

# Κλασική Μηχανική Τυπολόγιο

## Μαθηματικά:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{r}$$

Για  $\triangle ABC$ , με  $a$  απέναντι από  $A$ ,  $b$  απέναντι από  $B$  και  $c$  απέναντι από  $C$ , με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου  $R$ :

$$\text{Νόμος των ημιτόνων: } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$\text{Νόμος των συνημιτόνων: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{\tan^2 \varphi + 1}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi + 1}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Πολικές Συντεταγμένες:  $\vec{r} = r\hat{r}$ ,  $\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ ,  $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\hat{r}} = \omega \hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}} = -\omega \hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}, \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\hat{\theta}$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$

Σφαιρικές συντεταγμένες:  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \theta$

$$\text{Σειρές Taylor: } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x), \exists \xi \in (x_0, x): R_n(x) = f^{(n)}(\xi) \frac{(x-x_0)^n}{n!}, R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Για } x \simeq 0: e^x \simeq 1 + x, \cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}, \sin x \simeq x - \frac{x^3}{6}, \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}, \frac{1}{1 \pm x} \simeq 1 \mp x, \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \simeq 1 \mp \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by) \xrightarrow{z=ax+by} \frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + bf(z) \iff \frac{dz}{a+bf(z)} = dx, \text{ που είναι δ.ε. χ.μ.}$$

$$\text{Γενική λύση της } a_0 + a_1 y + a_2 y' + a_3 y'' = 0: y - \frac{a_1}{a_0}, \text{ όπου } y \text{ η γενική λύση της } a_1 y + a_2 y' + a_3 y'' = 0$$

$$\text{Γενική λύση της } a_1 y + a_2 y' + a_3 y'' = 0: \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, & \alpha \nu \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \\ (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}, & \alpha \nu \ r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, & \alpha \nu \ \{r_1, r_2\} = \{a+ib, a-ib\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\text{όπου } r_1, r_2 \in \mathbb{C} \text{ είναι οι λύσεις της } a_3 r^2 + a_2 r + a_1 = 0$$

$$\text{Γενική λύση της } y'' + \omega^2 y = 0: A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

### Νόμοι του Νεύτωνα:

Σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

1ος Νόμος του Νεύτωνα:  $\Sigma \vec{F} = 0 \implies \vec{v}$  σταθερή

Ορμή:  $\vec{p} = m\vec{v}$

2ος Νόμος του Νεύτωνα:  $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} (= m\vec{a}, \text{ αν } m \text{ σταθερή})$

3ος Νόμος του Νεύτωνα: Δράση-Αντίδραση

### Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

Σε γραμμικά επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς:  $\vec{r}$ : Διάνυσμα θέσης ως προς αδρανειακό παρατηρητή στη θέση  $O$ ,

$\vec{r}'$ : Διάνυσμα θέσης ως προς μη αδρανειακό παρατηρητή στη θέση  $O'$ ,  $\vec{R}$ : Διάνυσμα θέσης του  $O'$  ως προς το  $O$ ,

$$\vec{a}_1 = \ddot{\vec{r}}, \vec{a} = \ddot{\vec{r}'}, \vec{a}_0 = \ddot{\vec{R}}, \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \implies \vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_0 \implies \vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_0 \implies m\vec{a} = m\vec{a}_1 - m\vec{a}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

Σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς:  $\vec{r}, \vec{r}', \vec{R}$  όπως πριν,  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}, \gamma = \ddot{\vec{r}'}, \vec{v} = \dot{\vec{r}'}, \vec{\omega}$ : Γωνιακή ταχύτητα του  $O'$  ως προς το  $O$  (σταθερή),  $\vec{F} = m\vec{a}, \vec{\gamma} = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \implies m\vec{\gamma} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Αν το σημείο  $\vec{A}(t)$  περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά, με  $\vec{\omega}, |\vec{OA}|$  σταθερά, τότε  $\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

