Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

Αθήνα 2010

Οι παρούσες σημειώσεις, ουσιαστικά αποτελούν μια πιο επεξεργασμένη μορφή του μαθήματος

« Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ» που δίδαξα στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά τα έτη 2007-08 και 2009-10. Οι παρατηρήσεις , θεωρήματα ή ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο μπορεί να παραληφθούν σε μια πρώτη ανάγνωση των σημειώσεων

Οι χειρόγραφες σημειώσεις μου γράφτηκαν στον υπολογιστή (στο Word) από τον φίλο - και συνάδελφο μαθηματικό της μέσης εκπαίδευσης - κ. Κώστα Θανόπουλο, τον οποίο και από αυτή τη θέση ευχαριστώ.

Αθήνα, Ιούλιος 2010

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

* Τον Ιούνιο του 2011 οι σημειώσεις διορθώθηκαν και προστέθηκαν συμπληρωματικές ασκήσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ R^n

Το εσωτερικό γινόμενο 1

Ακολουθίες 9

Ανοικτά και κλειστά σύνολα 15

Όρια συναρτήσεων 22

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών 27

Συμπάγεια και ομοιόμορφη συνέχεια 35

Συνεκτικά σύνολα 40

Το εξωτερικό γινόμενο στον R^3 45

II ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 54

Κανόνες παραγώγισης 66

Ο κανόνας της αλυσίδας 82

Το θεώρημα μέσης τιμής 91

Πολλαπλές μερικές παράγωγοι 94

Καμπύλες στον R^n 103

Κλίση και επιφάνειες στάθμης μιας συνάρτησης 111

Το θεώρημα Taylor (μια μεταβλητή) 117

Το θεώρημα Taylor στις πολλές μεταβλητές 123

Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων 132

Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης 152

Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων 157

Ακρότατα υπό συνθήκη και πολλαπλασιαστές Lagrange 164

III ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Βασικές έννοιες στη μια μεταβλητή 171

Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 173

Σύνολα μέτρου μηδέν και ο χαρακτηρισμός του Lebesgue

των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων 180

Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων με

διαδοχική ολοκλήρωση 187

Το θεώρημα μέσης τιμής για πολλαπλά ολοκληρώματα 191

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με

διαδοχική ολοκλήρωση 200

Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής και οι

μετασχηματισμοί συντεταγμένων 208

Αλλαγή μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα 210

Αλλαγή μεταβλητής στο τριπλό ολοκλήρωμα 218

Επικαμπύλια ολοκληρώματα 229

Διανυσματικά πεδία 244

Απόκλιση και στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου 250

Το θεώρημα του Green 258

Παραδείγματα και εφαρμογές 276

Βιβλιογραφία

1) T. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, 1974

2) B. M. Budak and S. V. Fomin, Multiple integrals, Field Theory and Series- An Advanced Course in Higher Mathamatics, Mir Publishers –Moscow ,(second print) 1978

3) J. Duistermaat and J. Kolk, Multidimensional Real Analysis, Vols I, II, Cambridge University Press, 2004

4) J. Marsden and A. Tromba, Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ. Ηράκλειο 2007

5) J. Marsden and M. Hoffman, Elementary Classical Analysis,(Second ed.),W. H. Freeman and Company, New York 1993

6) Σ. Μερκουράκης και Τ. Χατζηαφράτης εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, εκδόσεις Συμμετρία 2005

7) W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976

8) M. Strauss, G. Bradley and K. Smith, Multivariable Calculus, (3 ed.), Prentice Hall, 2002

9) G.Thoma's, M.Weir, J.Hass and F.Giordano, Thoma's Calculus, (11th ed.), Pearson

Addison Wesley, 2005.

8) Λ. Τσίτσας ,Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, 2002.

9) Τ.Ε. Χατζηαφράτης, Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ R^n

Το εσωτερικό γινόμενο

Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις, η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται από τις τιμές δύο ή περισσότερων άλλων ποσοτήτων. Για παράδειγμα η συνάρτηση $V = \pi r^2 h$ υπολογίζει τον όγκο ενός ορθού κυλίνδρου, από την ακτίνα της βάσης r και το ύψος του h. Η θερμοκρασία Τ ενός σημείου της επιφάνειας της γης εξαρτάται από τις συντεταγμένες, πλάτος x και μήκος y του σημείου, έτσι γράφουμε $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x, y)$. Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν φυσιολογικά στην μελέτη συναρτήσεων $f : \mathrm{A} \subseteq R^2 \to R, g : \mathrm{A} \subseteq R^3 \to R$ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Η μελέτη αυτή οφείλει να είναι αντίστοιχη, με την μελέτη των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, όπου εξετάζονται έννοιες, όπως όριο, συνέχεια, διαφορισιμότητα και ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης.

Στον Απειροστικό Λογισμό (των συναρτήσεων μιας μεταβλητής) αυτό που επέτρεψε την μελέτη των παραπάνω οριακών διαδικασιών είναι η ύπαρξη μιας απόλυτης τιμής και άρα μιας απόστασης στην πραγματική ευθεία R.
Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και στο διανυσματικό χώρο $R^n, n \in N$.Υπενθυμίζουμε ότι τα $n-$διανύσματα $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ του R^n συνιστούν μια αλγεβρική βάση την κανονική βάση του R^n και ότι γενικεύουν την συνήθη ορθοκανονική βάση i, j, k $(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$ του R^3. Το τυχόν διάνυσμα $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ γράφεται (μοναδικά) ως $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$. Για δύο διανύσματα $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ του R^3, είναι γνωστό ότι μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο τους $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in R$.

Ο ορισμός αυτός μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στον R^n για τυχόν $n \in N$. Έτσι ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x = (x_1, ..., x_n)$ και $y = (y_1, ..., y_n)$ του R^n με τον ανάλογο τρόπο, δηλαδή:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \ \left(= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right).$$

Σημείωση: Στον R^n χρησιμοποιούμε συχνά και τον συμβολισμό, $\langle x, y \rangle$ αντί του $x \cdot y$.
Συνεχίζοντας την αναλογία με τον R^3 ορίζουμε ως μήκος η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος $x = (x_1, ..., x_n)$ τον μη αρνητικό πραγματικό,

$$|x| = \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \ \left(= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Το ζεύγος $(R^n, \| \ \|)$ ονομάζεται ο Ευκλείδειος χώρος διάστασης n.
Η ακόλουθη απλή πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

1.1. Πρόταση . Αν $x, y, z \in R^n$ και $\alpha, \beta \in R$ τότε έχουμε:

(ι) $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$

(ιι) $x \cdot y = y \cdot x$

(ιιι) $x \cdot x \geq 0$

(ιν) $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Η απόδειξη της πρότασης είναι απλή εφαρμογή του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.

Αποδεικνύουμε τώρα μια <u>σημαντική ανισότητα</u>, την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**

1.2. Πρόταση. Έστω $x, y \in R^n$ τότε $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(ή $|x \cdot y| \leq \left(\sqrt{x \cdot x}\right) \cdot \left(\sqrt{y \cdot y}\right)$ όπου $x = (x_1, ..., x_n)$ και $y = (y_1, ..., y_n)$)

Απόδειξη: Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα ως ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq 0 \neq y$

(I) Έστω ότι $\|x\| = 1 = \|y\|$. Τότε ισχύει $|x_i y_i| \leq \dfrac{x_i^2 + y_i^2}{2}, i = 1, 2, ..., n$

Άρα $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα.

(II) Γενική περίπτωση: Θέτουμε $x_i^{'} = \dfrac{x_i}{\|x\|}$ και $y_i^{'} = \dfrac{y_i}{\|y\|}, 1 \leq i \leq n$.

Από την περίπτωση (I) έπεται ότι: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} y_i^{'}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\|x\|} \cdot \frac{y_i}{\|y\|}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|} \leq 1$, εφόσον $\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}$. Έπεται ότι $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Άσκηση. Αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει στην ανισότητα Cauchy-Schwarz αν και μόνο αν τα διανύσματα x και y είναι συγγραμικά. Δηλαδή υπάρχει $\lambda \in R$ με $y = \lambda x$

Λύση: Αν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in R$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε την ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Υποθέτουμε ότι $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$. Αν ένα από τα x και y έστω $x = 0$ τότε θέτουμε $\lambda = 0$ και παρατηρούμε ότι $x = \lambda y$. Έτσι υποθέτουμε επί πλέον ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Αν $x = (x_1, ..., x_n)$ και $y = (y_1, ..., y_n)$ τότε η ισότητα $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$ γράφεται ισοδύναμα ως $\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x\|} \cdot \frac{y_i}{\|y\|}\right| = 1$ και θέτοντας $x_i^{'} = \dfrac{x_i}{\|x\|}, y_i^{'} = \dfrac{y_i}{\|y\|}$ γράφεται ως $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} \cdot y_i^{'}\right| = 1$ όπου $\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}$.

Επομένως $1 = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} \cdot y_i^{'}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i^{'} \cdot y_i^{'}\right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2} = 1$ (1)

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι ομόσημοι αφού ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα, δηλαδή $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right|$. Επίσης από την (1) έπεται ότι αναγκαία: $\left|x_i^{'}y_i^{'}\right| = \frac{1}{2}x_i^{'2}+\frac{1}{2}y_i^{'2}, i=1,2,...,n$ (2)

(α) Αν το κοινό πρόσημο των αριθμών $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι θετικό τότε οι ισότητες (2) συμπεραίνουν ότι $x_i^{'}y_i^{'} = \frac{1}{2}\left(x_i^{'2}+y_i^{'2}\right) \Leftrightarrow \left(x_i^{'}-y_i^{'}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^{'} = y_i^{'}$ για κάθε $i=1,2,..,n$ ή $\frac{x_i}{\|x\|} = \frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = \frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y_i \Leftrightarrow x = \frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y$ και $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$.

(β) Αν το κοινό πρόσημο των $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι αρνητικό τότε βρίσκουμε ότι $-x_i^{'}y_i^{'} = \frac{1}{2}\left(x_i^{'2}+y_i^{'2}\right) \Leftrightarrow \left(x_i^{'}+y_i^{'}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^{'} = -y_i^{'}$ για κάθε $i=1,2,..,n$ συνεπώς $\frac{x_i}{\|x\|} = -\frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = -\frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y_i \Leftrightarrow x = -\frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y$ και $\lambda = -\frac{\|x\|}{\|y\|}$.

Παρατηρήση Αν $x_1,...,x_n \in R$ τότε $\left|x_1+...+x_n\right| = \left|x_1\right|+...+\left|x_n\right| \Leftrightarrow$ οι $x_1,...,x_n$ είναι ομόσημοι.

Πράγματι για $n=2$ έχουμε ότι $\left|x_1+x_2\right| = \left|x_1\right|+\left|x_2\right| \Leftrightarrow \left(\left|x_1+x_2\right|\right)^2 = \left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\right)^2 \Leftrightarrow$ $\left(x_1+x_2\right)^2 = \left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\right)^2 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 = x_1^2+x_2^2+2\left|x_1x_2\right| \Leftrightarrow x_1x_2 = \left|x_1x_2\right| \geq 0$ συνεπώς οι x_1, x_2 είναι ομόσημοι.

Αντίστροφα αν $x_1x_2 \geq 0$ τότε προφανώς $\left|x_1+x_2\right| = \left|x_1\right|+\left|x_2\right|$.

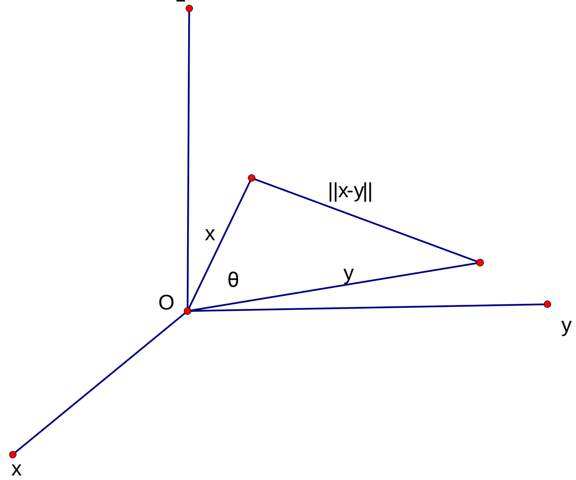
Το γενικότερο αποτέλεσμα έπεται τώρα με επαγωγή στο πλήθος n των αριθμών

Γεωμετρική σημασία της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι για μη μηδενικά διανύσματα x και y στον R^n το πηλίκο $\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$ ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$ δηλαδή $-1 \leq \frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1$.

Έτσι ορίζεται η γωνία θ μεταξύ των x και y με τον τύπο $\cos\theta = \frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}, \theta \in [0,\pi]$.

Εξάλλου αν x και y ανήκουν στον R^3 τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται από τον νόμο των συνημίτονων της τριγωνομετρίας:



Από τον νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο με κορυφή το O(0,0,0) και πλευρές τα διανύσματα x και y βρίσκουμε ότι :

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$

(1) όπου θ η γωνία των x και y. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου η (1) μετά

από πράξεις γίνεται: $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$.

Συνεπώς $|\cos\theta| = \dfrac{|x \cdot y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1 \Leftrightarrow |x \cdot y| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

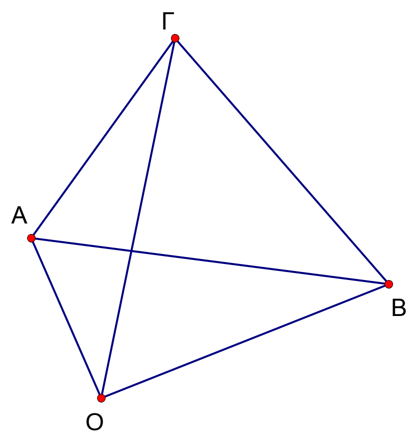
Αν τα x και y είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in R$ τότε $\theta = 0$ ή π , άρα $|\cos\theta| = 1$ και έτσι $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Αν τα x και y δεν είναι συγγραμμικά (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) τότε $\theta \in (0, \pi)$ και άρα $|\cos\theta| < 1$, επομένως$|x \cdot y| < \|x\| \cdot \|y\|$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο για το εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων $x, y \in R^n$, $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, \pi]$ η μοναδική γωνία μεταξύ x και y .

Δύο διανύσματα $x, y \in R^n - \{0\}$ λέγονται ορθογώνια αν $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα. Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο με κορυφές $\mathrm{A}(1,1,8), \mathrm{B}(4,-3,-4)$ και $\Gamma(-3.1,5)$. Να βρεθεί η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ =α του τριγώνου. Παρατηρούμε ότι η ζητουμένη γωνία είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ όπου $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4,-3,-4) - (1,1,8) = (3,-4,-12)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-3,1,5) - (1,1,8) = (-4,0,-3)$ και $\mathrm{O} = (0,0,0) \in R^3$. Επομένως

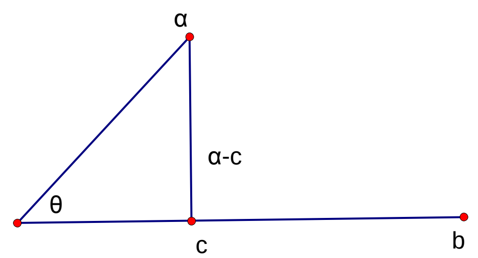


$$\cos a = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right\|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 + (-12) \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{25}} = \frac{24}{65}.$$

<u>Προβολές</u>

Έστω $a, b \in R^3$ μη μηδενικά διανύσματα όπως στο σχήμα



Θα υπολογίσουμε το διάνυσμα <u>προβολή c</u> του α επί του b με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Παρατηρούμε ότι $c = tb$ για κάποιο $t \in R$. Επειδή το διάνυσμα $a - c = a - tb$ είναι ορθογώνιο προς το b έχουμε

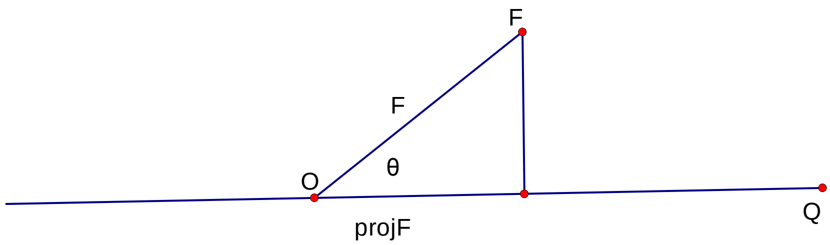
$(a-tb)\cdot b=0 \Leftrightarrow a\cdot b-tb\cdot b=0 \Leftrightarrow a\cdot b-t\|b\|^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}$. Συνεπώς

$c=tb=\left(\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b$

Το διάνυσμα c συμβολίζεται με $proj_b a$, συνεπώς $proj_b a=\left(\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b$

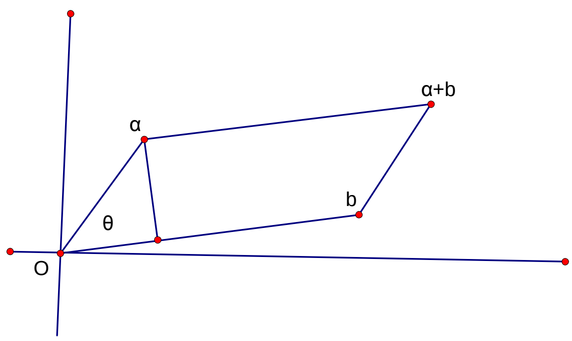
Παρατηρούμε ότι $proj_b a=\left(\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b=\left(\frac{a\cdot b}{\|b\|}\right)\frac{b}{\|b\|}$ και το διάνυσμα $\frac{b}{\|b\|}$ είναι ομόρροπο με το b και έχει μήκος ίσο με 1. Ο αριθμός $\frac{a\cdot b}{\|b\|}$ ονομάζεται και <u>βαθμωτή προβολή</u> του a επί του b και συμβολίζεται με $comp_b a$. Έπεται ότι $comp_b a=\frac{a\cdot b}{\|b\|}=\frac{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\theta}{\|b\|}=\|a\|\cdot\cos\theta$. Άρα το μήκος της προβολής του a επί του b ισούται με $|comp_b a|=\|a\|\cdot|\cos\theta|$

<u>Το έργο της δύναμης ως εσωτερικό γινόμενο</u>: Το έργο W που παράγεται από μια σταθερή δύναμη F η οποία δρα πάνω σε ένα αντικείμενο, το οποίο μετακινεί κατά μήκος της ευθείας (ε), από το σημείο O στο σημείο Q ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{OQ}$.



Επομένως $W=\|F\|\cdot\|OQ\|\cdot\cos\theta=\left(\|F\|\cdot\cos\theta\right)\cdot\|OQ\|=\left(comp_{OQ}F\right)\cdot\|OQ\|$

<u>Το εμβαδόν παραλληλογράμμου</u>:
Αν $a,b\in R^2-\{(0,0)\}$, το παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα διανύσματα a και b είναι το σύνολο $\Pi=\{\lambda a+\mu b:0\le\lambda,\mu\le1\}\subseteq R^2$. Από το σχήμα έπεται ότι το εμβαδόν Ε του Π ισούται με $E=\|b\|\cdot\|a\|\cdot\sin\theta=\|b\|\cdot\|a\|\sqrt{1-\cos^2\theta}=$



$\|b\|\cdot\|a\|\sqrt{1-\left(\frac{a\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2}=$

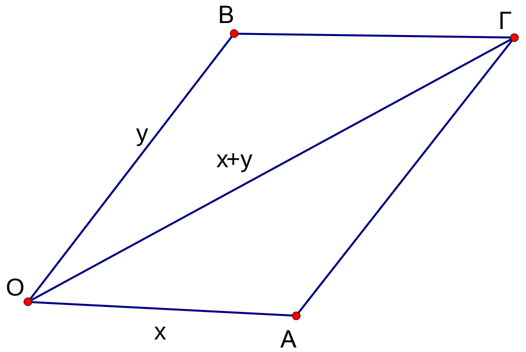
$\frac{\|b\|\cdot\|a\|\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-(a\cdot b)^2}}{\|a\|\cdot\|b\|}=$

$\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-(a\cdot b)^2}$ (1)

Αν $a=(a_1,a_2)$ και $b=(b_1,b_2)$ τότε επειδή ισχύει η ταυτότητα του Lagrange: $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$. Έπεται σε συνδυασμό με την (1) ότι $\mathrm{E}=|a_1b_2-a_2b_1|=\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right|$. Το ανάλογο αυτού του αποτελέσματος ισχύει και στις τρείς διαστάσεις, η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση.

Σημειώνουμε ότι η γενική μορφή της ταυτότητας Lagrange θα αποδειχθεί λίγο αργότερα (στην παράγραφο όπου ορίζεται το Εξωτερικό γινόμενο στον R^3).

