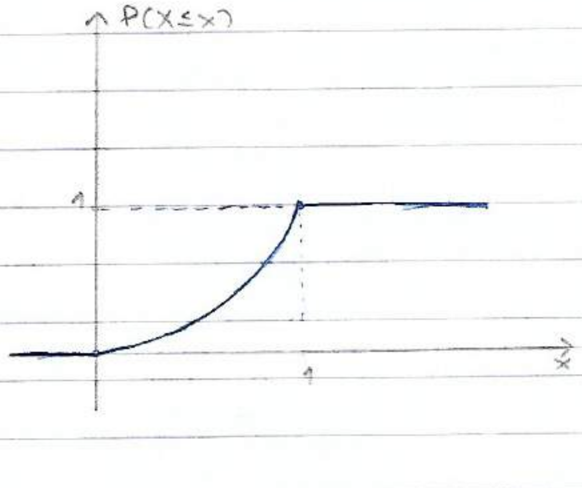
Λυση:

$$P(X=x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x>1 \end{cases}$$



$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{\pi x^2}{\pi 1^2} = x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x>1 \end{cases}$$





Παραδειγμα 3: Πειραμα τυχης. Ριψη δικαιου νομισματος

Αν K → κερδος 0

Αν Γ → επιλεγουμε ομοιομορφα σημειο του μοναδιαιου δισκου

→ κερδος: αποσταση σημειου απο κεντρο.

X : κερδος

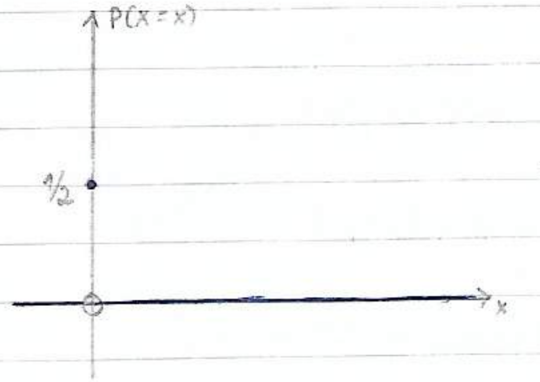
- $P(X=x)=;\quad , x\in\mathbb{R}$
- $P(X\le x)=;\quad , x\in\mathbb{R}$

- Για $x<0$, $P(X=x)=0$

Για $x>1$, $P(X=x)=0$

Εχουμε $P(X=0) \overset{\Theta O\Pi}{=} \underbrace{P(X=0\mid K)}_{1}\underbrace{P(K)}_{1/2}+\underbrace{P(X=0\mid \Gamma)}_{0}\underbrace{P(\Gamma)}_{1/2} = \frac{1}{2}$

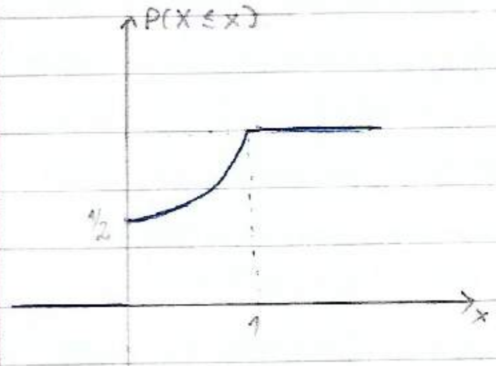
Για $x\in(0,1]$: $P(X=x) \overset{\Theta O\Pi}{=} \underbrace{P(X=x\mid K)}_{0}\underbrace{P(K)}_{1/2}+\underbrace{P(X=x\mid \Gamma)}_{0}\underbrace{P(\Gamma)}_{1/2} = 0$



- Για $x<0$ $P(X\le x)=0$

Για $x>1$, $P(X\le x)=1$

Για $x\in[0,1]$: $P(X\le x) = \underbrace{P(X\le x\mid K)}_{1}\underbrace{P(K)}_{1/2}+\underbrace{P(X\le x\mid \Gamma)}_{x^2}\underbrace{P(\Gamma)}_{1/2} = \frac{1}{2}(1+x^2)$



Ορισμός (Συναρτηση Κατανομης)

Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενας χωρος πιθανοτητας και μια τυχαια μεταβλητη X ορισμενη στο Ω. Η συναρτηση $F_X(x)$ που οριζεται ως

$$F_X(x) = P(X=x) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\le x\}),\quad x\in\mathbb{R}$$

ονομάζεται (αθροιστικη) συναρτηση κατανομης.

Ιδιοτητες:

1) $F_X(x)$ ειναι αυξουσα

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

4) Η $F_X(x)$ ειναι δεξια συνεχης. Δηλαδη, $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

5) Υπαρχει το αριστερο οριο της $F_X(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0^-) = P(X < x)$.

6) $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

7) $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-)$

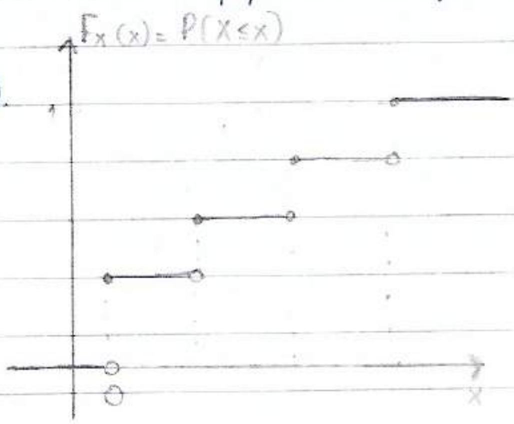
8) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F_X(b^-) - F_X(a)$

9) $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.

10) $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

Τυπικες Μορφες Συναρτησεων Κατανομης

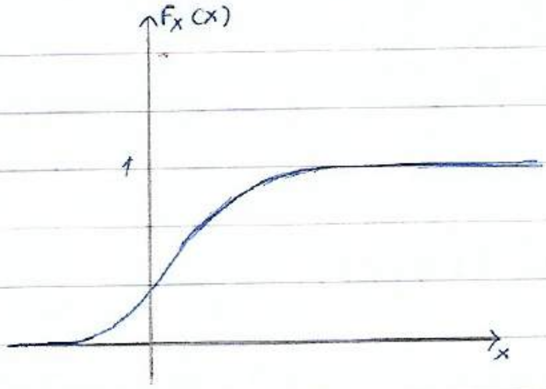
1).



$F_X(x)$ κλιμακωτη (αλματα και σταθερη)

X διακριτη (παιρνει το πολυ αριθμησιμο στο πληθος τιμες με θετικη πιθανοτητα).

2).

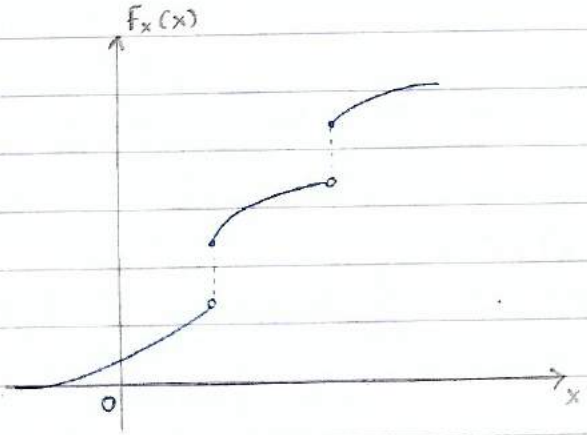


$F_X(x)$ συνεχής

X συνεχής

(X ειναι απολυτα συνεχης αν ειναι παραγωγισιμη παντου εκτος απο πεπερασμενα στο πληθος σημεια)

3)



$F_X(x)$ εχει αλματα κ δεν ειναι συνεχης ενδιαμεσα

X μεικτης

06/11/19 - 11ο μαθημα

Διακριτες Τυχαιες Μεταβλητες

Ορισμος

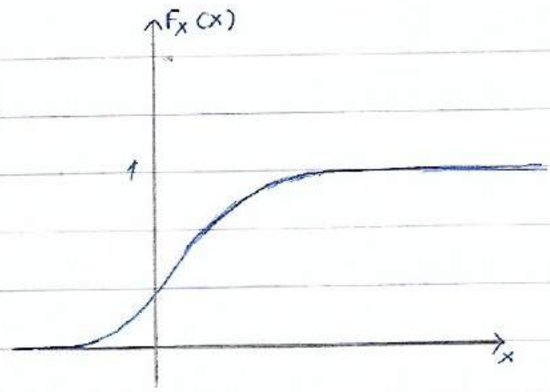
Μια τυχαια μεταβλητη X ονομαζεται διακριτη αν μπορει να παρει με πιθανοτητα 1 ενα πεπερασμενο ή αριθμησιμα απειρο συνολο τιμων. Δηλαδη αν υπαρχουν $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ τετοια ωστε $P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}) = 1$

Ορισμος (Συναρτηση (Μαζας) Πιθανοτητας)

Εστω μια διακριτη τυχαια μεταβλητη X που παιρνει τιμες στο $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Ονομαζουμε συναρτηση (μαζας) πιθανοτητας της X τη συναρτηση: $f_X(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Σχεση Συναρτησης Πιθανοτητας με τη συναρτηση κατανομης μιας διακριτης τ.μ. X

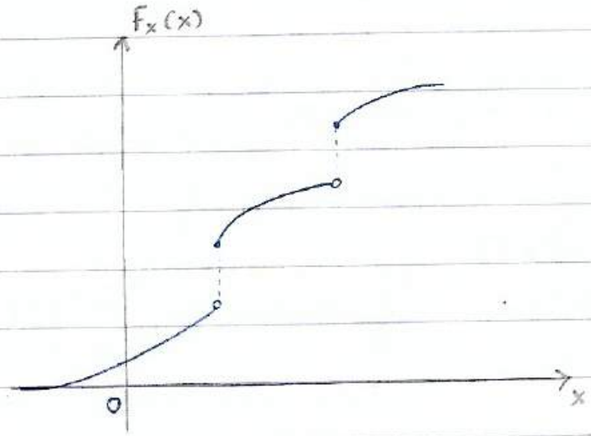
Εστω μια διακριτη τ.μ. X με τιμες στο $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, $f_X(x_k)$ η συναρτηση πιθανοτητας της X και $F_X(x)$ η συναρτηση κατανομης

2) 

$F_X(x)$ συνεχής

X συνεχής

(X είναι απόλυτα συνεχής αν είναι παραγωγίσιμη παντού εκτός από πεπερασμένα στο πλήθος σημεία)

3) 

$F_X(x)$ έχει άλματα και δεν είναι συνεχής ενδιάμεσα

X μεικτής

06/11/19 - 11ο μάθημα

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται διακριτή αν μπορεί να πάρει με πιθανότητα 1 ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο τιμών. Δηλαδή αν υπάρχουν $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ τέτοια ώστε $P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \dots\}) = 1$

Ορισμός (Συνάρτηση (Μάζας) Πιθανότητας)

Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τιμές στο $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Ονομάζουμε συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της X τη συνάρτηση: $f_X(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Σχέση Συνάρτησης Πιθανότητας με τη συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τ.μ. X

Έστω μια διακριτή τ.μ. X με τιμές στο $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $f_X(x_k)$ η συνάρτηση πιθανότητας της X και $F_X(x)$ η συνάρτηση κατανομής

- συναρτηση κατανομης: $F_X(x) = P(X \le x)$ 

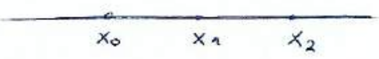
Οριζεται στο $\mathbb{R}$.

- συναρτηση πιθανοτητας: $f_X(x_k) = P(X = x_k)$ 

Οριζεται στο $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

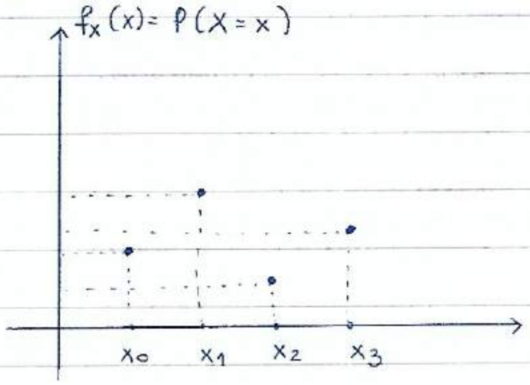
Για $k = 0, 1, 2, \dots$: $f_X(x_k) = P(X = x_k) = P(X \le x_k) - P(X < x_k) =$
$= F_X(x_k) - F_X(x_k -)$

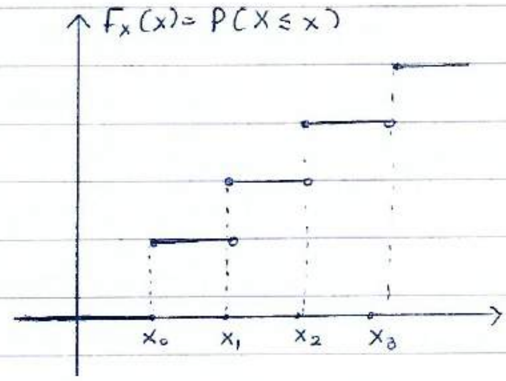
$\boxed{f_X(x_k) \longrightarrow F_X(x)}$



$F_X(x) = P(X \le x)$

- Αν $x < x_0$: $F_X(x) = P(X \le x) = 0$
- Αν $x_k < x < x_{k+1}$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{k} f_X(x_i)$





Ιδιοτητες της $f_X(x_k)$

Εστω διακριτη τμ. με τιμες στο $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

Τοτε ισχυουν τα παρακατω:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} f_X(x_k) = 1$

ii) $f_X(x_k) \ge 0$, $k = 0, 1, \dots$

Παραδειγμα 1: Εστω X μια διακριτη τμ. με συναρτηση πιθανοτητας $f_X(x) = c\left(\frac{2}{5}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Να βρεθουν:

i) η σταθερα c

ii) $P(X \ge 4)$

iii) $P(2 \le X \le 7 \mid X \ge 4)$.

$$\sum_{x=k}^{\infty} p^x \overset{|p|<1}{=} p^k \frac{1}{1-p} \quad , \quad \sum_{x=0}^{\infty} p^x \overset{|p|<1}{=} \frac{1}{1-p}$$

-Απαντηση-

i) $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow c \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow$

$$c \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{5}$$

ii) $P(X \geq 4) = \begin{cases} 1 - P[X<4] = 1 - \sum_{x=0}^{3} P(X=x) \\ \sum_{x=4}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=4}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=4}^{\infty} \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{3}{5}\sum_{x=4}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x = \end{cases}$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

iii) $P(2 \leq X \leq 7 \mid X \geq 4) = \frac{P(2 \leq X \leq 7,\ X \geq 4)}{P(X \geq 4)} = \frac{P(4 \leq X \leq 7)}{P(X \geq 4)} = \frac{\sum_{x=4}^{7} f_X(x)}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} =$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^5 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^6 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^7}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} =$$

→ $(1-\tau)(1+\tau+\tau^2+\dots+\tau^{\nu-1}) = 1-\tau^\nu$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^4\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = 1-\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

Παραδειγμα 2: Εστω X μια τμ με συναρτηση πιθανοτητας

$f_X(x) = c\,\frac{3^x}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{p^x}{x!} = e^p$$

Να βρεθουν: i) $P(X=0)$

ii) $P(X \geq 2)$.

-Απαντηση-

i) $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c\,\frac{3^x}{x!} = 1 \Rightarrow c\sum_{x=0}^{\infty} \frac{3^x}{x!} = 1 \Rightarrow c \cdot e^3 = 1 \Rightarrow c = e^{-3}$

Αρα $f_X(x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!} \quad , x = 0, 1, \dots$

$$P(X=0) = f_X(0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-3}$$

ii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - f_X(0) - f_X(1) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3}$

Οριςμος: (Μεση Τιμη μιας διακριτης τ.μ)
Εστω X μια διακριτη τ.μ. με τιμες στο $\{x_0, x_1, \dots\}$
Ονομαζουμε μεση τιμη της X την συναρτηση

$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_X(x_k)$ υπο την προϋποθεση οτι $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| f_X(x_k) < \infty$

Ερμηνεια Μεσης Τιμης

Η μεση τιμη ειναι ενας σταθμισμενος μεσος ορος των δυνατων τιμων της X οπου καθε τιμη σταθμιζεται ως προς την πιθανοτητα να εμφανιστεί

Εστω για παραδειγμα X ειναι το κερδος μας σε ενα πειραμα τυχης. Η $E[X]$ ειναι το αναμενομενο κερδος σε μια επαναληψη του πειραματος τυχης.

- Αν μπορω να επαναλάβω το π.τ απειρες φορες, η $E[X]$ ειναι το μακροπροθεσμο μεσο κερδος ανα επαναληψη.

Ακομη η μεση τιμη ειναι εννοια αναλογη του κεντρου βαρους μαζας

Παραδειγμα 3: Εστω παιχνιδι με 2 ερωτησεις.

	Πιθ. Σωστα	Κερδος
Γεωγραφια	40%	100€
Ιστορια	60%	80€

Αν απαντησω λαθος την πρωτη, κερδος = 0 €.
Τι να απαντησω πρωτα;

- Απαντηση -

K: κερδος

1ο σεναριο: Πρωτα → Γεωγραφια

x	0€	100€	180€
$P(K=x)$	0,6	0,4·0,4 = 0,16	0,4·0,6 = 0,24

$E[K] = 0 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,16 + 180 \cdot 0,24 = 59,20$ €

2ª σεναριο: Πρωτα + Ιστορια

X	0€	80€	180€
$P(K=X)$	0,4	$0,6 \cdot 0,6 = 0,36$	$0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

$E[K] = 0 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,36 + 180 \cdot 0,24 = 72$€

08/11/19 - 12ο μαθημα

Υπενθυμιση: Εστω X μια διακριτη τυχαια μεταβλητη με τιμες $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.

Τοτε: - συναρτηση πιθανοτητας της X: $f_X(x_k) = P(X = x_k)$ $k = 0, 1, \dots$

- συναρτηση κατανομης της X: $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

- μεση τιμη της X: $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_X(x_k)$.

Παραδειγμα 1: Εστω X, Y, Z διακριτες τυχαιες μεταβλητες

X:

x	-1	0	1
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y:

y	-1	0	1
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z:

z	-2	0	2
$f_Z(z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Να βρεθουν οι $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$.

-Λυση-

$E[X] = -1 \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{4} = 0$

$E[Y] = -1 \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \frac{1}{8} = 0$

$E[Z] = -2 \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} = 0$

$E[K] = 0 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,16 + 180 \cdot 0,24 = 59,20$ €

2º σενάριο: Πρώτα → Ιστορία

X	0€	80€	180€
$P(K=X)$	0,4	$0,6 \cdot 0,6 = 0,36$	$0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

$E[K] = 0 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,36 + 180 \cdot 0,24 = 72$€

08/11/19 - 12ο μαθημα

Υπενθυμιση: Εστω X μια διακριτη τυχαια μεταβλητη με τιμες $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.

Τοτε: - συναρτηση πιθανοτητας της X: $f_X(x_k) = P(X = x_k)$ $k = 0, 1, \dots$

- συναρτηση κατανομης της X: $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$
- μεση τιμη της X: $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_X(x_k)$.

Παραδειγμα 1: Εστω X, Y, Z διακριτες τυχαιες μεταβλητες

X:

x	-1	0	1
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y:

y	-1	0	1
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z:

z	-2	0	2
$f_Z(z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Να βρεθουν οι $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$.

-Λυση-

$E[X] = -1 \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{4} = 0$

$E[Y] = -1 \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \frac{1}{8} = 0$

$E[Z] = -2 \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} = 0$

Παρατηρηση!! Η μεση τιμή ειναι ενα μετρο θεσης, δεν παρεχει πληροφορια σχετικά με τη διασπορα των τιμων της τμ. Χρειαζομαστε ενα μετρο διακυμανσης ή μεταβλητότητας της τμ που να δειχνει πόσο απεχει η X απο την μεση τιμη της κατα μεσο ορο.

Ενα τετοιο μετρο ειναι η διασπορά

Ορισμος (Διασπορα, Τυπική Αποκλιση)

Εστω X μια διακριτή τυχαια μεταβλητή με μεση τιμή $E[X]$.

Ονομάζουμε διασπορά της X την: $\boxed{Var[X] = E[(X - E[X])^2]}$ (ή διακυμανση).

Ονομάζουμε τυπική αποκλιση της X την: $\boxed{\sigma_x = \sqrt{Var[X]}}$.

Η διασπορα και η τυπικη αποκλιση οριζονται αν υπαρχει η $E[(X - E[X])^2]$

Η τυπική αποκλιση εχει την ιδια μοναδα μετρησης με την μεση τιμη.

Παρατηρηση!! $Var[X] = E[\underbrace{(X - E[X])^2}_{\text{συναρτηση της } X}]$

Πρεπει να δουμε πως υπολογιζεται η μεση τιμης μιας συναρτησης της X.

Παραδειγμα 2: Εστω X μια διακριτη τμ. με τιμές και συναρτηση πιθανοτητας οπως δειχνει ο πινακας:

	x	−2	−1	0	1	2	3
X:	$f_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Εστω $Y = X^2 = g(X)$. Να βρεθουν

i) η συναρτηση πιθανοτητας της Y ($f_Y(y)$)

ii) η μεση τιμη της Y ($E[Y] = E[X^2]$).

- Λυση -

i)

	y	0	1	4	9
Y :	$f_y(y)$	$1/4$	$5/16$	$3/16$	$1/4$

$f_y(0) = P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = f_x(0) = \frac{1}{4}$

$f_y(1) = P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$

Αν $Y = g(X)$: $f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = \sum_{x:\, g(x)=y} P(X=x) =$

$$= \sum_{x:\, g(y)=y} f_X(x).$$

$f_y(4) = P(Y=4) = P(X^2=4) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{3}{16}$

$f_y(9) = P(Y=9) = P(X^2=9) = P(X=3) = \frac{1}{4}$

ii) $E[Y] = \sum_y y f_y(y) = 0\frac{1}{4} + 1\frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 9\frac{1}{4} = \frac{53}{16}$

$\quad \|$

$E[X^2]$

<u>Υπολογισμός $E[g(x)]$</u>

- 1ος τροπος:

Για να υπολογίσουμε τη $E[g(X)]$ ακολουθουμε τα εξης βηματα:

1) Θεωρουμε τη $Y = g(X)$
2) Υπολογιζουμε την συναρτηση πιθανοτητας της Y

$$f_y(y) = \sum_{x:\, g(x)=y} f_X(x).$$

3) Υπολογιζουμε τη $E[Y] = E[g(X)]$: $E[Y] = \sum_y y f_Y(y)$

- 2ος τροπος:

Θεωρημα (<u>Τυπος αφηρημενου στατιστικού</u>)

Εστω X μια διακριτη τμ. με συναρτηση πιθανοτητας $f_x(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και $g(\,)$ μια πραγματικη συναρτηση

Τοτε η μεση τιμη της τμ. $Y = g(x)$ διυεται απο:

$$\boxed{E[g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) f_x(x_k)}$$

υπο την προϋποθεση οτι η σειρα συγκλινει.

- Αποδειξη -

Εστω $Y = g(X)$ η οποια παιρνει τιμές στο $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$

$$E[g(X)] = E[Y] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r f_Y(y_r) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r \sum_{g(x_k)=y_r} f_X(x_k) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{g(x_k)=y_r} y_r \cdot f_X(x_k) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{g(x_k)=y_r} g(x_k) f_X(x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) f_X(x_k)$$

Παραδειγμα 2 (Συνεχεια).

	x	-2	-1	0	1	2	3
X:	$f_X(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$E[X^2] = ;$ (με 2ο τροπο).

$$\underset{g(X)}{E[X^2]} = (-2)^2 \frac{1}{16} + (-1)^2 \frac{1}{8} + 0^2 \frac{1}{4} + 1^2 \frac{3}{16} + 2^2 \frac{1}{8} + 3^2 \frac{1}{4} = \frac{53}{16}$$

Παραδειγμα 1 (συνεχεια - υπολογισμος διασποράς).

	x	-1	0	1	
X:	$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$E[X] = 0$

	y	-1	0	1	
Y:	$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$E[Y] = 0$

	z	-2	0	$+2$	
Z:	$f_Z(z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$E[Z] = 0$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X-0)^2] = (-1-0)^2 \frac{1}{4} + (0-0)^2 \frac{1}{2} + (1-0)^2 \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = E[(Y - E[Y])^2] = E[(Y-0)^2] = (-1-0)^2 \frac{1}{8} + (0-0)^2 \frac{3}{4} + (1-0)^2 \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{4}$$

$$Var(Z) = E[(Z - E(Z))^2] = E[(Z-0)^2] = (-2-0)^2 \frac{1}{4} + (0-0)^2 \frac{1}{2} + (2-0)^2 \frac{1}{4} = 2$$

Ιδιοτητες $E[\ ]$, $Var[\ ]$, σ

1) $E[aX+b] = a\,E[X]+b \quad , a,b \in \mathbb{R}$

2) $Var[aX+b] = a^2\,Var[X] \quad , a,b \in \mathbb{R}$

3) $\sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$

4) $Var[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$

5) $\cancel{E[g(X)] = g(E[X])}$ <u>ΛΑΘΟΣ</u> δεν ισχυει γενικα.
Ισχυει μονο αν ειναι γραμμικα σαν το (1).

- Αποδειξεις -

1) Εστω X μια διακριτη τ.μ. με συναρτηση πιθανοτητας

$$f_X(x_k) = P(X = x_k) \quad , k=0,1,2,\dots$$

$$E[aX+b] = \sum_{k=0}^{\infty} (a x_k + b) f_X(x_k) = a \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_X(x_k) + b \sum_{k=0}^{\infty} f_X(x_k) = a\,E[X]+b$$

2) $$Var[aX+b] = E\left[(aX+b - E[aX+b])^2\right] \overset{(1)}{=} E\left[(aX+b - a\,E[X] - b)^2\right] =$$
$$= E\left[a^2 (X - E[X])^2\right] \overset{(1)}{=} a^2\, E\left[(X - E[X])^2\right] = a^2\, Var[X].$$

3) $$\sigma_{aX+b} = \sqrt{Var[aX+b]} \overset{(2)}{=} \sqrt{a^2 Var[X]} = |a| \sqrt{Var[X]} = |a|\,\sigma_X.$$

4) $$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2 - 2E[X]\cdot X + (E[X])^2\right] =$$
$$= E[X^2] - 2\,E[X]\,E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

11/11/19 - 13ο μαθημα

<u>Ειδικες Διακριτες Κατανομης</u>

1. Bernoulli
2. Γεωμετρικη
3. Διωνυμικη
4. Υπεργεωμετρικη
5. Poisson
6. Αρνητικη Διωνυμικη
7. Ομοιομορφη διακριτη.

Ιδιοτητες $E[\ ]$, $Var[\ ]$, σ

1) $E[aX+b] = a\,E[X]+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

2) $Var[aX+b] = a^2\,Var[X]$, $a,b\in\mathbb{R}$

3) $\sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$

4) $Var[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$

5) $\cancel{E[g(X)] = g(E[X])}$ <u>ΛΑΘΟΣ</u> δεν ισχυει γενικα.
Ισχυει μονο αν ειναι γραμμικα σαν το (1).