### Έργο-Ενέργεια:

$$\text{Έργο: } W_{A \rightarrow B}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Κινητική ενέργεια: } K = \frac{1}{2}mv^2$$

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.):  $W_{A \rightarrow B}^{\vec{F}} = K_B - K_A$  (ισχύει για οποιαδήποτε δύναμη)

Διατηρητική δύναμη: Το έργο της δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, μόνο από τα άκρα της διαδρομής, ισοδύναμα

το έργο της σε κλειστή διαδρομή είναι 0, ισοδύναμα  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  παντού

Δυναμική ενέργεια διατηρητικής δύναμης:  $U(p) = \int_p^{p_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + U(p_0)$ , όπου  $p_0$  τυχόν σημείο, με αυθαίρετη

$$\text{δυναμική ενέργεια } U(p_0) \text{ (συνήθως } U(p_0) = 0, \text{ συχνά } p_0 = \infty), \vec{F} = -\vec{\nabla}U, W_{\vec{F}} = -\Delta U, dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, dW_{\vec{F}} = -dU \implies \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

Μηχανική ενέργεια διατηρητικής δύναμης:  $E = K + U$

Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.):  $E$  σταθερή (ισχύει για διατηρητικές δυνάμεις)

Αν έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δυναμικού, μπορεί να υπάρξει ακινησία σε ένα σημείο ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας, παλινδρομική κίνηση γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας ή μη δέσμια τροχιά,

σημεία αναστροφής είναι τα σημεία  $x$  στα οποία  $V(x) = E$

$$E = V(x) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \implies \dot{x} = \pm \left( \frac{2(E - V(x))}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \implies \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t \left( \frac{2(E - V(x))}{m} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{m}{2(E - V(x))} \right)^{\frac{1}{2}} dx \end{cases}, T = 2(t_2 - t_1),$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

### Μελέτη κίνησης σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων:

Κεντρική δύναμη:  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

Οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές

Για κεντρική δύναμη  $\vec{F}$ :  $U(r) = - \int_{\infty}^r f(r')dr'$ ,  $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$

Ροπή:  $\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}$

Στροφορμή:  $\vec{J} = m\vec{r} \times \vec{v}$

$\vec{G} = \dot{\vec{J}}$

Σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων:  $\vec{G} = 0 \iff \vec{J}$  σταθερό,  $\vec{J} \perp \vec{r}, \vec{v}$ , η τροχιά είναι επίπεδη, στο επίπεδο που ορίζεται

(οποιαδήποτε στιγμή) από τα  $\vec{r}, \vec{v}$ , ενεργό δυναμικό:  $V_{\text{εν}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} + V(r)$ ,  $J = |\vec{J}| = mr^2\dot{\theta}$ ,  $E = \frac{1}{2}mr^2\dot{r}^2 + V_{\text{εν}}(r)$ ,

$J = |\vec{J}| = mr^2\dot{\theta}$ ,  $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$ , εξίσωση τροχιάς:  $r = r(\theta)$

Για δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου, με σταθερά  $k$ :  $r = \begin{cases} \frac{-\frac{J^2}{mk}}{1-e\cos(\theta-\theta_1)}, & \text{αν } k > 0 \\ \frac{\frac{J^2}{m|k|}}{1+e\cos(\theta-\theta_1)}, & \text{αν } k < 0 \end{cases}$ , όπου  $e = \sqrt{\frac{2EJ^2}{mk^2} + 1}$ ,

η τροχιά είναι:  $\begin{cases} \text{υπερβολική (ο ένας κλάδος),} & \text{αν } k > 0 \\ \text{κυκλική,} & \text{αν } k < 0 \text{ και } e = 0 \\ \text{ελλειπτική,} & \text{αν } k < 0 \text{ και } 0 < e < 1 \\ \text{παραβολική,} & \text{αν } k < 0 \text{ και } e = 1 \\ \text{υπερβολική (ο άλλος κλάδος),} & \text{αν } k < 0 \text{ και } e > 1 \end{cases}$