Μια πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι η <u>τριγωνική ανισότητα</u>: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ για κάθε $x,y\in R^n$. Η ανισότητα αυτή είναι γεωμετρικά προφανής στην περίπτωση του $R^2\,(n=2)$. Αφού η κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων. Γεωμετρικά έπεται ότι $\|\mathrm{O\Gamma}\|\le\|\mathrm{OA}\|+\|\mathrm{OB}\|$.



Δίνουμε τώρα μια αναλυτική απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας που βασίζεται στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

1.3. Πρόταση: Αν $x,y\in R^n$ τότε $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

Απόδειξη: Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε: $x\cdot y\le|x\cdot y|\le\|x\|\cdot\|y\|$

Έπεται ότι,

$\|x+y\|^2=(x+y)\cdot(x+y)=x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y=\|x\|^2+2x\cdot y+\|y\|^2\le$

$=\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$. Άρα παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες συμπεραίνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$ για $x,y\in R^n$

Απόδειξη: Γράφουμε $x=(x-y)+y$ (1), $y=(y-x)+x$ (2)

Από την (1) έπεται ότι $\|x\|\le\|x-y\|+\|y\|$ και άρα $\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$ (3)

Ανάλογα από την (2) έπεται ότι $\|y\|\le\|y-x\|+\|x\|$ και συνεπώς $\|y\|-\|x\|\le\|x-y\|$ (4)

Από τις (3) και (4) έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

Παρατήρηση: Συνοψίζοντας έχουμε ότι οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης «μήκους» $\|\cdot\|:R^n\to R$ που ορίσαμε στον R^n είναι οι ακόλουθες:

(α) $\|x\|\ge 0$ και $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

(β) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|,\lambda\in R,x\in R^n$ και

(γ) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,x,y\in R^n$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μήκους η Ευκλείδεια νόρμα στον R^n έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της απόλυτης τιμής στον R (εξάλλου αν $n=1$ τότε $\|x\|=|x|$ για κάθε $x\in R$). Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων x και y του R^n το μήκος του διανύσματος $x-y$, δηλαδή $d(x,y)=\|x-y\|$. Η έννοια αυτή της απόστασης είναι που μας επιτρέπει, να ορίσουμε τις έννοιες, του ορίου ακολουθίας και γενικότερα, του ορίου συνάρτησης στον R^n κατά αναλογία με το R ($n=1$).

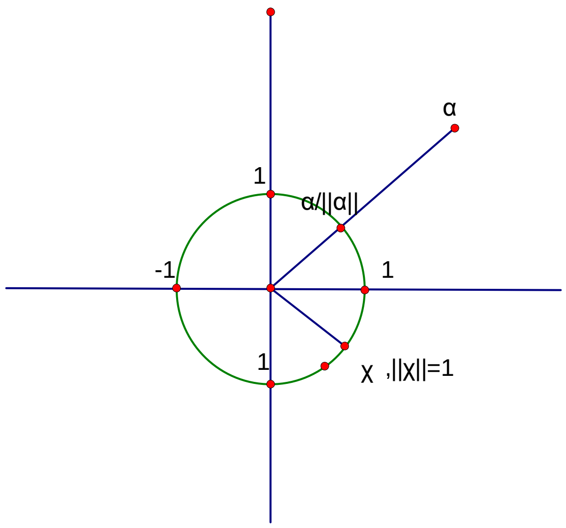
Παραδείγματα

1.Έστω $a=(a_1,\ldots,a_n)\in R^n$. Να υπολογιστεί το $\sup\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n : x_1^2+\ldots+x_n^2=1\}$.

Λύση : Από την ανισότητα C-S έχουμε: $a\cdot x\le |a\cdot x|\le \|a\|\cdot\|x\|\le\|a\|$, εφόσον $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}=1$. Έτσι το σύνολο $\mathrm{A}=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n : x_1^2+\ldots+x_n^2=1\}$ που δεν είναι κενό είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό $\|a\|$ και συνεπώς $\sup \mathrm{A}=\mathrm{M}\le\|a\|$.

Αν $a=0\Leftrightarrow a_i=0$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ τότε βέβαια $\mathrm{A}=\{0\}$ και άρα $\mathrm{M}=\sup\mathrm{A}=0$.

Υποθέτουμε ότι $a\neq 0$, τότε θέτουμε $x=\dfrac{a}{\|a\|}$ και παρατηρούμε ότι $\|x\|=\dfrac{\|a\|}{\|a\|}=1$, άρα



$a\cdot x=a\cdot\dfrac{a}{\|a\|}=\dfrac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|$. Έπεται ότι $\max\mathrm{A}=\|a\|$ δηλαδή $\mathrm{M}=\|a\|=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}$.

Σημείωση. Η βασική ιδέα εδώ είναι ότι ισότητα έχουμε στην ανισότητα C-S ακριβώς αν τα διανύσματα a και x είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν $x=\lambda a$ για κάποιο $\lambda\in R$. Από εδώ προκύπτει και η τιμή του $\lambda\left(=\dfrac{1}{\|a\|}\right)$. (Εφόσον θα έχουμε $|x\cdot a|=|\lambda a\cdot a|=|\lambda|\,a\cdot a=|\lambda|\|a\|^2=\|x\|\cdot\|a\|$ $=1\cdot\|a\|=\|a\|\Rightarrow|\lambda|\|a\|^2=\|a\|\Rightarrow|\lambda|=\dfrac{1}{\|a\|}$)

Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι: $minA=-||a||$.

2)Έστω $a=(a_1,\ldots,a_n)\in R^n$. Να υπολογιστεί το $\sup\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n : \lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_nx_n^2=1\}$, όπου $\lambda_i>0, i=1,2,\ldots,n$ είναι δοσμένοι θετικοί αριθμοί.

Λύση. Αν $a=0\Leftrightarrow a_i=0$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ τότε το σύνολο $\mathrm{A}=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n : \lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_nx_n^2=1\}$ είναι προφανώς το μονοσύνολο $\mathrm{A}=\{0\}$ και συνεπώς $\sup\{0\}=0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a\neq 0$. Θέτουμε

$y_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot x_i = x_i \cdot \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = 1, 2, ..., n$. Έπεται ότι: $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = \left(x_1\sqrt{\lambda_1}\right)^2 + \left(x_2\sqrt{\lambda_2}\right)^2 + ... + \left(x_n\sqrt{\lambda_n}\right)^2 = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = 1$.

Παρατηρούμε ότι, $a_1 x_1 + ... + a_n x_n = a_1 \frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}} + ... + a_n \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + ... + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n$. Άρα ζητούμε το supremum των ποσοτήτων $\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + ... + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n$ κάτω από την συνθήκη $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$. Από την προηγουμένη άσκηση το supremum αυτό ισούται με $\left\| \left(\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \right\| = \sqrt{\frac{a_1^2}{\lambda_1} + ... + \frac{a_n^2}{\lambda_n}}$

Ασκήσεις

(1) Έστω $x, y \in R^n$ με $y \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\|$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \geq 0$ ώστε $x = \lambda y$.

(2) Έστω $x_1, ..., x_m \in R^n$. Αποδείξτε ότι,

$$\|x_1 + ... + x_m\| \leq \|x_1\| + ...\|x_m\|.$$

Επιπλέον αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $y \neq 0$ και $\lambda_\kappa \geq 0, \kappa = 1, 2, ..., m$ ώστε $x_\kappa = \lambda_\kappa y, \kappa = 1, 2, ..., m$. [Υπόδειξη Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $m = 2$ και προχωρήστε με επαγωγή].

(3) Αν $x, y \in R^n$, αποδείξτε ότι:

(ι) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.

(ιι) $\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $x \cdot y = 0$

(ιιι) Συσχετίστε την ταυτότητα (ι) και την ανισότητα (ιι) με παραλληλόγραμμα.

(*) (4)Μια ορθοκανονική βάση του R^n είναι μια βάση $\{a_1, ..., a_n\}$ του R^n ώστε $a_\kappa \cdot a_\lambda = \delta_{\kappa\lambda}$, όπου $\delta_{\kappa\lambda} = 0$ αν $\kappa \neq \lambda$ και $\delta_{\kappa\lambda} = 1$ αν $\kappa = \lambda$, $\kappa, \lambda = 1, 2, ..., n$ (το δέλτα του Kronecker). Αποδείξτε ότι:

(ι) Η συνήθης βάση $\{e_1, ..., e_n\}$ του R^n είναι ορθοκανονική.

(ιι) Έστω $n = 4$ και $a_1 = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_3)$, $a_2 = \frac{1}{5}(4e_2 - 3e_4)$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{10}(-4e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 4e_4)$. Δείξτε ότι τα a_1, a_2, a_3 είναι ανά δύο ορθογώνια διανύσματα νόρμας 1. Βρείτε ένα διάνυσμα a_4 ώστε τα a_1, a_2, a_3, a_4, σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση του R^4

Ακολουθίες στον R^n

1.4. Ορισμός Έστω (x_k) ακολουθία διανυσμάτων στον R^n και $x \in R^n$, θα λέμε ότι η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x και θα γράφουμε, $\overset{\|\cdot\|}{\lim_{k\to+\infty} x_k = x}$ ή $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} x$ αν η ακολουθία πραγματικών $\|x_k - x\| \to 0$

Ισοδύναμα: $\overset{\|\cdot\|}{\lim_{k\to+\infty} x_k = x} \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 = k_0(\varepsilon) \in N : k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon$.

Παραδείγματα: 1) Έστω $x_k = \left(\frac{1}{2^k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right), k \geq 1$ ακολουθία στον R^2, τότε $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} (0,e)$.

Πράγματι, $\|x_k - (0,e)\| = \left\|\left(\frac{1}{2^k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)^2}$

Όμως $\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)^2 \to 0+0$ εφόσον $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e$.

Συνεπώς $\|x_k - (0,e)\| \to 0 \Leftrightarrow x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} (0,e)$.

(2) Η ακολουθία $y_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$ του R^2 δεν είναι συγκλίνουσα. Πράγματι αν υπήρχε $y \in R^2 : y_k \overset{\|\cdot\|}{\to} y$ τότε η ποσότητα $\|y_k - y\|$ θα γινόταν οσοδήποτε μικρή για μεγάλο k, π.χ. $\|y_k - y\| < \frac{1}{4}$ για μεγάλο k. Έπεται τότε από την τριγωνική ανισότητα ότι για μεγάλα k και λ με $k \neq \lambda$ θα είχαμε, $\|y_k - y_\lambda\| \leq \|y_k - y\| + \|y_\lambda - y\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Όμως $\|y_k - y_{k+1}\|^2 = \left\|\left((-1)^k - (-1)^{k+1}, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 =$

$$= \begin{cases} \left\|\left(+2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 = (+2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ άρτιος} \\ \left\|\left(-2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 = (-2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Έτσι $\|y_k - y_{k+1}\| > 2$ για κάθε $k \in N$. Άρα η (y_k) δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον R^2.

1.5Πρόταση Έστω $x_k=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\geq 1$ ακολουθία στον R^n και $x=\left(x^1,...,x^n\right)\in R^n$. Τότε, $x_k \overset{\|\cdot\|}{\underset{k\to+\infty}{\to}} x \Leftrightarrow x_k^\lambda \underset{k\to+\infty}{\to} x^\lambda$ για κάθε $\lambda=1,2,...,n$.

Απόδειξη: Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ανισότητα:

Αν $a=\left(a_1,...,a_n\right)\in R^n$ τότε, $\max\limits_{1\leq k\leq n}\left|a_k\right|\leq\|a\|\leq\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\leq k\leq n}\left|a_k\right|$

Πράγματι, έστω $\left|a_\lambda\right|=\max\left(\left|a_1\right|,...,\left|a_n\right|\right)$ τότε $\left|a_\lambda\right|\leq\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}=\|a\|$ ή $\max\limits_{1\leq k\leq n}\left|a_k\right|\leq\|a\|$.

Επίσης, $a_1^2+...+a_n^2\leq\underbrace{\left|a_\lambda\right|^2+....+\left|a_\lambda\right|^2}_{n-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}=n\left|a_\lambda\right|^2\Rightarrow\|a\|\leq\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\leq k\leq n}\left|a_k\right|$

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k\geq 1$, $\max\limits_{1\leq\lambda\leq n}\left|x_k^\lambda-x^\lambda\right|\leq\left\|x_k-x\right\|\leq\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\leq\lambda\leq n}\left|x_k^\lambda-x^\lambda\right|$. Από την ανισότητα αυτή έπεται αμέσως το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις (1). Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι μια ακολουθία $\left(x_k\right)=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\geq 1$ του R^n συγκλίνει στο $\left(x^1,...,x^n\right)\Leftrightarrow$ συγκλίνει κατά συντεταγμένες.

Έτσι ο έλεγχος της σύγκλισης μιας ακολουθίας $\left(x_k\right)=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\geq 1$ του R^n ανάγεται στην σύγκλιση των « συνιστωσών» ακολουθιών πραγματικών αριθμών $\left(x_k^\lambda\right), k\geq 1,\ \lambda=1,2,....,n$

Για παράδειγμα η ακολουθία $y_k=\left(\left(-1\right)^k,\frac{1}{k}\right), k\geq 1$ του R^2 (βλέπε παράδειγμα (2) ανωτέρω), δεν είναι συγκλίνουσα καθώς , όπως γνωρίζουμε, η ακολουθία $\left(-1\right)^k, k\geq 1$ δεν είναι συγκλίνουσα στο R.

(2) Αν μια ακολουθία $\left(x_k\right)$ είναι συγκλίνουσα στον Ευκλείδειο χώρο R^n, τότε το όριό της είναι μοναδικό. Αυτό έπεται εύκολα χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα

<u>Άλγεβρα συγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbf{R^n}$:</u>

Αν $x_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x$ και $y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}y$ στον R^n τότε:

(α) $x_k+y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x+y$

(β) $\lambda x_k\overset{\|\cdot\|}{\to}\lambda x$ για κάθε $\lambda\in R$ και

(γ) $x_k\cdot y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x\cdot y$ (εσωτερικό γινόμενο)

Η απόδειξη των (α) και (β) είναι ανάλογη με την αντίστοιχη ιδιότητα των πραγματικών ακολουθιών και έτσι αφήνεται ως άσκηση. (Μπορεί να συναχθεί ακόμη από την πρόταση 1.5). Η απόδειξη της (γ) έπεται από την πρόταση 1.5 και την αντίστοιχη ιδιότητα, για το όριο του γινομένου πραγματικών ακολουθιών.

<u>Φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbf{R^n}$</u>

1.6 Ορισμός. Μια ακολουθία $(x_k) \subseteq R^n$ λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \|x_k\| \le \mathrm{M}$ για κάθε $k \ge 1$.

1.7 Πρόταση. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ του R^n είναι φραγμένη (αλλά όχι το αντίστροφο).

Απόδειξη Έστω $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow \|x_k - x\| \to 0$. Η μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών $\|x_k - x\|, k \ge 1$ είναι βέβαια φραγμένη, άρα υπάρχει $c > 0 : 0 \le \|x_k - x\| \le c$ για κάθε $k \ge 1$. Από την τριγωνική ανισότητα συμπεραίνουμε ότι
$\|x_k\| = \|(x_k - x) + x\| \le \|x_k - x\| + \|x\| \le c + \|x\|$. Θέτουμε $\mathrm{M} = c + \|x\|$

Το παράδειγμα της ακολουθίας $y_k = \left((-1)^k, \dfrac{1}{k}\right), k \ge 1$ (του παραδείγματος (2) ανωτέρω) η οποία <u>δεν </u>είναι συγκλίνουσα στον R^2, αλλά είναι φραγμένη. (Εφόσον $\|y_k\|^2 = (-1)^{2k} + \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{k^2} \le 2 \Leftrightarrow \|y_k\| \le \sqrt{2}$, για κάθε $k \ge 1$) μας πείθει ότι το αντίστροφο της προηγουμένης πρότασης <u>δεν</u> ισχύει .

Το θεμελιώδες θεώρημα του Bolzano για την πραγματική ευθεία ισχύει γενικότερα και για τον Ευκλείδειο χώρο R^n.

1.8 Θεώρημα (Bolzano). Έστω $x_k = \left(x_k^1, ..., x_k^n\right), k \ge 1$ φραγμένη ακολουθία στοιχείων του R^n τότε η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον R^n.

Απόδειξη: Υποθέτουμε για απλότητα ότι $n = 2$ έτσι $x_k = \left(x_k^1, x_k^2\right), k \ge 1$. Επειδή, $\max\limits_{1 \le \lambda \le 2} \left|x_k^\lambda\right| \le \|x_k\|$ για κάθε $k \in N$ έπεται ότι οι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\left(x_k^1\right)$ και $\left(x_k^2\right)$ είναι φραγμένες. Έστω $\left(x_{k_l}^1\right)$ συγκλίνουσα υπακολουθία της $\left(x_k^1\right)$ ώστε $x_{k_l}^1 \to x^1$ (θεώρημα Bolzano για το R).

Έπεται ότι η υπακολουθία $\left(x_{k_l}^2\right)_{l \ge 1}$ της $\left(x_k^2\right)$ που είναι βέβαια φραγμένη έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $\left(x_{k_{l_m}}^2\right)_{m \ge 1}$ ώστε $x_{k_{l_m}}^2 \to x^2$ (επίσης με το θεώρημα Bolzano). Είναι τώρα σαφές ότι $x_{k_{l_m}}^1 \to x^1$ και από την πρόταση 1.5, έπεται ότι η υπακολουθία $\left(x_{k_{l_m}}^1, x_{k_{l_m}}^2\right)_{m \ge 1}$ της (x_k) είναι συγκλίνουσα και $x_{k_{l_m}} \underset{m \to +\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\to}} x = \left(x^1, x^2\right)$.

Όπως και στην περίπτωση του R (ή ακόμη χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5) , αποδεικνύεται και η ακόλουθη

1.9 Πρόταση: (α) Αν $(x_k) \subset R^n, x \in R^n$ και $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_k) συγκλίνει στο ίδιο όριο ($x_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$).

(β) Αν $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε $\|x_k\| \to \|x\|$ στο R. ($\left|\|x_k\| - \|x\|\right| \le \|x_k - x\|$).

Παρατήρηση: Μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) στον $(R^n, \|\cdot\|)$ και να αποδείξουμε (χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5) ότι ο $(R^n, \|\cdot\|)$ είναι <u>πλήρης</u> χώρος, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία Cauchy $(x_k) \subset R^n$ είναι συγκλίνουσα στον R^n. Ακόμη να αποδείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy κλπ.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σειράς στον R^n και να αποδείξουμε αντίστοιχα αποτελέσματα όπως στον R. Για παράδειγμα η σειρά του R^2, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, όπου $x_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right), n \ge 1$ είναι συγκλίνουσα στον R^2, εφόσον οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$. Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ στον R^2.

Οι παραπάνω ορισμοί και αποδείξεις είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους ορισμούς και αποδείξεις στο R

Παραδείγματα:

1)Να υπολογιστούν τα όρια, αν υπάρχουν, $\lim_{n \to +\infty} \left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}\right)$ και $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n}, \frac{\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5}}{2^n}\right)$

Λύση: Η ακολουθία $\left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}\right), n \ge 1$ <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα στο R^2, εφόσον η ακολουθία πραγματικών $\sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}, n \ge 1$ <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα στο R. Πράγματι οι υπακολουθίες $\sigma\upsilon\nu \frac{4n\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu(2n\pi) = 1, n \ge 1$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{(2n+1)\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, n \ge 1$ της ακολουθίας $\sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}, n \ge 1$ συγκλίνουν προφανώς σε διαφορετικά όρια.

Για την δεύτερη ακολουθία παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n} \to 0$ αφού $\sqrt[n]{n^3+1} \to 1$ και $3^n \to +\infty$ και ακόμη ότι $\frac{\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5}}{2^n} \to 0$ αφού $\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5} \to 1$ και $2^n \to +\infty$.

Έπεται ότι $\left(\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n},\frac{\sqrt[n]{n^5-2n^4+5}}{2^n}\right)\xrightarrow{\|\cdot\|}(0,0)$

2)Να ελεγχθεί αν οι ακολουθίες,

(α) $x_n=\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n},\sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\right)$ και

(β) $y_n=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu n}{n},\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2-\eta\mu n}}\right)$ συγκλίνουν και να βρεθούν τα όριά τους οποτεδήποτε υπάρχουν.

Λύση: Αρκεί σε κάθε περίπτωση να ελέγξουμε τις συντεταγμένες ακολουθίες:

(α) Η ακολουθία $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}\to 1$, εφόσον $\sqrt[n]{n}\to 1$ από το Λήμμα Cesaro.