- Αποδειξεις -

1) Εστω X μια διακριτη τμ με συναρτηση πιθανοτητας

$$f_X(x_k) = P(X=x_k) \quad , k=0,1,2,\dots$$

$$E[aX+b] = \sum_{k=0}^{\infty}(ax_k+b)f_X(x_k) = a\sum_{k=0}^{\infty}x_k f_X(x_k) + b\sum_{k=0}^{\infty}f_X(x_k) = aE[X]+b$$

2) $$Var[aX+b] = E[(aX+b-E[aX+b])^2] \overset{(1)}{=} E[(aX+b-aE[X]-b)^2] =$$
$$= E[a^2(X-E[X])^2] \overset{(1)}{=} a^2\,E[(X-E[X])^2] = a^2\,Var[X].$$

3) $$\sigma_{aX+b} = \sqrt{Var[aX+b]} \overset{(2)}{=} \sqrt{a^2 Var[X]} = |a|\sqrt{Var[X]} = |a|\sigma_X.$$

4) $$Var[X] = E[(X-E[X])^2] = E[X^2 - 2E[X]\cdot X + (E[X])^2] =$$
$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

11/11/19 - 13ο μαθημα

<u>Ειδικες Διακριτες Κατανομης</u>

1. Bernoulli
2. Γεωμετρικη
3. Διωνυμικη
4. Υπεργεωμετρικη
5. Poisson
6. Αρνητικη Διωνυμικη
7. Ομοιομορφη διακριτη.

Δοκιμή Bernoulli

Ενα πειραμα τυχης με 2 δυνατα αποτελεσματα, επιτυχια και αποτυχια, ονομαζεται δοκιμη Bernoulli

1) Κατανομη Bernoulli

Πειραμα τυχης: Μια δοκιμη Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας p.

X: # επιτυχιων σε αυτην τη δοκιμή Bernoulli

δυνατες τιμές της X: 0, 1.

Η X ακολουθεί τη κατανομη Bernoulli

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

• $f_X(k)$

$f_X(0) = P(X=0) = P(0 \text{ επιτυχιες σε } 1 \text{ δοκιμή}) = 1-p$

$f_X(1) = P(X=1) = P(1 \text{ επιτυχια σε } 1 \text{ δοκιμη}) = p$

• $E[X]$

$E[X] = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$.

• $Var[X]$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$

Οποτε $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

2) Γεωμετρική κατανομη

Πειραμα τυχης: Ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας p.

X: # δοκιμων μεχρι την 1η επιτυχια.

δυνατες τιμες της X: 1, 2, 3, 4, ...

Η X ακολουθε Γεωμετρικη κατανομη με παραμετρο p.

$X \sim \text{Geom}(p)$.

• $f_X(k)$

$f_X(k) = P(X=k) = P(1\eta \text{ επιτυχια στην } k\text{-δοκιμή})$

$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ δοκιμες}}, 1$ ← k-οστη δοκιμή

• $E[X]$

Το αναμενομ. αριθμος φορων που θα πρεπει να ριξουμε ενα ζαρι μεχρι την εμφανιση 6.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d/dt} \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \xRightarrow{t=1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p^2}$$

Αρα $E[X] = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

• Var [X]

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \xrightarrow{d/dt} \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \xrightarrow{\cdot t} \sum_{k=1}^{\infty} k t^k = \frac{t}{(1-t)^2} \xrightarrow{d/dt}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 t^{k-1} = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3} \xrightarrow{t=1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^3}$$

Αρα $E[X^2] = p \cdot \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$.

Τοτε $Var[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

3. Διωνυμικη κατανομη

Πειραμα τυχης: Ακολουθια ανεξαρτητων n-δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητας επιτυχιας p.

„ X : # επιτυχιων στις n-δοκιμές

δυνατες τιμες της X: $0, 1, 2, \ldots, n$

Η X ακολουθει Διωνυμικη κατανομη με παραμετρους n και p

$X \sim Bin(n, p)$.

• $f_X(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$f_X(k) = P(X=k) = P$(να εχω k-επιτυχιες σε n-δοκιμες)

$(0, 1, 0, \ldots, 1, 1)$

1η δοκιμη   2η δοκιμη   n-οστη δοκιμη

τροπων που εμφανιζονται k επιτυχιες σε n δοκιμες = # μεταθεσεων 2 ειδων στοιχειων {0,1} ανα n-k =

$$= \frac{(n-k+k)!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

ή διαφορετικα: $\llcorner$ # επιλογων k θεσεων απο n : $\binom{n}{k}$

• πιθανοτητα να εμφανιστει καθε ευνοϊκο αποτελεσμα: $p^k (1-p)^{n-k}$

πχ: $(0,1,0,0,1) = (1-p)p(1-p)(1-p)p = p^2(1-p)^3$

$f_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

∘ $E[X]$ Θα χρησιμοποιήσω τη σειρά $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} =$$

$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

Οπότε $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} t^{k-1} = n(1+t)^{n-1}$

$$\overset{\cdot t}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k = n \cdot t (1+t)^{n-1} \overset{t = \frac{p}{1-p}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = n \frac{p}{1-p} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1}$$

$$= n \frac{p}{1-p} \frac{1}{(1-p)^{n-1}} = \frac{n \cdot p}{(1-p)^n}$$

Άρα $E[X] = (1-p)^n \cdot \dfrac{np}{(1-p)^n} = n \cdot p$.

β' τρόπος:

$$E[X] = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$E[X] = (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = n(1-p)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \overset{j=k-1}{=}$$

$$= n(1-p)^n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j+1} =$$

$$= n(1-p)^n \frac{p}{1-p} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j = n(1-p)^n \frac{p}{1-p} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1}$$

$$= n(1-p)^n \frac{p}{1-p} \frac{1}{(1-p)^{n-1}} = np.$$

∘ $Var[X]$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dots$$

$$Var[X] = np(1-p)$$

18/11/19 - 14ο μαθημα

4. Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Πειραμα τυχης: ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας p.

X: # δοκιμων μεχρι n-οστη επιτυχια

δυνατές τιμες της X: $n, n+1, n+2, \dots$

Η X ακολουθει Αρνητικη Διωνυμική κατανομη

$$X \sim \text{Neg Bin}(n,p).$$

• $f_X(k)$ $k = n, n+1, n+2 \dots$

$f_X(k) = P(X=k) = P($να δουμε τη n-οστη επιτυχια στην k-οστή δοκιμή$)$

$$\underbrace{0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \dots 0\ 0}_{k-1 \text{ δοκιμές}}\ \ \overset{1}{\downarrow}$$

$k-1$ δοκιμές k-οστη δοκιμη: επιτυχια

$n-1$ επιτυχιες "1"

$k-n$ αποτυχιες "0"

τετοιων ευνοϊκων αποτελεσμάτων $\binom{k-1}{n-1}$

$\parallel$

μεταθεσεων 2-ειδων στοιχειων $\{0,1\}$ ανα $k-n$, $n-1$

$$\frac{(k-n+n-1)!}{(k-n)!\,(n-1)!} = \binom{k-1}{n-1}$$

→ Πιθανότητα εμφανισης ενος τετοιου αποτελεσματος =

$$= p^{n-1}\,(1-p)^{k-n}\cdot p = p^n\,(1-p)^{k-n}$$

Αρα $f_X(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$, $k = n, n+1, \dots$

• $E[X]$

$$E[X] = \sum_{k=n}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \qquad \binom{k}{n} = \frac{k}{n}\binom{k-1}{n-1}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} n \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} = n \frac{p^n}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} (1-p)^k \quad (1).$$

Θελουμε να υπολογισουμε το $\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k = ;$

Γνωριζουμε $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = (1-t)^{-1}$, το παραγωγιζω:

$$\overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k\, t^{k-1} = (1-t)^{-2} \xrightarrow{d/dt} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, t^{k-2} = 2(1-t)^{-3}$$

$$\xrightarrow{d/dt} \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\, t^{k-3} = 3!\,(1-t)^{-4} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

μετα απο
n παρ/σεις
$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\, t^{k-n} = n!\,(1-t)^{-(n+1)}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{n!}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-n+1)}{k!}\, t^{k-n} = (1-t)^{-(n+1)}$$

$$\xrightarrow{\cdot t^n} \boxed{\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}}}$$

Οποτε $(1) = n \dfrac{p^n}{(1-p)^n} \dfrac{(1-p)^n}{(1-1+p)^{n+1}} = \dfrac{n}{p} = E[X].$

- Var[X]

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ $\quad \binom{k}{n} = \frac{k}{n}\binom{k-1}{n-1}$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot n \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} = n p^n \frac{1}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k}{n} (1-p)^k \quad (2)$$

Γνωριζω, πλεον, οτι $\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k = \dfrac{t^n}{(1-t)^{n+1}}$

$$\xrightarrow{d/dt} \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k}{n} t^{k-1} = \frac{n t^{n-1} (1-t)^{n+1} + t^n (n+1)(1-t)^n}{(1-t)^{2n+2}}$$

$$\xrightarrow{\cdot t} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k = \frac{t^n (1-t)^n [n(1-t) + t(n+1)]}{(1-t)^{2n+2}} = \frac{t^n (n - nt + nt + t)}{(1-t)^{n+2}} =$$

$$= \frac{t^n (n+t)}{(1-t)^{n+2}}$$

Οποτε $(2) = \dfrac{n p^n}{(1-p)^n} \dfrac{(1-p)^n (n+1-p)}{p^{n+2}} = \dfrac{n(n+1-p)}{p^2} = E[X^2]$

Αρα $Var[X] = \dfrac{n(n+1-p)}{p^2} - \left(\dfrac{n}{p}\right)^2 = \dfrac{n(n+1-p) - n^2}{p^2} = \dfrac{n - pn}{p^2} =$

$$= \frac{n \cdot (1-p)}{p^2}$$

Αλλες Γεωμετρικές κ' Αρνητικές Διωνυμικές Κατανομές

Εστω ακολουθία ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχίας p.

- T_1 = # δοκιμών μεχρι την πρωτη επιτυχία

  $T_1 \sim Geom(p)$

  - $f_{T_1}(k) = P(T_1 = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \ , \ k = 1,2,3,\dots$
  - $E[T_1] = 1/p$
  - $Var[T_1] = \dfrac{1-p}{p^2}$

- T_1' = # αποτυχιων μεχρι την 1η επιτυχία.

  $T_1' = T_1 - 1$

  - $f_{T_1'}(k) = P(T_1' = k) = P(T_1 - 1 = k) = P(T_1 = k+1) = (1-p)^k \cdot p \ , \ k = 0,1,2,\dots$
  - $E[T_1'] = E[T_1 - 1] = E[T_1] - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$
  - $Var[T_1'] = Var[T_1 - 1] = Var[T_1] = \dfrac{1-p}{p^2}$

- T_n = # δοκιμων μεχρι n-οστη επιτυχια

  $T_n \sim NegBin(n,p)$.

  - $f_{T_n}(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \ , \ k = n, n+1, \dots$
  - $E[T_n] = \dfrac{n}{p}$
  - $Var[T_n] = \dfrac{n(1-p)}{p^2}$

- T_n' = # αποτυχιων μεχρι n-οστή επιτυχια

  $T_n' = T_n - n$

  - $f_{T_n'}(k) = P(T_n' = k) = P(T_n - n = k) = P(T_n = n+k) =$
    $= \binom{n+k-1}{k-1} p^n (1-p)^{n+k-n} = \binom{n+k-1}{k-1} p^n (1-p)^k \ , \ k = 0,1,2,\dots$
  - $E[T_n'] = E[T_n - n] = E[T_n] - n = \dfrac{n}{p} - n = \dfrac{n - pn}{p} = \dfrac{n(1-p)}{p}$
  - $Var[T_n'] = Var[T_n - n] = Var[T_n] = \dfrac{n(1-p)}{p^2}$

5. Κατανομη Poisson

Οριομος: (Κατανομης Poisson)

Εστω μια διακριτη τυχαια μεταβλητη X με συναρτηση πιθανοτητας $f_X(\kappa) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^\kappa}{\kappa!}$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ με $\lambda > 0$, λεμε οτι ακολουθει κατανομη Poisson με παραμετρο λ.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

20/11/19 - 15ο μαθημα

Θεωρημα: Εστω $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ οπου $n \to \infty$ και $p_n \to 0$ ετσι ωστε $n \cdot p_n = \lambda$ οπου $\lambda > 0$. Τοτε $\lim\limits_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$k = 0, 1, 2, \dots$

-Αποδειξη-

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n)_k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Ομως, $$\lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^k \cdot 1 \cdot (1 - 1/n)(1 - 2/n)\dots(1 - {k-1}/n)}{n^k}$$

$$= 1$$

Εχουμε $$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1.$$

Αρα $$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Παρατηρηση!! Εαν $n \cdot p_n = \lambda$, $$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}}_{\substack{\text{πιθανοτητα να} \\ \text{εχω } k \text{ επιτυχιες σε} \\ n \text{ δοκιμες Bernoulli} \\ \text{με πιθ. επιτυχιας } p_n.}} = \underbrace{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\substack{\text{πιθανοτητα μια τ.μ.} \\ \text{που ακολουθει Poisson}(\lambda) \\ \text{να παρει την τιμη } k}}$$

5. Κατανομη Poisson

Ορισμος (κατανομης Poisson)

Εστω μια διακριτη τυχαια μεταβλητη X με συναρτηση πιθανοτητας $f_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\dots$ με $\lambda > 0$, λεμε οτι ακολουθει

κατανομη Poisson με παραμετρο λ.

$X \sim$ Poisson (λ).

20/11/19 - 15ο μαθημα

Θεωρημα: Εστω $X_n \sim Bin(n, p_n)$ οπου $n \to \infty$ και $p_n \to 0$ ετσι ωστε $n \cdot p_n = \lambda$ οπου $\lambda > 0$. Τοτε $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$k = 0, 1, 2, \dots$

-Αποδειξη-

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)_k}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Ομως, $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot 1 \cdot (1-1/n)(1-2/n)\dots(1-k-1/n)}{n^k}$

$= 1$

Εχουμε $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1.$

Αρα $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Παρατηρηση!! Εαν $n \cdot p_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}_{\text{πιθανοτητα να εχω } k \text{ επιτυχιες σε } n \text{ δοκιμες Bernoulli με πιθ. επιτυχιας } p_n} = \underbrace{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{πιθανοτητα μια τ.μ. που ακολουθει Poisson}(\lambda) \text{ να παρει την τιμη } k}$

Αρα η κατανομη Poisson ειναι προσεγγιστική κατανομη της Διωνυμικης κατανομης οταν ο αριθμος των δοκιμων ειναι πολυ μεγαλος και η πιθανοτητα επιτυχιας ειναι μικρη.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \quad (1).$$

• $E[X]$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$(1) \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda} \overset{\cdot\lambda}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{\lambda}.$$

Αρα $E[X] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$

• $Var[X]$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda} \overset{\cdot\lambda}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{\lambda} \overset{d/d\lambda}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \overset{\cdot\lambda}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{\lambda}(\lambda+1).$$

Οποτε $E[X^2] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda}(\lambda+1). = \lambda(\lambda+1)$

Αρα $Var[X] = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda.$

6) Υπεργεωμετρικη Κατανομη

Πειραμα τυχης: Ενα δοχειο περιεχει N σφαιριδια: m λευκα και $N-m$ μαυρα. Εξαγουμε n σφαιριδια χωρις επανατοποθετηση.

X = αριθμος λευκων σφαιριδιων σε n-εξαγωγες

Η τμ. X ακολουθει υπεργεωμετρικη κατανομη με παραμετρους N, n και m.

$$X \sim \text{Hyper Geom}(N, n, m)$$

συνολικό # σφαιριδιων

εξαγωγων

λευκων στο δοχειο

Δυνατες τιμες της X

Για ποια k : $P(X=k)>0$;

$0 \leq k \leq n$ (2)

$0 \leq k \leq m$ (3)

$0 \leq n-k \leq N-m \Leftrightarrow -n \leq -k \leq N-m-n \Leftrightarrow mn-N \leq k \leq n$ (4)

$\max(0, min-N) \leq k \leq \min(n,m)$.

• $f_X(k)$

$f_X(k) = P(X=k) = P($κ λευκα σφαιριδια σε n-εξαγωγές$) =$

$=$ # συνολικων αποτελεσματων $=$ $\dfrac{\text{\# αποτελεσματων με κ λευκά και n-k μαυρα}}{\text{συνολικό \# αποτελεσματων}}$

→ 1ος τροπος:

δειγματικός χωρος του πειραματος τυχης = διατεταγμενες n-αδες στοιχειων του $\{Λ_1, Λ_2, \ldots, Λ_n, M, M_2, \ldots, M_{n-m}\}$

συνολικό # αποτελεσματων $= N(Ω) = \binom{N}{m}$

αποτελεσματων με κ λευκα και n-k μαυρα $= \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$

επιλογή λευκών — επιλογή μαυρων

$$f_X(k) = P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

→ 2ος τροπος:

δειγματικός χωρος του πειραματος τυχης = διατεταγμενες n-αδες στοιχειων του $\{Λ_1, Λ_2, \ldots, Λ_m, M_1, M_2, \ldots, M_{n-m}\}$

συνολικό πληθος αποτελεσματων $= N(Ω) = (N)_m$

_ _ _ _ ... _ _

1η 2η 3η ... n-1η nη

1ο σταδιο: επιλογη κ θεσεων απο n για λευκα ⇒ $\binom{n}{k}$ τροποι

2ο σταδιο: φτιαχνουν διατεταγμενη κ-αδα λευκων ⇒ $(m)_k$ τροποι

3ο σταδιο: φτιαχνουν διατεταγμενη (n-k)αδα μαυρων ⇒ $(N-m)_{n-k}$

Αρα # αποτελεσματων με κ-λευκά και n-k μαυρα =

$$= \binom{n}{k}(m)_k\,(N-m)_{n-k}$$

οποτε $f_X(k) = P(X=k) = \dfrac{\binom{n}{k}(m)_k(N-m)_{n-k}}{(N)_n} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\;\dfrac{m!}{(m-k)!}\;\dfrac{(N-m)!}{(N-m)-(n-k)!} =$

$$= \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

$$\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0, m+n-N) \le k \le \min(n,m)$$

ή αρκεί $0 \le k \le n$.

(*) Τυπος Cauchy (Χρησιμοποιειται για υπολογισμο $E[X]$, $Var[X]$)

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \qquad r,s,n \geq 0 \text{ ακεραιος.}$$

αποδειξη

$$\binom{r+s}{n} = \underset{\text{με } n\text{-στοιχεια}}{\#\text{υποσυνολων του } A} = \sum_{r=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \qquad (5)$$

και $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{r-1}$ (6)

• $E[X]$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n} k\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n} k\,\frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} = \frac{m}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}$$

$$\overset{j=k-1}{=} \frac{m}{\binom{N}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j} \overset{(5)}{=} \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{m-1+N-m}{n-1} =$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} \overset{(6)}{=} \frac{m}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-1}{n-1} = n\,\frac{m}{N}$$

25/11/19 - 16ο μαθημα

• $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = ;$

Άρα # αποτελεσμάτων με κ-λευκά και n-k μαύρα =

$= \binom{n}{k}(m)_k (N-m)_{n-k}$

οπότε $f_X(k) = P(X=k) = \dfrac{\binom{n}{k}(m)_k(N-m)_{n-k}}{(N)_n} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \dfrac{m!}{(m-k)!} \dfrac{(N-m)!}{(N-m)-(n-k)!} =$

$= \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

$\dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $\quad \max(0, m+n-N) \leq k \leq \min(n,m)$

ή αρκεί $0 \leq k \leq n$.

(*) Τύπος Cauchy (Χρησιμοποιείται για υπολογισμό $E[X]$, $Var[X]$)

$\binom{r+s}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ $\quad r,s,n \geq 0$ ακέραιος.

αποδειξη

$\binom{r+s}{n} =$ # υποσυνόλων του A με n-στοιχεία $= \sum_{r=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ (5)

και $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{r-1}$ (6)

• $E[X]$

$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$

$\overset{(6)}{=} \dfrac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \dfrac{m}{k}\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} = \dfrac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}$

$\underset{j=k-1}{=} \dfrac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j} \overset{(5)}{=} \dfrac{m}{\binom{N}{n}} \binom{m-1+N-m}{n-1} =$

$= \dfrac{m}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} \overset{(6)}{=} \dfrac{m}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-1}{n-1} = n \cdot \dfrac{m}{N}$

25/11/19 - 16ο μάθημα

• $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = ;$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \underline{\underline{\binom{m}{k} = \frac{m}{k}}}\binom{m-1}{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 \frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} =$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \left[\sum_{k=1}^{n} (k-1)\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} \right]$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \left[\underbrace{\sum_{k=2}^{n} (m-1)\binom{m-2}{k-2}\binom{N-m}{n-k}}_{j=k-2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}_{j=k-1} \right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{m-2}{j}\binom{N-m}{n-2-j} + \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}$$

$$= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} + \frac{m}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} \underline{\underline{\binom{N}{n} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}} \frac{m(m-1)}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-2}{n-2} + \frac{m}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$\underline{\underline{\binom{N-1}{n-1} = \frac{N-1}{n-1}\binom{N-2}{n-2}}} \quad \frac{m(m-1)}{\frac{N}{n}\frac{N-1}{n-1}\cancel{\binom{N-2}{n-2}}}\cancel{\binom{N-2}{n-2}} + \frac{m \cdot n}{N} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{mn}{N}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \dots = n\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

Συγκριση Μοντελων

Πειραμα καλπης N σφαιριδια $\to$ m λευκα

$\to$ $N-m$ μαυρα.

- εξαγουμε n σφαιριδια χωρις επαναθεση

  $X \sim$ Υπεργεωμετρικη (n, m, N)

  - $P(X=x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{x}}{\binom{N}{n}}$

  - $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

  - $Var[X] = n \cdot \frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m-1}{N-1}\right).$

• εξαγουμε n σφαιριδια με επαναθεση

$$X \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{m}{N}\right)$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x}\left(\frac{m}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-x}$$

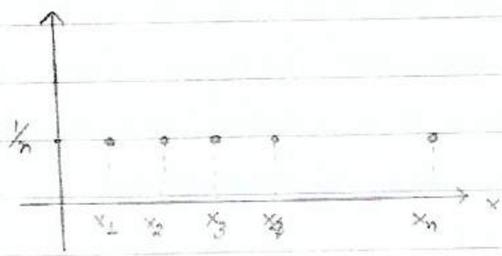
$$E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$$

$$Var[X] = n \cdot \frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$$

Διακριτη Ομοιομορφη κατανομη

$R_X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$P(X=x_i) = \frac{1}{n} \quad i=1,2,\dots,n$



r-ταξης ροπη $\mu'_r = E[X^r] = \sum_{i=1}^{r} x_i^r P(X=x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$

δειγματική r-ταξης ροπη.

• $r=1$

$\mu = E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$ δειγματικος μεσος

r-ταξης κεντρικη ροπη $\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^r P(X=x_i)$

$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^r$

δειγματική διασπορά

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} i^2 P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Άσκηση:

Ο ρυθμος ατυχηματων σε μια πολη ειναι 1 στους 100.000 κατοικους, ανα μήνα. Ο ενας κατοικος → 1 ατυχημα.

α) Βρειτε την πιθανοτητα οτι σε μια πολη 400.000 κατοικων θα υπαρχουν 8 ή περισσοτερα ατυχηματα το μηνα Ιουλιο αυτης της χρονιας.

β) Ποια ειναι η πιθανοτητα οτι θα υπαρχουν 2 μηνες το ετος που η πολη θα εχει 8 ή περισσοτερα ατυχηματα;

γ) Θεωρώντας τον τωρινο μηνα ως μηνα αριθμο 0, ποια η πιθανοτητα οτι ο 1ος μηνας που θα εχει 8 ή περ. ατυχ. στη πολη θα ειναι μηνας i;

δ) Εστω οτι σημερα ειναι 1η Ιανουαριου. Ποια ειναι η πιθανοτητα οτι ο 4ος μηνας που θα εχει 8 ή περισσοτερα ατυχηματα θα ειναι ο Δεκεμβριος;

- Λυση -

α) X # κατοικων με ατυχημα σε 1 μηνα

$p = P(\text{ενας κατοικος να εχει ατυχημα}) = \frac{1}{100\,000}$

Η πολη εχει 400.000

$X \sim Bin\left(400.000, \frac{1}{100\,000}\right)$

$$p_1 = P(X \geq 8) = \sum_{x=8}^{400000} \binom{400.000}{x} \left(\frac{1}{100000}\right)^x \left(\frac{99.999}{100\,000}\right)^{400.000 - x}$$

n μεγαλο, p μικρό $n p = \lambda = 4$

$$P(X=x) = \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!}$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - \sum_{x=0}^{7} \frac{e^{-4} 4^x}{x!} = \underbrace{1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2} \dots \frac{e^{-4} 4^7}{7!}}_{P(X \geq 8)}$$

β) $P = P$(σ'ενα μηνα να εχουμε 8 ή περισσοτερους κατοικους με ατυχημα)

Y = # μηνων σ'ενα ετος που εχουν 8 ή περισσοτερα κατοικους με ατυχημα

$Y \sim Binomial(12, p_1)$.

$P(Y=y) = \binom{12}{y} p_1^y (1-p_1)^{12-y}$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - (1-p_1)^{12} - 12 p_1 (1-p_1)^{11}$

γ) Z = # μηνων μεχρι να βρω μηνα με 8 ή περισσοτερους κατοικους με ατυχημα

Z ~ Γεωμετρική (p_1)

$P(Z=i) = (1-p_1)^{i-1} p_1$

δ) W = # μηνων μεχρι να βρω 4 μηνες με 8 ή περ. ατυχ

W ~ αρνητική διωνυμική Pascal

$P(W=k) = \binom{k-1}{4-1} p_1^4 (1-p_1)^{k-4}$

$P(W=12)$

27/11/19 - 17ο μαθημα

<u>Ειδικες Διακριτές Κατανομές</u>

Πειραμα τυχης ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας p.