Νόμοι του Kepler (για την κίνηση των πλανητών): Οι τροχίες είναι ελλειπτικές, η επιβατική ακτίνα σαρώνει

την έλλειψη με σταθερό ρυθμό,  $T^2 = \frac{4\pi^2 m}{|k|} a^3$ , όπου  $T$  είναι η περίοδος περιστροφής και  $a$  είναι το μήκος

του μεγάλου άξονα της ελλειπτικής τροχιάς

Τροχιά σωματίου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων: Από 2ο Νόμο Νεύτωνα, για την ακτινική και την αζιμουθιακή

διεύθυνση, αντίστοιχα, έχουμε ότι  $m(\ddot{r} - 2r\dot{\theta}^2) = f(r)$ , που, με αλλαγή μεταβλητής, σε κάποιο βήμα, από  $r$  σε

$u = \frac{1}{r}$  και με χρήση της  $\dot{g} = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dg}{d\theta} \dot{\theta}$ ,  $\forall g$ , οδηγεί στη δ.ε.  $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{J^2u^2} f(u^{-1})$ , από την οποία

προκύπτει η τροχιά, και  $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$ , που οδηγεί σε απόδειξη της διατήρησης (του μέτρου) της στροφορμής

Σε κεντρικό πεδίο ελκτικής δύναμης  $\vec{F} = f(r)\hat{r} = -mg(r)\hat{r}$ : Έχουμε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R$ , αν  $r = R$ ,

για μικρή διαταραχή  $x$ :  $|x| \ll R$ , έχουμε  $r = R + x$  και, από 2ο Νόμο Νεύτωνα, με τη χρήση δύο προσεγγίσεων

με αναπτύγματα Taylor, έχουμε ότι  $\ddot{x} + \left(\frac{3g(R)}{R} + g'(R)\right)x = 0$ , που έχει περιοδική λύση μόνο αν

$$\omega^2 = \frac{3g(R)}{R} + g'(R) > 0$$

### Ταλαντώσεις:

Σε μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή χωρίς απόσβεση:

$$\Sigma \vec{F} = -kx\hat{x} \implies m\ddot{x} + kx = 0 \iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \iff x = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t), \text{ όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και οι σταθερές}$$

$\alpha$  και  $\beta$  καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, ισοδύναμα  $x = A \cos(\omega_0 t - B) = A \cos B \cos(\omega_0 t) + A \sin B \sin(\omega_0 t)$ , όπου  $A$  το πλάτος της ταλάντωσης και  $B$  η αρχική της φάση, αν  $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ , τότε  $\alpha = A \cos B = x_0$ ,

$$\beta = A \sin B = \frac{v_0}{\omega_0} \implies \tan B = \frac{v_0}{x_0 \omega_0} \implies \cos B = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 B + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)^2 + 1}} \implies A = \frac{x_0}{\cos B} =$$

$$= x_0 \sqrt{\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)^2 + 1} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, B = \sin^{-1}\left(\frac{v_0}{A \omega_0}\right)$$

$$\text{Περίοδος: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{Συχνότητα: } f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (μονάδα μέτρησης: } 1Hz)$$

$$\text{Ταχύτητα: } \vec{v} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - B)$$

$$\text{Επιτάχυνση: } \vec{a} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t - B) = -\omega_0^2 x$$

$$\text{Δύναμη: } \vec{F} = m\vec{a} = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t - B) = -m\omega_0^2 x$$

$$\text{Κινητική ενέργεια: } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - B)$$

$$\text{Δυναμική ενέργεια: } V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t - B)$$

$$\text{Μηχανική ενέργεια: } E = K + V = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t - B) + \cos^2(\omega_0 t - B)) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}, \text{ σταθερή}$$

$$\text{Μέγιστη ταχύτητα: } E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \iff v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = A\omega_0$$

$$\text{Μέση κινητική ενέργεια: } \frac{\int_0^{T_0} K(t)dt}{T_0} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

$$\text{Μέση δυναμική ενέργεια: } \frac{\int_0^{T_0} V(t)dt}{T_0} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