Η ακολουθία $1\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\le \underbrace{1+1+...+1}_{n-\text{φορές}}=n$ άρα

$1\le\sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\le\sqrt[n]{n}\to 1$ συνεπώς $\sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\to 1$.

Έπεται ότι $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}(1,1)$.

(β) $\frac{|\sigma\upsilon\nu n|}{n}\le\frac{1}{n}\to 0\Rightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu n}{n}\to 0$

Παρατηρούμε ότι $1\le 2-\eta\mu n\le 3$ για κάθε $n\ge 1$. Άρα $1\le\sqrt[n]{2-\eta\mu n}\le\sqrt[n]{3}\to 1$ έπεται ότι $\sqrt[n]{2-\eta\mu n}\to 1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2-\eta\mu n}}\to\frac{1}{1}=1$

Άρα $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}(0,1)$.

Παρατηρήσεις 1) Η ακολουθία $\eta\mu n, n\ge 1$ δεν είναι συγκλίνουσα. Αν συνέκλινε έστω $\eta\mu n\to a\in R$, τότε θα είχαμε με χρήση γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$0=\lim_{n\to+\infty}\left(\eta\mu(n+2)-\eta\mu n\right)=2\eta\mu 1\cdot\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu(n+1)$ και συνεπώς $\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu n=0$ (1),

επίσης $0=\lim_{n\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu(n+2)-\sigma\upsilon\nu n\right)=-2\eta\mu 1\cdot\lim_{n\to+\infty}\eta\mu(n+1)$, άρα $\lim_{n\to+\infty}\eta\mu n=0$ (2).

Οι (1) και (2) όμως αντιφάσκουν με την γνωστή ταυτότητα $\eta\mu^2 n+\sigma\upsilon\nu^2 n=1, n\in N$.

Υπενθυμίζουμε ότι: Αν $x,y\in R$ τότε:

$\eta\mu x-\eta\mu y=2\eta\mu\frac{x-y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=-2\eta\mu\frac{x-y}{2}\cdot\eta\mu\frac{x+y}{2}$

2) Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η ακολουθία $\eta\mu n, n\ge 1$ είναι πυκνή στο $[-1,1]$. Αυτό έπεται από το θεώρημα του Kronecker.

(Αν $\theta \in R-Q$ δηλαδή άρρητος αριθμός τότε η ακολουθία $z_n = e^{2\pi in\theta}, n \geq 1$ είναι πυκνή στο μοναδιαίο κύκλο $T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Για $\theta = \dfrac{1}{2\pi}$ έχουμε ότι η $z_n = e^{in} = \eta\mu n + i\sigma\upsilon\nu n$ είναι πυκνή στον κύκλο T, από όπου έπεται ότι οι ακολουθίες $\eta\mu n$ και $\sigma\upsilon\nu n, n \geq 1$ είναι πυκνές στο $[-1,1]$. Σημειώνουμε ότι Q συμβολίζει το σύνολο των ρητών στο R). (Πρβλ. το [6], σελίδα 96-101.)

3) Το Λήμμα Cesaro ισχυρίζεται ότι, αν (x_n) είναι ακολουθία πραγματικών ώστε $x_n \to x$, με $-\infty \leq x \leq +\infty$, τότε $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \to x$.

Ασκήσεις

1)Βρείτε τα όρια αν υπάρχουν των ακολουθιών:

(α) $\left(\dfrac{1+n}{1-4n}, \dfrac{2^n}{n!}, (0,1)^n\right)$, (β) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^n - \sqrt[n]{n^8+5}}, \sqrt[n^3]{5}\right)$

(γ) $\left(1-\dfrac{1}{3^n}, \dfrac{2n^5+10^n}{n!}, \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n\right)$, (δ) $\left(\dfrac{n^3}{5n^2+8n+4}, \sqrt[n]{n^8-100n^7+n^2}\right)$

2)(α) Διατυπώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy (βασικής ακολουθίας) στον Ευκλείδειο χώρο R^n και αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy.
(β) Αποδείξτε ότι ο Ευκλείδειος χώρος είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

3)(α) Μια σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ στον R^n λέγεται απόλυτα συγκλίνουσα, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \|x_\kappa\|$ είναι συγκλίνουσα. Αποδείξτε ότι κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι και συγκλίνουσα.
(β) Αν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ είναι συγκλίνουσα, αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_\kappa \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

[Υπόδειξη για το (α): Η ακολουθία $S_m = x_1 + ... + x_m, m \geq 1$, των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy].

4) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση (απόλυτη και απλή) τις σειρές:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{n!}\right)$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2-4n}, \dfrac{n}{5^n}\right)$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n^3}{n^2}, \dfrac{1}{n^5}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

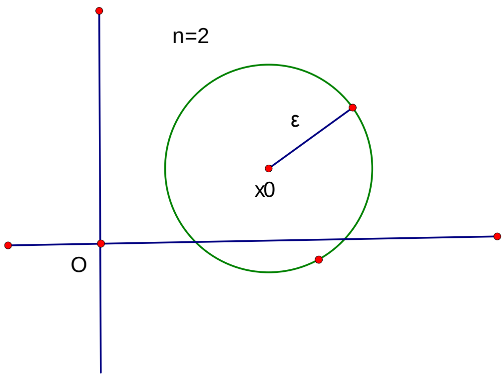
Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσεται ο μηχανισμός που θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε τις αναλυτικές ιδιότητες των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Θα χρειαστούμε τις έννοιες της ανοικτής σφαίρας του ανοικτού και του κλειστού συνόλου στον R^n, για να κατανοήσουμε καλύτερα τα όρια και θα χρειαστούμε τα όρια, για να ορίσουμε την συνέχεια την διαφορισιμότητα, καθώς και την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

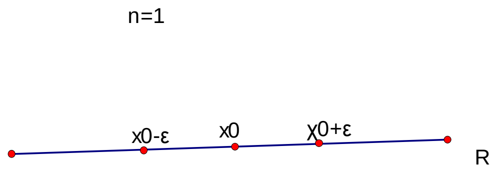
Έστω, $x_0 \in R^n$ και $\varepsilon > 0$, η ανοικτή σφαίρα κέντρου x_0 και ακτίνας ε είναι το σύνολο $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

Η κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon)$ ορίζεται ως το σύνολο $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \le \varepsilon\}$.

Επίσης συμβολίζεται και με το σύμβολο $\widehat{B}(x_0, \varepsilon)$.



Ο δίσκος $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$



το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

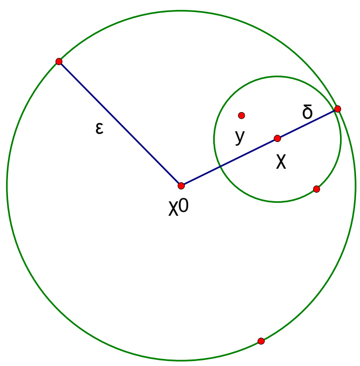
Στην περίπτωση $n = 2$ του Ευκλείδειου επιπέδου χρησιμοποιούμε και τους όρους ανοικτός και κλειστός δίσκος αντίστοιχα.

2.1 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$. Το U λέγεται ότι είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ (εξαρτώμενο από το σημείο $x \in U$), ώστε $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Προφανώς ο ίδιος ο χώρος R^n είναι ανοικτό σύνολο (στον εαυτό του).
Συμβατικά θεωρούμε και το $\varnothing$ σύνολο ως ανοικτό.
Το πρώτο μη τετριμμένο παράδειγμα ανοικτού συνόλου που θα δούμε είναι η ανοικτή σφαίρα στον R^n.

2.2 Πρόταση: Κάθε ανοικτή σφαίρα στον R^n είναι ανοικτό σύνολο.

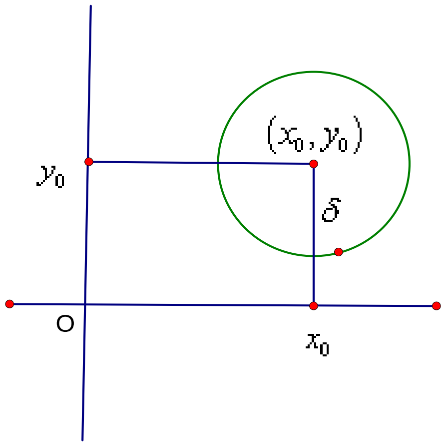
Απόδειξη: Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γεωμετρικά προφανές αν $n = 2$ ή $n = 3$. Η γεωμετρική αυτή αίσθηση μας οδηγεί και στην αναλυτική απόδειξη της γενικής περίπτωσης.



έστω $x \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon) \Leftrightarrow \|x - x_0\| < \varepsilon$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0 : \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon - \|x - x_0\| > 0$. Έστω, $y \in \mathrm{B}(x,\delta) \Leftrightarrow \|y - x\| < \delta$.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\|y-x_0\| = \|(y-x)+(x-x_0)\| \le \|y-x\|+\|x-x_0\| < \delta + \|x-x_0\| = \varepsilon$.
Επομένως, $\|y-x_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow y \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ και άρα $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$



Παραδείγματα: 1) Το άνω ανοικτό ημιεπίπεδο $\mathrm{E} = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Η απόδειξη είναι απλή και γεωμετρικά προφανής και έτσι παραλείπεται:

$\mathrm{B}((x_0,y_0),\delta) \subseteq \mathrm{E}$ όπου $0 < \delta < y_0$

2) Αν $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτή σφαίρα και $x_1 \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$, τότε το σύνολο $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon) - \{x_1\}$ είναι ανοικτό. Γενικότερα, αν $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $F \subseteq U$ πεπερασμένο, τότε το $U - F$ είναι ανοικτό σύνολο. (γιατί;)

2.3 Ορισμός. Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$, ένα σημείο $x \in \mathrm{A}$ λέγεται <u>εσωτερικό</u> σημείο του Α, αν υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου Α ονομάζεται το <u>εσωτερικό</u> του Α και συμβολίζεται με $\mathrm{int}(\mathrm{A})$ (ή A^o).

2.4 Πρόταση. Το εσωτερικό $\mathrm{int}(\mathrm{A})$ ενός συνόλου $\mathrm{A} \subseteq R^n$ είναι το <u>μεγαλύτερο ανοικτό</u> σύνολο, που περιέχεται στο Α. Ιδιαίτερα αν Α ανοικτό τότε Α=int(Α).

Απόδειξη: Υποθέτουμε βέβαια ότι $\mathrm{int}(\mathrm{A}) \neq \varnothing$ και αποδεικνύουμε πρώτα ότι $\mathrm{int}(\mathrm{A})$ είναι ανοικτό σύνολο. Αν $x \in \mathrm{int}(\mathrm{A})$, υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Αν $y \in \mathrm{B}(x,\delta)$ τότε, επειδή η σφαίρα $\mathrm{B}(x,\delta)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\varepsilon > 0 : \mathrm{B}(y,\varepsilon) \subseteq \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Άρα, $y \in \mathrm{int}(\mathrm{A})$ και έτσι, $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{A})$, το οποίο σημαίνει ότι $\mathrm{int}(\mathrm{A})$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. Επίσης παρατηρούμε ότι, αν U είναι ανοικτό σύνολο με $U \subseteq \mathrm{A}$ τότε $U \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{A})$, έπεται ότι $\mathrm{int}(\mathrm{A})$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο Α. Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι προφανής.

Παραδείγματα. 1) Το εσωτερικό του συνόλου $\mathrm{A} = [0,1) \subseteq R$ είναι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$.
2)Το εσωτερικό $\mathrm{int}\left(\overline{\mathrm{B}}(x,\delta)\right)$ του κλειστού δίσκου $\overline{\mathrm{B}}(x,\delta)$ του R^2 είναι ο ανοικτός δίσκος $\mathrm{B}(x,\delta)$ (γεωμετρικά προφανές).
3)Ένα άπειρο υποσύνολο του R^n μπορεί να έχει κενό εσωτερικό, πχ. $\mathrm{int}(Q) = \varnothing$ (όπου Q= το σύνολο των ρητών στο R). Επίσης στον R^n τα σύνολα Q^n και Z^n έχουν κενό εσωτερικό.

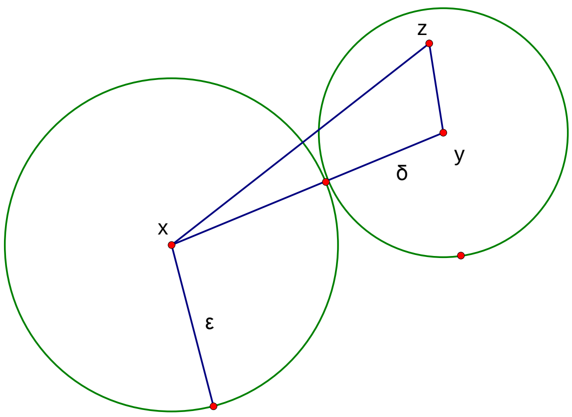
2.5 Πρόταση. (ι) Η ένωση οποιασδήποτε οικογένειας $\{V_i : i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του R^n είναι ανοικτό σύνολο.
(ιι) Η τομή μιας πεπερασμένης οικογένειας $\{V_1,...,V_n\}$, ανοικτών υποσυνόλων του R^n είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη: (ι) Έστω, $x \in \bigcup_{i\in I} V_i$, τότε υπάρχει $i_0 \in I : x \in V_{i_0}$, επειδή το V_{i_0} είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\delta >: \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq V_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Συνεπώς η ένωση $\bigcup_{i\in I} V_i$ είναι ανοικτό σύνολο.
(ιι) Έστω, $x \in \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, (αν $\bigcap_{k=1}^{n} V_k = \varnothing$ τότε προφανώς ισχύει το συμπέρασμα). Για κάθε $k = 1,2,...,n$ υπάρχει $\delta_k > 0 : \mathrm{B}(x,\delta_k) \subseteq V_k$. Αν $\delta = \min\{\delta_1,...,\delta_n\}$ τότε $\delta > 0$ και $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq V_k$ για κάθε $k = 1,2,...,n$. Άρα $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ και η τομή $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$, είναι ανοικτό σύνολο.

Ενδιαφέρουσα και χρήσιμη είναι και η έννοια του κλειστού συνόλου στον R^n.

2.6 Ορισμός. Ένα υποσύνολο $F \subseteq R^n$ λέγεται κλειστό, αν το συμπλήρωμά του $U = R^n - F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n.
Προφανώς ο R^n και το κενό σύνολο είναι κλειστά υποσύνολα του R^n.
Σημειώνουμε ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ανοικτά, αλλά ούτε και κλειστά στον R^n. Για παράδειγμα το διάστημα $(0,1]$ στο R, δεν έχει καμιά από τις δύο αυτές ιδιότητες. Πρέπει να είναι σαφές ότι τα πεπερασμένα υποσύνολα του R^n είναι κλειστά (γιατί;).

2.7. Πρόταση. Κάθε κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^n.



Απόδειξη. Έστω, $y \in R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon) \Leftrightarrow \|x-y\| > \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \|x-y\| - \varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}(y,\delta) \subseteq R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$. Πράγματι, αν $z \in \mathrm{B}(y,\delta)$, τότε $\|z-x\| \geq \big|\|x-y\| - \|z-y\|\big| \geq \|x-y\| - \|z-y\|$ $> \varepsilon + \delta - \delta = \varepsilon$
.
Επομένως, $z \in R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ και το σύνολο $R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό. Συνεπώς η $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

2.8. Ορισμός Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in R^n$.

(ι) Το x λέγεται σημείο <u>επαφής</u> του Α, αν $\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap \mathrm{A}\neq\varnothing$ για κάθε $\delta>0$. Το σύνολο των σημείων επαφής του Α λέγεται <u>κλειστότητα</u> του Α και συμβολίζεται με $\overline{\mathrm{A}}$. Προφανώς $\mathrm{A}\subseteq\overline{\mathrm{A}}$.
(ιι) Το x λέγεται σημείο <u>συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του Α, αν $\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap\left(\mathrm{A}-\{x\}\right)\neq\varnothing$ για κάθε $\delta>0$.
Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του Α συμβολίζεται με A' και ονομάζεται το <u>παράγωγο</u> σύνολο του Α.

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}\bigcup\mathrm{A}'$. (Αφήνετε ως άσκηση).

Παραδείγματα: 1) Το 1 είναι σημείο επαφής του $\mathrm{A}=\{1\}\bigcup[2,3]\subseteq R$ (καθώς $1\in\mathrm{A}$) αλλά <u>δεν</u> είναι σημείο συσσώρευσης του Α.
2) Κάθε σημείο της κλειστής σφαίρας $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι σημείο συσσώρευσης της ανοικτής σφαίρας $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ (αλλά και της κλειστής σφαίρας $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$).. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση
3) Ένα σημείο συσσώρευσης ενδέχεται να ανήκει στο Α ή να μην ανήκει στο Α, όπως το παράδειγμα (2) μας δείχνει (αν $\|y-x\|=\varepsilon$, τότε το y είναι σημείο συσσώρευσης της $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$, όμως $y\notin\mathrm{B}(x,\varepsilon)$).
4)Αν $\mathrm{A}\subseteq R^n$ ανοικτό τότε $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}'=\overline{\mathrm{A}}$. (γιατί;)

2.9. Πρόταση. Έστω $\mathrm{A}\subseteq R^n$ και $x\in R^n$. Τότε x είναι σ.σ. του Α, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(x_k)\subseteq\mathrm{A}-\{x\}$ (αντιστοίχως ακολουθία $(x_k)\subseteq\mathrm{A}$ με $x_n\neq x_m$ για $n\neq m$) ώστε $x_k\to x$

Απόδειξη: Είναι όμοια με την περίπτωση που $\mathrm{A}\subseteq R,(n=1)$ και έτσι παραλείπεται.
(Σημειώνουμε ακόμη ότι η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη με την απόδειξη του χαρακτηρισμού των κλειστών συνόλων παρακάτω.)

Παρατήρηση: Αν το $x\in R^n$ είναι σημείο συσσώρευσης του Α τότε κάθε σφαίρα $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$, περιέχει άπειρα σημεία του Α. Ιδιαίτερα το Α είναι <u>άπειρο</u> σύνολο. (Γιατί;)

2.10. Λήμμα. Έστω, $\mathrm{A}\subseteq R^n$ τότε έχουμε:
(ι) $\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c=\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$, επομένως το $\overline{\mathrm{A}}$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^n.
(ιι) $\left(\operatorname{int}(\mathrm{A})\right)^c=\overline{\mathrm{A}^c}$.

Απόδειξη: (ι) Υπενθυμίζουμε ότι $\mathrm{A}\subseteq\overline{\mathrm{A}}$. Αν $x\in\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c\Leftrightarrow x\notin\overline{\mathrm{A}}$, τότε υπάρχει $\delta>0:\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap\mathrm{A}=\varnothing$, δηλαδή $\mathrm{B}(x,\delta)\subseteq\mathrm{A}^c$, που σημαίνει ότι $x\in\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$. Άρα $\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c=\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$.

Έπεται από την ισότητα αυτή (εφόσον το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ανοικτό) ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο.
(ιι) Εφαρμόζουμε την ισότητα που αποδείξαμε στο (ι) στο σύνολο A^c και έχουμε αμέσως την ισότητα (ιι).

2.11 Πρόταση. Αν $A \subseteq R^n$, τότε η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι το <u>μικρότερο κλειστό</u> σύνολο που περιέχει το A.

Απόδειξη. Έπεται από το (ι) του προηγουμένου Λήμματος και το γεγονός , που ήδη αποδείξαμε, ότι το εσωτερικό ενός συνόλου είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται σε αυτό. (Αν F κλειστό και $A \subseteq F$, τότε το $U = R^n - F$ είναι ανοικτό και $U \subseteq A^c$, άρα $U \subseteq \operatorname{int}\left(A^c\right)$, ή $R^n - F \subseteq R^n - \overline{A}$ ή $\overline{A} \subseteq F$).

2.12 Πρόταση. Έστω, $A \subseteq R^n$, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(ι) A είναι κλειστό
(ιι) $A = \overline{A}$
(ιιι) Για κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq A$ η οποία είναι συγκλίνουσα, έστω $x_k \to x$, έπεται ότι $x \in A$

Απόδειξη. (ι)$\Rightarrow$(ιι) Επειδή γενικά ισχύει $A \subseteq \overline{A}$, το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από την προηγουμένη πρόταση.
(ιι)$\Rightarrow$(ιιι) Έστω, $(x_k) \subseteq A$ με $x_k \to x$, αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in N : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Ιδιαίτερα έπεται ότι $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Άρα το $x \in \overline{A} = A$.
(ιιι)$\Rightarrow$(ι) Έστω, ότι το A^c δεν είναι ανοικτό, τότε υπάρχει $x \in A^c = R^n - A$,ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ η σφαίρα $B(x,\varepsilon) \not\subset A^c \Leftrightarrow B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{k}$ για $k \in N$ και προχωρώντας με επαγωγή επιλέγουμε μία ακολουθία $(x_k) \subseteq A$ με $x_k \in A \cap B\left(x, \frac{1}{k}\right)$ για κάθε $k \geq 1$. Έπεται ότι $\|x_k - x\| \leq \frac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 1 \Rightarrow x_k \to x$. Αλλά τότε $x \in A$, το οποίο αντιφάσκει με την επιλογή του x.