- N_1 = # επιτυχιας σε 1 δοκιμη Bernoulli

  $N_1 \sim$ Bernoulli (p)
- T_1 = # δοκιμων μεχρι 1η επιτυχια

  $T_1 \sim$ Geom (p).

Π.χ: 1) Ευστοχια 30%

α = P(να ριξω 10 βολές μεχρι να πετυχω τον στοχο)

X = # βολων μεχρι να πετυχω τον στοχο

δοκιμων επιτυχια με p = 0,3

X ~ Geom (0,3)

$\alpha = P(X=10) = f_X(10) = (1-0{,}3)^{10-1} \cdot 0{,}3$.

- N_n = # επιτυχιων σε n δοκιμες Bernoulli

  $N_n \sim Bin(n, p)$

$P(Y=y) = \binom{12}{y} p_1^y (1-p_1)^{12-y}$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - (1-p_1)^{12} - 12 p_1 (1-p_1)^{11}$

γ) Z = # μηνων μεχρι να βρω μηνα με 8 ή περισσοτερους κατοικους με ατυχημα

$Z \sim$ Γεωμετρική (p_1)

$P(Z=i) = (1-p_1)^{i-1} p_1$

δ) W = # μηνων μεχρι να βρω 4 μηνες με 8 ή περ. ατυχ.

$W \sim$ αρνητική διωνυμική Pascal.

$P(W=k) = \binom{k-1}{4-1} p_1^4 (1-p_1)^{k-4}$

$P(W=12)$

27/11/19 - 17ο μαθημα

Ειδικες Διακριτές Κατανομές

Πειραμα τυχης ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας p.

- N_1 = # επιτυχιας σε 1 δοκιμη Bernoulli
  $N_1 \sim$ Bernoulli (p)
- T_1 = # δοκιμων μεχρι 1η επιτυχια
  $T_1 \sim$ Geom (p).

π.χ: 1) Ευστοχια 30%

α = P(να ριξω 10 βολές μεχρι να πετυχω τον στοχο)

X = # βολων μεχρι να πετυχω τον στοχο
δοκιμων επιτυχια με $p = 0{,}3$

$X \sim$ Geom $(0{,}3)$

$\alpha = P(X=10) = p_X(10) = (1-0{,}3)^{10-1} \cdot 0{,}3$.

- N_n = # επιτυχιων σε n δοκιμες Bernoulli
  $N_n \sim Bin(n,p)$

Π.χ. 2) Πιθανοτητα ενα εξαρτημα ελαττωματικο 10%

β = P(αν εξετασω 100 εξαρτηματα να βρω 5 ελαττωματικα)

Y = # $\underbrace{\text{ελαττωματικων}}_{\text{επιτυχια } p=0,1}$ απο $\underbrace{\text{τα 100 εξαρτηματα που εξετασα}}_{\text{δοκιμη Bernoulli}}$.

$Y \sim Bin(100, 0{,}1)$

$\beta = P(Y=5) = f_Y(5) = \binom{100}{5} 0{,}1^5 (1-0{,}1)^{100-5}$

- T_n = # δοκιμων μεχρι n-οστη επιτυχια

$T_n \sim NegBin(n, p)$.

Π.χ. 3) Ριψεις κερματος

γ = αναμενομενος αριθμος ριψεων μεχρι να εμφανιστει κεφαλη για 8η φορα.

Z = # $\underbrace{\text{ριψεων}}_{\text{δοκιμων}}$ μεχρι να εμφανιστει $\underbrace{\text{κεφαλη}}_{\text{επιτυχια με } p=1/2}$ για 8η φορα.

$Z \sim NegBin(\overset{8}{n}, \overset{1/2}{p})$

$\gamma = E[Z] = 8 \frac{1}{\frac{1}{2}} = 16.$

- $X \sim Poisson(\lambda)$

Η X ειναι προσεγγιση της $Bin(n, p_n)$ οταν το n ειναι αρκετα μεγαλο και $n \cdot p_n = \lambda$

(ειναι πολυ καλη προσεγγιση οταν $n \geq 20$ και $np_n \leq 10$)

Π.χ 2) συνεχεια...

$Y \sim Bin(100, 0{,}1) \rightarrow np = 100 \cdot 0{,}1$

Η $W \sim Poisson(10)$ ειναι προσεγγιση της Y

$\beta = P(Y=5) \simeq P(W=5) = f_W(5) = e^{-10} \frac{10^5}{5!}$

Πειραμα Τυχης: Καλπη με N σφαιριδια

m λευκα και N-m μαυρα

Επιλεγω n σφαιριδια χωρις επανατοποθετηση.

X = # λευκων αναμεσα στα n που εξηγαγε

$X \sim HyperGeom(n, N, m)$

Π.χ. 4) 100 μαθητες $\begin{cases} \nearrow 60 \text{ διαβασμενοι} \\ \searrow 40 \text{ αδιαβαστοι} \end{cases}$

Επιλεγω 10 μαθητές, ποια η πιθανοτητα να βρω 3 διαβασμενους;

X = # διαβασμενων αναμεσα στους 10

$X \sim \text{Hyper Geom}(10, 100, 60)$

$$P(X=3) = f_X(3) = \frac{\binom{60}{3}\binom{40}{7}}{\binom{100}{10}}$$

Πειραμα τυχης: Καλπη με σφαιριδια $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Επιλεγω ενα σφαιριδιο

X = ενδειξη του σφαιριδιου

$X \sim$ Διακριτη Ομοιομορφη ριψη στο $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Ασκηση: Κατασκευαζουμε εναν αριθμο $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ επιλεγοντας τα δεκαδικα ψηφια απο αριστερα προς δεξια το ενα μετα το αλλο απο το $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ομοιομορφα.

παιρνω μεση τιμή

Στον αριθμο που σχηματιζεται, ποιος ειναι ο αναμενομενος αριθμος δεκαδικων ψηφιων.

α) μεχρι την εμφανιση για 1η φορα του ψηφιου 7;

β) » » » » » ενος εκ των 2, 4, 6;

γ) μεχρι την 8η εμφανιση του ψηφιου 8;

δ) πριν την 4η εμφανιση ζυγου αριθμου;

ε) μεχρι την εμφανιση και των 2 ψηφιων 3 και 5;

– Λυση –

α) X_1 = # ψηφιων μεχρι την 1η $\underbrace{\text{εμφανιση}}_{\text{επιτυχια με } p = \frac{1}{10}}$ του 7.

$X_1 \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$

$$E[X_1] = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10.$$

β) X_2 = # ψηφιων μεχρι την 1η $\underbrace{\text{εμφανιση εκ των 2, 4, 6}}_{\text{επιτυχια με } p = \frac{3}{10}}$.

$X_2 \sim \text{Geom}\left(\frac{3}{10}\right)$

$$E[X_2] = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3}$$

(γ) X_3 = # ψηφίων μεχρι την 8η $\underbrace{\text{εμφανιση του 8}}_{\text{επιτυχία με } p=\frac{1}{10}}$

$X_3 \sim NegBin\left(8, \frac{1}{10}\right)$

$E[X_3] = 8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{10}} = 80.$

δ) X_4 = # ψηφίων πριν την 4η $\underbrace{\text{εμφανιση ζυγου αριθμου}}_{\text{επιτυχια με } p=\frac{1}{2}}$ } Δεν μπορουμε να βρουμε ποια κατανομή ακολουθει

Αρα,

X_4 = # ψηφίων μεχρι την 4η $\underbrace{\text{εμφανιση ζυγου αριθμου}}_{\text{επιτυχια με } p=\frac{1}{2}}$

$X_4 \sim NegBin\left(4, \frac{1}{2}\right)$

$E[X_4 - 1] = E[X_4] - 1 = 4\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 8 - 1 = 7.$

ε) Y = # ψηφίων μεχρι να εμφανιστει ενα εκ των 3, 5

Z = # ψηφίων μετα την εμφανιση ενος εκ των 3 κ 5 μεχρι την εμφανιση του αλλου.

$Y \sim Geom\left(\frac{1}{5}\right)$

$Z \sim Geom\left(\frac{1}{10}\right)$

$E[Y] + E[Z] = \frac{1}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{\frac{1}{10}} = 5 + 10 = 15$

Ασκηση: Μια μηχανη παράγει ενα βιομηχανικό προϊον. Η πιθανοτητα να ειναι ελαττωματικό προϊον ειναι p. Εστω οτι τα προϊοντα τοποθετουνται σε κουτιά με ν μοναδες σε καθε κουτι και μετα σε χαρτουια με κ κουτια καθε χαρτονι

α) Αν ενα κουτί επιλεγεται τυχαια, ποια ειναι η πιθανοτητα να εχει x ελαττωματικές μοναδες;

β) Αν ενα χαρτονι επιλεγεται τυχαια, ποια ειναι η πιθανοτητα να εχει y κουτια με τουλαχιστον μια ελαττωματική μοναδα το καθενα;

γ) Ποια η πιθανοτητα η μηχανή να παραγει z μοναδες μεχρι την εμφανιση του n-οστου ελαττωματικού;

- Λυση -

α) $X = \#$ ελαττωματικων μεσα στο κουτι απο τις ν μοναδες.

$X \sim Bin(\nu, p)$

$P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}, \quad x = 0, \dots, \nu$

β) $Y = \#$ κουτιων με $\underbrace{\text{τουλαχιστον μια ελαττωματικη μοναδα}}_{\text{επιτυχια με } p_1 = 1-(1-p)^\nu}$

$Y \sim Bin(k, p_1)$

$P(Y=y) = \binom{k}{y} p_1^y (1-p_1)^{k-y}$

γ) $Z = \#$ μοναδων μεχρι το n-οστό $\underbrace{\text{ελαττωματικό}}_{\text{επιτυχια με } p}$

$Z \sim NegBin(n, p)$

$P(Z=z) = \binom{z-1}{n-1} p^n (1-p)^{z-n}$

γ) Ποια η πιθανοτητα η μηχανή να παραγει z μοναδες μεχρι την εμφανιση του n-οστου ελαττωματικού;

-Λυση-

α) $X = \#$ ελαττωματικων μεσα στο κουτι απο τις ν μοναδες

$X \sim Bin(\nu, p)$

$P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, \quad x = 0, \dots, \nu$

β) $Y = \#$ κουτιων με $\underbrace{\text{τουλαχιστον μια ελαττωματικη μοναδα}}_{\text{επιτυχια με } p_1 = 1-(1-p)^{\nu}}$

$Y \sim Bin(k, p_1)$

$P(Y=y) = \binom{k}{y} p_1^y (1-p_1)^{k-y}$

γ) $Z = \#$ μοναδων μεχρι το n-οστό $\underbrace{\text{ελαττωματικό}}_{\text{επιτυχια με } p}$

$Z \sim NegBin(n, p)$

$P(Z=z) = \binom{z-1}{n-1} p^n (1-p)^{z-n}$

02/12/19 - 18ο μαθημα

Συνεχεις Τυχαιες Μεταβλητες

Ορισμος: (Συνεχης τ.μ. & Συναρτηση Πυκνοτητας Πιθανοτητας)
Εστω X μια τυχαια μεταβλητη. Η X ονομάζεται συνεχης τ.μ. αν υπαρχει $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ τετοια ωστε $P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$.

Η συναρτηση f_X λεγεται συναρτηση πυκνοτητας πιθανοτητας της X (σ.π.π) ή συναρτηση πυκνοτητας της X.

Ιδιοτητες σ.π.π.

Εστω X μια συνεχης τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x) = P(X \le x)$
Τοτε ισχυουν τα παρακατω:

1) $f_X(x) = 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = P(X \in \mathbb{R}) = 1$
3) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$.

Αν θελω $P(a < X \le b)$ τοτε υπολογιζω το ιδιο ολοκληρωμα
Δηλαδή $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(\alpha < X < b)$

4) $P(X = x) = \int_x^x f_X(u)\,du = 0.$

5) Σχεσεις σ.κ με σ.π.π.

- $F_X(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

- $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

6) Η $f_X(x)$ μπορει να ειναι > 1.

7) $\cancel{f_X(X) = P(X=x)}$ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ομως $f_X(X) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{P(X \le x+h) - P(X \le x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{P(x < X \le x+h)}{h}$

Οποτε για μικρό $h = 0$. $P(x < X \le x + h) = f_X(x)\cdot h + o(h)$ οπου $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0.$

Π.χ: αν $f_X(3) = 2$, τοτε:
$P(3 < X \le 3 + 0{,}001) \simeq f_X(3)\cdot 0{,}001 = 2 \cdot 0{,}00.1 = 0{,}002$

Ορισμοι: (Μεση Τιμη, Διασπορα, Τυπική Αποκλιση).
Εστω X μια συνεχης τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$.
Ορίζουμε: ως μεση τιμη της X την: $\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx}$

υπο την προϋποθεση οτι $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\,dx < \infty$.

Επισης, ορίζουμε: ως διασπορα της X την $\boxed{Var[X] = E[(X - E[X])^2]}$
και ως τυπική αποκλιση την:
$\boxed{\sigma_X = SD[X] = \sqrt{Var[X]}}$ υπο την προϋποθεση οτι η $E[(X - E[X])^2]$ υπαρχει.

Ιδιοτητες:

Εστω X μια συνεχης τμ. με σ.π.π. $f_X(x)$ μ.τ. $E[X]$, διασπορα $Var[X]$ και τυπικη αποκλιση σ_X.

1) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx.$

2) $E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta.$

3) $Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X].$

4) $\sigma_{\alpha X + \beta} = |\alpha| \cdot \sigma_X$

5) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Ασκηση 1: Εστω X συνεχης τμ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & x \in [0,2] \\ 0, & \text{αλλιως.} \end{cases}$

Να βρεθουν:
i) η σταθερα c
ii) η $P(X>1)$
iii) η $E[X]$
iv) η $Var[X]$.

-Λυση-

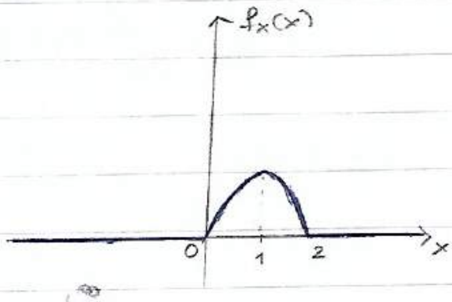
i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^2 c(4x - 2x^2)\,dx + \int_2^{+\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 1 \Rightarrow c\left[\left(8 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{8}{3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \frac{3}{8}.$

Αρα $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2), & x \in [0,2] \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$



ii) $P(X>1) = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)\,dx + \int_2^{\infty} 0\,dx =$

$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{3}{8}\left[\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{8}\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\right.$

iii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{2} x\,\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx + \int_{2}^{+\infty} x\,0\,dx =$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 (4x^2-2x^3)\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left[\left(\frac{32}{3}-\frac{16}{2}\right)-0\right] =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{16}{6} = 1$$

iv) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\,0\,dx + \int_0^2 x^2\,\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx + \int_2^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 (4x^3-2x^4)\,dx = \frac{3}{8}\left[x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left[\left(16-\frac{2}{5}\cdot 32\right)-0\right] =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{16}{3} = \frac{6}{5}$$

Οποτε $Var[X] = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$

Ορισμος: (Συναρτηση Επιβιωσης ή Αξιοπιστιας)
Εστω X μια τυχαια μεταβλητη με συναρτηση κατανομης $F_X(x), x\in\mathbb{R}$. Η συναρτηση επιβιωσης ή αξιοπιστιας ειναι η
$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x),\ x\in\mathbb{R}$.

▷ Εναλλακτικός τυπος για υπολογισμο μεσης τιμης μιας συνεχούς και μη αρνητικής τ.μ:
Εστω οτι η X ειναι μια συνεχης τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$ τετοια ωστε $f_X(x) = 0,\ x\in(-\infty,0)$.
Αν $\bar{F}_X(x)$ η συναρτηση επιβιωσης του X και $F_X(x)$ η συναρτηση κατανομης της X τοτε:

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx = \int_0^{\infty} \bar{F}_X(x)\,dx$$

- Αποδειξη:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx \underset{\text{αρνητικη}}{\overset{X \text{ μη}}{=}} \int_0^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left(\int_0^x 1\,dy\right) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{x} f_X(x)\,dy\,dx \overset{0\le y\le x<\infty}{=} \int_0^{\infty}\underbrace{\left(\int_y^{\infty} f_X(x)\,dx\right)}_{P[X>y] = \bar{F}_X(y)} dy = \int_0^{\infty}\bar{F}_X(y)\,dy$$

Ασκηση 2:

X συνεχη τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{αλλιως} \end{cases}$ και $Y = X^2$

Να βρεθουν: i) c iv) $F_Y(y)$

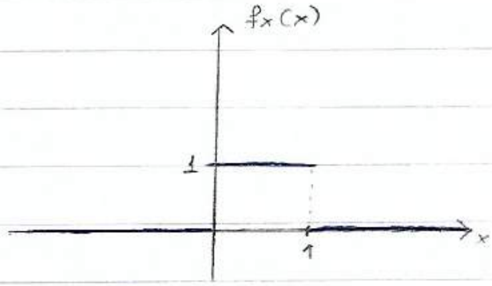
ii) $F_X(x)$ v) $f_Y(y)$

iii) $E[X]$ vi) $E[Y]$.

- Λυση -

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 c\,dx + \int_1^{\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [cx]_0^1 = 1 \Rightarrow c = 1$



Αρα $f_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{αλλιως} \end{cases}$

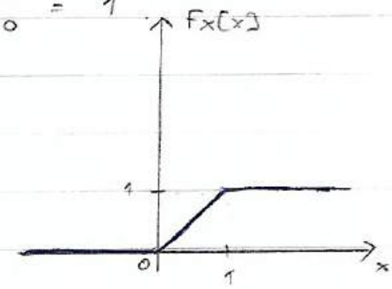
ii) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

- Αν $x \in (-\infty, 0)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$

- Αν $x \in [0,1]$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^x 1\,du = [u]_0^x = x$

- Αν $x \in (1, +\infty)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^1 1\,du + \int_1^{+\infty} 0\,du =$

$= [u]_0^1 = 1$



Αρα $F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ x & , x \in [0,1] \\ 1 & , x \in (1, \infty) \end{cases}$

iii) $E[X] \xrightarrow[\text{αρνητικη}]{X \text{ μη}} \int_0^{\infty} \overline{F}_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^{\infty} (1-1)\,dx =$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

04/12/19 - 19ο μαθημα

Συνεχεια ασκησης 2 απο προηγ. μαθημα

iv) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) & , y \ge 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & , y<0 \\ F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y})}_{=0} & , y \ge 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \sqrt{y} & , \sqrt{y} \in [0,1] \\ 1 & , \sqrt{y} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \sqrt{y} & , y \in [0,1] \\ 1 & , y > 1 \end{cases}$

v) $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ 1/2\sqrt{y} & , y \in (0,1) \\ 0 & , y>1 \end{cases}$

(Στο $y=0$ κ' $y=1$ μπορω να δωσω αυθαιρετες τιμες.

πχ

$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \le 0 \\ 1/2\sqrt{y} & , y \in (0,1) \\ 0 & , y \ge 1 \end{cases}$)

vi) $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{0} y \cdot 0\, dy + \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy + \int_1^{\infty} y \cdot 0\, dy =$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$

β' τροπος: Εφ' οσον η Y ειναι μη αρνητικη

$E[Y] = \int_0^{\infty} \bar{F}_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y))\, dy = \int_0^1 (1-\sqrt{y})\, dy + \int_1^{\infty} (1-1)\, dy =$

$= \left[y - \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$.

γ' τροπος: $E[Y] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx =$

$= \int_{-\infty}^{0} x^2\, 0\, dx + \int_0^1 x^2\, 1\, dx + \int_1^{+\infty} x^2\, 0\, dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Γραμμικη Συναρτηση συνεχους τ.μ.

Εστω X μια συνεχης τμ με σπп $f_X(x)$, σ.κ. $F_X(x)$ με $E[X]$ διασπορα $Var[X]$ και τα σ_X.

Αν $Y = aX + b$, $a \neq 0$ τοτε
- $E[Y] = E[aX+b] = aE[X]+b$
- $Var[Y] = Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
- $\sigma_Y = \sigma_{(aX+b)} = |a|\sigma_X$.

$$\rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX+b \leq y) = \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & , a>0 \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & , a<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & , a>0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & , a<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a} & , a>0. \\ -f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a} & , a<0. \end{cases} = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

Ειδικες Συνεχεις κατανομες

- Συνεχεις Ομοιομορφη κατανομη:

Πειραμα τυχης: Τυχαια επιλογη σημειου απο διαστημα $[a,b]$.

X: σημειο που επιλεχθηκε

X συνεχης τ.μ.

$X \sim Uniform([a,b])$

- $f_X(x) = \begin{cases} 0 , & x \notin [a,b] \\ c , & x \in [a,b]. \end{cases}$

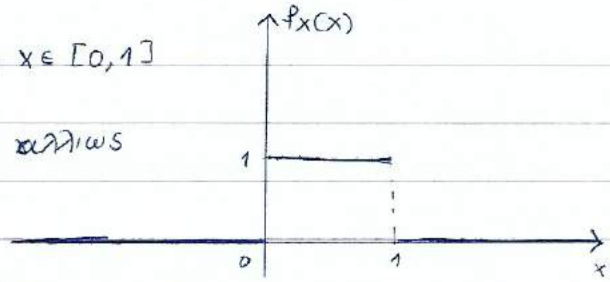
Υπολογισμοι για $X \sim Uniform([0,1])$

- $f_X(x)$

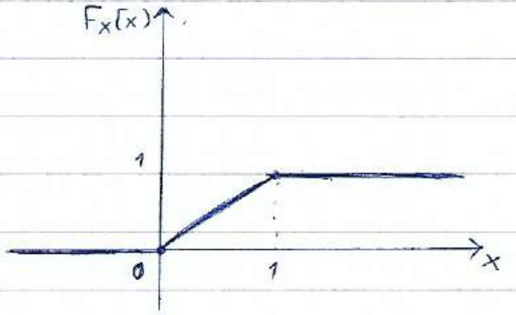
$X \sim Uniform([0,1]) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} c , & x \in [0,1] \\ 0 , & \text{αλλιως} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 c\,dx + \int_1^{\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow [cx]_0^1 = 1 \Rightarrow c = X$$

Αρα $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & αλλιως \end{cases}$



- $\underline{F_X(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \;\overset{\text{ασκηση 2(u)}}{\underset{\text{προηγ. μαθημ.}}{=}}\; \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x\in[0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$



- $\underline{E[X^n]}$, $n = 1, 2, \dots$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^n\, 0\,dx + \int_0^1 x^n\cdot 1\,dx + \int_1^{\infty} x^n\, 0\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

- $\underline{E[X]} = E[X^1] = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

- $\underline{Var[X]} = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

<u>Υπολογισμοι για $Y \sim Uniform([a,b])$</u>

Εστω $X \sim Uniform([0,1])$. Η $Y = a + (b-a)X$ ακολουθει ομοιομορφη κατανομη στο $[a,b]$ ($Y \sim Uniform([a,b])$)

- Αποδειξη -

Αρκει νδο $f_Y(y) = \begin{cases} c, & y \in [a,b] \\ 0, & y \notin [a,b] \end{cases}$

Εχουμε $Y = a + (b-a)X$ και $X \sim Uniform([0,1]) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & αλλιως \end{cases}$

Αρα $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a} = \begin{cases} 1\,\frac{1}{b-a}, & 0 \le \frac{y-a}{b-a} \le 1 \\ 0, & αλλιως \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha} , & \alpha \le y \le b \\ 0 , & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma. \end{cases}$$

▪ $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-\alpha}{b-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 , & \frac{y-\alpha}{b-\alpha} < 0 \\ \frac{y-\alpha}{b-\alpha} , & 0 \le \frac{y-\alpha}{b-\alpha} \le 1 \\ 1 , & \frac{y-\alpha}{b-\alpha} > 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 , & y < \alpha \\ \frac{y-\alpha}{b-\alpha} , & \alpha \le y \le b \\ 1 , & y > b. \end{cases}$$

▪ $E[Y] = E[\alpha + (b-\alpha)X] = (b-\alpha)E[X] + \alpha = (b-\alpha)\frac{1}{2} + \alpha = \frac{\alpha+b}{2}$

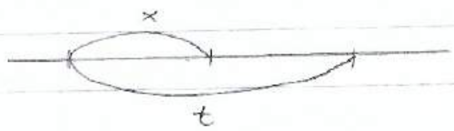
▪ $Var[Y] = Var[\alpha + (b-\alpha)X] = (b-\alpha)^2 Var[X] = \frac{(b-\alpha)^2}{12}$.

Ασκηση: -Ραντεβου-

X: χρονος που απαιτειται για να φτασω στον τοπο του ραντεβου.

X συνεχης τμ. με τιμες στο $[0, \infty)$.

t: ποσο νωριτερα θα ξεκινησω (μεταβλητη απόφασης)



c: κοστος ανα χρ.μοναδα που φτανω νωριτερα.

k: -//- -//- -//- -//- αργοτερα.

Να βρεθει το t^* που ελαχιστοποιειται το μεσο κοστος.

-Λυση-

$c(t)$: μεσο κοστος αν ξεκινησω t χρον.μονάδες πριν το ραντεβου

$g_t(X)$: κοστος αν ξεκινησω t χρ.μοναδες νωριτερα

↳ τυχαια μεταβλητη συναρτηση της τμ.X

$$g_t(x) = \begin{cases} c(t-x) , & x \le t \\ k(x-t) , & x > t \end{cases}$$

$$C(t) = E[g_t(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g_t(x)\cdot 0 \cdot dx + \int_0^t c(t-x) f_X(x)\,dx + \int_t^{\infty} k(x-t) f_X(x)\,dx$$

$$= ct \underbrace{\int_0^t f_X(x)\,dx}_{F_X(t)} - \int_0^t x f_X(x)\,dx + k\int_t^{\infty} x f_X(x)\,dx - kt\underbrace{\int_t^{\infty} f_X(x)\,dx}_{1-F_X(t)}$$

$$c'(t) = cF_X(t) + ct f_X(t) - ct f_X(t) - kt f_X(t) - k(1-F_X(t)) + kt f_X(t)$$

$$= (c+k)F_X(t) - k$$

$$c''(t) = (c+k) f_X(t) \geq 0$$

$c'(t) = 0$

$(c+k)F_X(t) = k \Rightarrow F_X(t) = \frac{k}{c+k}$

Βελτιστο t^* $\quad F_X(t^*) = \frac{k}{c+k}$

Π.χ. Αν $X \sim Uniform[25, 40]$ & $k = 3c$

τοτε $F_X(t^*) = \frac{3c}{c+3c} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t^* - 25}{40-25} = \frac{3}{4} \Rightarrow t^* = 36{,}25$ min

09/12/19 – 20ο μαθημα

Ορισμος (Ρυθμος βλαβης / αποτυχιας / κινδυνου)

Εστω μια συνεχης τμ X που ειναι μη αρνητικη και δινει χρονο ζωης ή χρονο μεχρι να συμβει κατι.