Σε μονοδιάστατο αποσβυνόμενο ταλαντωτή:

$$\text{Υπάρχει δύναμη αντίστασης } -R\dot{x}\hat{x} \implies \ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies x = e^{-\frac{R}{2m}t} \left( Ae^{\sqrt{\frac{R^2}{4m^2} - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\frac{R^2}{4m^2} - \omega_0^2}t} \right) \implies$$

$$\implies x = \begin{cases} Ce^{-\frac{R}{2m}t} \cos(\omega_1 t + D), & \text{αν } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{4m^2} > 0 \\ (C + Dt)e^{-\frac{R}{2m}t}, & \text{αν } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{4m^2} = 0 \\ Ae^{-(\frac{R}{2m}t - \omega_1')t} + Be^{-(\frac{R}{2m}t + \omega_1')t}, & \text{αν } \omega_1'^2 = \frac{R^2}{4m^2} - \omega_0^2 > 0 \end{cases}$$

Στην πρώτη περίπτωση: Υπάρχει μικρή απόσβεση, γίνεται ταλάντωση, χρόνος εφησύχασης (ο χρόνος κατά τον οποίο το πλάτος μειώνεται κατά  $\frac{1}{e}$ ):  $\frac{R}{2m}t_{\varepsilon\varphi} = 1 \iff t_{\varepsilon\varphi} = \frac{2m}{R}$ , συντελεστής ποιότητας:  $Q = \frac{m\omega_0}{R}$ , περίοδος:  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ ,

σε μία περίοδο το πλάτος μειώνεται κατά  $e^{-\frac{\pi}{Q}}$ ,  $t_{\varepsilon\varphi} = \frac{Q}{\pi}T_1$

Στη δεύτερη περίπτωση: Υπάρχει κρίσιμη απόσβεση, δε γίνεται ταλάντωση, το σύστημα πλησιάζει μονότονα στην κατάσταση ισορροπίας

Στην τρίτη περίπτωση: Υπάρχει μεγάλη απόσβεση, δε γίνεται ταλάντωση, για αρκετά μεγάλο χρόνο ο κύριος όρος θα είναι αυτός με τον μικρότερο κατά απόλυτη τιμή συντελεστή του χρόνου στο εκθετικό, οπότε ο χαρακτηριστικός

χρόνος για να μειωθεί το πλάτος κατά  $\frac{1}{e}$  θα είναι  $t_\chi = \frac{1}{\frac{R}{2m} - \omega'_1}$

Σε εξαναγκασμένο ταλαντωτή με αρμονική εξωτερική δύναμη  $\vec{F}_{\varepsilon\chi} = F_0 \cos(\omega t)\hat{x}$ :

$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)$ , η οποία έχει μερική λύση  $x_p(t) = b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t) = \sqrt{b^2 + c^2} \cos(\omega t - \varphi)$ ,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c}{b}\right) \implies b = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2 R^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}, c = \frac{F_0 \omega R}{\omega^2 R^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \implies$$

$$\implies x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2}} \cos(\omega t - \varphi), \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega R}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \text{ και γενική λύση } x(t) = x_0(t) + x_p(t),$$

όπου  $x_0(t)$  η λύση της αντίστοιχης ομογενούς (που αντιστοιχεί σε μονοδιάστατο αποσβυνόμενο ταλαντωτή), για αρκετά μεγάλο  $t$ ,  $x(t) \simeq x_p(t)$  (το  $x_0(t)$  λέγεται παροδικός όρος)

Πλάτος:  $A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2}}$ , που γίνεται μέγιστο για  $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2m^2}}$  ( $\simeq \omega_0$ , για  $R \simeq 0$ )

$$\text{Ισχύς που απορροφάται στη μονάδα του χρόνου κατά μέσο όρο: } \langle P \rangle = F_0 \frac{A\omega}{2} \sin \varphi = \frac{F_0^2}{2} \frac{\omega \sin \varphi}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2}} =$$

$$= \frac{F_0^2}{2} \frac{\omega^2 R}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2}$$