Από την συνολοθεωρία υπενθυμίζουμε τους κανόνες του De Morgan:
Έστω X σύνολο και $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

2.13 Πρόταση. (ι) Η τομή κάθε οικογένειας $\{F_i : i \in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του R^n είναι κλειστό σύνολο.
(ιι) Η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας $\{F_1,\ldots,F_n\}$ κλειστών υποσυνόλων του R^n είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τους <u>κανόνες του De Morgan</u> και τις αντίστοιχες ιδιότητες των ανοικτών υποσυνόλων του R^n, που περιγράψαμε προηγουμένως

2.14 Ορισμός. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$. Το <u>σύνορο</u> του A στον R^n ορίζεται από την ισότητα $\partial \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{A}^c}$

Επειδή όπως αποδείξαμε, ισχύει ότι $\left(\operatorname{int}(\mathrm{A})\right)^c = \overline{\mathrm{A}^c}$, έπεται ότι $\partial \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} - \operatorname{int}(\mathrm{A})$.

Τα σημεία του $\partial \mathrm{A}$ ονομάζονται και <u>συνοριακά</u> σημεία του A. Παρατηρούμε ότι το $x \in R^n$ είναι συνοριακό σημείο του A ακριβώς τότε, αν $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ και $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{A}^c \neq \varnothing$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Παραδείγματα. 1) Το σύνορο του διαστήματος $\mathrm{I} = [0,1]$ είναι το σύνολο $\partial \mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}} \cap \overline{R - \mathrm{I}} = \mathrm{I} \cap \left((-\infty,0] \cup [1,+\infty)\right) = \{0,1\}$.

2)Το σύνορο του άνω ημιεπιπέδου $\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in R^2 : y > 0\right\}$ είναι η ευθεία (των πραγματικών αριθμών) $\left\{(x,0) : x \in R\right\}$ του R^2. (Γεωμετρικά προφανές).

3) Αν $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ είναι ένας ανοικτός δίσκος στον R^2, τότε το σύνορό του είναι ο κύκλος $S(x,\varepsilon) = \left\{y \in R^2 : \|x - y\| = \varepsilon\right\}$. (Γεωμετρικά προφανές).

4) Μπορεί μάλλον εύκολα να αποδειχθεί ότι το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται σε κάθε R^n. Αν $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ είναι μια ανοικτή σφαίρα στον R^n, τότε το σύνορό της είναι το σύνολο $\partial \mathrm{B}(x,\varepsilon) = \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon) - \mathrm{B}(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)$, όπου $S(x,\varepsilon) = \left\{y \in R^n : \|x - y\| = \varepsilon\right\}$ είναι η επιφάνειά της.

(Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η κλειστότητα της ανοικτής σφαίρας $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ ισούται με την αντίστοιχη κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$, οπότε το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του συνόρου. Η απόδειξη αυτή αφήνεται ως άσκηση).

Παρατηρήσεις. 1) Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η έννοια του συνόρου στην περίπτωση που το A είναι ένα <u>ανοικτό</u> σύνολο. Παρατηρούμε τότε ότι, (αν A ανοικτό) ένα σημείο $x \in R^n$ ανήκει στο $\partial \mathrm{A}$, αν και μόνο αν , το x είναι σημείο συσσώρευσης του A και $x \notin \mathrm{A}$ (γιατί;). Αυτό εκφράζει την διαισθητική ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο ενός συνόλου είναι ένα σημείο στην «άκρη» του συνόλου.

2) Ένα συνοριακό σημείο μπορεί βέβαια να ανήκει στο σύνολο, όπως δείχνει το παράδειγμα του κλειστού δίσκου $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ και των σημείων της περιφερείας του $S(x,\varepsilon)$.

3) Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$ τότε τα σύνολα, $\operatorname{int}\mathrm{A}, \partial \mathrm{A}$ και $\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$ είναι ανά δύο <u>ξένα</u> και ισχύει, $R^n = \operatorname{int}(\mathrm{A}) \cup \partial \mathrm{A} \cup \operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$ (Άσκηση).

4) Ένα υποσύνολο A του R^n λέγεται <u>φραγμένο</u>, αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \|x\| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Αποδεικνύεται ότι (<u>θεώρημα Bolzano</u>): Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του R^n έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης (Άσκηση).

Βέβαια, ένα άπειρο υποσύνολο του R^n ενδέχεται να μην έχει σημεία συσσώρευσης, π.χ. $\mathrm{A} = N \subset R$ ή $\mathrm{A} = Z \subset R$.

Ασκήσεις

1)Έστω $B(x,\delta)$ και $B(y,\delta)$ ανοικτές σφαίρες στον R^n ($x \neq y$ και $\delta > 0$). Αποδείξτε ότι $B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \varnothing$ αν και μόνο αν $\delta \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$.

2)Βρείτε τα $\operatorname{int}(A), \overline{A}$ και ∂A στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\{x \in R^n : 0 < \|x - x_0\| \leq \delta\}, \delta > 0$

(β) $\{x \in R^n : \|x - x_0\| = \delta\}, \delta > 0$

(γ) $\{(x,y) \in R^2 : 0 < y < x+1, x > -1\}$

(δ) $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$

(ε) $\{(x,y) \in R^2 :$ είτε ο x είτε ο y είναι άρρητος$\}$

(στ) Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του R^n

(ζ) $\{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$, όπου $(x_n) \subseteq R^n$, $x \in R^n$, $x_n \to x$

(η) [0,1] x [0,1] ως υποσύνολο του ευκλείδειου επιπέδου.

(θ)Ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι ανοικτά και ποια κλειστά;

3)Αν $A, B \subseteq R^n$ αποδείξτε ότι:

(α) $\partial A = \partial(A^c)$, (β) $\overline{A} = \overline{(\overline{A})}$, (γ) $\operatorname{int}(A) = \left(\overline{A^c}\right)^c$, (δ) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$,

(ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, (στ) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, (ζ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,

(η) $\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq R^n$: F κλειστό και A $\subseteq F\}$.

Στα (στ) και (ζ) δώστε παραδείγματα όπου η ισότητα δεν ισχύει.

4)Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου A αν:

(α) $A = \left\{(-1)^n \frac{n}{1+n} : n \in N\right\}$, (β) $A = \left\{\left(\cos\frac{2\pi n}{5}, \sin\frac{2\pi n}{5}\right) : n \in N\right\}$.

(γ) $A = \left\{\left(t_n \cdot \cos\frac{2\pi n}{5}, t_n \cdot \sin\frac{2\pi n}{5}\right) : t_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$.

(δ) $A = \left\{(x,y) \in R^2 : (x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \leq 0\right\}$.

(ε) $A = \{\cos n : n \in N\}$. [Για το (ε) συμβουλευτείτε την παρατήρηση της σελίδας 13].

5) Έστω $a \in R^n, a \neq 0$. (α) Δείξτε ότι ο ημίχωρος $\{x \in R^n : a \cdot x < c\}$ ($c \in R$) είναι ανοικτό σύνολο [Υπόδειξη $|a \cdot y - a \cdot x| \leq \|a\| \cdot \|y - x\|$]

(β) Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in R^n : a \cdot x \geq c\}$ είναι κλειστό, χρησιμοποιώντας το (α) και

(γ) ότι το υπερεπίπεδο $\{x \in R^n : a \cdot x = c\}$ είναι κλειστό σύνολο. [Τα (α), (β) και (γ) μπορούν να συναχθούν και από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε επόμενη παράγραφο]

Όρια συναρτήσεων

2.15. Ορισμός. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση $a \in R^n$ σημείο συσσώρευσης του Α και $b \in R^m$. Λέμε ότι η f έχει ως όριο το διάνυσμα b καθώς το x τείνει προς το a και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ή $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in \mathrm{A}$ και $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$.

<u>Ισοδύναμα:</u> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in \mathrm{A} - \{a\}$ και $x \in \mathrm{B}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{B}(b, \varepsilon)$

[ή ακόμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : f\left(\mathrm{B}(a,\delta) \cap \mathrm{A} - \{a\}\right) \subseteq \mathrm{B}(b, \varepsilon)$]

<u>Σημειώνουμε ότι</u>: 1) Ο αριθμός δ <u>εξαρτάται</u> από το ε και το σημείο a.
2) Το όριο αν υπάρχει είναι <u>μοναδικό</u> (εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας).
3)Για μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R$, τα όρια $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ορίζονται αναλόγως. Η διατύπωση αυτών των ορισμών αφήνεται ως άσκηση.

Παραδείγματα: 1) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ και $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

Λύση Έστω, $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ και για κάθε $(x, y) \neq (0,0)$ με $\|(x, y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$ έχουμε

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon .$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \|(x, y)\| = 0$

2) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$ (και $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(x^2 + y^2\right) = 0$)

Λύση. Έστω, $\varepsilon > 0$. Τότε για $0 < \delta \leq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, έχουμε αν $(x, y) \neq (0,0)$,

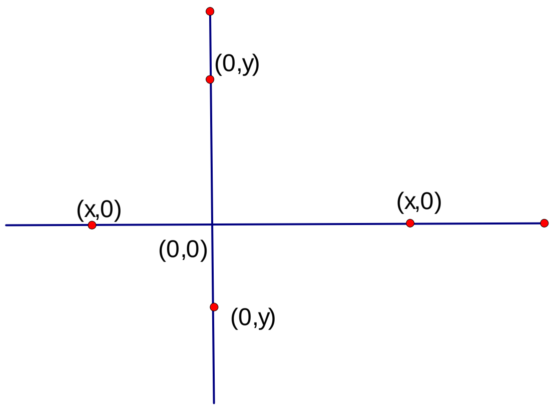
$\|(x, y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \leq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ τότε $\dfrac{1}{x^2 + y^2} > \varepsilon$, άρα $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(x^2 + y^2\right) = 0$.

3) Το όριο $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ <u>δεν</u> υπάρχει.

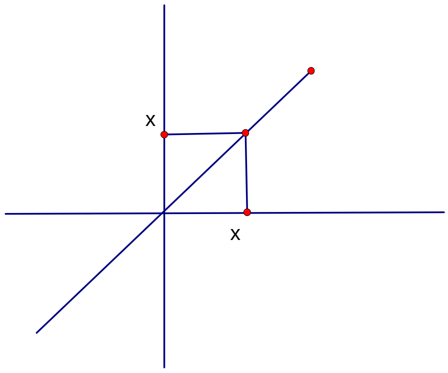
Λύση Προσεγγίζουμε πρώτα το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $y'y$, δηλαδή αν $x = 0$ και $y \neq 0$. Έστω

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0),$$



τότε: $f(0,y)=\dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2}=0$ και συνεπώς $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$.

Αναλόγως αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$ ($y=0$ και $x\neq 0$) βρίσκουμε $f(x,0)=\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$, δηλαδή $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0)=0$



Όμως αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=x$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Έπεται ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>δεν</u> υπάρχει.

4) Το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ <u>δεν</u> υπάρχει.

Λύση. Η $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U=R^2-\{(x,x):x\in R\}$, του οποίου το σύνορο είναι η ευθεία $y=x$, δηλαδή το σύνολο $\{(x,x):x\in R\}$. Έστω, $a\in R$ με $a\neq 1$. Προσεγγίζουμε το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=ax$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,ax)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+ax}{x-ax}=\dfrac{1+a}{1-a}$

Επειδή $\dfrac{1+a}{1-a}\neq\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ για $a,\beta\in R$ με $a\neq 1,\beta\neq 1$ και $a\neq\beta$ έπεται ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$, δεν υπάρχει.

(Μπορούμε να περιορισθούμε και στις ευθείες $\{(x,0):x\in R\},\{(0,y):y\in R\}$ για να διαπιστώσουμε την μη ύπαρξη του ορίου.)

Παρατηρούμε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία $L_a=\{(x,ax):x\in R\}$ με $a\neq 1, a\in R$ και θέτοντας $f(0,0)=\dfrac{1+a}{1-a}$ γίνεται συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής, παρόλα αυτά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>δεν</u> υπάρχει.

2.16. Θεώρημα. (Χαρακτηρισμός των ορίων συναρτήσεων με ακολουθίες).
Έστω, $f:\mathrm{A}\subseteq R^n\to R^m$ συνάρτηση, $a\in R^n$ σ.σ. του Α και $b\in R^m$.
Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

(ιι) Για κάθε ακολουθία $(x_n)\subseteq \mathrm{A}$ με $x_n\neq a$, για κάθε $n\geq 1$ και $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}a\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}b$

Απόδειξη. (ι)$\Rightarrow$(ιι) Έστω $\varepsilon>0$ τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει $\delta>0: x\in \mathrm{A}$ και $0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-b\|<\varepsilon$ (1)

Έστω $(x_n) \subseteq \mathrm{A} - \{a\} : x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$, υπάρχει

τότε $n_0 \in N : n \geq n_0$ τότε $\|x_n - a\| < \delta$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι: αν $n \geq n_0$ τότε $\|f(x_n) - b\| < \varepsilon$. Δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} b$.

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός (ι). Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in \mathrm{A} - \{a\}$ με $\|x_\delta - a\| < \delta$ και $\|f(x_\delta) - b\| \geq \varepsilon$ (3).

Άρα για $\delta_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$ υπάρχει $x_n \in \mathrm{A} - \{a\} : ($ $\|x_n - a\| < \dfrac{1}{n}$ και $\|f(x_n) - b\| \geq \varepsilon$. Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$ και $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο b, άτοπο από την υπόθεσή μας.

Σημείωση: 1) Οι συναρτήσεις προβολές $\pi_k : R^n \to R, k = 1, 2, \ldots, n$ ορίζονται ως $\pi_k(x) = x_k$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$

2) Αν $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\pi_k of : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R, k = 1, 2, \ldots, m$. Γράφουμε τότε $f_k = \pi_k of, k = 1, 2, \ldots, m$, δηλαδή $f_k(x) = \pi_k(f(x)), k = 1, 2, \ldots, m$. Είναι τότε σαφές ότι, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), x \in \mathrm{A}$. Δηλαδή $f_k(x)$ είναι η $k-$συντεταγμένη του διανύσματος $f(x), 1 \leq k \leq m$. Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cdot y, x - y)$, τότε $f_1(x, y) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y) = x \cdot y$ και $f_3(x, y) = x - y$.

Οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων περιγράφονται στην επόμενη.

2.17 Πρόταση. Έστω, $f, g : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συναρτήσεις, $a \in R^n$ σ.σ. του $\mathrm{A}, b \in R^m$ και $\lambda \in R$. Τότε έχουμε:

(1) Αν $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,

τότε $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \cdot b$,

(όπου η $\lambda f : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται ως $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $x \in \mathrm{A}$).

(2) (Αν $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1, \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_2$

τότε $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_1 + b_2$, (όπου η $f + g : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται με $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathrm{A}$).

(3) Αν, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1, \lim\limits_{x \to a} g(x) = b_2$

τότε $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2$ (εσωτερικό γινόμενο), (όπου η $f \cdot g : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in \mathrm{A}$). Για $m = 1$ έχουμε βέβαια το σύνηθες γινόμενο πραγματικών αριθμών.

(4) Αν $m = 1$ και $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ τότε $f(x) \neq 0$ για x «κοντά» στο a και $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{b}$ (η $\dfrac{1}{f}$ ορίζεται τότε σε κατάλληλη περιοχή του a στο σύνολο Α).

(5) Αν $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, όπου $f_1, \ldots, f_m : \mathrm{A} \to R$ είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της f, τότε, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_m) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f_k(x) = b_k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες (1) έως (4) συνάγονται εύκολα από τις αντίστοιχες αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες
(θεώρημα 2.16). Η (4) χρησιμοποιεί και τον ορισμό του ορίου.
Η ιδιότητα (5) αποδεικνύεται με χρήση της πρότασης 1.5 (κατά συντεταγμένες σύγκλιση μιας ακολουθίας $(x_k) \subseteq R^n$) και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες (θεώρημα 2.16). Έτσι οι αποδείξεις αυτές αφήνονται ως άσκηση.

Παραδείγματα: Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2}\right)$ και

(β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\eta\mu\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2}\right)$

Λύση (α) Σύμφωνα με την πρόταση 2.17 (5) αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2}$.

Για το πρώτο όριο έχουμε: $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \dfrac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{y^2}} = \dfrac{|x|\cdot|y|}{|y|} = |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$. (Αν $\varepsilon > 0$ θέτουμε $\delta = \varepsilon$).

Συνεπώς, εφόσον $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2} = 0$, (για τον υπολογισμό αυτού του ορίου με τον ορισμό των ορίων, αρκεί δοθέντος του $\varepsilon > 0$, να θέσουμε $\delta = \varepsilon$) έπεται ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

Για τη δεύτερη συντεταγμένη παρατηρούμε ότι, θέτοντας $z = x^2 + y^2$ έχουμε ότι ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right) = 0$, άρα)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2} = \lim_{z\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu z-1}{z} = \lim_{z\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu z-\sigma\upsilon\nu 0}{z-0} = \sigma\upsilon\nu'0 = -\eta\mu 0 = 0 .$$

(β) Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι αν $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $g(x,y) = \dfrac{\eta\mu\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2}$ τότε έχουμε: $f(0,y) = 0, y \in R$, $y \neq 0$ άρα $\lim\limits_{y\to0} f(0,y) = 0$ και $f(|x|,0) = \dfrac{|x|}{|x|} = 1, x \in R, x \neq 0$, άρα $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x,0) = 1$. Έτσι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά συνέπεια (από την πρόταση 2.17 (5)) ούτε και το ζητούμενο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(f(x,y),g(x,y)\right)$ στον R^2.

Για λόγους πληρότητας εξετάζουμε και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Έτσι έχουμε:

$$g(x,0)=\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}1 \text{ και } g(0,y)=2\cdot\frac{\eta\mu 2y^2}{2y^2}\xrightarrow[y\to 0]{}2\cdot 1=2.$$

Έτσι ούτε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ υπάρχει.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι: (α) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0$ και (β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+x-xy-y}{x-y}=1$

2)Αποδείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$, (β) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,

(γ) $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$, (δ) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

3)Έστω $f:R^2\to R$ συνάρτηση. Υποθέτομε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ υπάρχει. Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ υπάρχουν για κάθε $y\in R$(αντίστοιχα τα όρια $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ υπάρχουν για κάθε $x\in R$) αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]=L$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right]=L$).

4) Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις καθορίστε αν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχουν και οποτεδήποτε υπάρχουν υπολογίστε τα:

(α) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (β) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(γ) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ (δ) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & x\neq -y\\ 0, & x+y=0\end{cases}$

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Η Ευκλείδεια απόσταση που ορίσαμε στον R^n επιτρέπει (εκτός από τον ορισμό των ορίων συναρτήσεων και ακολουθιών) και τον ορισμό της συνέχειας συναρτήσεων της μορφής $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$.

3.1 Ορισμός. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση και $a \in \mathrm{A}$, η f λέγεται <u>συνεχής στο σημείο</u> a, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : x \in \mathrm{A}$ και $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός αυτός είναι τελείως ανάλογος με τον ορισμό της συνέχειας στην περίπτωση $n = m = 1$ και ακόμη ότι είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : f\left(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}(a, \delta)\right) \subseteq \mathrm{B}\left(f(a), \varepsilon\right)$.

Η f λέγεται συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

3.2 Πρόταση. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση και $a \in \mathrm{A}$ ώστε a σημείο συσσώρευσης του A, τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) f συνεχής στο a

(ιι) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Απόδειξη: Προφανής από τους ορισμούς των ορίων και της συνέχειας συναρτήσεων.

3.3 Παρατήρηση. Αν το $a \in \mathrm{A}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή αν υπάρχει $\varepsilon > 0 : \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}(x, \varepsilon) = \{a\}$) τότε η f είναι προφανώς συνεχής στο a (γιατί;).

3.4 Θεώρημα. (Χαρακτηρισμός της συνέχειας με ακολουθίες).

Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ και $a \in \mathrm{A}$. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) f είναι συνεχής στο a

(ιι) Για κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq \mathrm{A}$ με $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{\|\cdot\|} a$ έπεται ότι $f(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{\|\cdot\|} f(a)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη με την απόδειξη του χαρακτηρισμού των ορίων συναρτήσεων με ακολουθίες (θεώρημα 2.16). Μια άλλη απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας το θεώρημα 2.16 την πρόταση 3.2 και την παρατήρηση 3.3.