Η συναρτηση $\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h}$, $t > 0$.

δεδομενου οτι εζησε μεχρι t, ποια η πιθανοτητα να πεθανει στο $(t, t+h]$?

ονομαζεται ρυθμος βλαβης ή ρυθμος αποτυχιας ή ρυθμος κινδυνου (failure / hazard rate).

$$C(t) = E[g_t(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g_t(x) \cdot 0 \cdot dx + \int_0^t c(t-x) f_X(x)\,dx + \int_t^{\infty} k(x-t) f_X(x)\,dx$$

$$= c\,t \underbrace{\int_0^t f_X(x)\,dx}_{F_X(t)} - \int_0^t x f_X(x)\,dx + k\int_t^{\infty} x f_X(x)\,dx - k\,t \underbrace{\int_t^{\infty} f_X(x)\,dx}_{1-F_X(t)}$$

$$C'(t) = c F_X(t) + c t f_X(t) - c t f_X(t) - k t f_X(t) - k(1 - F_X(t)) + k t f_X(t)$$

$$= (c+k) F_X(t) - k$$

$$C''(t) = (c+k) f_X(t) \geq 0$$

$$C'(t) = 0$$

$$(c+k) F_X(t) = k \Rightarrow F_X(t) = \frac{k}{c+k}$$

Βελτιστο t^* $\quad F_X(t^*) = \dfrac{k}{c+k}$

Πχ. Αν $X \sim Uniform[25, 40]$ & $k = 3c$

τοτε $F_X(t^*) = \dfrac{3c}{c+3c} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

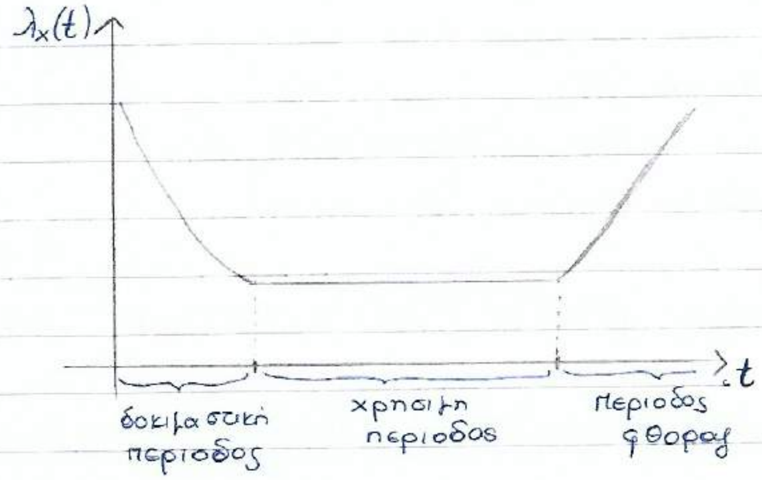
$$\Rightarrow \frac{t^* - 25}{40-25} = \frac{3}{4} \Rightarrow t^* = 36{,}25 \text{ min}$$

09/12/19 – 20ο μαθημα

Ορισμος: (Ρυθμος βλαβης / αποτυχιας / κινδυνου)
Εστω μια συνεχης τμ X που ειναι μη αρνητικη και δινει χρονο ζωης η χρονο μεχρι να συμβει κατι.
Η συναρτηση $\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h}$, $t > 0$.

δεδομενου οτι εζησε μεχρι t, ποια η πιθανοτητα να πεθανει στο $(t, t+h]$;

ονομαζεται ρυθμος βλαβης η ρυθμος αποτυχιας η ρυθμος κινδυνου (failure / hazard rate).



Σχέση $\lambda_X(t)$ με σ.π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$

Έστω μια συνεχής και μη αρνητική τ.μ X. Τότε:

$$\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_X(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h, X > t)}{h \cdot P(X > t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_X(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h)}{h\, P(X > t)} \Leftrightarrow \lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}}, \quad t > 0$$

Ειδικές Συνεχείς κατανομές

1) Εκθετική κατανομή $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \text{ συνεχής} \\ X \text{ μη αρνητική} \\ \lambda_X(t) = \lambda, \ t > 0 \end{array} \right\}$

• $F_X(x)$

X μη αρνητική $\Leftrightarrow F_X(x) = 0$, $x < 0$.

Για $x \geq 0$, $\lambda_X(x) = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \lambda \quad (1)$

Έστω $g(x) = 1 - F_X(x)$, $x \geq 0$.

Τότε $g'(x) = -f_X(x)$, $x \geq 0$

Άρα $(1) \Leftrightarrow \dfrac{-g'(x)}{g(x)} = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx} \log(g(x)) = -\lambda$

$\Leftrightarrow \quad \log(g(x)) = -\lambda x + c \quad (\Sigma)$

Για $x=0$: $g(0) = 1 - F_X(0) = 1 - P(X \leq 0) = 1$

$(\Sigma) \overset{x=0}{\Rightarrow} \log(g(0)) = -\lambda \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $\log(g(x)) = -\lambda x \Leftrightarrow g(x) = e^{-\lambda x} \Leftrightarrow 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$

Άρα $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

- $f_X(x)$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0. \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- $E[X^n]$, $n \in \mathbb{N}$ ← n-τάξης ροπή

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^n \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^n \cdot (-e^{-\lambda x})' dx = \underbrace{[-x^n e^{-\lambda x}]_0^{\infty}}_{\to 0} + \int_0^{+\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{n}{\lambda} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$$

Οπότε: $E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον αναδρομικό τύπο:

$$E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \frac{n}{\lambda} \frac{n-1}{\lambda} E[X^{n-2}] = \frac{n(n-1)(n-2)}{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda} E[X^{n-3}] = \ldots$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{\lambda^n} E[X^{\overset{1}{n-n}}] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$

• $E[X]$

$$E[X] = E[X^1] = \frac{1!}{\lambda^1} = \frac{1}{\lambda}$$

• $Var[X]$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Αμνημονη Ιδιοτητα Εκθετικης Κατανομης

Εστω $X \sim Exp(\lambda)$, τοτε

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s), \quad t, s > 0$$

-Αποδειξη-

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(t)} =$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{1 - 1 + e^{-\lambda(t+s)}}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} =$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda s}) = 1 - F_X(s) = P(X > s)$$

Ιδιοτητα Εκθετικης Καταvομης

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow Y = aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right), \quad a > 0$$

-Αποδειξη-

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{a}\right) = F_X\left(\frac{y}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{y}{a} < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \frac{y}{a}}, & \frac{y}{a} \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{a} y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

Αρα $Y \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

② → **Κατανομη Γαμμα**: $X \sim Gamma(a, \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ συνεχης} \\ X \text{ μη αρνητικη} \\ f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

$a > 0, \lambda > 0$.

• Συναρτηση Γ(α)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Ιδιοτητες:

1) $\Gamma(1) = 1$

-αποδειξη-

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

2) Για $\alpha > 1$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ (4)

-αποδειξη-

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} (-e^{-x})' dx =$$

$$= \left[-x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha-1)x^{\alpha-2} \cdot e^{-x} dx =$$

$$= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2} \cdot e^{-x} dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

3) Για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\Gamma(n) = (n-1)!$

-αποδειξη-

$$(4) \overset{\alpha=n}{\Longrightarrow} \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \underset{\alpha=n-1}{\overset{(4)\ \text{για}}{=\!=\!=}} (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \underset{\alpha=n-2}{\overset{(4)\ \text{για}}{=\!=\!=}}$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) = \dots =$$

$$= (n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \cdot 1 = (n-1)!$$

• $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c\, x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty c \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} dx = 1 \Rightarrow c\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$\underset{dx = \frac{dy}{\lambda}}{\overset{y=\lambda x}{\Longrightarrow}} c\int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{c}{\lambda^\alpha} \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy}_{\Gamma(\alpha).} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda^\alpha}\Gamma(\alpha) = 1 \Rightarrow c = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

Αρα $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0. \\ \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

11/12/19 - 21ο μαθημα

Συνεχεια Μελετης Καταvομης Gamma (a, λ).

Υπενθυμιση!!

$X \sim Gamma(a,\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

$a>0, \lambda>0$

οπου $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \ a > 0.$

Ιδιοτητες της $\Gamma(a)$

Ιδ. 1) $\Gamma(1) = 1$

Ιδ. 2) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \ a>1$

Ιδ 3) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad , n \geq 2.$

Υπολογισμοι για $X \sim Gamma(a,\lambda)$

- $E[X^n] \quad , n = 1, 2, 3, \ldots$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) \, dx = \int_0^{+\infty} x^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{n+a-1} e^{-\lambda x}}_{\substack{\text{μοιαζει με} \\ \text{σ.π.π. της Gamma } (n+a,\lambda)}} dx =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^{a+n}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{a+n}}{\Gamma(n+a)} x^{n+a-1} e^{-\lambda x} dx}_{\substack{\text{τωρα εχω την} \\ \text{σππ της Gamma}(n+a,\lambda)}} =$$

$$= \frac{\lambda^a \, \Gamma(n+a)}{\Gamma(a) \cdot \lambda^{a+n}} \overset{\text{ιδ.2}}{=} \frac{(n+a-1)\Gamma(n+a-1)}{\Gamma(a) \cdot \lambda^n} \overset{\text{ιδ.2}}{=}$$

$$= \frac{(n+a-1)(n+a-2)\Gamma(n+a-2)}{\Gamma(a) \cdot \lambda^n} \overset{\text{ιδ2}}{=} \ldots = \frac{(n+a-1)(n+a-2)\ldots a\Gamma(a)}{\Gamma(a) \cdot \lambda^n} =$$

Αρα $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0. \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

11/12/19 - 21ο μαθημα

Συνεχεια Μελετης Καταvομης Gamma (α,λ).

Υπενθυμιση!!

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha,\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$
$\alpha>0, \lambda>0$

οπου $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha>0.$

Ιδιοτητες της $\Gamma(\alpha)$

Ιδ. 1) $\Gamma(1) = 1$

Ιδ. 2) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1), \alpha>1$

Ιδ 3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \geq 2$.

Υπολογισμοι για $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\lambda)$

- $E[X^n]$, $n = 1,2,3,\ldots$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x}}_{\text{μοιαζει με σ.π.π. της Gamma}(n+\alpha,\lambda)} dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^{\alpha+n}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha+n}}{\Gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}_{\text{τωρα εχω την σππ της Gamma}(n+\alpha,\lambda)} =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^{\alpha+n}} \overset{\text{Ιδ.2}}{=} \frac{(n+\alpha-1)\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^n} \overset{\text{Ιδ.2}}{=}$$

$$= \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\Gamma(n+\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^n} \overset{\text{Ιδ2}}{=} \ldots = \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^n} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(n+\alpha-2)(n+\alpha-1)}{\lambda^n}$$

Άρα, $E[X^n] = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(n+\alpha-2)(n+\alpha-1)}{\lambda^n}$.

- $E[X]$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

- $Var[X]$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

3 → Κατανομή Erlang (n,λ)

Η Erlang (n,λ) ειναι η Gamma (n,λ) οπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$X \sim Erlang(n,\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{\lambda^n}{\underset{\Gamma(n)}{\overset{\shortparallel}{(n-1)!}}} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\lambda > 0$

Η $X \sim Erlang(n,\lambda)$ ειναι αθροισμα n - $Exp(\lambda)$

Ασκηση: Ο χρονος ζωης ενος λαπτηρα ακολουθει Exp
Ο μεσος χρονος ζωης του λαπτηρα ειναι 100 ωρες.

α) $p = P$(ο λαπτηρας να ειναι ενεργος μετα απο 100 ωρες λειτουργιας) = ?

β) Εστω ενα πολυφωτο με 6 τετοιους λαπτηρες

β1) $p_1 = P$(μετα απο 100 ωρες λειτουργιας του πολυφωτου να ειναι δυο λαμπτηρες ενεργοι) = ?

β2) E[# λαμπτηρων που ειναι ενεργοι μετα απο 100 ωρες λειτουργιας του πολυφωτου] = ?

-Λυση-

(α) X = χρονος ζωης του λαμπτηρα

$X \sim Exp(\lambda)$

$E[X] = 100 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

οποτε $X \sim Exp(1/100)$

Τοτε $p = P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) =$

$= 1 - F_X(100) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 100}) =$

$= e^{-1}$

$X \sim Exp(\lambda)$

$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$E[X] = 1/\lambda$

$Var[X] = 1/\lambda^2$

(β) Y = # λαμπτηρων που ειναι ενεργος μετα απο 100 ωρες λειτουργιας

επιτυχια με πιθ επιτ. $p = e^{-1}$

$Y \sim Bin(6, e^{-1})$

β₁) $p_1 = P(Y = 2) = \binom{6}{2} (e^{-1})^2 (1 - e^{-1})^4$

β₂) ζητουμενη μεση τιμη $= E[Y] = 6 \cdot e^{-1}$

$Y \sim Bin(n,p)$

$f_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$

$E[Y] = np$

$Var[Y] = np(1-p)$

4 → Κανονικη Κατανομη

Ορισμος: Εστω μια τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$

Λεμε οτι η X ακολουθει κανονικη κατανομη με παραμετρους μ και σ^2 $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$

Ειδικα, η $Z \sim N(0,1)$ λεμε οτι ακολουθει την τυποποιημενη κανονικη κατανομη με σ.π.π $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ z \in \mathbb{R}$ και

σ.κ. $\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

- Βασικο Ολοκληρωμα για υπολογισμους στην κανονικη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Υπενθυμιση!!

Αν X συνεχης τ.μ και $Y = aX + b$, $a \neq 0$, τοτε:

$E[Y] = a\,E[X] + b$

$Var[Y] = a^2\, Var[X]$

$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Γραμμικη Συναρτηση Κανονικης τ.μ

Θεωρημα: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τοτε $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

- αποδειξη -

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Εχουμε: $Y = aX + b$, τοτε $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}}$

$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}}$ Οποτε: $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

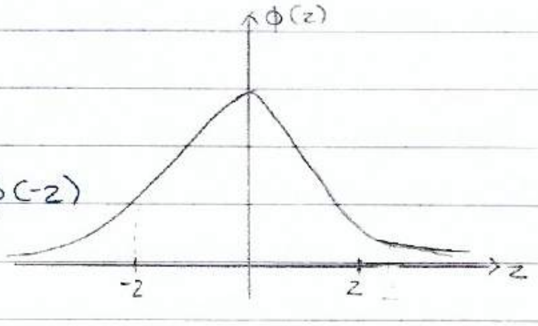
(*) Πορισμα: 1) Αν $Z \sim N(0,1)$, τοτε $X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

2) Αν $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ τοτε $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Ιδιοτητες για $\phi(z)$ και $\Phi(z)$ (για την τυποποιημενη κανονικη)

1) $\phi(z) > 0$, $z \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\,dz = 1$



3) $\phi(z)$ αρτια $\Leftrightarrow \phi(z) = \phi(-z)$

4) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

5) $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

13/12/19 - 22ο μαθημα

Συνεχεια μελετης κανονικης κατανομης

Υπενθυμιση!!

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow$ σ.π.π. της X $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

- $Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow$ σ.π.π. της Z $\quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \ z \in \mathbb{R}$ οπου $\phi(z)$ αρτια

  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

  κ̧ σ.κ. της Z $\quad \Phi(z)$ $\quad$ με $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

- $Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Υπολογισμος για $Z \sim N(0,1)$

- $E[Z]$

  $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z\,\phi(z)\,dz$

  $\phi(z)$ αρτια $\Rightarrow z\phi(z)$ περιττη $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz = 0 \Rightarrow \boxed{E[Z] = 0}$

- $Var[Z]$

  $Var[Z] = E[Z^2] - (\underbrace{E[Z]}_{\to 0})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz =$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(-e^{-z^2/2}\right)' dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{\left[-z e^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\to 0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right]$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = 1$. Αρα $\boxed{Var[Z] = 1}$

Υπολογισμος για $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Εστω $Z \sim N(0,1)$ και $X = \sigma Z + \mu$. Τοτε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Οποτε: $E[X] = E[\sigma Z + \mu] = \sigma E[Z] + \mu = \sigma 0 + \mu = \mu$. Αρα $E[X] = \mu$

και

$Var[X] = Var[\sigma Z + \mu] = \sigma^2 Var[Z] = \sigma^2$

Παραδειγμα:

$X \sim N(2, 9)$

i) $E[X] =$;

ii) $Var[X] =$;

iii) $\sigma_x =$;

iv) $P(1 \leq X \leq 4) =$; ως συναρτηση της $\Phi(z)$, $z > 0$

v) $P(X = 2) =$;

vi) $P(X > 2) =$;

- Λυση -

i) $E[X] = 2$

ii) $Var[X] = 9$

iii) $\sigma_x = \sqrt{9} = 3$

iv) $P(1 \leq X \leq 4) = (= F_x(4) - F_x(1)$ ομως δεν γνωριζω κλειστο τυπο) αρα οχι με αυτον τον τυπο

$$= P\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z \sim (0,1)} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{1-2}{3} \leq Z \leq \frac{4-2}{3}\right) =$$

θελουμε $z > 0$

$$= P\left(-\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{2}{3}\right) = \Phi(2/3) - \Phi(-1/3) =$$

$$= \Phi(2/3) - \left(1 - \Phi(1/3)\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \Phi(0{,}67) + \Phi(0{,}33) - 1$$

$\Phi(z)$:

z	0	0,01	0,02	0,03	...	0,06 ...	0,09
0							
0,1							
0,2							
0,3				$\boxed{\Phi(0{,}33)}$			
0,4							

v) $P(X = 2) = 0$, διοτι X συνεχής τμ.

vi) $P(X > 2) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Κεντρικό οριακό Θεωρημα De Moivre - Laplace

- De Moivre (1733)

Εστω $X \sim Bin(n, 1/2)$

Η Χ προσεγγίζεται απο την $N(n/2, n/4)$ για $n > 30$

- Laplace (1812)

Εστω $X \sim Bin(n,p)$

Η Χ προσεγγίζεται για μεγαλο n απο την $N(np, np(1-p))$.

Ασκησεις:

Ασκηση 1: X συνεχης τμ με σππ $f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases} = cx(3-x)\mathbb{1}_{[0,3]}(x$

i) $c = ;$

ii) $F_X(x) = ;$

iii) $E[X] = ;$

iv) $Var[X] = ;$

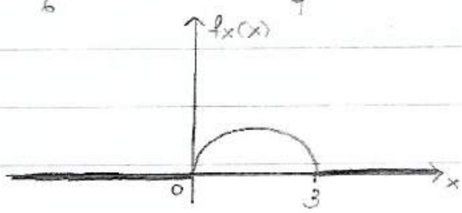
v) $P(X \ge 1 \mid X \in [-1,2]) = ;$

- Λυση -

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 cx(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c\left[\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - 0\right] = 1 \Rightarrow c\,\frac{27}{6} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$

Αρα $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x(3-x), & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$



ii) Για $x < 0$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$

Για $x > 3$ $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^3 \frac{2}{3}u(3-u)\,du + \int_3^x 0\,du =$

$= \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}u^2 - \frac{u^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{9}\left[\frac{27}{6}\right] = 1$

Για $x \in [0,3]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^x \frac{2}{9}u(3-u)\,du =$

$= \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}u^2 - \frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$

Αρα $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right), & x \in [0,3] \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

iii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^3 x\,\frac{2}{9}\,x(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 =$

$= \frac{2}{9}\left(27 - \frac{81}{4}\right) = \frac{2}{9}\,\frac{27}{4} = \frac{3}{2}$

iv) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

$= \int_0^3 x^2\,\frac{2}{9}\,x(3-x)\,dx - \frac{9}{4} = \frac{2}{9}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \frac{9}{4} = \dots = \frac{9}{20}.$

v) $P(X \geq 1 \mid X \in [-1,2]) = \frac{P(X\geq 1,\, X\in[-1,2])}{P(X\in[-1,2])} = \frac{P(1\leq X\leq 2)}{P(-1\leq X\leq 2)} = \frac{P(X\leq 2) - P(X<1)}{P(X\leq 2) - P(X\leq -1)} =$

$= \frac{F_X(2) - F_X(1)}{F_X(2) - F_X(-1)} = \dots = \frac{13}{20}$

Ασκηση 2: Β ενζιναδικο γεμιζει τη δεξαμενη 1 φορα την εβδομαδα

X = ογκος πωλησεων σε μια βδομαδα

X συνεχης τμ. με σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & x\in[0,1] \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$, x σε χιλιαδες lt

Ποια η χωρητικοτητα της δεξαμενης (c) ωστε η πιθαν. εξαντλησης των αποθεματων να ειναι $\frac{1}{100}$;

-Λυση-

$P(X>c) = \frac{1}{100}$ (1)

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \quad, & x\in[0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$

Για $x\in[0,1]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^x 5(1-u)^4\,du =$

$= \left[-(1-u)^5\right]_0^x = -(1-x)^5 - (-1) = 1 - (1-x)^5$

$(1) \Rightarrow P(X>c) = \frac{1}{100} \Rightarrow 1 - P(X\leq c) = \frac{1}{100} \Rightarrow 1 - F_X(c) = \frac{1}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_X(c) = \frac{99}{100} \overset{c\in[0,1]}{\Rightarrow} 1 - (1-c)^5 = \frac{99}{100} \Rightarrow (1-c)^5 = \frac{1}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{100}}$

16/12/19 - 23ο μαθημα

Ασκηση: Εστω X συνεχης τμ. με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{2x^2}$ $\{|x| \geq 1\}$

$Y = X^2$ σπп $f_Y(y) = ?$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & x \geq 1, \text{ ή } x \leq -1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$Y = X^2$ αρα $Y \geq 1$ αρα $f_Y(y) = 0$, $y < 1$

- $y \geq 1$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\left[F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \ldots\right]$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right]}{dy} = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2y}\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2y}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\frac{1}{y^{3/2}} \text{ για } y \geq 1$$

Ασκηση: X συνεχης τμ. με σпп $f_X(x) = e^{-x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}$

$$Y = \begin{cases} X, & X \leq 1 \\ \frac{1}{X}, & X > 1 \end{cases}$$

Να βρεθει η σпп $f_Y(y)$.

- Λυση -

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

$X > 0$ τοτε $Y > 0$

Αν $X \leq 1$, $Y = X$, $Y \leq 1$

$\underbrace{X > 1}$, $Y = \frac{1}{X}$ $\quad Y < 1$

$Y \in (0, 1]$

$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P(Y \leq y, X \leq 1) + P(Y \leq y, X > 1) =$

$= P(X \leq y, X \leq 1) + P(\frac{1}{X} \leq y, X > 1) = P(X \leq y) + P(X \geq \frac{1}{y})$

$F_Y(y) = F_X(y) + 1 - F_X(\frac{1}{y})$

$f_Y(y) = f_X(y) - f_X(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} + e^{-\frac{1}{y}}\frac{1}{y^2} & y \in (0, 1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ασκηση: (Θεωρια)

Εστω X τ.μ. , $X \sim N(0,1)$

Να δειξαμε οτι $X^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Λυση -

$X \sim N(0,1)$ $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$Y \sim G(a, \beta)$ $f_Y(y) = \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-\beta y}$, $y > 0$

$Y = X^2$ Y τιμες στο $[0, +\infty)$.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y) = \varphi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} - \varphi(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) =$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y/2}$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

Ασκηση: Το βαρος X ενος κουτιου αναψυκτικου ακολουθει κανονικη κατανομη με μεση τιμη $\mu = 330$ και τυπικη αποκλιση $\sigma = 10$ gr.

Βρειτε: α) την πιθ. ενα τυχαια επιλ. κουτι να εχει βαρος μεγαλ. απο 340gr

β) - " - - " - - " - - " - - " - μικροτ. απο 310gr

γ) - " - - " - - " - - " - - " - μεταξυ 310 ≤ 340

δ) την πιθ. οπου μεταξυ 10 τυχαια επιλεγμενων κουτιων το πολυ 8 απο αυτα να εχουν βαρος μικρ. απο 340gr

ε) το αναμενομενο # κουτιων μεταξυ 10 τυχαια επιλεγμ. με βαρος μικροτ. απο 340 gr

-Λυση-

X = βαρος ενος τυχαια επιλ. κουτιού

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 330$, $\sigma^2 = 100$, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

α) $P(X > 340) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{340-330}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1)$

β) $P(X < 310) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{310-330}{10}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$

γ) $P(310 < X < 340) = P\left(\frac{310-330}{10} < \frac{X-\mu}{10} < \frac{340-330}{10}\right)$

$= P(-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2) \simeq 0,818.$

δ) N = # κουτιών στο 10 τυχαια επιλεγμενα κουτια που εχουν βαρος μικροτερο απο 340 gr

$N \sim Binomial(10, p)$ $\quad p = P(X < 340) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{340-330}{10}\right) = \Phi(1) \simeq 0,84$

$P(N \leq 8) = 1 - P(N > 8) = 1 - P(N=9) - P(N=10) = 1 - 10p^9(1-p) - p^{10}$

$E(N) = n \cdot p \simeq 10 \cdot 0,84 = 8,4$

Ασκηση: Η τ.μ. X ακολουθει εκθετικη κατανομη με παραμετρο $\theta > 0$. Η X παριστανει το χρονο ζωης (σε ετη) ενος ηλεκτρικού εξαρτηματος. Ο κατασκευαστης προσφερει εγγυηση α = 2 ετων. και αυτο ειναι το μεγιστο α ωστε τουλαχιστον το 95% των εξαρτημάτων να λειτουργουν τουλαχιστον μεχρι το χρονο εγγυησης (ωστε να μην χρειαστει αντικατασταση). Ποιος ειναι ο μεσος χρονος ζωης των εξαρτηματων και η διασπορα του χρονου ζωης;

- Λυση -

$X \sim exp(\theta)$

$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0$

$E(X) = \frac{1}{\theta}$

$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$

$P(X \geq a) \geq 0,95$

$\int_a^{\infty} \theta \cdot e^{-\theta x} dx \geq 0,95 \Rightarrow e^{-\theta a} \geq 0,95 \Rightarrow -\theta a \geq \log 0,95 \Rightarrow a \leq -\frac{\log 0,95}{\theta}$

$a = -\frac{\log 0,95}{\theta}$

$a = 2 \Rightarrow -\frac{\log 0,95}{\theta} = 2 \Rightarrow \theta \simeq 0,0256.$

$E[X] = \frac{1}{\theta} = 39$

$V(X) = \frac{1}{\theta^2} \simeq 1520$

Ασκηση: $f(x) = \begin{cases} c\,(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$c = ;$

Συναρτηση κατανομης της X.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} c\,(1-x^2)dx = 1 \Rightarrow c\,\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

αρα $f_X = \frac{3}{4}(1-x^2)$, $-1 < x < 1$

$F_X(x) = 0$, $x < -1$

$F_X(x) = 1$, $x \geq 1$

Για $x \in [-1, 1)$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt =$

$= -\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

18/12/19 - 24ο μαθημα

Ορισμος (Δισδιαστατη τμ)

Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενας χωρος πιθανοτητας. Το ζευγος συναρτησεων (X, Y) $\Omega \to \mathbb{R}^2$ με την ιδιοτητα $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ονομαζεται δισδιαστατη τμ.