Σε συζευγμένους ταλαντωτές:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}, \text{ για } m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k_{12} \text{ προσθέτουμε κατά μέλη και αφαιρούμε κατά μέλη}$$

και καταλήγουμε στις  $\begin{cases} m \ddot{X}_1 = -\frac{k_{12}+2k}{m} X_1 \\ m \ddot{X}_2 = -\frac{k_{12}}{m} X_2 \end{cases}$ , όπου  $X_1 = x_1 - x_2$ ,  $X_2 = x_1 + x_2$  (κανονικές συντεταγμένες του

συστήματος των συζευγμένων ταλαντωτών),  $\omega_1^2 = \frac{k_{12}+2k}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k_{12}}{m}$ , από τις οποίες παίρνουμε τις

$$\begin{cases} X_1 = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \\ X_2 = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{X_1+X_2}{2} = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = \frac{X_2-X_1}{2} = \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2) - \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} a_1=a_2=a, \varphi_1=\varphi_2=0 & \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = a \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) \\ x_2 = \frac{a}{2} (\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_1 t)) = a \sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Διακροτήματα: Διαμόρφωση πλάτους για το  $x_1$ :  $a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ , διαμόρφωση πλάτους για το  $x_2$ :  $a \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ ,

υπάρχει διαφορά φάσης  $\frac{\pi}{2}$

Κινητική ενέργεια:  $K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

Δυναμική ενέργεια:  $U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 - kx_1x_2$

Συνολική ενέργεια:  $E = K + U = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2\right) - kx_1x_2$

Ενέργεια σύζευξης:  $-kx_1x_2$

Ενεργός ή ισοδύναμη ελαστική σταθερά:  $k_{\text{ισοδ}} = \begin{cases} k_1 + k_2, & \text{σε δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα} \\ \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}, & \text{σε δύο ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά} \end{cases}$

### Συστήματα σωμάτων:

Για σύστημα  $N$  σωμάτων με μάζες  $m_i$  και διανύσματα θέσης  $\vec{R}_i, i \in \{1, \dots, N\}$ :

Μάζα συστήματος:  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Διάνυσμα θέσης κέντρου μάζας:  $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i}{M}$

Αν αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων από  $Oxyz$  σε  $O'x'y'z'$ :  $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{O}\vec{O}'$

Για συνεχή κατανομή μάζας:  $M = \int dm, \vec{R} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$

Ορμή κέντρου μάζας:  $\vec{P} = M\vec{V}_{\text{KM}}$

Εξίσωση κίνησης κέντρου μάζας:  $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{εξ}}$

Στροφορμή συστήματος:  $\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i$

Ροπή:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \times \vec{F}_i = \tau^{\text{εξ}} + \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ i \neq j}} \vec{R}_i \times \vec{F}_{ji} \quad (= \tau^{\text{εξ}}, \text{ αν οι εσωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές})$

$\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ , όπου  $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}, \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$

Κινητική ενέργεια συστήματος:  $K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \dot{\vec{R}}_i \right)^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \dot{\vec{r}}_i \right)^2$

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{R}}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{εξ}} + \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ i \neq j}} \dot{\vec{R}}_i \cdot \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{R}}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{εξ}} + \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ i \neq j}} \dot{\vec{r}}_{ji} \cdot \vec{F}_{ji}, \text{ όπου } \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j,$$

$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ , με  $i \neq j$  (ο τελευταίος όρος είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου από τις εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης)

$$\frac{d}{dt}(K + U_{\text{εσωτ}}) = \dot{K} + \dot{U}_{\text{εσωτ}} = \dot{K} - \dot{W}_{\text{εσωτ}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{R}}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{εξ}} = \dot{W}_{\text{εξ}}$$

Σε σύστημα δύο σωμάτων χωρίς εξωτερικές δυνάμεις:  $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$ , όπου  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  η ανηγμένη μάζα του συστήματος και  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$