3.5 Θεώρημα. Έστω, $f, g : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συναρτήσεις συνεχείς στο σημείο $a \in \mathrm{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Οι συναρτήσεις $f + g,\ \lambda f,\ (\lambda \in R),\ f \cdot g$ (εσωτερικό γινόμενο των f και g) είναι συνεχείς στο a. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $m = 1$ τότε η πραγματική συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο a.

(ιι) Αν $m = 1$ και $g(a) \neq 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0 : g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}(a, \delta)$ και η συνάρτηση $\dfrac{1}{g}$ (ορισμένη στο $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}(a, \delta)$) είναι συνεχής στο a.

(ιι) Αν $h : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ είναι συνάρτηση και $h(x) = (h_1(x), ..., h_m(x)), x \in \mathrm{A}$, τότε η h είναι συνεχής στο $a \in \mathrm{A}$ αν και μόνο αν η κάθε μία από τις συνιστώσες συναρτήσεις $h_1, ..., h_m$ είναι συνεχής στο a.

Απόδειξη. Έπεται εύκολα με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας συναρτήσεων με ακολουθίες (θεώρημα 3.4) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών. Για την (ιι) χρησιμοποιούμε και τον ορισμό της συνέχειας της f στο a.

3.6 Πρόταση. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ και $g : \mathrm{B} \subseteq R^m \to R^l$ συναρτήσεις ώστε $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$. Αν η f είναι συνεχής στο $a \in \mathrm{A}$ και η g συνεχής στο $f(a)$ τότε η $gof : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^l$ είναι συνεχής στο a.

Απόδειξη. Έστω $(x_n) \subseteq \mathrm{A}$ με $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$. Επειδή η f είναι συνεχής στο a έπεται από το θεώρημα 3.4 ((ι)$\Rightarrow$(ιι)) ότι $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} f(a)$. Επειδή η g συνεχής στο $f(a)$ έπεται πάλι από την (ι) $\Rightarrow$(ιι) του θεωρήματος 3.4 ότι $g(f(x_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} g(f(a))$. Από την αντίστροφη συνεπαγωγή (ιι) $\Rightarrow$(ι) του θεωρήματος 3.4, έπεται ότι η gof συνεχής στο a.

Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $V \subseteq \mathrm{A}$, το σύνολο V λέγεται ότι είναι <u>ανοικτό στο Α</u> (ή σχετικά ανοικτό υποσύνολο του Α) αν υπάρχει $W \subseteq R^n$ ανοικτό στο R^n ώστε $V = \mathrm{A} \cap W$.
Ένα υποσύνολο Β του Α λέγεται <u>κλειστό στο Α</u> (ή σχετικά κλειστό υποσύνολο του Α) αν υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο F του R^n, ώστε $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap F$. Για παράδειγμα, αν $\mathrm{A} = [0,1) \subseteq R$, τότε το $V = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ είναι ανοικτό στο Α και το $\mathrm{B} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι κλειστό στο Α (γιατί;).
Παρατηρούμε ότι το $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ είναι κλειστό στο Α αν και μόνο αν το $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ είναι ανοικτό στο Α (γιατί;).

3.7 Πρόταση. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι συνεχής.
(ιι) Για κάθε $U \subseteq R^m$ ανοικτό έπεται ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο Α. Ιδιαίτερα, αν το Α είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον R^n.
(ιιι) Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του R^m έπεται ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο Α. Ιδιαίτερα αν Α κλειστό υποσύνολο του R^n το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^n.

Απόδειξη. (ι) $\Rightarrow$(ιι) Έστω, $U \subseteq R^m$ ανοικτό στον R^m. Έστω, ακόμη $x \in f^{-1}(U)$ τότε $f(x) \in U$ και βέβαια $x \in \mathrm{A}$. Έπεται ότι υπάρχει $\delta_x > 0 : f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}(x, \delta_x)) \subseteq U$ (από τον ορισμό της συνέχειας και το γεγονός ότι U ανοικτό στον R^m). Έτσι συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(U)$ μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοικτών στο Α υποσυνόλων του Α ως ακολούθως, $f^{-1}(U) = \bigcup\{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}(x, \delta_x) : x \in f^{-1}(U)\} = \mathrm{A} \cap \left[\bigcup\{\mathrm{B}(x, \delta_x) : x \in f^{-1}(U)\}\right]$ και συνεπώς είναι σχετικά ανοικτό υποσύνολο του Α. Είναι τώρα σαφές ότι αν το Α ανοικτό στον R^n τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο R^n για κάθε U ανοικτό στον R^m.

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Έστω $x \in \mathrm{A}$ και $U = \mathrm{B}\left(f(x),\varepsilon\right)$ τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο Α και $x \in f^{-1}(U)$, επομένως υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$, άρα $f\left(\mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}(x,\delta)\right) \subseteq f\left(f^{-1}(U)\right) = U = \mathrm{B}\left(f(x),\varepsilon\right)$ και η f είναι συνεχής στο x.

Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (ιι) και (ιιι) της πρότασης, έπεται αμέσως από το ακόλουθο στοιχειώδες συνολοθεωρητικό αποτέλεσμα: Αν Χ και Y σύνολα και $f : \mathrm{X} \to Y$ συνάρτηση, τότε για κάθε $\mathrm{B} \subseteq Y$ ισχύει: $f^{-1}\left(\mathrm{Y} - \mathrm{B}\right) = \mathrm{X} - f^{-1}\left(\mathrm{B}\right)$.

3.8 Παρατήρηση. Έστω, $g : R^2 \to R$ συνάρτηση. Η απαίτηση ο περιορισμός της g πάνω σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ να είναι συνεχής στο $(0,0)$ δεν είναι αρκετός ώστε να συνεπάγεται τη συνέχεια της g στο $(0,0)$. Πράγματι έστω, $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Έστω, $a \in R$ τότε, για $x \neq 0$ έχουμε $g(x,ax) = \dfrac{x(ax)^2}{x^2+(ax)^4} = \dfrac{a^2x}{a^4x^2+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = g(0,0)$. Επίσης $g(0,y) = 0 = g(0,0)$ για κάθε $y \in R$ με $y \neq 0$. Από την άλλη μεριά παρατηρούμε ότι η g <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $(0,0)$ όπως έπεται από τις σχέσεις, $g\left(\lambda t^2, t\right) = \dfrac{\lambda t^2 \cdot t^2}{\left(\lambda t^2\right)^2 + t^4} = \dfrac{\lambda t^4}{\lambda^2 t^4 + t^4} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1} \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\lambda \in R$, $t \neq 0$ (Παρατηρούμε ότι, $2|\lambda| \leq \lambda^2 + 1, \forall \lambda \in R$).

Συνεπώς η g είναι σταθερή στις παραβολές $\left\{(x,y) : x = \lambda y^2\right\}$ για $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ και σε κάθε δίσκο $\mathrm{B}\left((0,0),\varepsilon\right)$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $-\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{1}{2}$ (γιατί;).

3.9 Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ λέγεται ότι είναι φραγμένη αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε $\left\| f(x) \right\| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Για παράδειγμα η συνάρτηση g της προηγούμενης παρατήρησης είναι φραγμένη, αφού $\left| g(x,y) \right| \leq \dfrac{1}{2}, \forall \ (x,y) \in R^2$ (γιατί;).

Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων

1)Κάθε <u>Lipschitz συνάρτηση</u> $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ είναι συνεχής (δηλαδή μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ για την οποία υπάρχει σταθερά $\mathrm{K} > 0$ ώστε $\left\| f(x) - f(y) \right\| \leq \mathrm{K} \left\| x - y \right\|$ για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$).

Πράγματι, δοθέντος του $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$, οπότε έχουμε $x, y \in \mathrm{A}$ και $\|x-y\| \le \delta$ τότε $\|f(x)-f(y)\| \le \mathrm{K}\|x-y\| \le \mathrm{K}\cdot\delta = \mathrm{K}\cdot\frac{\varepsilon}{\mathrm{K}} = \varepsilon$.

2)Οι συναρτήσεις <u>προβολές</u> $\pi_k : R^n \to R, k = 1,2,...,n$, ώστε $\pi_k(x) = x_k$, για $x = (x_1,...,x_n), k = 1,2,...,n$, είναι Lipschitz και άρα συνεχείς. Πράγματι, αν $x, y \in R^n$ και $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n)$ τότε $|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \le \|x-y\|$, για κάθε $k = 1,2,...,n$.

3) Γενικότερα κάθε <u>γραμμική</u> συνάρτηση $f : R^n \to R^m$ είναι Lipschitz (Υπενθυμίζουμε ότι οι προβολές είναι γραμμικές.).

Ας υπενθυμίσουμε πρώτα κάποιες ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων:
(I) Έστω, $f : R^n \to R$ γραμμική συνάρτηση ($m = 1$), τότε υπάρχει $a = (a_1,...,a_n) \in R^n$ ώστε $f(x) = a\cdot x = a_1x_1 + ... + a_nx_n$, όπου $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε την συνήθη βάση $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0),...,e_n = (0,....,0,1)$ του R^n και θέτουμε $a_k = f(e_k), k = 1,2,...,n$, τότε

$$f((x_1,...,x_n)) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = a\cdot x$$

(II) Έστω, $f : R^n \to R^m$ γραμμική ($m \ge 2$). Θέτουμε $f_k = \pi_k o f, k = 1,2,...,m$, οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1,..., f_m$ της f είναι βέβαια γραμμικές, αφού οι προβολές $\pi_1,...,\pi_m$ είναι γραμμικές.

Έτσι μπορούμε να γράφουμε $f = (f_1,..., f_m) \Leftrightarrow f(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$ για $x \in R^n$.

Από το (I) έχουμε ότι, για κάθε $k = 1,2,...,m$ υπάρχει $a_k \in R^n$ ώστε $f_k(x) = a_k\cdot x$ για $x \in R^n$, όπου $a_k = (a_{k1},...,a_{kn})$. Έπεται ότι για $x \in R^n$,

$$\|f(x)\| = \|(a_1\cdot x,...,a_m\cdot x)\| = \sqrt{(a_1\cdot x)^2 + ... + (a_m\cdot x)^2} \le \sqrt{(\|a_1\|\cdot\|x\|)^2 + ... + (\|a_m\|\cdot\|x\|)^2}$$
$$= \|x\|\sqrt{\|a_1\|^2 + ... + \|a_m\|^2}.$$

Άρα θέτοντας, $\mathrm{K} = \sqrt{\|a_1\|^2 + ... + \|a_m\|^2} = \sqrt{\sum\{a_{k\lambda}^2 : 1 \le k \le m, 1 \le \lambda \le n\}}$, συμπεραίνουμε ότι $\|f(x)\| \le \mathrm{K}\|x\|$, από όπου έπεται ότι $\|f(x-y)\| \le \mathrm{K}\|x-y\|$ για κάθε $x, y \in R^n$ και η f είναι συνάρτηση Lipschitz. (Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwartz.)

Παρατήρηση. Έστω, $L(R^n; R^m)$ ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $f : R^n \to R^m$ και $V(m\times n; R)$ ο χώρος των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.
Είναι η παραπάνω ανάλυση που έγινε στο (II) που μας οδηγεί φυσιολογικά στην ταύτιση των δύο παραπάνω χώρων (που γίνονται διανυσματικοί χώροι επί του R ο καθένας με τις συνήθεις πράξεις). Η ταύτιση των δύο χώρων γίνεται μέσω του

γραμμικού ισομορφισμού $L\left(R^n;R^m\right)\xrightarrow{\Phi}V(m\times n;R):\Phi(f)=\mathrm{A}$ όπου Α είναι ο $m\times n$ πίνακας, $\mathrm{A}=\left(a_{\kappa\lambda}\right)=\left(f_\kappa\left(e_\lambda\right)\right),\kappa=1,2,...,m,\lambda=1,2,...,n$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\.\\.\\a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\qquad\left(a_{\kappa\lambda}=f_k\left(e_\lambda\right)\right)$$

Θέτοντας $\|f\|=\sqrt{\sum\left\{a_{\kappa\lambda}^2:\kappa=1,2,...,m,\lambda=1,2,...,n\right\}}$, ο διανυσματικός χώρος $L\left(R^n;R^m\right)$ αποκτά την δομή ενός Ευκλειδείου χώρου, ουσιαστικά ταυτιζόμενος με τον $R^{m\times n}$. Παρατηρούμε ότι, $f(x)=\mathrm{A}\cdot x=$ πολλαπλασιασμός του πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{\kappa\lambda}\right)$ με το διάνυσμα στήλη $x=\begin{pmatrix}x_1\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$.

(*) 4)Οι πράξεις του διανυσματικού χώρου R^n είναι συνεχείς.

Εννοούμε με αυτό τις συναρτήσεις: $\Phi:(x,y)\in R^n\times R^n\to x+y\in R^n$ και $\varphi:(\lambda,x)\in R\times R^n\to\lambda x\in R^n$ (διανυσματική πρόσθεση και βαθμωτό γινόμενο αντίστοιχα). Παρατηρούμε καταρχήν ότι ο χώρος $R^n\times R^m$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον R^{n+m} μέσω της $\left(\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)\to\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)$ και η νόρμα του δίνεται από τον τύπο $\|(x,y)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$.

Για την συνέχεια της Φ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η Φ είναι γραμμική και άρα Lipschitz.

Για το βαθμωτό γινόμενο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες: Έστω, $\left(\lambda_k,x_k\right),k=1,2,...$ ακολουθία στον $R\times R^n$ και $(\lambda,x)\in R\times R^n$ ώστε $\left(\lambda_k,x_k\right)\to(\lambda,x)\Leftrightarrow\lambda_k\to\lambda$ και $x_k\to x$. Έπεται ότι $\left\|\lambda_kx_k-\lambda x\right\|\le\left\|\lambda_kx_k-\lambda x_k\right\|+\left\|\lambda x_k-\lambda x\right\|=\left\|x_k\right\|\cdot\left|\lambda_k-\lambda\right|+|\lambda|\left\|x_k-x\right\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0+0=0$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\left(x_k\right)$ είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα.

5) Η συνάρτηση, $g:x\in R^n\to\|x\|\in R$ είναι συνεχής. Πράγματι, αν $x,y\in R^n$ τότε $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$, επομένως η g είναι συνάρτηση Lipschitz και άρα συνεχής [$g(x)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2},x=\left(x_1,...,x_n\right)\in R^n$]

6)Η συνάρτηση $x\in R^n-\{0\}\to\dfrac{x}{\|x\|}=\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}},...,\dfrac{x_n}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}\right)\in R^n$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x\neq0,x\in R^n$ και $\left(x_k\right)\subseteq R^n-\{0\}:x_k\xrightarrow{\|\cdot\|}x$ τότε $\left\|x_k\right\|\to\|x\|$ (παράδειγμα 5) και επειδή $\|x\|\neq0$ έπεται ότι $\dfrac{1}{\left\|x_k\right\|}\to\dfrac{1}{\|x\|}$. Από την συνέχεια του βαθμωτού γινομένου έπεται ότι $\frac{1}{\|x_k\|}\cdot x_k \to \frac{1}{\|x\|}\cdot x$. (Σημειώνουμε ότι η απόδειξη αυτή <u>δεν</u> χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες του χώρου R^n, πρβλ. επίσης το θεώρημα 3.5 ii).

7) Κάθε <u>πολυωνυμική</u> συνάρτηση $(x_1,...,x_n)\in R^n \to P(x_1,...,x_n)\in R$ είναι συνεχής. Μια συνάρτηση $\mathrm{P}(x_1,...,x_n)$ λέγεται πολυωνυμική αν είναι γραμμικός συνδυασμός <u>μονώνυμων</u> δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$, όπου $k_1,...,k_n$ μη αρνητικοί ακέραιοι. Έστω, για απλότητα $n=2$, έτσι η $\mathrm{P}(x,y)$ είναι πολυώνυμο αν είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $x^k\cdot y^\lambda$ με k,λ μη αρνητικούς ακέραιους. Τώρα κάθε μονώνυμο $x^k\cdot y^\lambda$ είναι συνεχής συνάρτηση όπως έπεται με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας με ακολουθίες και τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών (αν $(x_\nu,y_\nu)\xrightarrow{\|\cdot\|}(x,y)\Leftrightarrow x_\nu\to x$ και $y_\nu\to y$, τότε $x_\nu^k\to x^k$ και $y_\nu^\lambda\to y^\lambda$ άρα $x_\nu^k\cdot y_\nu^\lambda\to x^k\cdot y^\lambda$) ή εναλλακτικά με χρήση του παραδείγματος (2) του θεωρήματος 3.5 (ι) και με επαγωγή στον βαθμό του (ο βαθμός του μονώνυμου $x^k\cdot y^\lambda$ είναι $k+\lambda$).

Εφόσον τα μονώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις από το θεώρημα 3.5(ι) , έπεται ότι κάθε πολυώνυμο πολλών μεταβλητών είναι συνεχής συνάρτηση.

Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα αυτό γενικεύει το παράδειγμα (3), δεδομένου ότι κάθε γραμμική συνάρτηση είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

8) Κάθε <u>ρητή</u> συνάρτηση $f(x_1,...,x_n)=\frac{P(x_1,...,x_n)}{Q(x_1,...,x_n)}$, όπου $P(x_1,...,x_n),Q(x_1,...,x_n)$ πολυώνυμα $n-$μεταβλητών και Q όχι ταυτοτικά μηδέν, είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Αυτό είναι προφανής συνέπεια του θεωρήματος 3.5. Έτσι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x,y)=\frac{x^2+2xy-y^5+5x^2y}{x^2-y^2}$ και $g(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ είναι ρητές.

9) Η συνάρτηση εσωτερικό γινόμενο, $(x,y)\in R^n\times R^n\to x\cdot y\in R$ είναι συνεχής.

Πράγματι έστω, $(x_k,y_k),k\geq 1$ ακολουθία στον $R^n\times R^n$ ώστε $(x_k,y_k)\to(x,y)\in R^n\times R^n \Leftrightarrow x_k\to x$ και $y_k\to y$ τότε $|x_k\cdot y_k-x\cdot y|\leq|x_k\cdot y_k-x\cdot y_k|+|x\cdot y_k-x\cdot y|=|y_k\cdot(x_k-x)|+|x\cdot(y_k-y)|\leq$ ανισότητα Cauchy-Schwartz $\leq\|x_k-x\|\cdot\|y_k\|+\|y_k-y\|\cdot\|x\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ (Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η (y_k) είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα ακολουθία). Από τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες έπεται το συμπέρασμα.

Ασκήσεις

1)Δείξτε ότι η συνάρτηση $x\in R^n\xrightarrow{\varphi}\frac{x}{1+\|x\|}\in \mathrm{B}(0,1)$ είναι συνεχής $1-1$ και επί της $\mathrm{B}(0,1)$ με αντίστροφη την $y\in\mathrm{B}(0,1)\xrightarrow{\sigma}\frac{y}{1-\|y\|}\in R^n$. Δείξτε επί πλέον ότι και η σ είναι συνεχής. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες]

2)Δείξτε ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$, (β) $g(x,y)=\dfrac{x^3y-\cos(xy)}{x^2+y^2}$ και $h(x,y,z)=\dfrac{x^3-2xyz+\log(xy)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους τα οποία και να περιγράψετε.

3) Έστω $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ και $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^6},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο R^2 και ότι η g είναι μη φραγμένη σε κάθε σφαίρα $\mathrm{B}((0,0),\varepsilon)$.

(β) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αλλά ο περιορισμός τόσο της f όσο και της g σε οποιαδήποτε ευθεία του R^2 είναι συνεχής συνάρτηση.

4) Προσδιορίστε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε η διανυσματική συνάρτηση, $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\dfrac{2x^2-x^2y^2+2y^2}{x^2+y^2}\right),(x,y)\neq(0,0)\\ (a,\beta), \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ να γίνεται συνεχής στο $(0,0)$.

5)Είναι η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ συνεχής στο $(0,0)$;

6)Έστω $f:U\subseteq R^2\to R$ συνάρτηση, όπου U ανοικτό σύνολο και $(a,b)\in U$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta_1>0$ και $\delta_2>0$ ώστε $(a-\delta_1,a+\delta_1)\times(b-\delta_2,b+\delta_2)\subseteq U$.

(β) Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο (a,b) τότε οι συναρτήσεις $f_1(x)=f(x,b)$, $x\in(a-\delta_1,a+\delta_1)$, $f_2(y)=f(a,y)$, $y\in(b-\delta_2,b+\delta_2)$ είναι συνεχείς στα a και b αντίστοιχα.

(γ) Γενικεύστε τα (α) και (β) για μια συνάρτηση $n-$μεταβλητών, $f:U\subseteq R^n\to R$.

(Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση $n-$μεταβλητών είναι συνεχής για κάθε μια μεταβλητή χωριστά).

7) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x,y)\to\max(x,y)$ και $(x,y)\to\min(x,y)$ είναι συνεχείς στο R^2. [Υπόδειξη: $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$]

8) Έστω $f_1,\ldots,f_m:A\subseteq R^n\to R$ συναρτήσεις και $a\in A$. Θέτομε $F(x)=\max(f_1(x),\ldots,f_m(x))$ και $G(x)=\min(f_1(x),\ldots,f_m(x))$, $x\in A$. Αποδείξτε ότι αν οι $f_1,\ldots,f_m$ είναι συνεχείς στο a, τότε και οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχείς στο a. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση (7) και επαγωγή στο m].

9) Δείξτε χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων με κλειστά σύνολα, ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι κλειστά:
(α) $\{x \in R : -2 \le x \le 2 \text{ και } x^3 - x \ge 0\}$
(β) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και γενικότερα η επιφάνεια $S^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του R^n.
(γ) $\{x \in R^n : a \cdot x \le \|x\|\}$, όπου $a \in R^n$ είναι δοσμένο διάνυσμα.
(δ) $\{(x, y) : x^4 + y^4 = 1\}$.

10) Έστω $a > 0$, $f : A \subseteq R^n \to R$ συνάρτηση και $x_0 \in R^n$.
(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = |x|^a$, $x \in R$ είναι συνεχής στο 0 χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας.
(β) Έστω $h(x) = |f(x)|^a$, $x \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 αποδείξτε ότι η h είναι συνεχής στο x_0.
(γ) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο A τότε και η $h(x) = |f(x)|^a$, $x \in A$, είναι συνεχής χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών με ανοικτά σύνολα.
(Βέβαια το (γ) έπεται προφανώς και από το (β).)

11) Προσδιορίστε αν το A είναι ανοικτό σχετικά με το S, κλειστό σχετικά με το S ή τίποτα από τα δύο στις ακόλουθες περιπτώσεις:
(α) $S = \{x \in R : a \le x \le b, x \ne c\}, A = [a, c), a < c < b$
(β) $S = (0,1], A = \left\{\frac{1}{n} : n \ge 1\right\}$ (γ) $S = [0,1], A = \left\{\frac{1}{n} : n \ge 1\right\}$
(δ) $S = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$, $A = \{(x, y) \in S : x^2 \ge y^2\}$.
(ε) $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 4\}$, $A = \{(x, y) \in S : x^2 < y^2\}$

(*)12) Έστω $\varnothing \ne A \subseteq R^n$. (α) Αποδείξτε ότι αν $\{B_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcup_{i \in I} B_i$ είναι ανοικτό σχετικά με το A και ότι αν $B_1, \ldots, B_n$ $(n \in N)$ είναι (πεπερασμένη) οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcap_{\kappa=1}^{n} B_\kappa$ είναι ανοικτό σχετικά με το A.
(β) Αποδείξτε τις αντίστοιχες ιδιότητες για οικογένειες κλειστών σχετικά με το A υποσυνόλων του A.

Συμπάγεια και ομοιόμορφη συνέχεια

Μια πολύ σημαντική έννοια στην Ανάλυση είναι αυτή της συμπάγειας . Όπως θα δούμε τα συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου R^n συμπεριφέρονται λίγο πολύ ως πεπερασμένα σύνολα.

3.8. Ορισμός Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$.

(ι) Το Κ λέγεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq \mathrm{K}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο Κ.

(ιι) Το Κ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \|x\| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Πρέπει να είναι σαφές ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n είναι συμπαγές. (Δώστε τις λεπτομέρειες.)

3.9 Θεώρημα. Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(ι) Το Κ είναι συμπαγές.

(ιι) Το Κ είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $(x_k) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο Κ και συνεπώς $x \in \mathrm{K}$. Άρα το Κ είναι κλειστό.
Ας υποθέσουμε ότι το Κ δεν είναι φραγμένο. Τότε μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε μια ακολουθία $(y_k) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $\|y_k\| \geq k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ Είναι τώρα σαφές ότι η (y_k) δεν μπορεί να έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, άτοπο.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω, (x_k) τυχούσα ακολουθία σημείων του Κ. Επειδή το Κ είναι φραγμένο η (x_k) είναι και αυτή φραγμένη, συνεπώς από το θεώρημα Bolzano έχει μια υπακολουθία $(x_{k_m})_{m\geq 1}$ η οποία συγκλίνει έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in R^n$. Επειδή το Κ είναι κλειστό έπεται ότι $x \in \mathrm{K}$. Άρα το Κ είναι συμπαγές.

3.10. Πρόταση. Έστω, $\mathrm{K} \subseteq R^n$ και $f : \mathrm{K} \to R^m$ συνεχής. Τότε το $f(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R^m.(Έπεται ιδιαίτερα ότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση.)

Απόδειξη Έστω $(y_k) \subseteq f(\mathrm{K})$ τυχούσα ακολουθία. Επιλέγουμε $(x_k) \subseteq \mathrm{K} : f(x_k) = y_k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Επειδή το Κ είναι συμπαγές η (x_k) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Από την συνέχεια της f έπεται ότι $y_{k_m} = f(x_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) \in f(\mathrm{K})$.

Στο επόμενο Λήμμα φαίνεται και η συμπεριφορά ενός συμπαγούς συνόλου ως πεπερασμένο.

3.11 Λήμμα Αν Κ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $R\ (n=1)$, τότε το Κ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Το Κ είναι φραγμένο σύνολο αφού είναι συμπαγές. Έστω $m = \inf \mathrm{K}$ και $\mathrm{M} = \sup \mathrm{K}$. Οι αριθμοί m και M είναι σημεία επαφής του Κ (γιατί;), δηλαδή $m, \mathrm{M} \in \overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$, αφού το Κ είναι κλειστό. Έπεται αμέσως ότι τα m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο στοιχείο του Κ αντίστοιχα.

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο είναι μια σπουδαία αρχή για την Μαθηματική Ανάλυση, έπεται τώρα αμέσως από τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα (την πρόταση 3.10 και το Λήμμα 3.11).

3.12 Θεώρημα Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$ συμπαγές και $f : \mathrm{K} \to R$ συνεχής (πραγματική) συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν σημεία $p, q \in \mathrm{K}$ ώστε $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Απόδειξη: Η εικόνα $f(\mathrm{K}) \subseteq R$ του Κ είναι συμπαγές υποσύνολο του R από την πρόταση 3.10. Από το Λήμμα 3.11 έπεται ότι το $f(\mathrm{K})$ έχει μέγιστο Μ και ελάχιστο στοιχείο m. Έστω $p, q \in \mathrm{K}$ ώστε $f(p) = m$ και $f(q) = \mathrm{M}$, τότε $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Παρατήρηση: Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές. (Γιατί;)

Παραδείγματα συμπαγών συνόλων

1)Κάθε <u>κλειστή σφαίρα</u> $\widehat{\mathrm{B}}(x, \varepsilon) = \{ y \in R^n : \|x - y\| \leq \varepsilon \}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R^n, αφού είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

2)Η επιφάνεια $S(x, \varepsilon)$ της σφαίρας $\widehat{\mathrm{B}}(x, \varepsilon)$ είναι συμπαγές σύνολο (γιατί;).

3)Κάθε <u>κλειστό ορθογώνιο</u> $\Pi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ του R^n είναι ομοίως κλειστό και φραγμένο σύνολο του R^n και άρα συμπαγές. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Ιδιαίτερα ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του R είναι συμπαγές σύνολο.

4)Αν (x_k) είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον R^n έστω $x_k \to x$ τότε το σύνολο $\mathrm{K} = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Πράγματι, το σύνολο Κ είναι βέβαια φραγμένο και εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $U = R^n - \mathrm{K}$ είναι ανοικτό, συνεπώς, το Κ είναι κλειστό. Έπεται αμέσως ότι το Κ είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές.

5) Ο R^n δεν είναι συμπαγής χώρος (γιατί;).

Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας, η οποία είναι ισχυρότερη από αυτήν της συνέχειας θα μας χρειασθεί όταν μελετήσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $a \in \mathrm{A}$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, a) > 0 : x \in \mathrm{A}$ και $\|x - a\| \leq \delta$ τότε $\|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$.

Η f θα λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν ο θετικός αριθμός $\delta(\varepsilon, a) > 0$ εξαρτάται <u>μόνο</u> από το ε. Με περισσότερη ακρίβεια, μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ θα λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε, $x, y \in \mathrm{A}$ και $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

Παραδείγματα. 1) Κάθε συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ η οποία είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $\mathrm{K} > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq \mathrm{K}\|x - y\|$ για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, δοθέντος του $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$ και ελέγχουμε ότι αν $\|x-y\| \le \delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$

(με $x, y \in \mathrm{A}$) τότε $\|f(x)-f(y)\| \le \mathrm{K}\|x-y\| \le \mathrm{K}\cdot\delta = \mathrm{K}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}} = \varepsilon$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι κάθε **γραμμική** συνάρτηση $f : R^n \to R^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2) Η συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to R : f(x) = \sqrt{x}, x \ge 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (χρησιμοποιήστε την ανισότητα, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$), αλλά <u>δεν</u> είναι Lipschitz.

Ας εξακριβώσουμε τον τελευταίο ισχυρισμό. Έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά $\mathrm{K} > 0$, δηλαδή $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \mathrm{K}|x-y|$ για κάθε $x, y \ge 0$. Τότε θα είχαμε ότι (με $y = 0$) $\sqrt{x} \le \mathrm{K}x$ για κάθε $x \ge 0$ ή $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \mathrm{K}$ για κάθε $x > 0$, άτοπο.

3) Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in R$ είναι βέβαια συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν δ είναι τυχών θετικός αριθμός τότε η ποσότητα $(x+\delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη, (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\delta+\delta^2\right) = +\infty$) και συγχρόνως $\left|(x+\delta)-x\right| = \delta$.

Η ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης χαρακτηρίζεται με χρήση ακολουθιών με τον ακόλουθο τρόπο.

3.13 Θεώρημα. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ιι) Για κάθε ζεύγος ακολουθιών (x_k) και (y_k) από το Α με $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ισχύει ότι $\|f(x_k)-f(y_k)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $(x_k),(y_k) \subseteq \mathrm{A}$ με $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ και ακόμη έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $x, y \in \mathrm{A}$ και $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$ (1)

Αλλά αφού $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ υπάρχει $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\delta) \in N$ ώστε $k \ge \mathrm{K} \Rightarrow \|x_k - y_k\| \le \delta$ (2). Από τις (1) και (2) συνάγομε ότι $k \ge \mathrm{K} \Rightarrow \|f(x_k)-f(y_k)\| \le \varepsilon$ και άρα $\|f(x_k)-f(y_k)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν σημεία $x(\delta)$ και $y(\delta)$ του Α με $\|x(\delta)-y(\delta)\| \le \delta$ και $\|f(x(\delta))-f(y(\delta))\| \ge \varepsilon_0$ (3). Εφαρμόζοντας την (3) για $\delta = \dfrac{1}{k}, k \in N$ βρίσκουμε σημεία $x_k, y_k \in A$ με $\|x_k - y_k\| \le \frac{1}{k}$ και συγχρόνως $\|f(x_k) - f(y_k)\| \ge \varepsilon_0$. Αλλά τότε $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ και $\|f(x_k) - f(y_k)\|$ δεν συγκλίνει στο 0, που αντιφάσκει στην υπόθεσή μας. Συνεπώς ο ισχυρισμός μας είναι σωστός.

Παραδείγματα: 1) Η συνάρτηση $f(x,y) = xy$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω, $(x_k, y_k) = (k,k)$ και $(x_k', y_k') = \left(k + \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k}\right), k \ge 1$. Τότε $\|(x_k, y_k) - (x_k', y_k')\|^2 = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\|^2 = \frac{2}{k^2} \to 0 \Leftrightarrow \|(x_k, y_k) - (x_k', y_k')\| \to 0$. Όμως $\left|f(x_k, y_k) - f(x_k', y_k')\right| = \left|k^2 - \left(k + \frac{1}{k}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{k^2}$ δεν συγκλίνει στο 0.

2)Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,1]$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω, $x_k = \frac{1}{k}$ και $y_k = \frac{1}{k+1}, k \ge 1$. Τότε έχουμε $|x_k - y_k| = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \to 0$, όμως $|f(x_k) - f(y_k)| = k + 1 - k = 1$ για κάθε $k \ge 1$.

Το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα συνδέει την συμπάγεια και την ομοιόμορφη συνέχεια.

3.14 Θεώρημα Έστω, $K \subseteq R^n$ συμπαγές και $f : K \to R^m$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω, ότι υπάρχει ένα ζεύγος ακολουθιών $(x_k),(y_k)$ του K ώστε, $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ενώ η $\|f(x_k) - f(y_k)\|$, $k \ge 1$ δεν συγκλίνει στο 0.

Επειδή η ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $\|f(x_k) - f(y_k)\|, k \ge 1$, <u>δεν </u>είναι μηδενική έχει μια υπακολουθία η οποία θα έχει ένα θετικό κάτω φράγμα, έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η ίδια ακολουθία έχει αυτή την ιδιότητα, δηλαδή υπάρχει $c > 0 : \|f(x_k) - f(y_k)\| \ge c$ για κάθε $k \ge 1$.

Επειδή το K είναι συμπαγές η (x_k) (ή η (y_k)) θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in K$. Από το γεγονός ότι $\|x_{k_m} - y_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ έπεται αμέσως ότι $y_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in K$. Έπεται τώρα από την συνέχεια της f ότι $f(x_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x)$ και $f(y_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x)$ συνεπώς $\|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ και η τελευταία σχέση αντιφάσκει με την $\|f(x_k) - f(y_k)\| \ge c$ για κάθε $k \ge 1$.

Ασκήσεις

1) Αποδείξτε με χρήση του χαρακτηρισμού της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x) = x^2, x \ge 0$, (β) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, (γ)

$f\left(x,y,z\right)= x^{2}+y^{2}+\ z$ και (δ) $f\left(x\right)= \dfrac{x}{\|x\|}$, $x\in R^{n}$, $x\neq 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς,

2)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις, (α) $f\left(x\right)=\log x, x\in\left[c,+\infty\right)$ όπου $c>0$, (β) $f\left(x\right)=\sqrt{x}, x\geq 0$, και (γ) $f\left(x\right)=\left(\left|a_1x_1+...+a_nx_n\right|\right)^{\frac{1}{2}}$, $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in R^{n}$ και $a_1,...,a_n$ πραγματικές σταθερές, είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

3) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\left(x,y\right)\in R^{2}\to\max\left(x,y\right)$ και $\left(x,y\right)\in R^{2}\to\min\left(x,y\right)$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

4) Αποδείξτε ότι αν K είναι φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του R^{n} τότε η κλειστότητα $\overline{\mathrm{K}}$ του K είναι συμπαγές σύνολο.

5) Έστω $\mathrm{K}_1\supseteq\mathrm{K}_2\supseteq....\supseteq\mathrm{K}_n\supseteq...$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του R^{n},αποδείξτε ότι η $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{K}_n$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του R^{n}.

6) Έστω A κλειστό μη κενό υποσύνολο του R^{n} και $a\in R^{n}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left\|x-a\right\|, x\in R^{n}$, έχει ελάχιστη τιμή επί του A. Δηλαδή υπάρχει $x_1\in\mathrm{A}:\left\|x-x_0\right\|\geq\left\|x_1-x_0\right\|$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. [Υπόδειξη. Έστω $m=\inf\left\{\left\|x-a\right\|:x\in\mathrm{A}\right\}$. Αν $\varepsilon>0$, το σύνολο $\left\{x\in\mathrm{A}:\left\|x-a\right\|\leq m+\varepsilon\right\}$ είναι κλειστό και φραγμένο]

7)Έστω $f:\overline{\mathrm{B}}\left(0,\mathrm{M}\right)\to R$ συνεχής συνάρτηση (όπου $\overline{\mathrm{B}}\left(0,\mathrm{M}\right)=\left\{x\in R^{n}:\left\|x\right\|\leq\mathrm{M}\right\}$). Θέτομε $g\left(r\right)=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|:\left\|x\right\|\leq r\right\},0\leq r\leq\mathrm{M}$. Τότε η g είναι συνεχής συνάρτηση του $r\in\left[0,\mathrm{M}\right]$.

[Υπόδειξη. Η g είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $\left[0,\mathrm{M}\right]$ και συνεπώς τα πλευρικά όρια $g\left(r+0\right)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho>r}}g\left(\rho\right)$ και $g\left(r-0\right)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho<r}}g\left(\rho\right)$ υπάρχουν και ισχύει $g\left(r+0\right)\leq g\left(r\right)\leq g\left(r-0\right)$. Αποδείξτε ότι $g\left(r\right)=g\left(r+0\right)=g\left(r-0\right)$.]

Συνεκτικά σύνολα

Έστω, $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα και $f:\mathrm{I} \to R$ συνεχής, τότε η f έχει την ιδιότητα της ενδιαμέσου τιμής, δηλαδή, η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών τιμών της, συνεπώς το $f(\mathrm{I})$ είναι διάστημα. Είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των ανοικτών ή κλειστών διαστημάτων στο R ότι δεν μπορούν να γραφούν ως ένωση δύο ξένων ανοικτών ή κλειστών υποδιαστημάτων αντίστοιχα. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται στον R^n και επιτρέπει να αποδείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών..

3.15 Ορισμός. Ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ λέγεται συνεκτικό αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μη κενών ανοικτών στο Α υποσυνόλων. Με άλλα λόγια ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ δεν είναι συνεκτικό αν υπάρχουν $U,V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε, $\mathrm{A}\cap U \neq \varnothing, \mathrm{A}\cap V \neq \varnothing, (\mathrm{A}\cap U)\cap(\mathrm{A}\cap V)=\varnothing$ και $(\mathrm{A}\cap U)\cup(\mathrm{A}\cap V)=\mathrm{A}$.

Προφανώς τα μονοσύνολα του R^n είναι συνεκτικά σύνολα.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τα συνεκτικά υποσύνολα του R.

.

3.16 Θεώρημα (Συνεκτικότητα των διαστημάτων). Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του R με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι τα διαστήματα. (ανοικτά, κλειστά ,ημιανοικτά φραγμένα ή μη φραγμένα).

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Υπενθύμιση. Αν Χ σύνολο και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Α είναι η συνάρτηση $x_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \to R : x_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathrm{A} \\ 0, x \notin \mathrm{A} \end{cases}$.

3.17 Λήμμα. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι για ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$.

(ι) Το Α δεν είναι συνεκτικό.

(ιι) Υπάρχει $f:\mathrm{A} \to R$ συνεχής ώστε $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Το Α γράφεται ως $\mathrm{A} = (\mathrm{A}\cap U)\cup(\mathrm{A}\cap V)$ όπου U,V ανοικτά στο R^n με $\mathrm{A}\cap U \neq \varnothing$ $\mathrm{A}\cap V \neq \varnothing$ και $(\mathrm{A}\cap U)\cap(\mathrm{A}\cap V) = \varnothing$. Θέτουμε $f = x_{\mathrm{A}\cap U}$ και παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής με $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

(η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του R σε σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α).

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Τα σύνολα $\mathrm{A}_0 = f^{-1}(\{0\})$ και $\mathrm{A}_1 = f^{-1}(\{1\})$ είναι σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α σε τρόπο ώστε $\mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}, \mathrm{A}_0 \neq \varnothing, \mathrm{A}_1 \neq \varnothing$ και $\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1 = \varnothing$. Έστω $U,V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε $\mathrm{A}_0 = U \cap \mathrm{A}$ και $\mathrm{A}_1 = V \cap \mathrm{A}$. Επομένως το Α δεν είναι συνεκτικό.

3.18 Πρόταση Έστω $A \subseteq R^n$ συνεκτικό και $f : A \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^m.

Απόδειξη: Αν το $f(A)$ δεν ήταν συνεκτικό τότε θα υπήρχε μια συνεχής συνάρτηση, $g : f(A) \to \{0,1\} \subseteq R$ με $g(f(A)) = \{0,1\}$. Τότε η συνάρτηση $gof : A \subseteq R^n \to R$ θα ήταν συνεχής και $(gof)(A) = \{0,1\}$. Επομένως το Α δεν θα ήταν συνεκτικό, άτοπο.
Η έννοια της συνεκτικότητας οδηγεί στην ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσου τιμής του Λογισμού μιας μεταβλητής.

3.19 Θεώρημα (Ενδιαμέσου Τιμής) Έστω $f : A \subseteq R^n \to R$ συνεχής. Αν το Α είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n τότε το $f(A)$ είναι διάστημα του R, δηλαδή η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της.