Διαισθητικο, μια δισδιαστατη τμ ειναι ενα ζευγος αριθμησιμων χαρακτηριστικών ενος πειραματος τυχης.

$P(X > a) \geq 0{,}95$

$\int_a^\infty \theta \cdot e^{-\theta x} dx \geq 0{,}95 \Rightarrow e^{-\theta a} \geq 0{,}95 \Rightarrow -\theta a \geq \log 0{,}95 \Rightarrow a \leq -\frac{\log 0{,}95}{\theta}$

$a = -\frac{\log 0{,}95}{\theta}$

$a = 2 \Rightarrow -\frac{\log 0{,}95}{\theta} = 2 \Rightarrow \theta \simeq 0{,}0256.$

$E[X] = \frac{1}{\theta} = 39$

$V(X) = \frac{1}{\theta^2} \simeq 1520$

Ασκηση: $f(x) = \begin{cases} c\,(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$c = ;$

Συναρτηση κατανομης της x.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} c\,(1-x^2)dx = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

αρα $f_X = \frac{3}{4}(1-x^2)$, $-1 < x < 1$

$F_X(x) = 0$, $x < -1$

$F_X(x) = 1$, $x \geq 1$

Για $x \in (-1, 1)$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt =$

$= -\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

18/12/19 - 24ο μαθημα

Ορισμος (Διδιαστατη τμ)

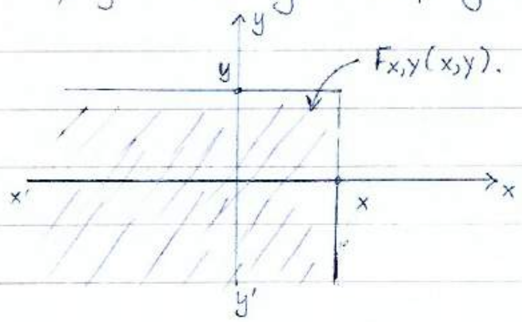
Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενας χωρος πιθανοτητας. Το ζευγος συναρτησεων (X,Y) $\Omega \to \mathbb{R}^2$ με την ιδιοτητα $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ονομαζεται διδιάστατη τμ.

Διαισθητικα, μια διδιαστατη τμ ειναι ενα ζευγος αριθμησιμων χαρακτηριστικών ενος πειραματος τυχης.

Οριοµοι (Απο κοινου σ κ, περιθώριο σ κ)

Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενος χωρος πιθανοτητας και (X,Y) δ. διαστατη τμ οριομενη στον Ω. Η συναρτηση $F_{X,Y}(x,y)$ η οποια οριζεται ως $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, ονομαζεται <u>απο κοινου (αθροιστικη) συναρτηση κατανομης των X και Y</u>

Επιπλέον, η $F_X(x) = P(X \leq x)$ ονομαζεται <u>περιθωρια σ.κ της X</u> και η $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ ονομαζεται <u>περιθωρια σ κ της Y</u>



<u>Ιδιοτητες $F_{X,Y}(x,y)$</u>

1) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$

2) $\lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $y \in \mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

5) $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

6) Η $F_{X,Y}(x,y)$ αυξουσα ως προς x και ως προς y

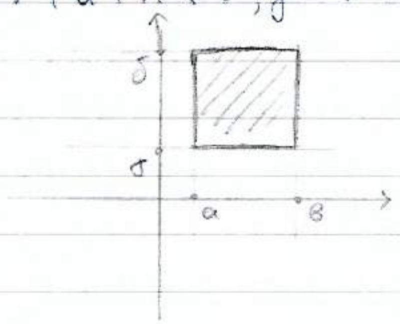
7) $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x_0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{y \to y_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,y_0)$, $x \in \mathbb{R}$

8) $\lim\limits_{x \to x_0^-} F_{X,Y}(x,y) = P(X < x_0, Y \leq y_0)$

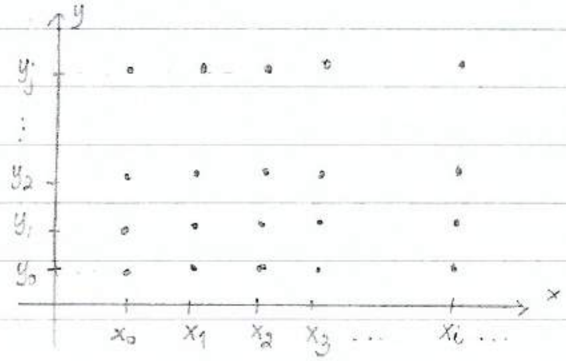
$\lim\limits_{y \to y_0^-} F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y < y_0)$

9) $P(\alpha < X \leq \beta, \gamma < Y \leq \delta) = F_{X,Y}(\beta,\delta) - F_{X,Y}(\alpha,\delta) - F_{X,Y}(\beta,\gamma) + F_{X,Y}(\alpha,\gamma)$



Ορισμοι (Διακριτη Διδιαστατη τμ, απο κοινου σ.π, περιθωρια σ.π)

Μια διδιαστατη τ.μ. (X,Y) ονομαζεται <u>διακριτη</u> αν παιρνει με πιθανοτητα 1 αριθμησιμο πληθος τιμων. $\{(x_0,y_0), (x_0,y_1), (y_1,x_0), (x_1,y_1)\ldots, (x_i,y_j), \ldots\}$



Η συναρτηση $P_{X,Y}(x_i,y_j) = P(X=x_i, Y=y_j)$ $i,j \in \{0,1,2,\ldots\}$ ονομαζεται απο κοινου συναρτηση πιθανοτητας των X και Y

Επιπλεον, η $P_X(x_i) = P(X=x_i)$ ονομαζεται περιθωρια σ.π της X και η $P_Y(y_j) = P(Y=y_j)$ ονομαζεται περιθωρια σ.π. της Y.

Ιδιοτητες $P_{X,Y}(x,y)$

1) $P_{X,Y}(x_i,y_j) \geq 0$, $i,j = 0,1,2,\ldots$

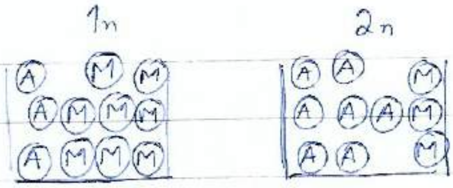
2) $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P_{X,Y}(x_i,y_j) = 1$

3) $\sum_{i=0}^{\infty} P_{X,Y}(x_i,y_j) = P(Y=y_j) = P_Y(y_j)$, $j=0,1,2,\ldots$

4) $\sum_{j=0}^{\infty} P_{X,Y}(x_i,y_j) = P(X=x_i) = P_X(x_i)$ $i=0,1,2,\ldots$

Παραδειγμα:

Πειραμα τυχης: Εχω 2 καλπες:



1ο σταδιο: Επιλογη καλπης

2ο σταδιο: Εξαγω 2 σφαιριδια χωρις επανεθεση

X = # καλπη που επιλεχθηκε

Y = # A (ασπρων) σφαιριδιων που εξηχθησαν.

Η (X,Y) ειναι διακριτη γιατι οι δυνατες τιμες ειναι:

(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)

$P_{X,Y}(x,y)$, $x = 1,2$, $y = 0,1,2$

x \ y	0	1	2	$P_X(x)$
1	7/30	7/30	1/30	1/2
2	1/30	7/30	7/30	1/2
$P_Y(y)$	8/30	14/30	8/30	1

$P_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{2}\,\frac{7}{10}\,\frac{6}{9} = \frac{7}{30}$

$P_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\,\frac{7}{9} + \frac{7}{10}\,\frac{3}{9}\right) = \frac{7}{30}$

$P_{X,Y}(1,2) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{10}\,\frac{2}{9} = \frac{1}{30}$

$P_{X,Y}(2,0) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{10}\,\frac{2}{9} = \frac{1}{30}$

$P_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10}\,\frac{3}{9} + \frac{3}{10}\,\frac{7}{9}\right) = \frac{7}{30}$

$P_{X,Y}(2,2) = \frac{1}{2}\,\frac{7}{10}\,\frac{6}{9} = \frac{7}{30}$

Ορισμος: (Συνεχης διδιαστατη τ.μ., απο κοινου σ.π.π, περιθωρια σ.π.π)

Μια διδιαστατη τμ (X,Y) ονομαζεται συνεχης αν υπαρχει μη αρνητική συναρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ τω. $P((x,y)\in C) = \int_C f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Η συναρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ καλειται <u>απο κοινου σ.π.π των X και Y.</u>

Επιπλεον, η $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ καλειται <u>περιθωρια σ.π.π της X</u>

και η $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ καλειται <u>περιθωρια σ.π.π της Y</u>

<u>Ιδιοτητες $f_{X,Y}(x,y)$</u>

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

3) $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, dv\, du$

4) $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

5) $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{dx \to 0^+ \\ dy \to 0^+}} \dfrac{P(x < X \leq x+dx,\ y < Y \leq y+dy)}{dx\, dy}$

6) $P(X = x_0, Y = y_0) = 0$

$P(X \in A, Y = y_0) = 0$

$P(X = x_0, Y \in A) = 0$

Παράδειγμα: (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} \cdot e^{-2y}, & x,y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

i) $c = ;$

ii) $f_X(x) = ;$

iii) $f_Y(y) = ;$

iv) $P(X > 1, Y < 1) = ;$

v) $P(X < 1) = ;$

- Λύση -

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c\, e^{-x} \cdot e^{-2y}\, dx\, dy = 1$

$1 = \int_{0}^{\infty} c\, e^{-2y} \underbrace{\left(\int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\text{σπп της } Exp(1)} dx \right)}_{=1} dy = \int_{0}^{\infty} \underbrace{c\, e^{-2y}}_{\text{μοιάζει με σπп της } Exp(2)} dy =$

$= c \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \underbrace{2\, e^{-2y}}_{\text{σπп της } Exp(2)} dy = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

ii) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{0}^{\infty} 2 \cdot e^{-x} \underbrace{e^{-2y}}_{\text{σπп της } Exp(2)} dy = e^{-x} \cdot 1 = e^{-x},\ x > 0$

iii) $f_Y(y) = \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-x} e^{-2y}\, dx = 2 e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 \cdot e^{-2y}, \ y > 0$

$Y \sim \mathcal{E}xp(2).$

iv) $P(X>1, Y<1) = \int_1^{\infty} \int_0^1 2 e^{-x} e^{-2y}\, dy\, dx = \ldots$

v) $P(X<1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$

(iii) $f_Y(y) = \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-x} e^{-2y} dx = 2 e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 \cdot e^{-2y}, y>0$

$Y \sim Exp(2)$.

iv) $P(X>1, Y<1) = \int_1^{\infty} \int_0^1 2 e^{-x} e^{-2y} dy\, dx = \ldots$

v) $P(X<1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$

20/12/19 - 25ο μαθημα

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ Σ.Π., ΣΠΠ, ΣΚ

▷ Ανεξαρτησια τμ

Ορισμος: (Δεσμευμενη σ.π.)

Εστω (X,Y) διακριτη διδιαστατη τμ με απο κοινου σπ $P_{X,Y}(x,y)$ και περιθωρια σ.π. της Y $P_Y(y)$. Οριζουμε για καθε y με $P_Y(y)>0$, τη δεσμευμενη συναρτηση πιθανοτητας της $X|Y=y$ ως

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \Rightarrow$$

$$P_{X|Y}(x,y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}.$$

(*) Η $P_{X|Y}(\ldots|y)$ εχει τις ιδιοτητες της συναρτησης πιθανοτητας, δηλαδη:

1. $P_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x$
2. $\sum_x P_{X|Y}(x|y) = 1$

▷ Ανεξαρτησια διακριτων τμ

Εστω X, Y διακριτες τμ

X, Y ανεξαρτητες $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall A, B : P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \quad (1)$

$\Leftrightarrow \forall x, y \quad P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y) \quad (2)$

$\Leftrightarrow \forall x, y$ με $P_Y(y)>0 : P_{X|Y}(x|y) = P_X(x) \quad (3)$

$\Leftrightarrow \forall y, x$ με $P_X(x)>0 : P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y) \quad (4)$

-Αποδειξη-

(1) ⇒ (2): Εστω $\forall A, B: P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$

Αν $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$, τοτε (1) ⇒ $P(X \in \{x\}, Y \in \{y\}) = P(X \in \{x\}) P(Y \in \{y\})$

$\Rightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x) P(Y=y) \Rightarrow P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Εστω $\forall x,y \; P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y) \Leftrightarrow$

$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y) \quad (*)$

$$P(X\in A, Y\in B) = \sum_{(x,y)\in A\times B} P(X=x, Y=y) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P(X=x, Y=y) \overset{(*)}{=} \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P(X=x)P(Y=y)$$

$$= \sum_{x\in A} P(X=x) \sum_{y\in B} P(Y=y) = P(Y\in B) \sum_{x\in A} P(X=x) =$$

$$= P(Y\in B)\,P(X\in A).$$

Ορισμος (Δεσμευμενη Σππ)

Εστω (X,Y) συνεχης διδιαστατη τμ με απο κοινου σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)$ και περιθωρια σ.π.π της Y $f_Y(y)$. Ορίζουμε για καθε y με $f_Y(y)>0$, τη δεσμευμενη σππ της $X|Y=y$ ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

* Η $f_{X|Y}(\cdot|y)$ εχει τις γνωστές ιδιοτητες της σππ, δηλαδη

1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$

▷ Ανεξαρτητες συνεχεις τμ

Εστω X,Y συνεχεις τμ

X,Y ανεξαρτητες $\overset{\text{ορο}}{\Leftrightarrow} \forall A,B: P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

$\Leftrightarrow \forall x,y: f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$\Leftrightarrow \forall x,y$ με $f_Y(y)>0$, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

$\Leftrightarrow \forall y,x$ με $f_X(x)>0$, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$.

Παραδειγμα. (X,Y) συνεχης με $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0\leq x\leq y\leq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

i) $c=$; iv) $f_{X|Y}(x|y)=$;

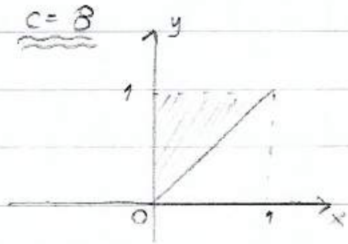
ii) $f_X(x)=$; v) $f_{Y|X}(y|x)=$;

iii) $f_Y(y)=$; vi) X,Y ανεξαρτητες?

i) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^y cxy\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 cy\left(\int_0^y x\,dx\right)dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 cy\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 cy\frac{y^2}{2}\,dy = 1 \Rightarrow c\left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow \underline{c=8}$$



Αρα $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & \text{διαφορ.}\end{cases}$

ii) $f_X(x)=0$, για $x\notin[0,1]$

Για $x\in[0,1]$ $\quad f_X(x)=\int_x^1 8xy\,dy = 8x\left(\frac{y^2}{2}\right)_x^1 = 8x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=4x(1-x^2)$

Αρα $f_X(x)=\begin{cases} 4x(1-x^2), & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$

iii) $f_Y(y)=0$, για $y\notin[0,1]$

Για $y\in[0,1]$: $\quad f_Y(y)=\int_0^y 8xy\,dx = 8y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = 4y^3$

Αρα $f_Y(y)=\begin{cases} 4y^3, & y\in[0,1] \\ 0, & \text{αλλιως}\end{cases}$

iv) Για να οριζεται πρεπει $y\in(0,1]$

Για $x\in[0,1]$ $\quad f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{8xy}{4y^3} & x\in[0,y] \\ \dfrac{0}{4y^3} & x\notin[0,y]\end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x}{y^2}, & x\in[0,y] \\ 0, & x\notin[0,y]\end{cases}$

v) Για $x\in(0,1)$ $\quad f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{8xy}{4x(1-x^2)}, & y\in[x,1] \\ \dfrac{0}{4x(1-x^2)}, & y\notin[x,1]\end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2y}{1-x^2} & y\in[x,1] \\ 0, & \text{αλλιως}\end{cases}$

(vi) X, Y οχι ανεξαρτητες διοτι $f_{X|Y}(x|y)\ne f_X(x)$.

Ορισμος (Δεσμευμενη σκ)

Εστω (X,Y) διακριτη δισδιαστατη τμ. Οριζουμε για y με $P_Y(y)>0$, τη δεσμευμενη σκ της $X|Y=y$ ως

$$F_{X|Y}(x|y)=\sum_{t\le x} P_{X|Y}(t|y)$$

Εστω (X,Y) συνεχη δισδιαστατη τμ. Οριζουμε για y με $f_Y(y)>0$, τη δεσμευμενη σκ της $X|Y=y$ ως $\quad F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)\,dt$

* Η $F_{X|Y}(\cdot \mid y)$ εχει τις ιδιοτητες της σ.κ

▷ Ανεξαρτησια τ.μ

Εστω X, Y τμ.

Οι X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \forall x,y \ F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

$\Leftrightarrow \ F_{X|Y}(x \mid y) = F_X(x)$

$\Leftrightarrow \ F_{Y|X}(y \mid x) = F_Y(y).$

Κριτηριο Ανεξαρτησιας

- Εστω X, Y διακριτές τμ

X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \exists f(x), g(y) : P_{X,Y}(x,y) = f(x)\, g(y).$

- Εστω X, Y συνεχεις τμ

X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \exists f(x), g(y) : f_{X,Y}(x,y) = f(x)\, g(y)$

Παραδειγμα

- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases} = 4xy\, 1_{\{x \in [0,1]\}}\, 1_{\{y \in [0,1]\}}$

$= \underbrace{4x\, 1_{\{x \in [0,1]\}}}_{f(x)} \ \underbrace{y\, 1_{\{y \in [0,1]\}}}_{g(y)}$

Αρα X, Y ανεξαρτητες

- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

23/12/19 - 2ο μαθημα

Κατανομη Αθροισμάτων τ.μ.

▷ Αθροισμα διακριτων τμ

Εστω (X, Y) διακριτη 2-διαστατη τμ με από κοινου σ.π $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ και περιθωρια σ.π $P_X(x) = P(X=x)$ και $P_Y(y) = P(Y=y)$

* Η $F_{X|Y}(\cdot\,|y)$ εχει τις ιδιοτητες της σ.κ

▷ Ανεξαρτησια τ.μ

Εστω X, Y τ.μ.

Οι X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \forall x,y \quad F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$

$\Leftrightarrow \quad F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)$

$\Leftrightarrow \quad F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y).$

Κριτηριο Ανεξαρτησιας

- Εστω X, Y διακριτές τ.μ

X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \exists f(x), g(y) : P_{X,Y}(x,y) = f(x)\, g(y).$

- Εστω X, Y συνεχεις τ.μ

X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow \exists f(x), g(y) : f_{X,Y}(x,y) = f(x)\, g(y)$

Παραδειγμα

- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases} = 4xy\, 1_{\{x \in [0,1]\}}\, 1_{\{y \in [0,1]\}}$

$= \underbrace{4x\, 1_{\{x \in [0,1]\}}}_{f(x)}\ \underbrace{y\, 1_{\{y \in [0,1]\}}}_{g(y)}$

Αρα X, Y ανεξαρτητες

- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

23/12/19 - 2ο μαθημα

Κατανομή Αθροισμάτων τ.μ.

▷ Αθροισμα διακριτων τμ

Εστω (X,Y) διακριτη 2-διαστατη τ.μ. με από κοινου σ.π $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ και περιθωρια σ.π $P_X(x) = P(X=x)$ και $P_Y(y) = P(Y=y)$

Αν $Z=X+Y$ τοτε $P_Z(z)=P(Z=z)=P(X+Y=z)=\sum_x P(X+Y=z, X=x)$
$=\sum_x P(X=x, Y=z-x) \Rightarrow$
$P_Z(z)=\sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$ ή $P_Z(z)=\sum_y P_{X,Y}(z-y, y)$.

Αν X,Y ανεξαρτητες, τοτε $P_Z(z)=\sum_x P_X(x)P_Y(z-x)=\sum_y P_X(z-y)P_Y(y)$.

▷ Αθροισμα συνεχων τ.μ.

Εστω (X,Y) συνεχής 2-διαστατης τ.μ. με απο κοινου σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$ και περιθωριες σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Αν $Z=X+Y$, τοτε:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy$$

Αν X,Y ανεξαρτητες:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy.$$

Παραδειγμα:

$X\sim \text{Uniform}([0,1])$

$Y\sim \text{Uniform}([0,1])$

X,Y ανεξαρτητες

$Z=X+Y\sim\ ?$

-Λυση-

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{αλλιως}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{αλλιως}\end{cases}$$

Προσοχη! Οι δυνατες τιμες της Z ειναι στο [0,2]

- $f_Z(z)=0\quad \forall z\notin[0,2]$.
- Για $z\in[0,2]$: $f_Z(z)\overset{X,Y\text{ ανεξ.}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx\overset{(*)}{=}$

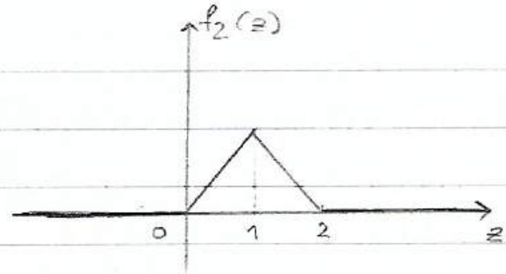
(*) $f_X(x)\neq 0 \Rightarrow x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1$ (1)

$f_Y(z-x)\neq 0\Rightarrow z-x\in[0,1]\Rightarrow 0\le z-x\le 1\Rightarrow -z\le -x\le 1-z\Rightarrow z-1\le x\le z$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \max(0,z-1)\le x\le \min(1,z)$

$$=\int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1\cdot 1\,dx=[x]_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)}=\min(1,z)-\max(0,z-1)=\begin{cases}z, & z\in[0,1]\\ 1-(z-1), & z\in(1,2]\end{cases}$$

Άρα $f_z(z) = \begin{cases} z & , z \in [0,1] \\ 2-z & , z \in (1,2] \\ 0 & , z \notin [0,2]. \end{cases}$



Παράδειγμα:

$X \sim$ Poisson (λ)

$Y \sim$ Poisson (μ)

X, Y ανεξάρτητες

1) $Z = X + Y \sim ?$

- Λύση -

$P_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

$P_Y(y) = e^{-\mu} \dfrac{\mu^y}{y!}$, $y = 0, 1, 2, \ldots$

Η Z παίρνει τιμές $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Αν $z = 0, 1, 2, \ldots$

$P_Z(z) \overset{X,Y \text{ ανεξ}}{=} \sum_x P_X(x) P_Y(z-x) \overset{*}{=}$

$\left(\begin{array}{l} * \quad P_X(x) > 0 \Rightarrow \{x \geq 0, x \text{ ακέραιος}\} \\ \quad P_Y(z-x) > 0 = \{z - x \geq 0, z-x \text{ ακέρ}\} \Rightarrow \{x \leq z, x \text{ ακέρ}\} \end{array} \right)$

$$= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \lambda^x \mu^{z-x} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \underbrace{\sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda^x \mu^{z-x}}_{(\lambda+\mu)^z} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^z}{z!}$$

Άρα $Z \sim$ Poisson $(\lambda + \mu)$

2) $(X \mid Z = z) \sim ?$

Ορίζεται για z με $P_Z(z) > 0$, δηλαδή για $z = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_{X|Z}(x|z) = \frac{P_{X,Z}(x,z)}{P_Z(z)} = \frac{P(X=x, Z=z)}{P_Z(z)} = \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P_Z(z)} =$$

$$= \frac{P(X=x) P(Y=z-x)}{P_Z(z)} \overset{*}{=}$$

$$\left(\begin{array}{l} * \quad P(X=x) \neq 0 \Rightarrow \{x \geq 0,\ x \text{ ακεραιος}\} \\ \quad P(Y=z-x) \neq 0 \Rightarrow \{z-x \geq 0,\ z-x \text{ ακερ}\} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq z \text{ , x ακεραιος.} \right)$$

$$\underset{x\in\{0,1,2,\dots z\}}{=} \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-\lambda+\mu} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \frac{z!}{x!(z-x)!} \frac{\lambda^x \mu^{z-x}}{(\lambda+\mu)^z} = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}$$

$x \in \{0,1,2,\dots z\}$

Παραδειγμα 3: $X \sim Exp(\lambda)$
$Y \sim Exp(\lambda)$

X, Y ανεξαρτητα.

i) $Z = X+Y \sim ?$

ii) $(X \mid Z=z) \sim ?$

-Λυση-

i) $f_X(x) = \lambda \ e^{-\lambda x}, \ x>0$

$f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}, \ y>0$

Οι δυνατες τιμες της Z ειναι $(0,+\infty)$

Για $z \notin (0,+\infty)$, $f_Z(z) = 0$

Για $z \in (0,+\infty)$, $f_Z(z) \underset{X,Y \text{ ανεξ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \underset{(*)}{=}$

$$\left(\begin{array}{l} (*) \quad f_X(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \\ \quad\quad f_Y(z-x) > 0 \Rightarrow z-x > 0 \Rightarrow x < z \end{array} \right)$$

$$= \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(z-x)}\, dx = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z} \int_0^z e^{-\lambda x} \cdot e^{\lambda x}\, dx =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} [x]_0^z = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

Αρα $f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z \cdot e^{-\lambda z}, & z>0 \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

$Z \sim Gamma(2, \lambda)$.

ii) Οριζεται για z με $f_Z(z)>0$, δηλαδη $z \in (0,+\infty)$

Για $z \in (0,+\infty)$:

$$f_X(z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{f_{X,Y}(x, z-x)}{f_Z(z)} \underset{X,Y \text{ ανεξ}}{=}$$

$$= \frac{f_X(x)\, f_X(z-x)}{f_Z(z)} \underset{x\in(0,z)}{\overset{(*)}{=}} \frac{\lambda\, e^{-\lambda x}\, \lambda\, e^{-\lambda(z-x)}}{\lambda^2 z\, e^{-\lambda z}} = \frac{1}{z}, \quad x \in (0,z)$$

Άρα $(X \mid Z = z) \sim \text{Uniform}(0, z)$

Αναπαραγωγικές Ιδιότητες

i) $\left.\begin{array}{l} X \sim Bin(n,p) \\ Y \sim Bin(m,p) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim Bin(n+m, p)$

ii) $\left.\begin{array}{l} X \sim Poisson(\lambda) \\ Y \sim Poisson(\mu) \\ X, Y \text{ ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

iii) $\left.\begin{array}{l} X \sim NegBin(n,p) \\ Y \sim NegBin(m,p) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim NegBin(n+m, p)$

iv) $\left.\begin{array}{l} X \sim Geom(p) \\ Y \sim Geom(p). \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim NegBin(2, p)$

v) $$\left.\begin{array}{l} X \sim Gamma\,(a, \lambda) \\ Y \sim Gamma\,(b, \lambda) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim Gamma\,(a+b, \lambda)$$

vi) $$\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ Y \sim Exp(\lambda) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim Gamma\,(2, \lambda)$$

vii) $$\left.\begin{array}{l} X \sim N\,(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N\,(\mu_2, \sigma_2^2) \\ Y, X \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim N\,(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

08/01/2020 - 27ο μαθημα

Ιδιοτητες Μεσης Τιμης

$E_1)$ $E[aX+b] = aE[X]+b$

$E_2)$ $E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_X(x) & , \text{αν } X \text{ διακριτη με σπ } P_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx & , \text{αν } X \text{ συνεχης με σππ } f_X(x). \end{cases}$

$E_3)$ $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$

$E_4)$ $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$

$E_5)$ $E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y) & , \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτη με σπ } P_{X,Y}(x,y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dy\, dx & , \text{αν } (X,Y) \text{ συνεχης με σππ } f_{X,Y}(x,y) \end{cases}$

$E_6)$ $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$

Γενικευση: $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$.

Πορισμα: $E[a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n + b] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \dots + a_nE[X_n] + b$

$E_7)$ Αν X,Y ανεξαρτητες $\Rightarrow E[X\cdot Y] = E[X]\, E[Y]$

Γενικευση: Αν $X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξαρτητες $\Rightarrow E[X_1 X_2 \dots X_n] = E[X_1]E[X_2]\dots E[X_n]$

$E_8)$ Αν A ενα ενδεχομενο και 1_A η δεικτρια τμ.

$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$

τοτε $E[1_A] = P(A)$.

- Αποδειξεις -

$E_3)$ Εστω X διακριτη τμ. με σ.π. $P_X(x)$.

Τοτε $E[X] = \sum_x x P_X(x)$. εφ'οσον $X \geq 0$, εχουμε οτι $P_X(X)=0$ για $x<0$

Αρα $E[X] = \sum_{x\geq 0} x P_X(x) \geq 0$. Αναλογα για συνεχεις τμ.

$E_4)$ $a \leq X \leq b \Rightarrow \begin{cases} a \leq X \\ X \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X-a \geq 0 \\ b-X \geq 0 \end{cases} \overset{E_3}{\Rightarrow} \begin{cases} E[X-a] \geq 0 \\ E[b-X] \geq 0 \end{cases}$

$\overset{E_1}{\Rightarrow} \begin{cases} E[X]-a \geq 0 \\ b-E[X] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$

E5) Εστω (X,Y) μια τμ με απο κοινου σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
και $Z = g(X,Y)$.

$$E[g(X,Y)] = E[Z] = \sum_z z P_Z(z)$$

Ομως, $P_Z(z) = P(Z=z) = \sum_{\substack{(x,y)\\ g(x,y)=z}} P(X=x, Y=y) = \sum_{\substack{(x,y)\\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$

Αρα, $E[g(X,Y)] = \sum_z z \sum_{\substack{(x,y)\\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y) = \sum_z \sum_{\substack{(x,y)\\ g(x,y)=z}} z P_{X,Y}(x,y) =$

$$= \sum_z \sum_{\substack{(x,y)\\ g(x,y)=z}} g(x,y) P_{X,Y}(x,y) = \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y).$$

E6) Εστω (X,Y) διακριτη δισδιαστατη τμ με σπ. $P_{X,Y}(x,y)$ και
$g(X,Y) = X+Y$

$$E[X+Y] = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y) = \sum_x \sum_y (x+y) P_{X,Y}(x,y) =$$

$$= \sum_x \sum_y x P_{X,Y}(x,y) + \sum_x \sum_y y P_{X,Y}(x,y) =$$

$$= \sum_x x \sum_y P_{X,Y}(x,y) + \sum_y y \sum_x P_{X,Y}(x,y) = \sum_x x P_X(x) + \sum_y y P_Y(x)$$

$$= E[X] + E[Y].$$

E7) Εστω (X,Y) διακριτη 2-διαστατη τμ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$.
Εφ'οσον X, Y ανεξαρτητες $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$.
Εστω $g(X,Y) = XY$

$$E[XY] = E[g(X,Y)] \overset{E5)}{=} \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ}}{=} \sum_x \sum_y xy P_X(x) P_Y(y) = \sum_x x P_X(x) \sum_y y P_Y(y) = E[X]E[Y].$$

E8). $E[1_A] = 0\, P(1_A = 0) + 1\, P(1_A = 1) = P(1_A = 1) = P(A)$.

Παρατηρησεις!!
1) # $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ δεν ισχυει παντα!
παραδειγμα: Εστω (X,Y) με σπ $P_{X,Y}(x,y)$ που δινεται απο τον

πινακα:

$x \backslash y$	0	1	$P_X(x)$
0	0	$1/3$	$1/3$
1	$1/2$	$1/6$	$2/3$
$P_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	

$E[X] = 0\, P_X(0) + 1\, P_X(1) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1\, \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$E[Y] = 0\, P_Y(0) + 1\, P_Y(1) = 0 \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$E[XY] = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} xy\, P_{X,Y}(x,y) = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1\, \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Αρα $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.

2) $E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X,Y$ ανεξαρτητες.

παραδειγμα: Εστω X τμ. με $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

και $Y = \begin{cases} 1, & αν\ X = 0 \\ 0, & αν\ X \neq 0. \end{cases}$

Αρα η σ.π. της (XY) δινεται απο:

$x \backslash y$	0	1	$P_X(x)$
-1	$1/3$	0	$1/3$
0	0	$1/3$	$1/3$
1	$1/3$	0	$1/3$
$P_Y(y)$	$2/3$	$1/3$.	

$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$

$E[Y] = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1\, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$E[XY] = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} \sum_{y=0}^{1} xy\, P_{X,Y}(x,y) =$

$= -1\, 0\, \frac{1}{3} + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

Οποτε $E[XY] = 0 = E[X]E[Y]$ αλλα X,Y εξαρτημενες.

Ασκηση (Το προβλημα του ταιριασματος)

n ανθρωπους

n καπελα

καθενας διαλεγει 1 καπελο στην τυχη.

$X = \#$ ανθρωπων που βρηκαν το σωστο καπελο.

$E[X] = ?$

-Λυση-

Εστω A_i = το ενδεχομενο το i-ατομο να διαλεξει το καπελο του

και $1_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{, αν το } i\text{-ατομο βρηκε το καπελο του} \\ 0 & \text{, αλλιως} \end{cases}$ $i = 1, \dots, n$.

Τοτε $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$

Αρα $E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}] \overset{E_6)}{=} \sum_{i=1}^{n} E[1_{A_i}] \overset{E_8)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Ομως $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ Αρα $E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} n = 1$

Ορισμος: (Συνδιακυμανση)

Εστω (X,Y) μια διδιαστατη τ.μ. Οριζουμε ως συνδιακυμανση των X και Y την $Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$. με την προυποθεση οτι οι μεσες τιμες υπαρχουν.

10/01/2020 - **28ο μαθημα**

Συνδιακυμανση $Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$

Ιδιοτητες $Cov[X,Y]$:

c_1) $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

c_2) $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$

c_3) $Cov[X,X] = Var[X]$

c_4) $Cov[aX+b, cY+d) = ac\, Cov[X,Y]$

Δηλαδη, • Η Cov μεταβαλλεται απο μεταβολες κλιμακας

• Η Cov δεν μεταβαλλεται απο μεταβολες θεσεις.

c_5) $Cov[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov[X_i, Y_j]$.

c_6) $Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ 1 \le i, j \le n}} Cov[X_i, X_j]$.

Ασκηση (Το προβλημα του ταιριασματος)

n ανθρωπους

n καπελα

καθενας διαλεγει 1 καπελο στην τυχη.

$X = \#$ ανθρωπων που βρηκαν το σωστο καπελο.

$E[X] = ?$

-Λυση-

Εστω A_i = το ενδεχομενο το i-ατομο να διαλεξει το καπελο του

και $1_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{, αν το } i\text{-ατομο βρηκε το καπελο του} \\ 0 & \text{, αλλιως} \end{cases}$ $\quad i = 1, \dots, n.$

Τοτε $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$

Αρα $E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}] \overset{E6)}{=} \sum_{i=1}^{n} E[1_{A_i}] \overset{E8)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Ομως $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ Αρα $E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} n = 1$

Ορισμος: (Συνδιακυμανση)

Εστω (X, Y) μια διδιαστατη τ.μ. Οριζουμε ως συνδιακυμανση των X και Y την $Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$. με την προυποθεση οτι οι μεσες τιμες υπαρχουν.

10/01/2020 - 28ο μαθημα

Συνδιακυμανση $Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$

Ιδιοτητες $Cov[X,Y]$:

C_1) $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

C_2) $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$

C_3) $Cov[X,X] = Var[X]$

C_4) $Cov[aX+b, cY+d] = ac\, Cov[X,Y]$

Δηλαδη,
- Η Cov μεταβαλλεται απο μεταβολες κλιμακας
- Η Cov δεν μεταβαλλεται απο μεταβολες θεσεις.

C_5) $Cov[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov[X_i, Y_j]$.

C_6) $Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ 1 \le i, j \le n}} Cov[X_i, X_j]$.

\- Αποδείξεις -

c_1) $Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$

$= E[XY - XE[Y] - E[X]\cdot Y + E[X]E[Y]]$

$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$

$= E[XY] - E[X]E[Y].$

c_2) Προφανές

c_3) $Cov[X,X] = E[(X-E[X])(X-E[X])]$

$= E[(X-E[X])^2] = Var[X].$

c_4) $Cov[aX+b, cY+d] = E[(aX+b-E[aX+b])(cY+d-E[cY+d])]$

$= E[(aX+b-aE[X]-b)(cY+d-cE[Y]-d)]$

$= E[a(X-E[X])c(Y-E[Y])] =$

$= ac\, E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$

$= ac\, Cov[X,Y].$

c_5) $Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j - E\left[\sum_{j=1}^{m} Y_j\right]\right)\right]$

$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j - \sum_{j=1}^{m} E[Y_j]\right)\right]$

$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i]) \sum_{j=1}^{m}(Y_j - E[Y_j])\right]$

$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j])\right]$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[(X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j])] =$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov[X_i, Y_j].$

Ειδικά, $Cov[X+Y, Z] = Cov[X,Z] + Cov[Y,Z]$

c_6) $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j]$

$= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} Cov[X_i, X_j].$

Πορίσματα:

1) X, Y ανεξάρτητες $\overset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow}$ $Cov[X,Y] = 0$

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες ανά δύο $\Rightarrow$ $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i].$

Ορισμος: (Ασυσχετιστες τμ)
Δυο τμ. X, Y με $Cov[X,Y]=0$ λεγονται ασυσχετιστες.

Ορισμος: (Συντελεστης Γραμμικης) συσχετισης)
Εστω X και Y δυο τ.μ. με συνδιακυμανση $\sigma_{xy} = Cov[X,Y]$ και διασπορες $\sigma_x^2 = Var[X] > 0$ και $\sigma_y^2 = Var[Y] > 0$. Ο συντελεστης Γραμμικης) συσχετισης των X και Y συμβολιζεται με $\rho(X,Y)$ και οριζεται ως

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Ιδιοτητες

ρ_1) $\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{αν } ac>0 \\ -\rho(X,Y) & \text{αν } ac<0 \end{cases}$

Δηλαδη: ο ρ δεν μεταβαλλεται απο μεταβολες κλιμακας
— " — — " — — " — θεσης.

ρ_2) $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.
ρ_3) $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχετιστες.
ρ_4) $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ με $a>0$.
ρ_5) $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ με $a<0$

-Αποδειξεις-

ρ_1) $$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{Cov[aX+b, cY+d]}{\sqrt{Var[aX+b]}\sqrt{Var[cY+d]}} = \frac{ac\, Cov[X,Y]}{\sqrt{a^2\, Var[X]}\sqrt{c^2 Var[Y]}} =$$

$$= \frac{ac}{|a||c|} \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{αν } ac>0 \\ -\rho(X,Y) & \text{αν } ac<0 \end{cases}$$

ρ_2) $$Var\left[\frac{X}{\sigma_x} + \frac{Y}{\sigma_y}\right] \geq 0 \overset{C_6}{\Rightarrow} Var\left[\frac{X}{\sigma_x}\right] + Var\left[\frac{Y}{\sigma_y}\right] + 2\,Cov\left[\frac{X}{\sigma_x}, \frac{Y}{\sigma_y}\right] \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Var[X]}{\sigma_x^2} + \frac{Var[Y]}{\sigma_y^2} + 2\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y} \geq 0 \Rightarrow 1 + 1 + 2\rho(X,Y) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1+\rho(X,Y)) \geq 0 \Rightarrow 1+\rho(X,Y) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\rho(X,Y) \geq -1}$$

$$Var\left[\frac{X}{\sigma_x} - \frac{Y}{\sigma_y}\right] \geq 0 \Rightarrow Var\left[\frac{X}{\sigma_x}\right] + Var\left[\frac{-Y}{\sigma_y}\right] + 2\,Cov\left[\frac{X}{\sigma_x}, -\frac{Y}{\sigma_y}\right] \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Var[X]}{\sigma_X^2} + \frac{Var[Y]}{\sigma_Y^2} - 2\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+1-2\rho(X,Y) \geq 0 \Rightarrow 2(1-\rho(X,Y)) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\rho(X,Y) \leq 1}$$

p_3) $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \Leftrightarrow Cov[X,Y] = 0 \Leftrightarrow X,Y$ ασυσχετιστες

p_4) $(\Rightarrow)$: $\rho(X,Y) = 1 \Rightarrow 1-\rho(X,Y) = 0 \Rightarrow 2(1-\rho(X,Y)) = 0 \xrightarrow[\text{της } p_2]{\text{Αποδ}}$

$$Var\left[\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = 0 \Rightarrow \frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y} = c \Rightarrow Y = \underbrace{\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}_{a>0} X - \underbrace{\sigma_Y c}_{b}$$

$(\Leftarrow)$: Εστω $Y = aX+b$, $a>0$ τοτε

$$\rho(X,Y) = \rho(X, aX+b) = \frac{Cov[X, aX+b]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[aX+b]}} = \frac{a\,Cov[X,X]}{\sqrt{Var[X]}\,|a|\sqrt{Var[X]}} =$$

$$= \frac{Cov[X,X]}{Var[X]} = \frac{Var[X]}{Var[X]} = 1.$$

p_5) $(\Rightarrow)$: $\rho(X,Y) = -1 \Rightarrow \rho(X,Y)+1 = 0 \Rightarrow 2(1+\rho(X,Y)) = 0 \xrightarrow[\text{της } p_2]{\text{Αποδ}}$

$$Var\left[\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = 0 \Rightarrow \frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y} = c \Rightarrow Y = \underbrace{-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}_{a<0} X + \underbrace{c\,\sigma_Y}_{b}$$

Αρα $Y = aX+b$ με $a<0$

$(\Leftarrow)$: Εστω $Y = aX+b$ με $a<0$

$$\rho(X,Y) = \ldots = \underbrace{\frac{a}{|a|}}_{-1}\,\underbrace{\frac{Cov[X,X]}{Var[X]}}_{=1} = -1$$

Ανισοτητα Cauchy-Schwarz

$|Cov[X,Y]| \leq \sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}$

- Αποδειξη -

$$\rho(X,Y) \in [-1,1] \Rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}\right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Cov[X,Y]| \leq \sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}$$

13/01/2020 - 29ο μάθημα

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ορισμός: (Δεσμευμένη Μέση Τιμή για διακριτές τ.μ.)

Έστω (X,Y) διακριτή δισδιάστατη τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

Έστω y με $P_Y(y) = P(Y=y) > 0$ και $P_{X|Y}(x|y) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$.

Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος $Y=y$, συμβολίζεται

$E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y) = \sum_x x\, P_{X|Y}(x|y).$$

Παρατηρήσεις!

1) Η $P_{X|Y}(x|y)$ είναι συνάρτηση ως προς x

2) Η $E[X]$ είναι σταθερά

Η $E[X|Y=y]$ εξαρτάται από το y, είναι συνάρτηση του y.

Διαισθητικά, η $E[X|Y=y]$ είναι η καλύτερη πρόβλεψη για την X αν $Y=y$.

Ορισμός (Δεσμευμένη Μέση Τιμή για συνεχείς τ.μ.).

Έστω (X,Y) συνεχής δισδιάστατη τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$. Έστω y με $f_Y(y) > 0$ και $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος $Y=y$ συμβολίζεται

$E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y)$

και δίνεται από τη σχέση:

$$E[X|Y=y] = m_{X|Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx.$$

Ιδιότητες δεσμευμένης μέσης τιμής

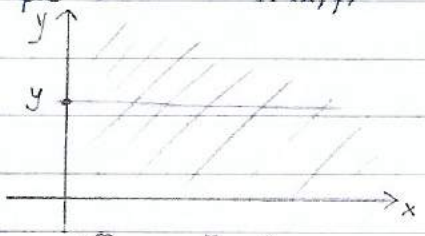
Οι ιδιότητες είναι ίδιες με τις ιδιότητες της μέσης τιμής

πχ: $E[aX+b|Y=y] = aE[X|Y=y] + b$

$E[X+Z|Y=y] = E[X|Y=y] + E[Z|Y=y]$.

$$E[g(X)|Y=y] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, P_{X|Y}(x|y) & \text{για διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{για συνεχείς.} \end{cases}$$

Παραδειγμα: Εστω (X,Y) διδιαστατη τ.μ. με σ.π.π $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}$



$0 < x, y < \infty$.

$E[X \mid Y = y] = ;$ για $0 < y < \infty$

- Λυση -

Για $0 < y < \infty$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} \dfrac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}\,dx =$

$= e^{-y} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y} \cdot x}}_{\text{σ.π.π της } Exp\left(\frac{1}{y}\right)} dx = e^{-y}$

Για $0 < y < \infty$ $f_{X \mid Y}(x \mid y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y}}{e^{-y}} = \dfrac{1}{y} \cdot e^{-\frac{1}{y} \cdot x}$, $x > 0$

$E[X \mid Y = y] = \underbrace{\int_0^{\infty} x \underbrace{\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{1}{y} \cdot x}}_{\text{σπη της } Exp\left(\frac{1}{y}\right)} dx}_{\text{μεση τιμη της } Exp\left(\frac{1}{y}\right)} = y$

$m_{X \mid Y}(y) = E[X \mid Y = y] \rightarrow$ συναρτηση του y

$m_{X \mid Y}(Y)$ συναρτηση της τ.μ. $Y \Rightarrow$ ειναι τ.μ.

↳ μεση τιμη της X δοθεισης της Y.

Ορισμος Εστω (X,Y) διδιαστατη τ.μ. με $m_{X \mid Y}(y) = E[X \mid Y = y]$.
Η $m_{X \mid Y}(Y)$ ειναι τυχαια μεταβλητη ειναι συναρτηση της Y και ονομαζεται μεση τιμη της X δοθεισης της Y.
Επισης, συμβολιζεται με $E[X \mid Y]$.

Θεωρημα Διπλης Μεσης Τιμης

$E[\underbrace{E[X \mid Y]}_{\text{τ.μ. αρα μπορω να παρω μεση τιμη}}] = E[m_{X \mid Y}(Y)] = E[X]$

- Αποδειξη για διακριτες τ.μ. -

$E[E[X \mid Y]] \underset{\text{αφηρημ. στατιστικου}}{\overset{\text{τυπος}}{=}} \sum_y E[X \mid Y = y] P_Y(y) \underset{E[X \mid Y = y]}{\overset{\text{ορισμος}}{=}} \sum_y \left(\sum_x x\, P_{X \mid Y}(x \mid y) \right) P_Y(y)$

$$= \sum_y \left(\sum_x x\, P_{X|Y}(x|y)\, P_Y(y) \right) \xrightarrow{P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}} \sum_y \left(\sum_x x\, P_{X,Y}(x,y) \right) =$$

$$= \sum_x x \left(\sum_y P_{X,Y}(x,y) \right) = \sum_x x\, P_X(x) = E[X].$$

Εφαρμογη!!

Ριψη ζαριού και μετα ριψη νομισματος οσες φορες δειχνει το ζαρι.

Y: αποτελεσμα ριψης ζαριου

X = # K στις ριψεις νομισματος

$E[X] = ;$

Κλασσικος Τροπος

$E[X] = \sum_x x\, P_X(x)$

$\left.\begin{array}{l} P_Y(y) \\ P_{X|Y}(x|y) \end{array}\right\} \Rightarrow P_{X,Y}(x,y) \Rightarrow P_X(x)$

αλλιως με Θεωρημα Διπλης μτ

Με Θεωρημα Διπλης μτ

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=1}^{6} E[X|Y=y]\underbrace{P(Y=y)}_{= \frac{1}{6}}$$

$(X|Y=y) \sim Bin(y, \frac{1}{2})$

Αρα $E[X|Y=y] = \frac{1}{2} y$

Οποτε, $E[X] = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{2} y \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$

Εφαρμογη 2: Μεταλλωρυχος παγιδευμενος σε ορυχεια

Υπαρχουν 3 πορτες

1η πορτα: Οδηγει σε ασφαλες μερος μετα απο ταξιδι 3 ωρων.

2η πορτα: Οδηγει πισω στο ορυχειο μετα απο ταξιδι 5 ωρων.

3η πορτα: -"- -"- -"- -"- -"- 7 ωρων.

Επιλεγει τυχαια πορτα και αν γυρισει πισω δεν θυμαται τιποτα.

X: χρονος μεχρι να οδηγηθει σε ασφαλες μερος

$E[X] = ;$

Εστω Y = η πορτα που διαλεξε αρχικα

$P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$

$$E[X] = E[E[X|Y]] \Rightarrow E[X] = \sum_{j=1}^{3} E[X|Y=y]\, P(Y=y) \Rightarrow$$

$$E[X] = \underbrace{E[X|Y=1]}_{3}\underbrace{P(Y=1)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{E[X|Y=2]}_{5+E[X]}\underbrace{P(Y=2)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{E[X|Y=3]}_{7+E[X]}\underbrace{P(Y=3)}_{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}(5+E[X]) + \frac{1}{3}(7+E[X])$$

$$\Rightarrow E[X] = 5 + \frac{2}{3}E[X] \Rightarrow \frac{1}{3}E[X] = 5 \Rightarrow E[X] = 15$$

Εφαρμογη 3.

Οι A και B μονομαχουν ριχνοντας εναλλαξ βολες.

Ξεκιναει ο A.

P(ευστοχια A) = $\frac{1}{3}$

P(ευστοχια B) = $\frac{2}{3}$

X = # βολων μεχρι να χτυπησει καποιος ξεκινώντας με τον A.

E[X] =;

-Λυση-

Εστω $Y_1 = \begin{cases} 0 & \text{αν A αστοχισει} \\ 1, & \text{αν A ευστοχισει.} \end{cases}$

$$E[X] = E[E[X|Y_1]] = \sum_{y_1=0}^{1} E[X|Y_1=y_1]\,P(Y_1=y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[X] = \underbrace{E[X|Y_1=0]}_{1+E[X']}\underbrace{P(Y_1=0)}_{2/3} + \underbrace{E[X|Y_1=1]}_{1}\underbrace{P(Y_1=1)}_{1/3}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{2}{3}(1+E[X']) + \frac{1}{3} \quad (1) \quad \text{οπου}$$

X' = # βολων μεχρι να χτυπηθει καποιος αν ξεκινησει ο B.

Εστω $Y_2 = \begin{cases} 0, & \text{αν B αστοχισει} \\ 1, & \text{αν B ευστοχισει} \end{cases}$

$$E[X'] = E[E[X'|Y_2]] = \sum_{y_2=0}^{1} E[X'|Y_2=y_2]\,P(Y_2=y_2)$$

$$\Rightarrow E[X'] = \underbrace{E[X'|Y_2=0]}_{1+E[X]}\underbrace{P(Y_2=0)}_{1/3} + \underbrace{E[X'|Y_2=1]}_{1}\underbrace{P(Y_2=1)}_{2/3}$$

$\Rightarrow E[X'] = \frac{1}{3}(1 + E[X]) + \frac{2}{3} \quad (2)$

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} E[X] = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}(1 + E[X]) + \frac{2}{3}\right] + \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow E[X] = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{3}E[X]\right) + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{9}E[X]$

$\Rightarrow \frac{7}{9}E[X] = \frac{5}{3} \Rightarrow E[X] = \frac{15}{7}$

15/01/2020 - **30ο μάθημα**

Πιθανογεννητρια - Ροπογεννητρια

Ορισμος (Πιθανογεννητρια)

Εστω X μια μη αρνητικη και ακεραια τ.μ. (δηλαδη η X εχει δυνατες τιμες $0, 1, 2, 3, \dots$)

Η πιθανογεννητρια της X συμβολιζεται ως $P_X(z)$ και οριζεται απο τη σχεση:

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X=n) \left[= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P_X(n)}_{\substack{\text{συν. πιθαν.} \\ \text{της } X}} z^n \right], \quad |z| \le 1$$

Ορισμος (Ροπογεννητρια).