Απόδειξη: Έπεται προφανώς από το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον χαρακτηρισμό των συνεκτικών υποσυνόλων του R.

3.20 Λήμμα. Έστω $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, τότε η ένωση $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n. Επίσης η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : A \to R$ συνεχής με $f(A) = \{0,1\}$. Έστω $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, υποθέτουμε ότι $f(x) = 1$. Επειδή το κάθε A_i είναι συνεκτικό και $x \in A_i$, έπεται ότι $f(y) = f(x) = 1$ για κάθε $y \in A_i$ και για κάθε $i \in I$. Συνεπώς η f δεν μπορεί να παίρνει την τιμή 0. (Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι αν $f(x) = 0$ τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και άρα το Α είναι συνεκτικό.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αν $f : \overline{A} \to R$ συνεχής (όπου $A \subseteq R^n$ συνεκτικό) με $f(\overline{A}) \subseteq \{0,1\}$, τότε η συνέχεια της f έπεται ότι αυτή δεν μπορεί να είναι επί του $\{0,1\}$. Πράγματι αν υπήρχαν $x_1, x_0 \in \overline{A}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_0) = 0$ τότε θα υπήρχαν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στοιχείων του Α ώστε $x_n \to x_1$ και $y_n \to x_0$. Συνεπώς $f(x_n) \to f(x_1) = 1$ και $f(y_n) \to f(x_0) = 0$. Επειδή $(f(x_n))$ και $(f(y_n))$ είναι ακολουθίες στοιχείων του $\{0,1\}$ έπεται ότι $f(x_n) = 1$ και $f(y_n) = 0$ για κάθε $n \geq N_0$ για κάποιο $N_0 \in N$. Συνεπώς $f(A) = \{0,1\}$, άτοπο.

(*) 3.21 Ορισμός Έστω, $A \subseteq R^n$ και $x \in A$. Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο Α είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του Α που περιέχουν το x.

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα που αποδείξαμε παραπάνω (3.17 και 3.20) αποδεικνύεται εύκολα (αφήνεται ως άσκηση) η ακόλουθη.

(*) 3.22. Πρόταση. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in \mathrm{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(ι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο A είναι <u>συνεκτικό</u> σύνολο και είναι ένα <u>μεγιστικό</u> συνεκτικό υποσύνολο του A. (Αν $\mathrm{A}_x \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ και B συνεκτικό τότε $\mathrm{A}_x = \mathrm{B}$).
(ιι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο A είναι σύνολο <u>κλειστό στο A</u>.
(ιιι) Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του A συνιστά μια <u>διαμέριση του A</u>, δηλαδή, κάθε δύο διαφορετικές συνιστώσες του A είναι ξένες και η ένωσή τους ισούται με το A.
(ιν) Μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to R$ είναι <u>σταθερή</u> πάνω σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του A.

Παρατήρηση. Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός συνόλου A δεν είναι απαραίτητα σύνολα ανοικτά στο A. Για παράδειγμα οι συνεκτικές συνιστώσες των σημείων του Q είναι μονοσύνολα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\} \subseteq R$. Οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι οι:
το $\{1\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \ldots . \left\{\frac{1}{n}\right\}, \ldots .$ και το $\{0\}$, παρατηρούμε ότι το $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό σχετικά με το A.
Από την άλλη μεριά αποδεικνύεται ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου $U \subseteq R^n$ είναι σύνολα ανοικτά στον R^n.

3.23 Ορισμός: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$ το (προσανατολισμένο) <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> από το a στο b είναι το σύνολο $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subseteq R^n$.
(ιι) Έστω, $a_1, \ldots, a_m$ σημεία του R^n. Η <u>πολυγωνική γραμμή</u> με κορυφές τα $a_1, \ldots, a_m$ είναι το σύνολο, $\mathrm{P} = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \ldots \cup [a_{m-1}, a_m]$.
(ιιι) Ένα υποσύνολο $\mathrm{K} \subseteq R^n$ λέγεται <u>κυρτό</u> αν για κάθε $a, b \in \mathrm{K}$ ισχύει ότι $[a,b] \subseteq \mathrm{K}$.
Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subseteq R^n$ είναι κυρτό υποσύνολο του R^n

3.24 Πρόταση: (ι) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και γενικότερα κάθε πολυγωνική γραμμή στον R^n είναι σύνολα συνεκτικά.
(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο στον R^n είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$, τότε η απεικόνιση $\varphi : [0,1] \to [a,b] \subseteq R^n : \varphi(t) = (1-t)a + tb, t \in [0,1]$ είναι συνεχής και $\varphi([0,1]) = [a,b]$. Επομένως το $[a,b]$ είναι συνεκτικό.
Το γεγονός ότι μια πολυγωνική γραμμή P με m - κορυφές είναι σύνολο συνεκτικό αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών της (για m=2 η P είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον R^n και άρα σύνολο συνεκτικό). Για το επόμενο βήμα της επαγωγής χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.20.

(ιι) Έστω Κ κυρτό και $a \in K$. Επειδή το Κ είναι κυρτό ισχύει ότι $[a,x] \subseteq K$ για κάθε $x \in K$, επομένως $K = \bigcup\{[a,x] : x \in K\}$. Από το Λήμμα 3.20 έπεται το συμπέρασμα.

Παραδείγματα κυρτών συνόλων: 1) Κάθε ανοικτή ή κλειστή σφαίρα στον R^n είναι σύνολο κυρτό. Η απόδειξη είναι απλή (και διαισθητικά προφανής αν $n=2$ ή 3).
2)Κάθε ημιεπίπεδο (ανοικτό ή κλειστό) είναι κυρτό σύνολο στον R^2.
3) Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή ενός παραλληλογράμμου είναι σύνολο κυρτό στον R^2. Βέβαια και κάθε κλειστό τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο (το εσωτερικό μαζί με το σύνορο) είναι κυρτό σύνολο.

Αποδεικνύεται ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ανοικτών και συνεκτικών υποσυνόλων του R^n.

3.25 Θεώρημα. Έστω, $U \subseteq R^n$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Το U είναι συνεκτικό.
(ιι) Για κάθε $a, b \in U$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $P \subseteq U$ από το a στο b (το U είναι όπως λέμε πολυγωνικά συνεκτικό).
Απόδειξη: Παραλείπεται.
Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^n θα ονομάζεται και τόπος.

Παραδείγματα: Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα ακόλουθα ανοικτά σύνολα είναι συνεκτικά:
1)Αν $F \subseteq R^n$ είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το $R^n - F$ καθώς και το $B(x,\varepsilon) - F$ είναι συνεκτικά σύνολα. (όπου $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ και $n \geq 2$).
2)Αν $x \in R^n$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ τότε ο δακτύλιος $B(x,\varepsilon_2) - \overline{B}(x,\varepsilon_1)$ είναι σύνολο συνεκτικό.
3)Αν οι ανοικτές σφαίρες $B(x_2,\varepsilon_2), B(x_1,\varepsilon_1)$ τέμνονται τότε η ένωση τους είναι σύνολο συνεκτικό.
Η απόδειξη των (1), (2), (3) αφήνεται ως άσκηση.
Καθόσον αφορά τις συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου του R^n αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο.

(*) **3.26Θεώρημα**. Έστω U ανοικτό σύνολο στον R^n.
Τότε ισχύουν:
(ι) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι σύνολο ανοικτό στον R^n.
(ιι) Το U έχει αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών.

Η απόδειξη του (ι) ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Για τον (ιι) ισχυρισμό χρησιμοποιούμε τον πρώτο ισχυρισμό καθώς και το γεγονός ότι ο R^n περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, π.χ. το σύνολο Q^n (Q =το σύνολο των ρητών στο R).
Ένα υποσύνολο Α του R^n λέγεται ότι είναι πυκνό στον R^n αν, $\overline{A} = R^n$.

<u>Σημείωση</u>: Για την απόδειξη των θεωρημάτων 3.16 και 3.25 καθώς και για πληρέστερη ενημέρωση επί της συνεκτικότητας παραπέμπουμε στην Βιβλιογραφία.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της συνεκτικότητας ότι τα ακόλουθα σύνολα δεν είναι συνεκτικά.

(α) Η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ στον R^2.

(β) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n με τουλάχιστον δύο σημεία.

(γ) $\left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ και } y \neq x+1\right\}$

(δ) Η ένωση των ανοικτών δίσκων $\mathrm{B}\left((0,0), \delta\right)$ και $\mathrm{B}\left((1,1), \delta\right)$, του R^2, όπου $\delta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2)Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι το U είναι μη συνεκτικό αν και μόνο αν $U = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}$, όπου A, B μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα του R^n. Αποδείξτε το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντικαθιστώντας παντού το επίθετο «ανοικτό» με το επίθετο «κλειστό».

3)Έστω $\left(\mathrm{A}_n\right)_{n \geq 1}$ ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\mathrm{A}_n \bigcap \mathrm{A}_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ είναι συνεκτικό στον R^n

[Υπόδειξη: Τα σύνολα $\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \mathrm{A}_3, ...$ είναι συνεκτικά].

4)Έστω $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής συνάρτηση όπου A συνεκτικό στον R^n. Αποδείξτε ότι το γράφημα της f, δηλαδή το σύνολο $G(f) = \left\{\left(x, f(x)\right) : x \in \mathrm{A}\right\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $R^n \times R^m$.

5)Αποδείξτε ότι η επιφάνεια $S^{n-1} = \left\{x \in R^n : \|x\| = 1\right\}$ της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας $(n \geq 2)$, είναι σύνολο συνεκτικό στον R^n. [Υπόδειξη: Η απεικόνιση $x \in R^n - \{0\} \to \dfrac{x}{\|x\|} \in R^n$, είναι συνεχής].

6) Θεωρήστε μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων κάποιου ευκλείδειου χώρου τα οποία έχουν ανά δύο μια κενή τομή. Αποδείξτε ότι η ένωση των μελών της είναι συνεκτικό σύνολο.

Το εξωτερικό γινόμενο στον R^3

Το εσωτερικό γινόμενο <u>δεν</u> είναι ο μόνος τρόπος για να πολλαπλασιάζουμε διανύσματα. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ένα άλλο τρόπο πολλαπλασιασμού διανυσμάτων που αφορά όμως μόνο τον R^3 ($n=3$) και ονομάζεται <u>εξωτερικό γινόμενο</u> ή και <u>διανυσματικό γινόμενο</u>. Θα υπενθυμίσουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το πώς η ανισότητα αυτή επιτρέπει τον ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων του R^n.

Αν $x, y \in R^n$ τότε $|x \cdot y| \le \|x\| \cdot \|y\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz) (όπου αν $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n) \in R^n$ τότε $x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ και $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$).

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι αν $x, y \in R^n - \{0\}$ τότε $-1 \le \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1$.

Έτσι ως γωνία των x και y ορίζεται ο (μοναδικός) αριθμός $\theta \in [0, \pi]$ ώστε,

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \Leftrightarrow x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta .$$

Το x και y λέγονται <u>ορθογώνια</u> (γράφουμε δε $x \perp y$) αν $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 (\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$.

Επιστρέφουμε τώρα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο R^3 και ορίζουμε την έννοια του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων σε αυτόν.

4.1 Ορισμός. Έστω $x=(x_1,x_2,x_3)$ και $y=(y_1,y_2,y_3)$ διανύσματα του R^3. Ως <u>εξωτερικό γινόμενο</u> των x, y ορίζεται το διάνυσμα (χρησιμοποιώντας ορίζουσες)

$$x \times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} k$$

όπου

$i = e_1 = (1,0,0), j = e_2 = (0,1,0), k = e_3 = (0,0,1)$

Επομένως $x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i - (x_1 y_3 - x_3 y_1) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k$

$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + (x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k$.

Παράδειγμα Να βρεθεί το $x \times y$ όπου $x = 2i - j + 3k$ ($=(2,-1,3)$) και $y = 7j - 4k (= (0,7,-4))$.

<u>Λύση</u>

$$x \times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} k$$

$= ((-1)(-4) - 3 \cdot 7) i - (2 \cdot (-4) - 3 \cdot 0) j + (2 \cdot 7 - (-1) \cdot 0) k$

$= -17i + 8j + 14k = (-17, 8, 14)$

4.2 Θεώρημα (Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου)
Έστω $x, y, z \in R^3$ και $\lambda \in R$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
1) $(\lambda x)\times y = \lambda(x\times y) = x\times(\lambda y)$, ιδιαίτερα $0\times y = y\times 0 = 0$
2) $x\times x = 0$
3) $x\times y = -(y\times x)$
4) $x\times(y+z) = x\times y + x\times z$ και $(y+z)\times x = y\times x + z\times x$
5) $\|x\times y\|^2 = \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - (x\cdot y)^2$ (ταυτότητα Lagrange)
6) $x\cdot(y\times z) = (x\times y)\cdot z$
7) $x\times(y\times z) = (x\cdot z)y - (x\cdot y)z$

Απόδειξη: Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού του εξωτερικού γινομένου και με πράξεις. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις (3) και (5).
Έστω, $x = (x_1, x_2, x_3)$ και $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$x\times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -(y\times x).$$

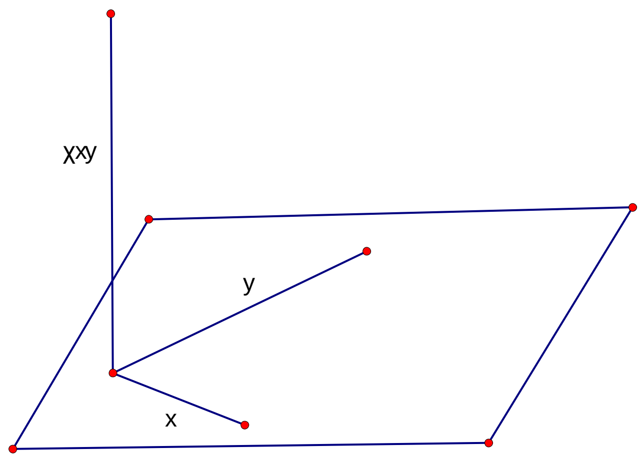
Η (5) είναι ειδική περίπτωση της ταυτότητας Lagrange ($n=3$) η οποία με την βοήθεια των συνιστωσών των διανυσμάτων γράφεται:

$$(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

Η ταυτότητα αυτή επαληθεύεται εύκολα με πράξεις

Σημείωση. Η ταυτότητα Lagrange στην γενική μορφή της θα αποδειχθεί αργότερα στην παράγραφο αυτή.

Το εξωτερικό γινόμενο συχνά χρησιμοποιείται και για γεωμετρικούς σκοπούς, για να ορίσει το διάνυσμα που είναι κάθετο σε δύο δοσμένα διανύσματα. Το αποτέλεσμα που ακολουθεί μας λέει ότι αν x και y είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του R^3 τότε το $x\times y$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα x και y.



4.3 Πρόταση. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y του R^3 είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα x και y.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x\cdot(x\times y)=y\cdot(x\times y)=0$. Παρατηρούμε ότι,

$$x\cdot(x\times y)= x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)=$$

$$x_1x_2y_3-x_1x_3y_2+x_2x_3y_1-x_2x_1y_3+x_3x_1y_2-x_3x_2y_1=0$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $y\cdot(x\times y)=0$.

Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στα διανύσματα $x=-2i+3j-7k$ και $y=5i+9k$.

Λύση Το εξωτερικό γινόμενο $x\times y$ είναι ορθογώνιο και στο x και στο y.

$$x\times y=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 9\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 9\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0\end{vmatrix}k=$$

$$\big(3\cdot9-(-7)\cdot0\big)i-\big((-2)\cdot9-(-7)\cdot5\big)j+\big((-2)\cdot0-3\cdot5\big)k=27i-17j-15k.$$

Το εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων x και y του R^3 ικανοποιεί την εξίσωση $x\cdot y=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$ όπου θ η γωνία $(\theta\in[0,\pi])$ μεταξύ των x και y. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για το εξωτερικό γινόμενο.

4.4 Πρόταση Αν x και y μη μηδενικά διανύσματα του R^3 και $\theta\in[0,\pi]$ η μεταξύ τους γωνία τότε $\|x\times y\|=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\sin\theta$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Lagrange (θεώρημα 4.2 (5)).

$$\|x\times y\|^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\cdot y)^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\big(\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta\big)^2=$$

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\cos^2\theta=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\big(1-\sin^2\theta\big)=\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\sin^2\theta.$$

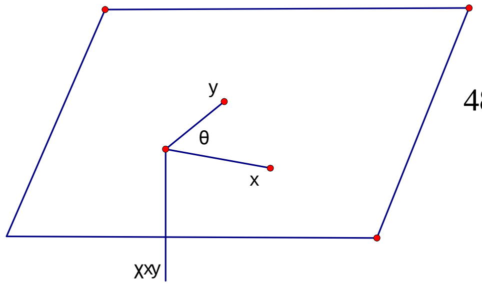
Επειδή $\sin\theta\geq0$ όταν $0\leq\theta\leq\pi$, συμπεραίνουμε ότι $\|x\times y\|=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\sin\theta$.

4.5 Πόρισμα Αν $x,y\in R^3$, τότε τα x και y είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $x\times y=0$.

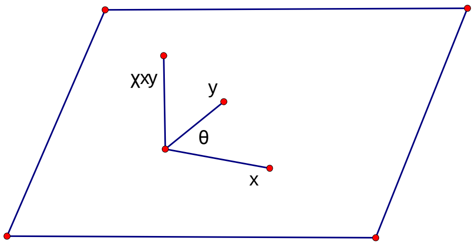
Απόδειξη: Προφανής

Σημείωση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό εφόσον μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού (του μέτρου) του εξωτερικού γινομένου που δεν εξαρτάται από συντεταγμένες, αλλά μόνο από την γεωμετρία των εμπλεκομένων διανυσμάτων.

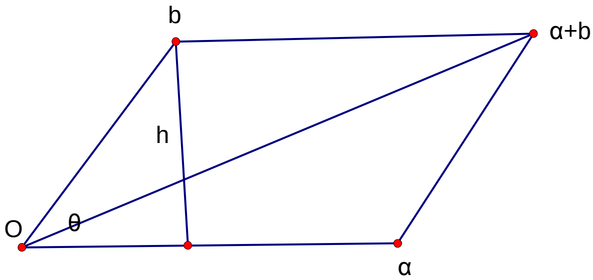
Παρατήρηση. Έστω x και y μη συγγραμμικά διανύσματα του R^3 τότε η τριάδα διανυσμάτων $(x,y,x\times y)$ αποτελεί ένα δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων, δηλαδή ανάλογο με το σύστημα (i,j,k). Έτσι η κατεύθυνση του $x\times y$ προσδιορίζεται με τον κανόνα του «δεξιού χεριού» ή με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι μεταθετικό (δες και την (3) του θεωρήματος 4.2). Έτσι στο εξωτερικό



γινόμενο $x\times y$, η σειρά που παρατίθενται τα διανύσματα (πρώτα το x και μετά το y) καθορίζει και τον προσανατολισμό της κυρτής γωνίας των x και y. Αν ένας δεξιόστροφος κοχλίας (βίδα ή τριμπουσόν) περιστρέφεται σύμφωνα με την προσανατολισμένη γωνία $\langle x,y\rangle$ τότε η κίνηση του κοχλία (προς τα πάνω ή κάτω) καθορίζει και την φορά του διανύσματος $x\times y$ (το οποίο είναι βέβαια κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων x και y.



Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου. 1) Έστω a και b μη συγγραμμικά διανύσματα στον R^3. Τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία O, $a, a+b,$ και b ισούται με $\|a\times b\|$.



Λύση Έστω Ε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα O, $a, a+b,$ και b και h το ύψος που άγεται από το b στην πλευρά Oa. Τότε $h=\|b\|\cdot\sin\theta$, άρα $\mathrm{E}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta=\|a\times b\|$ (πρόταση 4.4)

2)Αν $a,b,c\in R^3$ τότε το γινόμενο $a\cdot(b\times c)$ ονομάζεται το <u>αριθμητικό</u> ή <u>τριπλό γινόμενο</u> των a,b και c και συμβολίζεται συνήθως με $(a\cdot b\cdot c)$. Ισχύει τότε

$$(a\cdot b\cdot c)=a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$ όπου $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$ και $c=(c_1,c_2,c_3)$

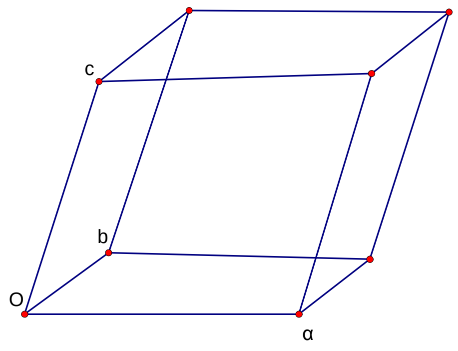
Λύση Με πράξεις βρίσκουμε:

$$a\cdot(b\times c)=(a_1 i+a_2 j+a_3 k)\cdot\left(\begin{vmatrix}b_2 b_3\\ c_2 c_3\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix}b_1 b_3\\ c_1 c_3\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix}b_1 b_2\\ c_1 c_2\end{vmatrix} k\right)=(a\cdot b\cdot c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

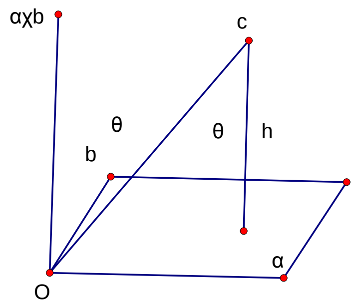
Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε ότι: $a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$.