Εστω X μια τ.μ. Η ροπογεννητρια της X συμβολιζεται με $M_X(t)$ και δινεται απο τη σχεση:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \cdot P(X=x), & X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

Οριζεται για τα $t \in \mathbb{R}$ για τα οποια η μεση τιμη υπαρχει.

Σχεση $P_X(z)$ με $M_X(t)$

Εστω X μια μη αρνητικη ακεραια τμ

- $M_X(t) = E[e^{tX}] = E[(e^t)^X] = P_X(e^t)$
- $P_X(z) = E[z^X] = E[e^{(\ln z)X}] = M_X(\ln z)$.

$\Rightarrow E[X'] = \frac{1}{3}(1+E[X]) + \frac{2}{3}$ (2)

(1) $\xRightarrow{(2)}$ $E[X] = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}(1+E[X]) + \frac{2}{3}\right] + \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow E[X] = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{3}E[X]\right) + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{9}E[X]$

$\Rightarrow \frac{7}{9}E[X] = \frac{5}{3} \Rightarrow E[X] = \frac{15}{7}$

15/01/2020 - 30ο μάθημα

Πιθανογεννητρια - Ροπογεννητρια

Οριομος (Πιθανογεννητρια)

Εστω X μια μη αρνητικη και ακεραια τ.μ. (δηλαδη η X εχει δυνατες τιμες $0, 1, 2, 3, \ldots$)

Η πιθανογεννητρια της X συμβολιζεται ως $P_X(z)$ και οριζεται απο τη σχεση:

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X=n) \left[= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P_X(n)}_{\substack{\text{συν.πιθαν.} \\ \text{της } X.}} z^n \right], \quad |z| \leq 1$$

Οριομος (Ροπογεννητρια).

Εστω X μια τ.μ. Η ροπογεννητρια της X συμβολιζεται με $M_X(t)$ και δινεται απο τη σχεση:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \cdot P(X=x), & X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

Οριζεται για τα $t \in \mathbb{R}$ για τα οποια η μεση τιμη υπαρχει.

Σχεση $P_X(z)$ με $M_X(t)$

Εστω X μια μη αρνητικη ακεραια τμ

- $M_X(t) = E[e^{tX}] = E[(e^t)^X] = P_X(e^t)$
- $P_X(z) = E[z^X] = E[e^{(\ln z)X}] = M_X(\ln z)$.

Ιδιοτητες Ροπογεννητριας - Πιθανογεννητριας.

Πιθανογεννητρια

P_1) $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow$
X ки Y ακολουθουν ιδια κατανομη

P_2) $P_X(1) = 1$

P_3) $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)..(X-n+1)]$
Αρα $P_X'(1) = E[X]$
$P_X''(1) = E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X]$
$\Rightarrow E[X^2] = P_X''(1) + P_X'(1)$.

P_4) Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξαρτητες τ.μ. και $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ τοτε
$P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)$

P_5) Εστω $X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξαρτητες και ισονομες τ.μ. και N μη αρνητικη ακεραια τμ με δυνατες τιμες 1,2,3,… και πιθανογεννητρια $P_N(z)$. Αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$ τοτε $\boxed{P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))}$

οπου $P_X(z)$ η πιθανογεννητρια των X_i

Ροπογεννητρια

M_1) $M_X(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow$
X ки Y ακολουθουν την ιδια κατανομή

M_2) $M_X(0) = 1$.

M_3) $M^{(n)}(0) = E[X^n]$.
Αρα $M_X'(0) = E[X]$
$M_X''(0) = E[X^2]$.

M_4) Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξαρτητες τ.μ. και $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ τοτε
$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$

M_5). Εστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξαρτητες και ισονομες τ.μ. και N μη αρνητικη ακεραια τ.μ με δυνατες τιμές 1, 2, 3, …. Αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$
τοτε $\boxed{M_{S_N} = P_N(M_X(t))}$ οπου

$M_X(t)$ η ροπογεννητρια των X_i.

-Αποδειξεις-

P_1) $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) \cdot z^n$

$\Leftrightarrow P(X=n) = P(Y=n) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

$\Leftrightarrow$ X, Y ισονομες.

$P_2)$ $P_X(1) = E[1^X] = E[1] = 1.$

$M_2)$ $M_X(0) = E[e^{0X}] = E[1] = 1.$

$$P_3)\ P_X^{(n)}(1) = \frac{d^n}{dz^n} E[z^X]\Big|_{z=1} = E\left[\frac{d^n}{dz^n} z^X\right]\Big|_{z=1} =$$

παραγωγίζω την z

$$= E\left[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)z^{X-n}\right]\Big|_{z=1} =$$

$$= E\left[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)\right]$$

$$M_3)\ M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} E[e^{tX}]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{tX}\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= E[X^n \cdot e^{tX}]\Big|_{t=0} = E[X^n].$$

$P_4)$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = E[z^{X_1} z^{X_2} \dots z^{X_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=}$$

$$= E[z^{X_1}]E[z^{X_2}]\dots E[z^{X_n}] = P_{X_1}(z)\cdot P_{X_2}(z)\dots P_{X_n}(z).$$

$M_4)$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$M_{S_n}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{t\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}] = E[e^{tX_1}\cdot e^{tX_2}\dots e^{tX_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=}$$

$$= E[e^{tX_1}]\cdot E[e^{tX_2}]\dots E[e^{tX_n}] = M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t).$$

$P_5)$ $X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες

N με δυνατές τιμές $1, 2, 3, \dots$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E[E[z^{S_N}|N]] = \sum_{n=1}^{\infty} E[z^{S_N}|N=n]P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[z^{S_N}]P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{S_n}(z)P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{X_1}(z)P_{X_2}(z)\dots P_{X_n}(z)P(N=n) \overset{X_i \text{ ισονομες}}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (P_X(z))^n P(N=n) = P_N(P_X(z)).$$

$M_5)$ $$M_{S_N}(t) = E[e^{tS_N}] \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E[E[e^{tS_N}|N]]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{tS_N}|N=n]P(N=n). =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{tS_N}]P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{S_N}(t)P(N=n)$$

$$\overset{(M_4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t)P(N=n)$$

$$\overset{\text{ισον.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (M_X(t))^n P(N=n) = P_N(M_X(t)).$$

Εφαρμογη (Διωνυμικη).

Εστω $X \sim Bin(n,p)$

X = # επιτυχιων σε n δοκιμες Bernoulli με πιθ. επιτυχιας p.

Εστω $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \text{ δοκιμη επιτυχιας} \\ 0, & \text{αν } i \text{ δοκιμη αποτυχιας.} \end{cases}$

$I_i \sim$ Bernoulli (p).

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$P_{I_i}(z) = E[z^{I_i}] = \sum_{x=0}^{1} P(I_i = x)\cdot z^x =$$

$$= P(I_i=0)z^0 + P(I_i=1)z^1 = (1-p)\cdot 1 + pz$$

$$= 1-p+pz$$

$$P_X(z) = P_{\sum_{i=1}^{n} I_i}(z) = P_{I_1}(z)P_{I_2}(z)\dots P_{I_n}(z) = (1-p+pz)^n.$$

$$E[X] \overset{P_3}{=} P_X'(1) = n(1-p+pz)^{n-1} p \Big|_{z=1} = n(1-p+p)^{n-1} \cdot p = n \cdot p.$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = P_X''(1) + P_X'(1) = n(n-1)(1-p+pz)^{n-2} p^2 \Big|_{z=1} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np.$$

Αρα $Var[X] = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$

Συναρτηση Πιθανοτητας $P(X=n)$?

$$(\alpha+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^{n-i} b^i$$

$$P_X(z) = (\underbrace{1-p}_{\alpha} + pz)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-p)^{n-i} (pz)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i} (1-p)^{n-i} p^i}_{\Sigma(X=i)} z^i$$

Αρα $P(X=i) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, & i=0,\dots,n. \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

$E[X] \overset{P_3}{=} P_x'(1) = n(1-p+pz)^{n-1} p \Big|_{z=1} = n(1-p+p)^{n-1} p = n \cdot p$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = P_x''(1) + P_x'(1) = n(n-1)(1-p+pz)^{n-2} p^2 \Big|_{z=1} + np$

$= n(n-1)p^2 + np.$

Αρα $Var[X] = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$

Συναρτηση Πιθανοτητας $P(X=n)$? $\qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

$P_x(z) = (\underbrace{1-p}_{a} + pz)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-p)^{n-i} (pz)^i =$

$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i} (1-p)^{n-i} p^i}_{\Sigma(X=i)} z^i$

Αρα $P(X=i) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, & i=0,\dots,n \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

17/01/2020 - 31ο μαθημα

Υπενθυμιση!!

- Πιθανογεννητρια μιας μη αρνητικης ακεραιας τμ X
  $P_x(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)$

- Ροπογεννητρια τμ X $\quad M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχη} \end{cases}$

- Σχέσεις: $M_X(t) = P_x(e^t)$
  $P_x(z) = M_x(\ln z)$.

· $X \sim$ Bernoulli (p) $\quad P_X(z) = 1-p+pz, \ z \in \mathbb{R}$
$M_X(t) = 1-p+pe^t, \ t \in \mathbb{R}$

• $X \sim Bin(n,p)$. $P_X(z) = (1-p+pz)^n, \ z\in\mathbb{R}$
$M_X(t) = (1-p+pe^t)^n, \ t\in\mathbb{R}$

• $X \sim Geom(p)$

X = # δοκιμών μεχρι την 1η επιτυχια οταν η πιθανοτητα επιτυχιας σε καθε δοκιμη ειναι p.

$P(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p, \ k=1,2,\dots$

(*) $P_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p \Rightarrow$

$\Rightarrow P_X(z) = zp\sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1} \underset{=}{\overset{j=k-1}{=}} zp\sum_{j=0}^{\infty} [z(1-p)]^j \overset{\alpha\nu\ (z(1-p)<1)}{\Longrightarrow}$

$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}, \ |p|<1$

$\rightarrow \boxed{P_X(z) = zp\frac{1}{1-z(1-p)}}, \ |z|<\frac{1}{1-p}$

(*) $M_X(t) = P_X(e^t) \Rightarrow M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)\cdot e^t}, \ e^t < \frac{1}{1-p}$

$\Rightarrow \boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)\cdot e^t}}, \ t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$

• $X \sim NegBin(n,p)$

X = # δοκιμων μεχρι n-οστή επιτυχια οταν πιθ. επιτυχιας ειναι p.

X_i = # δοκιμών απο την $i-1$ επιτυχια μεχρι την i-οστη επιτυχια

$X_i \sim Geom(p)$

$X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξαρτητα

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$P_{X_i}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \ |z|<\frac{1}{1-p}$.

(*) $P_X(z) = P_{X_1}(z)P_{X_2}(z)\dots P_{X_n}(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n}, \ |z|<\frac{1}{1-p}$

$$\boxed{M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^n}, \quad t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda}$$

• $X \sim Poisson(\lambda)$

$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_X(z) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda \cdot z)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$M_X(t) = P_X(e^t) \Rightarrow \boxed{M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}, \ z \neq 1 \qquad (\alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma) = n, \ z=1}$$

• $X \sim Uniform\{1,2,\dots n\}$

$P(X=k) = \frac{1}{n}, \quad k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=1}^{n} z^k P(X=k) \Rightarrow$$

$$P_X(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z^k \overset{j=k-1}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z^{j+1} = \frac{z}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_X(z) = \begin{cases} \frac{z}{n}\cdot\frac{1-z^n}{1-z}, & z \neq 1 \\ 1, & z = 1. \end{cases}$$

$$M_X(t) = P_X(e^t) = \begin{cases} \frac{e^t(1-e^{tn})}{n(1-e^t)}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Εφαρμογή Αναγεννητικές Ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Bin(n,p) \\ Y \sim Bin(m,p) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow Z = X+Y \sim Bin(n+m,p)$$

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow P_X(z) = (1-p+pz)^n, \; z \in \mathbb{R}$.
$Y \sim Bin(m,p) \Rightarrow P_Y(z) = (1-p+pz)^m, \; z \in \mathbb{R}$.

$Z = X + Y$, αρα $P_Z(z) \overset{X,Y}{\underset{\text{ανεξ}}{=}} P_X(z) \cdot P_Y(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_Z(z) = (1-p+pz)^n (1-p+pz)^m = (1-p+pz)^{n+m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \; Z \sim Bin(n+m, p)$

Εφαρμογη - Εκλεπτυνση Poisson.

X = # περιστατικων που φτανουν σε νοσοκομειο μια μερα.
$X \sim Poisson(\lambda)$
P(ενα περιστατικο να χρειαστει νοσηλεια) = p.
Y = # περιστατικων που φτανουν και χρειαζονται νοσηλεια.

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-περιστατικο χρειαζεται νοσηλεια} \\ 0, & \text{αν το } i\text{-περιστατικο δεν χρειαζεται νοσηλεια} \end{cases}$$

$P(I_i = 1) = p$, $P(I_i = 0) = 1-p$.
$I_i \sim Bernoulli(p) \Rightarrow P_{I_i}(z) = 1-p+pz, \; z \in \mathbb{R}$.
$Y = \sum_{i=1}^{X} I_i$
$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}, \; z \in \mathbb{R}$.

$P_Y(z) = P_X(P_I(z)) = e^{-\lambda[1-(1-p+pz)]} = e^{-\lambda(p-pz)}$

$\Rightarrow P_Y(z) = e^{-\lambda p(1-z)}, \; z \in \mathbb{R}$.
Αρα $Y \sim Poisson(\lambda p)$.

• $X \sim Exp(\lambda)$

σ.π.π. $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x > 0$

(*) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} \, dx$

$$\Rightarrow M_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_{x=0}^{\infty} \overset{t-\lambda<0}{=\!=\!=} \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_X(t) = -\frac{\lambda}{t-\lambda}}, \quad t < \lambda$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

• $X \sim \text{Γαμμα}\ (a,\lambda)$

$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$

(*) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} \, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \underbrace{x^{a-1} e^{-(\lambda-t)x}}_{\text{θυμίζει σ.π.π της Γαμμα}(a,\lambda-t)} dx \overset{\lambda-t>0}{=\!=\!=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a)}{(\lambda-t)^a} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{(\lambda-t)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\lambda-t)x}}_{\text{σπп της Γαμμα}(a,\lambda-t)} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^a}, \quad t < \lambda.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

• $Z \sim N(0,1)$

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}+tz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2-2tz+t^2}{2}} \cdot e^{t^2/2} dz =$$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz}_{\text{σπn } N(t,1)} = e^{t^2/2} \Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

Ροπογεννητρια γραμμικής συναρτησης τ.μ.

X με ροπογεννητρια $M_X(t)$
$Y = aX + b$
$M_Y(t) = ?$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{taX} \cdot e^{tb}] = e^{tb} E[e^{atX}] =$$

$$= e^{tb} M_X(at)$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$$

• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \sigma Z + \mu$
$Z \sim N(0,1) \Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$
Αρα
$$M_X(t) = e^{t\mu} \cdot M_Z(\sigma t) = e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

20/01/20 - **32ο μάθημα**

Βασικές Ανισοτητες

1) Ανισοτητα Markov

Εστω X μια μη αρνητική τ.μ. Τοτε $\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}}$ $\forall a > 0$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz}_{\text{σπη } N(t,1)} = e^{t^2/2} \Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

Ροπογεννητρια γραμμικης συναρτησης τ.μ.

X με ροπογεννητρια $M_X(t)$

$Y = aX + b$

$M_Y(t) = ?$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{taX} \cdot e^{tb}] = e^{tb} E[e^{atX}] =$$

$$= e^{tb} M_X(at)$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \sigma Z + \mu$

$Z \sim N(0,1) \Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$

Αρα

$$M_X(t) = e^{t\mu} \cdot M_Z(\sigma t) = e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

20/01/20 - 32ο μάθημα

Βασικες Ανισοτητες

1) Ανισοτητα Markov

Εστω X μια μη αρνητικη τμ Τοτε $\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}}$ $\forall a > 0$

2) Ανισοτητα Chebycher:

Εστω X μια τμ. με $E[X]=\mu<\infty$ και $Var[X]=\sigma^2$ Τοτε

$$\boxed{P(|X-\mu|>c) \le \frac{\sigma^2}{c^2}} \quad \forall c>0$$

3) Ανισοτητα Chernoff:

Εστω X τμ με ροπογεννητρια $M_x(t)$. Τοτε $\boxed{P(X>a) \le \inf_{t>0} \{e^{-at} M_x(t)\}}$ $\forall a>0$.

4) Ανισοτητα Cauchy-Schwarz

Αν X, Y τμ. τοτε $\boxed{|E[XY]| \le \sqrt{E[X^2]} \cdot \sqrt{E[Y^2]}}$

5) Ανισοτητα Jensen:

Αν X τμ. και f κυρτή συναρτηση, τοτε $\boxed{f(E[X]) \le E[f(X)]}$

Συγκλιση Τυχαιων Μεταβλητων

Ορισμος Εστω $X_1, X_2, X_3, \dots$ μια ακολουθια τμ. στον (Ω, A, P) και X τμ. στον (Ω, A, P).

1) Η ακολουθια $X_n, n=1,2,\dots$ συγκλινει στην τμ X κατα πιθανοτητα ή στοχαστικά αν $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}) = 0$, $\forall>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon>0.$$

Τοτε γραφουμε $X_n \xrightarrow{P} X$ καθως $n\to\infty$.

2) Η ακολουθια $X_n, n=1,2,3,\dots$ συγκλινει στην τμ X <u>κατα κατανομη</u> οταν: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ $\forall x$ που ειναι σημειο συνεχειας της $F(x)$

Τοτε γράφουμε $X_n \xrightarrow{d} X$ καθως $n\to\infty$

Ασθενης Νομος Μεγαλων Αριθμων

Εστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθια ανεξαρτητων και ισονομων τμ με μεση τιμη $E[X_i] = \mu < \infty$ και διασπορα $Var[X_i] = \sigma^2$.

Αν $\underbrace{\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}}_{\text{δειγματικος μεσος}}$, τοτε $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ καθως $n \to \infty$

- Αποδειξη - (οταν $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$)

Θελω να δειξω οτι $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ καθως $n \to \infty$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Εχω, απο την ανισοτητα Chebychev,

$$P(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2}$$

Ομως, $E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$

και $Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Αν $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} \to 0$ καθως $n \to \infty$

Αρα $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

Κεντρικο Οριακο Θεωρημα

Εστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ακολουθια ανεξαρτητων και ισονομων τμ. με $E[X_i] = \mu$ και $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ και $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, τοτε:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \text{ και}$$

$$\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \text{ καθως } n \to \infty$$

Δηλαδή,

$$\cdot\ P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le x\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z \le x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\, dt$$

$$\| $$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right)$$

$$\cdot\ P\left(\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \le x\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\, dt$$

$$\| $$

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right)$$

Εφαρμογή: Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu$ και $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η $P(a < S_n \le b)$ για μεγάλο n.

-Λύση-

$$P(a < S_n \le b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right) - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$$\overset{\text{Κ.Ο.Θ}}{\approx} P\left(Z \le \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

Άσκηση: Ημερήσιο Εισόδημα Ενός Χαρτοπαίκτη ~ Uniform [-5, 5] σε χιλ. €. Να βρεθούν προσεγγιστικά

i) P(σε 48 μέρες να κερδίσει τουλάχιστον 30 χιλ €)

ii) το s ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% το εισόδημα σε 48 μέρες να είναι $\le s$.

iii) # ημερων ωστε με πιθ. τουλαχιστον 95% το εισοδημα να ειναι κατα απολυτη τιμη μικροτερο των 5 χιλ €.

-Λυση-

Εστω X_i = εισοδημα την ημερα i

$X_i \sim \text{Uniform}([-5, 5])$ $i=1,2,\dots$

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1/10 & , x \in [-5,5] \\ 0 & , x \notin [-5,5] \end{cases}$$

$$\mu = E[X_i] = \int_{-5}^{5} x f_x(x)dx = \int_{-5}^{5} x \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{5} = 0$$

$$\sigma^2 = Var[X_i] = E[X_i^2] - \underbrace{(E[X_i])^2}_{\to 0} = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{10} dx =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-5}^{5} = \frac{1}{10}\left(\frac{125}{3} - \left(\frac{-125}{3}\right)\right) = \frac{25}{3}$$

i) $S_{48} = \sum_{i=1}^{48} X_i$ συνολικό αθροισμα 48 ημερών

$$P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - 48 \cdot 0}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{\frac{25}{3}}} \geq \frac{30 - 48 \cdot 0}{\sqrt{48}\sqrt{\frac{25}{3}}}\right) \simeq P\left(Z \geq \frac{30}{20}\right) = P\left(Z \geq \frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,93 = 0,07$$

ii) $S_{48} = \sum_{i=1}^{48} X_i$ συνολικο εισοδημα 48 ημερών

$$P(S_{48} \leq s) \geq 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{S_{48} - 48 \cdot 0}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{\frac{25}{3}}} \leq \frac{s - 48 \cdot 0}{\sqrt{48}\sqrt{\frac{25}{3}}}\right) \geq 0,95 \xrightarrow{\text{ΚΟΘ}}$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{s}{20}\right) \geq 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0,95 \xrightarrow{\Phi(1,64)=0,95}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq \Phi(1,64) \overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow} \frac{s}{20} \geq 1,64 \Rightarrow s \geq 20 \cdot 1,64 \Rightarrow s \geq \dots$$

iii) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(|S_n| \leq 5) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(-5 \leq S_n \leq 5) \geq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-5 - n \cdot 0}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{25}{3}}} \leq \frac{S_n - n \cdot 0}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{25}{3}}} \leq \frac{5 - n \cdot 0}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{25}{3}}}\right) \geq 0,95$$

$\xrightarrow{KO\Theta} P\left(-\sqrt{\frac{3}{n}} \le Z \le \sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(Z \le \sqrt{\frac{3}{n}}\right) - P\left(Z \le -\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0{,}95$

$\Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0{,}95 \Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 + \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0{,}95 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 \geq 0{,}95 \Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0{,}975 \xrightarrow{\Phi(1{,}96) = 0{,}975}$

$\Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = \Phi(1{,}96) \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{n}} = 1{,}96 \Rightarrow \dots$

29/01/2020 - 33ο μαθημα

Ασκηση 1

Εστω (X,Y) διδιαστατη τμ με σπ.π $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$

Ζητουνται: 1) $c = ?$

2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$

3) $P(X < \frac{1}{3})$, $P(Y > 2X)$.

-Λυση-

1) Αφου f σπп : $\iint_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 6x^c y\,dx\,dy = 1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 6y \int_0^1 x^c\,dx\,dy = \int_0^1 6y \left.\frac{x^{c+1}}{c+1}\right|_{x=0}^{1} dy = \int_0^1 6y \frac{1}{c+1}\,dy = \frac{6}{c+1}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{3}{c+1} = 1$ αρα $c+1 = 3 \Rightarrow \boxed{c=2}$

Επομενως, $f_{X,Y}(x,y) = 6x^2y$ για $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$

2) $f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 6x^2y\,dy = 6x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 3x^2\, I_{(0,1)}(x)$

$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 6y\,x^2\,dy = 6y\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 2y \quad 0<y<1$

3) $P(X < \frac{1}{3}) = \int_0^{1/3}\int_0^1 6x^2y\,dy\,dx = \int_0^{1/3} 6x^2 \int_0^1 y\,dx\,dy = \int_0^{1/3} 6x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} dx =$

$= \int_0^{1/3} 3x^2\,dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1/3} = \frac{1}{27}$

Θα μπορουσα να παρω κατευθειαν την περιθωρια $f_X(x)$ (Γλιτωνω πραξεις)

$\xrightarrow{\text{ΚΟΘ}} P\left(-\sqrt{\frac{3}{n}} \le Z \le \sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z \le \sqrt{\frac{3}{n}}\right) - P\left(Z \le -\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0,95$

$\Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 + \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0,95 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 \geq 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) \geq 0,975 \xRightarrow{\Phi(1,96)=0,975}$

$\Rightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = \Phi(1,96) \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{n}} = 1,96 \Rightarrow \dots$

29/01/2020 - 33ο μαθημα

Ασκηση 1

Εστω (X,Y) διδιαστατη τμ με σππ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$

Ζητουνται: 1) $c = ?$

2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$

3) $P(X < \frac{1}{3})$, $P(Y > 2X)$

-Λυση-

1) Αφου f σππ: $\iint_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 6x^c y\,dx\,dy = 1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 6y \int_0^1 x^c\,dx\,dy = \int_0^1 6y \left.\frac{x^{c+1}}{c+1}\right|_{x=0}^{1} dy = \int_0^1 6y \frac{1}{c+1}\,dy = \frac{6}{c+1} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{3}{c+1} = 1$ αρα $c+1=3 \Rightarrow \boxed{c=2}$

Επομένως, $f_{X,Y}(x,y) = 6x^2 y$ για $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$

2) $f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 6x^2 y\,dy = 6x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 3x^2\, I_{(0,1)}(x)$

$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 6y\,x^2\,dy = 6y \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 2y \quad 0<y<1$

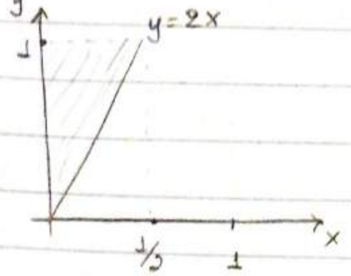
3) $P(X < \frac{1}{3}) = \int_0^{1/3}\int_0^1 6x^2 y\,dy\,dx = \int_0^{1/3} 6x^2 \int_0^1 y\,dx\,dy = \int_0^{1/3} 6x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} dx =$

$= \int_0^{1/3} 3x^2\,dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1/3} = \frac{1}{27}$

Θα μπορουσα να παρω κατευθειαν την περιθωρια $f_X(x)$ (Γλιτωνω πραξεις)

Για την $P(Y>2X)$ δεν μπορω να παρω περιθωρια γιατι εχουμε σε αυτη την περιπτωση κ τις δυο μεταβλητες
Επομενως παιρνουμε την απο κοινου

!! Προσεχουμε τα ορια!!



$$P(Y>2X) = \int_0^1 \int_{2x}^1 6x^2 y \, dy \, dx$$

$2x < 1$ ΟΧΙ

$x < 1/2$ ← περιοριζομαι

$$P(Y>2X) = \int_0^1 \int_0^{y/2} 6x^2 y \, dx dy = \int_0^1 6y \int_0^{y/2} x^2 \, dx dy =$$

$$= \int_1^0 6y \frac{x^3}{3}\Big|_0^{y/2} dy = \int_0^1 2y \frac{y^3}{8} dy = \int_0^1 \frac{y^4}{4} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{20}$$

Ασκηση 2:

Εστω (X,Y) δι-διαστατη τμ με σππ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

i) Δειξτε οτι πραγματι η f ειναι σ.π.π.

ii) $f_{X|Y}(\cdot|y)$, $f_{Y|X}(\cdot|x)$ $\forall x,y$ που εχει νοημα.

i) $\iint_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) \, dx dy \overset{?}{=} 1$

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x} y \Big|_0^x dx = \int_0^1 1 \, dx = x\Big|_0^1 = 1$$

και ειναι μη αρνητικη.

ii) (Χρειαζομαστε να βρουμε τις περιθωριες)

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x} y \Big|_0^x = 1 \qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_y^1 = \ln 1 - \ln y = -\ln y \qquad 0<y<1$$

Αρα

$$f_{X|Y}(\cdot|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y} = -\frac{1}{x\ln y} \qquad y<x<1$$

το y το δεσμευω
αρα ειναι μια σταθερα
οποτε πρεπει να δωσω τιμες
για το x

$$f_{Y|X}(\cdot|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \qquad 0<y<x$$

$\frac{1}{6-\alpha}$ $\quad \alpha \quad 6$ Ομοιομορφη κατανομή

Ασκηση 3

Εστω (X,Y) τμ με σπη $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

i) Να δειξετε οτι X,Y ανεξαρτητες

ii) $E[Ye^X] = ;$

- Λυση -

i) Επιλεγω καταλληλα συνολα A, B τω $P(X\in A, Y\in B) \neq P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$

$$\frac{P(X<2/3,\ Y<\frac{1}{3})}{P(X<\frac{2}{3})\cdot P(Y<\frac{1}{3})} \underset{P(X<Y)=1}{=} \frac{P(Y<1/3)}{P(X<2/3)\,P(Y<1/3)} = \frac{1}{P(X<2/3)} \neq 1.$$

Αρα το X και Y δεν ειναι ανεξαρτητα.

ii) $$E[Ye^X] = \iint_R y e^x\, 8xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y 8y^2 x e^x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 8y^2 \int_0^y x e^x\,dx\,dy = (*)$$

$$\int_0^y x e^x\,dx = \int_0^y x\,(e^x)'\,dx = x e^x\Big|_0^y - \int_0^y (x)' e^x\,dx = y e^y - e^x\Big|_0^y =$$

$$= y e^y - e^y + 1$$

Αρα: $(*) = \int_0^1 8y^2(ye^y - e^y + 1)\,dy = 8\int_0^1 y^3 e^y dy - 8\int_0^1 y^2 e^y dy + 8\frac{y^3}{3}\Big|_0^1$

$= \dots = -24e + \frac{200}{3}$

Ασκηση 4:

Εστω X, Y, Z τμ

$E[X^2] < \infty$, $E[Y^2] < \infty$

$Z \sim N(0,1)$

$Cov(X,Y) = 1$

Z ανεξ των X, Y

$Cov(XZ^2, Y+Z) = ?$

{ $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ }

-Λυση-

$Cov(XZ^2, Y+Z) = Cov(XZ^2, Y) + Cov(XZ^2, Z) =$

$= E(XZ^2Y) - E[XZ^2]E[Y] + E[XZ^3] - E[XZ^2]E[Z] = (*)$

Αφου $Z \sim N(0,1)$ τοτε $E[Z] = 0$ αρα $E[XZ^2]E[Z] = 0$

Αφου Z ανεξ των X, Y τοτε Z^2 ανεξ των X, Y

$(*) \underset{\uparrow}{=} E[Z^2]E[XY] - E[Z^2]E[X]E[Y] + E[Z^3]E[X]$

λογω ανεξαρτησιας

$= E[Z^2]\Big[E[XY] - E[X]E[Y]\Big] + E[Z^3]E[X] =$

$= E[Z^2] \cdot \underbrace{Cov(X,Y)}_{=1} + E[Z^3]E[X] = (**)$

$Var[Z] = E[Z^2] - E^2[Z] \Rightarrow 1 = E[Z^2] - 0 \Rightarrow \boxed{E[Z^2] = 1}$

$E[Z^3] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}}_{\text{περιττή συναρτηση}} dz = 0$

Αρα $(**) = 1 \cdot 1 + 0$ Αρα $Cov(XZ^2, Y+Z) = 1$.

Εφαρμογη:

Δειγματικό Μεσο $\bar{X}$ — εκτιμηση της μεσης τιμης (μ) μιας τμ X

$X_1, \dots, X_n$ τυχαιο δειγμα

ανεξαρτητες, ισονομες.

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ εκτιμαει το μ

$\rightarrow \bar{X}$ αμεροληπτη εκτιμητρια του μ

$\boxed{E[\bar{X}] = \mu}$

$$E[\bar{X}] = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E[X_1] + \dots + E[X_n]\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \dots + \mu) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Αρα $E[X_i] = \mu$.

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i \text{ ανεξ}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Παρατηρουμε: $\lim_{n \to \infty} Var(\bar{X}) = 0$ ☆☆☆☆

23/01/2020 - 34ο μαθημα

Ασκηση 1: Εστω X_1, X_2 τμ με $Var(X_1) = Var(X_2) = 1$ κ $Var(X_1 + X_2) = 3$

1) Είναι οι X_1, X_2 ανεξαρτητες;

2) Ξερουμε οτι για καποια σταθερα c οι τμ $X_1, X_2 - cX_1$ ειναι ανεξαρτητες, να βρεθει $c = ;$

- Λυση -

1) Αν ηταν ανεξαρτητες θα επρεπε $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) \Leftrightarrow 3 \neq 2$

2) Αφου ειναι ανεξαρτητες τοτε ειναι ασυσχετιστες

Τοτε $Cov(X_1, X_2 - cX_1) = 0 \Leftrightarrow Cov(X_1, X_2) - c\,Cov(X_1, X_1) = 0$

Εφαρμογη.

Δειγματικο Μεσο $\bar{X}$ — εκτιμηση της μεσης τιμης (μ) μιας τμ X

$X_1, \dots, X_n$ τυχαιο δειγμα

ανεξαρτητες, ισονομες.

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ εκτιμαει το μ

→ $\bar{X}$ αμεροληπτη εκτιμητρια του μ

$\boxed{E[\bar{X}] = \mu}$

$$E[\bar{X}] = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E[X_1] + \dots + E[X_n]\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \dots + \mu) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Αρα $E[X_i] = \mu$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i \text{ ανεξ}}{=\!=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Παρατηρουμε: $\lim_{n \to \infty} Var(\bar{X}) = 0$ ☆☆☆☆

23/01/2020 - 34ο μαθημα

Ασκηση 1: Εστω X_1, X_2 τμ με $Var(X_1) = Var(X_2) = 1$

κ; $Var(X_1 + X_2) = 3$

1) Ειναι οι X_1, X_2 ανεξαρτητες;

2) Ξερουμε οτι για καποια σταθερα c οι τμ X_1, $X_2 - cX_1$ ειναι ανεξαρτητες, να βρεθει c =;

-Λυση-

1) Αν ηταν ανεξαρτητες θα επρεπε $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) \Leftrightarrow 3 \neq 2$

2) Αφου ειναι ανεξαρτητες τοτε ειναι ασυσχετιστες

Τοτε $Cov(X_1, X_2 - cX_1) = 0 \Leftrightarrow Cov(X_1, X_2) - c\,Cov(X_1, X_1) = 0$

$\Leftrightarrow Cov(X_1, X_2) - c\,Var(X_1) = 0 \quad (1)$

Γνωρίζουμε: $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 1 + 1 + 2\,Cov(X_1, X_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{2}$

Τοτε $(1) \Rightarrow \frac{1}{2} - c \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$

Ασκηση 2: Εστω X τμ (διακριτή) ομοιομορφα κατανομή στο συνολο $\{1, 2, \ldots, 20\}$

Θετουμε $Y = 21 - X$

1) Κατανομη της Y

2) Προσημο $Cov(X, Y)$

- Λυση -

1) Οι τιμες που θα παρει η Y ειναι στο συνολο $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$

Εχουμε $P(Y = y) \quad y \notin A$

Για $y \in A$: $P(Y = y) = P(21 - X = y) = P(X = 21 - y) = \frac{1}{20}$

2) $Cov(X, Y) = Cov(X, 21 - X) = -Cov(X, X) = -Var(X) < 0$

Ασκηση 3: Ριχνω αμεροληπτο ζαρι $n \geq 1$ φορες.

$Z = \#$ φορων που εμφανιζεται το 2

$W = \#$ -"- -"- -"- το 3

Να βρεθει $Cov(Z, W)$.

- Λυση -

$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ οπου $Z_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i\text{-ριψη ειναι } 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$W = \sum_{j=1}^{n} w$ οπου $w_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } j\text{-ριψη ειναι } 3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$A = Cov(Z, W) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i, \sum_{j=1}^{n} W_j\right) = \sum_{i \neq j} Cov(Z_i, W_i) + \sum_{i=1}^{n} Cov(Z_i, W_i)$

Οταν το $i \neq j$ τοτε οι Z_i, W_i ανεξαρτητες αρα $Cov(Z_i, W_i) = 0$

$Cov(Z_i, W_i) = E[Z_i \cdot W_i] - E[Z_i]E[W_i]$ (*)

$E[Z_i W_i] = \sum z\, w\, P(\quad) = 0$

Στην i ριψη αν εμφανιστει 2 τοτε $z=1$ κ $w=0$ | Αρα $E[Z_i W_i] = 0$
Ομοιως αν εμφανιστει 3 τοτε $z=0$ κ $w=1$

Εχουμε $E[Z_i] = \frac{1}{6}$ κ $E[W_i] = \frac{1}{6}$

(*) $\Rightarrow Cov(Z_i, W_i) = -\frac{1}{36}$

Αρα A $\Rightarrow$ $\boxed{Cov(Z, W) = -\frac{n}{36}}$

Ασκηση 4: Εστω X_1, X_2 τμ ανεξαρτητες κ ισονομες $X_i \sim Exp$ με μεση τιμη μ.
1) $Cov(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = ;$
2) $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = ;$ (Συντελεστης συσχετισης)
3) $X_1 + X_2$, $2X_1 + 3X_2$ ειναι ανεξαρτητες;

$exp(\lambda)$
$\mu = \frac{1}{\lambda}$
$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
$\sigma^2 = \mu^2$

-Λυση-

1) $Cov(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = 2Cov(X_1, X_1) + 3Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_2, X_1) + 3Cov(X_2, X_2) =$
$= 2Var(X_1) + 3Var(X_2) = 2\mu^2 + 3\mu^2 = 5\mu^2$

(Τα $Cov(X_1, X_2) = 0$ κ $Cov(X_2, X_1) = 0$ γιατι οι X_1, X_2 ανεξαρτητες)

2) $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = \dfrac{Cov(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)}\sqrt{Var(2X_1 + 3X_2)}} =$ (*)

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2\mu^2$
$Var(2X_1 + 3X_2) = Var(2X_1) + Var(3X_2) = 4Var(X_1) + 9Var(X_2) =$
$= 4\mu^2 + 9\mu^2 = 13\mu^2$

(*) $= \dfrac{5\mu^2}{\sqrt{2\mu^2}\sqrt{13\mu^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

3) Αφου $\rho \neq 0$, δεν ειναι ασυσχετιστες
(αν ηταν ανεξαρτητες θα ηταν ασυσχετιστες)

Ασκηση 5 Εστω X_1, X_2 τμ με $Var(X_1) = 3$, $Var(X_2) = 2$.
1) Ποια ειναι η μεγιστη και η ελαχιστη τιμη της $Var(X_1 + X_2)$;
2) Στις 2 ακραιες περιπτωσεις (μεγιστη + ελαχιστη) πως σχετιζονται οι X_1, X_2;

-Λυση-

1) $Var(X_1 + X_2) = \underbrace{Var(X_1)}_{3} + \underbrace{Var(X_2)}_{2} + 2\,Cov(X_1 + X_2)$

Γνωριζουμε οτι $\rho(X_1, X_2) = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var X_1}\sqrt{Var X_2}}$ & $|\rho| \leq 1$

Αρα $-\sqrt{Var X_1}\sqrt{Var X_2} \leq Cov(X_1, X_2) \leq \sqrt{Var X_1}\sqrt{Var X_2}$

$\Rightarrow -\sqrt{2}\sqrt{3} \leq Cov(X_1, X_2) \leq \sqrt{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} \leq Var(X_1 + X_2) \leq 5 + 2\sqrt{6}$

2) Αν $Var(X_1 + X_2) = 5 + 2\sqrt{6}$ τοτε $\rho = 1$ τοτε $X_2 = \alpha X_1 + \beta$
α θετική

$Var(X_2) = Var(\alpha X_1 + \beta) = \alpha^2 Var(X_1)$

$\Rightarrow 2 = \alpha^2 3 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{2}{3} \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

(Με τα στοιχεια που μας εχουν δοθει δεν μπορουμε να βρουμε το β)

Επομένως, $X_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, X_1 + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$

Αν $Var(X_1 + X_2) = 5 - 2\sqrt{6}$ τοτε $\rho = -1$ αρα $X_2 = \alpha' X_1 + \beta'$
$\alpha' < 0$

$Var(X_2) = Var(\alpha' X_1 + \beta') \overset{\text{παρομοια}}{\Rightarrow} \dots \Rightarrow (\alpha')^2 = \frac{2}{3} \overset{\alpha'<0}{\Rightarrow} \alpha' = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

Επομενως $X_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, X_1 + \beta'$, $\beta' \in \mathbb{R}$

→ Έστω $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, \dots, n$ ανεξάρτητες

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim ?$$

$$M_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + \frac{t^2 \sigma_i^2}{2}}$$

$$M_{\Sigma X_i}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) = e^{t\mu_1 + \frac{t^2 \sigma_1^2}{2}} \cdots e^{t\mu_n + \frac{t^2 \sigma_n^2}{2}} =$$

$$= e^{t \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{t^2 \Sigma \sigma_i^2}{2}}$$

Άρα $\Sigma X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

→ Έστω $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2).$$

→ Έστω $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ανεξάρτητες

$$Y = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E\left[e^{t(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i)}\right] = e^{tc_0} E[e^{tc_1 X_1}] \dots E[e^{tc_n X_n}]$$

$$= e^{tc_0} M_{X_1}(tc_1) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(tc_n) = e^{tc_0} \cdot e^{tc_1\mu_1 + \frac{t^2 c_1^2 \sigma_1^2}{2}} \cdots e^{tc_n\mu_n + \frac{t^2 c_n^2 \sigma_n^2}{2}}$$

$$= e^{t(c_0 + c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n) + \frac{t^2 \cdot (c_1^2\sigma_1^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2)}{2}}$$

$$E[Y] = c_0 + c_1 E(X_1) + \dots + c_n E[X_n]$$
$$= c_0 + c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n$$
$$Var = c_1^2 Var X_1 + \dots + c_n^2 Var X_n =$$
$$= c_1^2 \sigma_1^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2$$

Άρα $Y \sim N(c_0 + c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n, c_1^2\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \mu_n^2)$

→ Εστω $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξαρτητες

$\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1}{n}X_1 + \dots + \frac{1}{n}X_n \quad \begin{pmatrix} c_0 = 0 \\ c_i = \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{n}\mu + \dots + \frac{1}{n}\mu, \frac{\sigma^2}{n^2} + \dots + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)$$

$$\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Αν } \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \text{ τοτε } \frac{1}{n}\sum X_i \sim N\left(\frac{1}{n}n\mu, \frac{1}{n^2}n\sigma^2\right) \\ \text{απο } X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2) \end{array} \right)$$

24/01/2020 - 35ο μαθημα

Ασκηση 1: Αιτηματα σε server

Οι χρονοι εξυπηρετησης των διαδοχικων αιτηματων ειναι ανεξαρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παραμετρο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ποια ειναι προσεγγιστικά η πιθανοτητα να εξυπηρετησει 100 αιτηματα σε χρονο το πολυ 220 λεπτα;

- Λυση -

Εστω X_i = ο χρονος εξυπηρετησης του αιτηματος i

$$\left\{ \text{Σκεψη: } P(S_{100} \le 220) \quad S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \right\}$$

$X_i \sim Exp(1/2)$

$E[X_i] = 2$ min

$Var[X_i] = 4$

$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

$E[S_{100}] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100 \, E[X_i] = 100 \cdot 2 = 200$

→ Εστω $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξαρτητες

$$\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n \quad \begin{pmatrix} c_0 = 0 \\ c_i = \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{n}\mu + \dots + \frac{1}{n}\mu, \frac{\sigma^2}{n^2} + \dots + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)$$

$$\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(Αν $\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ τοτε $\frac{1}{n}\sum X_i \sim N\left(\frac{1}{n} n\mu, \frac{1}{n^2} n\sigma^2\right)$

απο $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$)

24/01/2020 - 35ο μαθημα

Ασκηση 1: Ατυχημα σε server

Οι χρονοι εξυπηρετησης των διαδοχικων αιτηματων ειναι ανεξαρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παραμετρο $\lambda = \frac{1}{2}$.
Ποια ειναι προσεγγιστικά η πιθανοτητα να εξυπηρετησει 100 αιτηματα σε χρονο το πολυ 220 λεπτα;

- Λυση -

Εστω X_i = ο χρονος εξυπηρετησης του αιτηματος i

$$\left\{ \text{Σκεψη: } P(S_{100} \leq 220) \quad S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \right\}$$

$X_i \sim Exp(1/2)$

$E[X_i] = 2$ min

$Var[X_i] = 4$

$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

$$E[S_{100}] = E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = 100\, E[X_i] = 100 \cdot 2 = 200$$

$$Var[S_{100}] = Var[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100 \cdot 4 = 400$$

$$P(S_{100} \le 220) = P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var(S_{100})}} \le \frac{220 - E[S_{100}]}{\sqrt{Var(S_{100})}} \right) \overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq}$$

$$= P\left(Z \le \frac{220-200}{20}\right) = P(Z \le 1) = \underbrace{\Phi(1) = 0,8413}_{\text{θα μας δοθει σαν δεδομενο}}$$

Ασκηση 2: Δειγμα 49 λαμπτηρων

T_i = χρονος ζωης λαμπτηρα $i \sim Exp(\lambda)$.

$E[T_i] = 200$ ωρες.

ΝΒ: · $P_1 = P$(συνολικος χρονος ζωης ενος λαμπτηρα ≥ 10.000 ωρες)

προσοχη! → · $P_2 = P$(το πολυ 19 απο τους 49 λαπτηρες να ζησουν λιγοτερο απο 140 ωρες).

Να υπολογισθουν προσεγγιστικα οι P_1, P_2

$\phi(1/7) = 0,5557$, $\phi(3) = 0,9987$, $e^{-0,7} = \frac{1}{2}$.

-Λυση-

Για την P_1: $T_i \sim Exp(\lambda)$

$$E[T_i] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 200 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{200}$$

$$Var[T_i] = (200)^2$$

$$S_{49} = \sum_{i=1}^{49} T_i \; : \; E[S_{49}] = 49 \cdot 200$$

$$Var[S_{49}] = Var[\sum_{i=1}^{49} T_i] \underset{\text{ανεξ.}}{\overset{T_i}{=}} 49 \cdot (200)^2$$

$$P(S_{49} \geq 10.000) = P\left(\frac{S_{49} - E[S_{49}]}{\sqrt{Var[S_{49}]}} \geq \frac{10000 - E[S_{49}]}{\sqrt{Var[S_{49}]}} \right)$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(Z \geq \frac{10.000 - 49 \cdot 200}{\sqrt{49(200)^2}}\right) = P\left(Z \geq \frac{200}{7 \cdot 200}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1}{7}\right) = 1 - \Phi(1/7) = 1 - 0,5557 = 0,4443.$$

Για την P_2: Εστω X = # λαμπτηρων απο τους 49 που ζουν λιγοτερο απο 140 ωρες.

$X \sim Bin(49, p)$ με $p = P$(να ζησει ο λαμπτηρας λιγοτερο απο 140 ωρες)

$$= P(T_i < 140) = F_{T_i}(140) =$$

$= 1 - e^{-\frac{1}{200} \cdot 140} = 1 - e^{-0,7} = 1 - 0,5 = 0,5$

Αρα $X \sim Bin(49, 0,5)$

$P_2 = P(X \leq 14)$

★ **Γενικα** ★ Αν $X \sim Bin(n,p)$ τοτε $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$ οπου $I_i \sim Bernoulli(p)$, I_i ανεξαρτητες.

Ομως $X = \underbrace{\sum_{i=1}^{49} I_i}_{S'_{49}}$ οπου $I_i \sim Bernoulli(0,5)$, I_i ανεξαρτητες, $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο λαμπτηρας λειτουργει λιγοτερο απο 140 ωρες} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Αρα, $P_2 = P(S'_{49} \leq 14)$

Εχουμε:

$$E[I_i] = 0,5, \quad Var[I_i] = 0,5(1-0,5) = 0,25$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{49} I_i\right] = 49 \cdot 0,5, \quad Var[S'_{49}] = Var\left[\sum_{i=1}^{49} I_i\right] = 49 \cdot 0,25$$

$$P_2 = P(S'_{49} \leq 14) = P\left(\frac{S'_{49} - E[S'_{49}]}{\sqrt{Var[S'_{49}]}} \leq \frac{14 - E[S'_{49}]}{\sqrt{Var[S'_{49}]}}\right)$$

$$\overset{ΚΟΘ}{\simeq} P\left(Z \leq \frac{14 - 49 \cdot 0,5}{\sqrt{49 \cdot 0,25}}\right) = P(Z \leq -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) =$$

$$= 1 - 0,9987 = 0,0013.$$

Ασκηση 3: Πολη 4.000 κατοικων.

10 ατομα/ημερα χρειαζονται νοσηλεια κατα μεσο ορο.

Να υπολογιστει προσεγγιστικα ο ελαχιστος # κλινων ωστε να εξυπηρετειται ολη η πολη με πιθανοτητα τουλαχιστον 95%

$\Phi(1,64) = 0,95$.

-Λυση-

P(εξυπηρετειται η πολη) $\geq 0,95$

X = # κατοικων που χρειαζονται νοσηλεια.

c = # κλινων

$X \sim Bin(4000, p)$

p = πιθ να χρειαστει νοσηλεια.

$E[X] = 10 \Leftrightarrow 4000p = 10 \Leftrightarrow p = \frac{1}{400}$.

Αρα $X \sim Bin(4000, \frac{1}{400})$.

$X = \sum_{i=1}^{4000} I_i$ όπου $I_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{400}\right)$, I_i ανεξάρτητες

$\overset{\|}{S_{4000}}$ $\quad I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το } i \text{ χρειάζεται νοσηλεία} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$E[I_i] = \frac{1}{400} \qquad Var[I_i] = \frac{1}{400} \cdot \frac{399}{400}$.

$E[S_{4000}] = 4000 \frac{1}{400} = 10 \qquad Var[S_{4000}] = 4000 \frac{399}{(4000)^2}$

$P(X \leq c) \geq 0{,}95$

$$P(S_{4000} \leq c) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\frac{S_{4000} - E[S_{4000}]}{\sqrt{Var[S_{4000}]}} \leq \frac{c - E[S_{4000}]}{\sqrt{Var[S_{4000}]}} \right) \geq 0{,}95$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(Z \leq \frac{c-10}{\sqrt{9975}}\right) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c-10}{\sqrt{9{,}975}}\right) \geq \Phi(1{,}64)$$

$$\frac{c-10}{\sqrt{9{,}975}} \geq 1{,}64 \Leftrightarrow c \geq 15{,}17 \Leftrightarrow c_{min} = 16$$

Άσκηση 4: Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τμ καθεμία με διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1,2,3,4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμα τους να βρίσκεται στο $[190, 220]$

Δίνονται $\phi(1), \phi(1{,}5), \phi(2)$.

-Λύση-

Ψάχνω να βρω $P(190 \leq S_{20} \leq 220)$, $S_{80} = \sum_{i=1}^{80} X_i$

$X_i \sim \text{Uniform}(\{1,2,3,4\})$

$P(X_i = k) = \frac{1}{k}$, $k = 1,2,3,4$

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{4} k P(X_i = k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4} + 3 \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2$

$$E[X_i^2] = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X_i = k) = 1^2 \frac{1}{4} + 2^2 \frac{1}{4} + 3^2 \frac{1}{4} + 4^2 \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

$$Var[X_i] = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$E[S_{80}] = E\left[\sum_{i=1}^{80} X_i\right] = 80\,\frac{5}{2} = 200$$

$$Var[S_{80}] = Var\left[\sum_{i=1}^{80} X_i\right] \overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=} 80 \cdot \frac{5}{4} = 100.$$

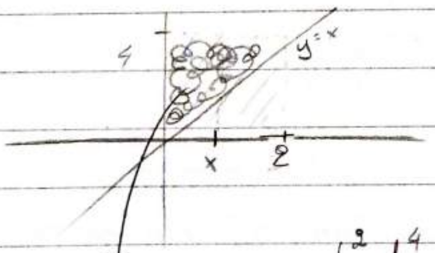
$$P(190 \le S_{80} \le 220) = P\left(\frac{190 - E[S_{80}]}{\sqrt{Var[S_{80}]}} \le \frac{S_{80} - E[S_{80}]}{\sqrt{Var[S_{80}]}} \le \frac{220 - E[S_{80}]}{\sqrt{Var[S_{80}]}} \right)$$

$$\overset{ΚΟΘ}{\approx} P\left(\frac{190 - 200}{\sqrt{100}} \le Z \le \frac{220 - 200}{\sqrt{100}} \right) = P(-1 \le Z \le 2) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1)$$

Μεθοδος Ευρεσης $P(Y > X)$

Κανω διαγραμμα. Εστω $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \quad , & 0 < x < 2,\ 0 < y < 4 \\ \quad , & \dots \end{cases}$



$$P(Y > X) = \int_0^2 \int_x^4 f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$