3) Έστω a,b,c τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα του R^3, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα a,b και c ισούται με $|c\cdot(a\times b)|$, δηλαδή $V=|c\cdot(a\times b)|$.

Λύση



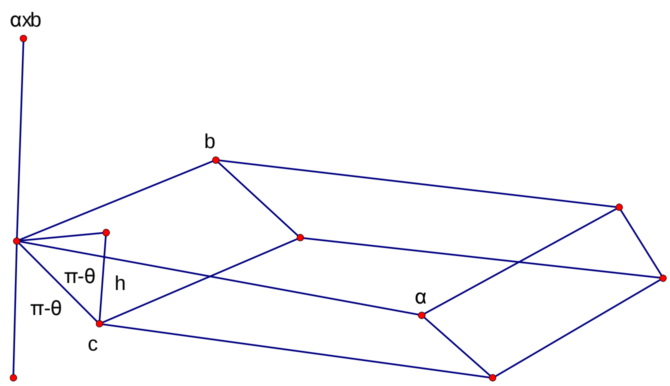
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$



Το παραλληλόγραμμο με κορυφές O, $a, a+b,$ και b έχει εμβαδόν $\mathrm{E}=\|a\times b\|$. Από την γεωμετρία είναι γνωστό ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα a,b και c ισούται με $V=\mathrm{E}\cdot h$, όπου h το ύψος που άγεται από την κορυφή c στο επίπεδο του παραλληλογράμμου με κορυφές τα O, $a, a+b,$ και b. Αν θ είναι η γωνία των $a\times b$ και c τότε $c\cdot(a\times b)=\|c\|\cdot\|a\times b\|\cdot\cos\theta$ (τύπος του εσωτερικού γινομένου). Όμως $h=\|c\|\cdot|\cos\theta|$, (αν $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ τότε $h=\|c\|\cdot\cos\theta$ και αν $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ τότε $h=\|c\|\cdot\cos(\pi-\theta)=-\|c\|\cdot\cos\theta$).

Έπεται ότι: $V=\|a\times b\|\cdot h=\|a\times b\|\cdot\|c\|\cdot|\cos\theta|=|c\cdot(a\times b)|$.

Παρατήρηση. Από την εφαρμογή (2) έπεται ότι ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα a,b και c ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.



$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

Η ταυτότητα του Lagrange

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2,\ x_j, y_j \in R, n\ge 2 .$$

[Η θέτοντας, $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$ έχουμε

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\cdot y)^2 = \sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 \text{]}$$

Λύση Παρατηρούμε πρώτα ότι, $\sum_{\substack{1\le k,j\le n\\ k\ne j}} x_j y_k = 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_k$ (1). Πραγματικά αριστερά το άθροισμα υπολογίζεται σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\{(j,k): j\ne k, 1\le j,k\le n\}$ που είναι $n(n-1)=n^2-n$ το πλήθος και δεξιά σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\{(j,k): 1\le j<k\le n\}$, δηλαδή όλους τους συνδυασμούς των n αριθμών $\{1,2,...,n\}$ ανά δύο, που είναι $\frac{n(n-1)}{2}$ το πλήθος.

Αποδεικνύουμε τώρα την ταυτότητα Lagrange με χρήση της (1). Ξεκινούμε από το δεξί μέλος:

$$\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 = \sum_{1\le j<k\le n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} x_k^2 y_j^2 - 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_k x_k y_j =$$

$$= \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j y_j x_k y_k$$

Όσο για το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 y_j^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 y_j^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_j x_k y_k\right) =$$

$$= \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j y_j x_k y_k$$

Έτσι η ταυτότητα Lagrange έπεται.

Παρατήρηση. Έπεται ιδιαίτερα από την (1) ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} a_j a_k$$

Εφαρμογές της ταυτότητας Lagrange και του εξωτερικού γινομένου.

1)Η ταυτότητα Lagrange έχει ως άμεση συνέπεια την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}, x_j, y_j \in R, n\ge 2$. Εφόσον το δεξί μέλος της ταυτότητας Lagrange είναι μη αρνητικό.

2) Πότε ισχύει ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz;

Από την ταυτότητα του Lagrange έπεται ότι ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ακριβώς τότε αν η ποσότητα $\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2$ στο δεξί μέλος της ταυτότητας Lagrange ισούται με μηδέν. Έτσι $\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_j y_k = x_k y_j$ για κάθε j,k με $1\le j<k\le n$. Δηλαδή αν, $\det\begin{vmatrix} x_j x_k \\ y_j y_k \end{vmatrix} = 0$ (*) για κάθε $1\le j,k\le n,\ j\ne k$. Έπεται εύκολα ότι η (*) ισοδυναμεί με το ότι τα διανύσματα $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ και $y=\left(y_1,...,y_n\right)$ είναι συγγραμμικά. (Αν τα x και y είναι συγγραμμικά δηλαδή αν $x=\lambda y$ για κάποιο $\lambda\in R$ τότε ισχύει εύκολα η (*)).

Αν ισχύει η (*) και τα x και y είναι μη μηδενικά τότε υπάρχει $j,k\in\{1,2,...,n\}: y_j\ne 0, x_k\ne 0$. Υποθέτοντας χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $k\ne j$ έχουμε, $\det\begin{vmatrix} x_k x_j \\ y_k y_j \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda\in R: x_j=\lambda y_j$ και άρα $x_\nu=\lambda y_\nu$ για κάθε $\nu=1,2,...,n$

3) Έστω $a=\left(a_1,...,a_n\right), b=\left(b_1,...,b_n\right)\in R^n$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν Ε του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία $O,a,a+b$ και b ισούται με $\mathrm{E}=\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2}=\sqrt{\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2}$.

Λύση Υποθέτουμε ότι τα a και b δεν είναι συγγραμμικά, διαφορετικά το παραλληλόγραμμο εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα και το δεξί και το αριστερό μέλος της ισότητας ισούται με μηδέν.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα $O,a,a+b$ και b ισούται με $\mathrm{E}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$, όπου $\theta\in\left[0,\pi\right]$ η κυρτή γωνία των a και b (ο τύπος για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισχύει και στον R^n με $n\ne 3$, εφόσον ο υπόχωρος $V=\langle a,b\rangle$ που παράγουν τα a και b είναι διάστασης 2, $\dim V=2$ και άρα γραμμικά ισομετρικός με τον $\left(R^2,\|\cdot\|\right)$).

Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\sin^2\theta=\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\cos^2\theta=$$

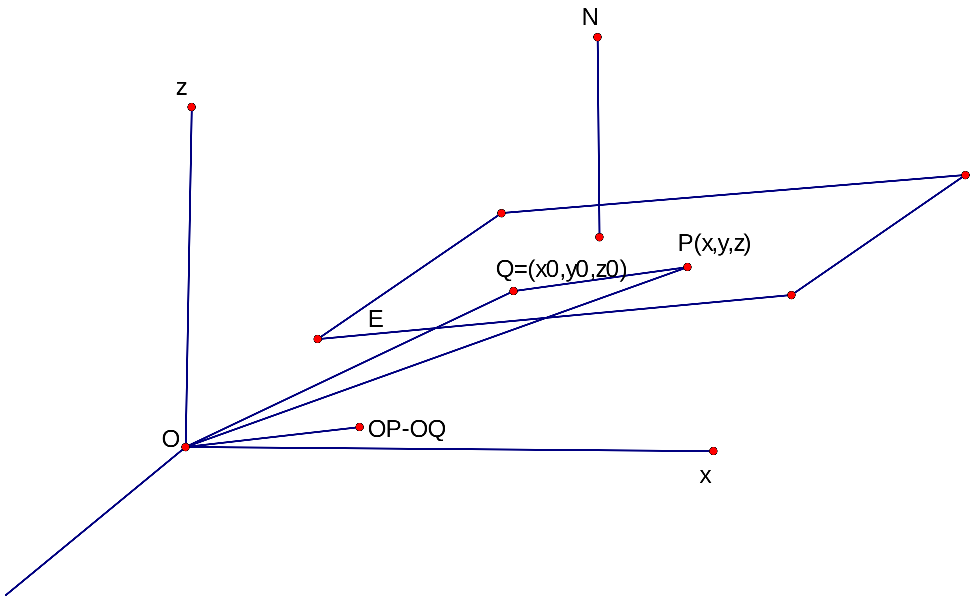
$\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2$ Εφόσον γνωρίζουμε ότι $a\cdot b=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\theta$.

Δηλαδή $\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2$ (1)

Από την ταυτότητα του Lagrange το δεξί μέλος της (1) ισούται με $\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2$. Έπεται ότι, $\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2$ η οποία συνεπάγεται αμέσως την ζητούμενη ισότητα.

4)<u>Η εξίσωση ενός επιπέδου στον R^3.</u>

Μια εξίσωση για το επίπεδο Ε που είναι κάθετο στο δεδομένο διάνυσμα $\mathrm{N} = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck$ του R^3 και περιέχει το σημείο $Q = (x_0, y_0, z_0)$ έχει τις ακόλουθες μορφές: $\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ή $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ κανονική μορφή.



Πράγματι το σημείο $P = (x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο Ε αν και μόνο αν το διάνυσμα $OP - OQ = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο Ε αν και μόνο αν το Ν είναι ορθογώνιο στο $P - Q$. Έτσι βρίσκουμε:

$$OP - OQ \perp N \Leftrightarrow \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$$

Όπου $D = -(\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + Cz_0)$.

Αντίστροφα ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο με εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ είναι το $N = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck$, όπου $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |C| > 0$. Σημειώνουμε ότι τα επίπεδα με εξισώσεις: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ και $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz = 0$ είναι παράλληλα (αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα των εξισώσεων $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz = 0$ και $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ προφανώς <u>δεν</u> έχει λύση).

5) <u>Η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τρία δοσμένα σημεία.</u>

Έστω $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2), R = (x_3, y_3, z_3)$ σημεία του R^3 για τα οποία υποθέτουμε ότι δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Μπορούμε να βρούμε την κανονική μορφή του επιπέδου που περιέχει τα P, Q, R με δύο τρόπους:

(I) Η εξίσωση που θέλουμε έχει την κανονική μορφή $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$. Επειδή τα P, Q, R ανήκουν στο επίπεδο καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}y_2 + Cz_2 + D = 0 \\ \mathrm{A}x_3 + \mathrm{B}y_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

(το οποίο και επιλύουμε ως προς τα A, B και C).

(II) Τα διανύσματα $OQ - O\mathrm{P}$ και $OR - OP$ είναι παράλληλα προς το επίπεδο Ε που ζητούμε άρα κάθε διάνυσμα ορθογώνιο προς το Ε είναι και ορθογώνιο προς αυτά. Το εξωτερικό γινόμενο $\mathrm{N} = (OQ - OP) \times (OR - OP)$ είναι ορθογώνιο προς τα $OQ - O\mathrm{P}$ και $OR - OP$.

Παρατηρούμε ότι, $OQ - OP = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

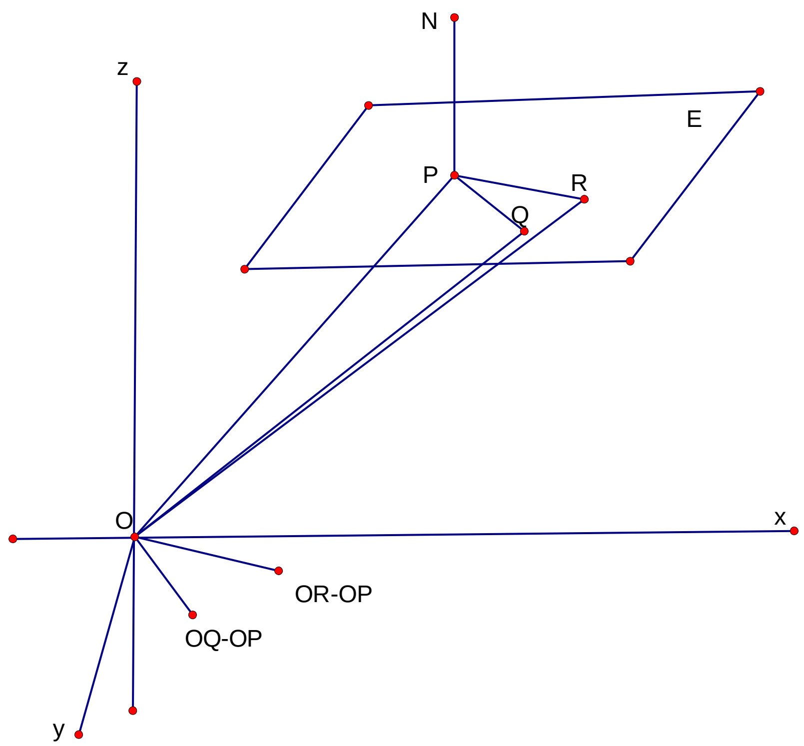
$OR - OP = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ και συνεπώς,

$$\mathrm{N} = (OQ - OP) \times (OR - OP) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} k = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck .$$

Έχοντας το διάνυσμα Ν που είναι κάθετο στο Ε μπορούμε να βρούμε την κανονική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου χρησιμοποιώντας ένα από τα δοσμένα σημεία P, Q, R π.χ. το P.

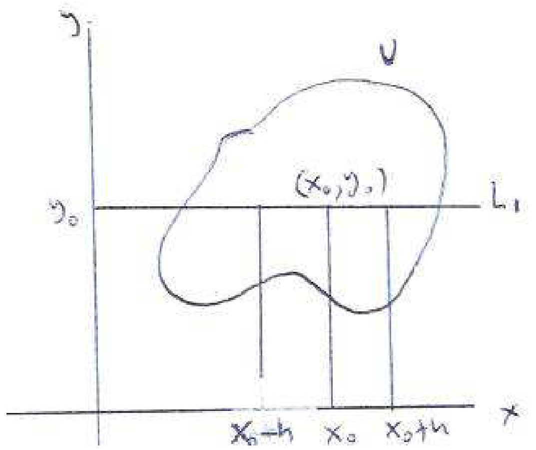
Έτσι βρίσκουμε την εξίσωση $\mathrm{A}(x - x_1) + \mathrm{B}(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ όπου Α, Β και C είναι οι συντεταγμένες του Ν.

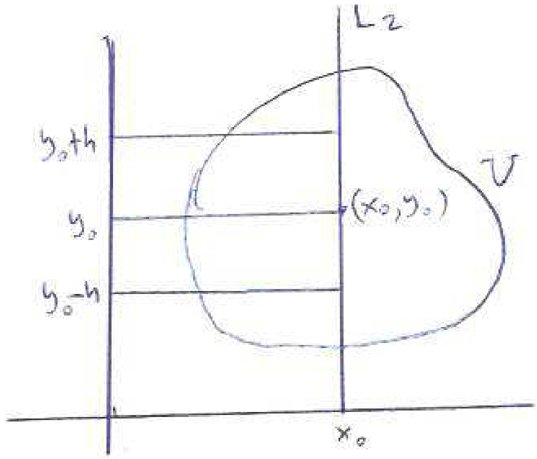


ΙΙ Διαφορικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Ένας στέρεος ορισμός της παραγώγισης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ανάλογος με τον ορισμό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής δεν είναι εκ των προτέρων σαφής.
Ένας τέτοιος κατάλληλος ορισμός θα πρέπει να έχει ως συνέπεια την συνέχεια της συνάρτησης την ύπαρξη « εφαπτομένου επιπέδου » στο γράφημα της f καθώς και τον κανόνα της αλυσίδας.
Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς μία μεταβλητή κρατώντας τις υπόλοιπες σταθερές.
Έστω για απλότητα μια πραγματική συνάρτηση $f(x,y)$ δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του R^2. Θεωρούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in U$, περιορίζουμε την f στην τομή του U με τις ευθείες L_1 και L_2 που διέρχονται από το (x_0, y_0) και είναι παράλληλες με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και παραγωγίζουμε στο (x_0, y_0) τις προκύπτουσες συναρτήσεις.





Δηλαδή εξετάζουμε τα όρια: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

Το μεν πρώτο όριο (αν υπάρχει) το συμβολίζουμε με $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και το ονομάζουμε η <u>μερική παράγωγος</u> της f ως προς x στο (x_0, y_0) και το δεύτερο με $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ και το ονομάζουμε η <u>μερική παράγωγος</u> της f ως προς y στο (x_0, y_0).
Ο γενικότερος ορισμός διατυπώνεται ανάλογα.

5.1 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ <u>ανοικτό</u> $f: U \subseteq R^n \to R$ (πραγματική) συνάρτηση και $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Αν $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, η <u>μερική παράγωγος της f</u> στο a ως προς την x_j μεταβλητή είναι το ακόλουθο όριο αν βέβαια υπάρχει,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$ όπου

$e_j = (0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0)$ είναι το $j-$στο διάνυσμα της κανονικής βάσης $e_1, \dots, e_n$ του R^n.

Αν η μερική παράγωγος της f ως προς την x_j μεταβλητή υπάρχει για κάθε $a \in U$ τότε ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση επί του U την οποία συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, δηλαδή, $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \subseteq R^n \to R$.

Ειδικότερα στην περίπτωση $n = 3$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$ ή f_x, f_y, f_z.

Αν η f είναι μια διανυσματική συνάρτηση (έστω $f: U \subseteq R^n \to R^m$) ώστε $f = (f_1, \dots, f_m)$, μπορούμε να μιλάμε για τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων συναρτήσεων, για παράδειγμα η $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ είναι η μερική παράγωγος της k συντεταγμένης ως προς την μεταβλητή x_j, ($1 \le k \le m$ και $1 \le j \le n$).

Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $D_j f$ για τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Παραδείγματα 1) Αν $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$, να βρεθούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Λύση Για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ κρατάμε το y σταθερό: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2$. Όμοια για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial y}$ κρατάμε το x σταθερό: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y$.

2) Έστω $z = x^2 \cdot \sin(3x + y^3)$. Να υπολογιστούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ και $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

Λύση $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \sin(3x + y^3) + 3x^2 \cdot \cos(3x + y^3)$. Επομένως

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \pi + 3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \cos \pi = \frac{2\pi}{3} \cdot 0 + \frac{\pi^2}{3} \cdot (-1) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 \cdot \cos(3x + y^3)$. Επομένως $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 3(1)^2 (1)^2 \cos(3+1) = 3\cos 4$.

3) Έστω $f(x,y,z)=x^2+2xy^2+yz^3$. Να βρεθούν οι f_x, f_y, f_z.

Λύση Για την f_x (δηλαδή την $\frac{\partial f}{\partial x}$) κρατάμε τις y και z σταθερές και παραγωγίζουμε ως προς x. Άρα $f_x(x,y,z)=2x+2y^2$. Ανάλογα, βρίσκουμε: $f_y(x,y,z)=4xy+z^3$ και $f_z(x,y,z)=3yz^2$

4) Έστω ότι η συνάρτηση $z=z(x,y)$ των x και y ικανοποιεί την εξίσωση $x^2z+yz^3=x$. Να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύση Παραγωγίζουμε την δοσμένη εξίσωση ως προς x κρατώντας το y σταθερό: $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=1$. Επιλύουμε την εξίσωση αυτή ως προς $\frac{\partial z}{\partial x}$ και βρίσκουμε $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-2xz}{x^2+3yz^2}$.

Ανάλογα, παραγωγίζουμε την δοσμένη εξίσωση ως προς y κρατώντας σταθερό το x: $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^3+3yz^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$, άρα $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z^3}{x^2+3yz^2}$

5) Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x,y)=x^\kappa\cdot y^\lambda$ (μονωνύμων) είναι οι $\frac{\partial f}{\partial x}=:\kappa x^{\kappa-1}y^\lambda$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=:\lambda x^\kappa y^{\lambda-1}$ $\quad(\kappa,\lambda\in N)$

Γενικότερα αν $f(x_1,...,x_n)=x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}....x_n^{k_n}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}=k_jx_1^{k_1}...x_j^{k_j-1}...x_n^{k_n}$.

6) Αν $f(x_1,...,x_n)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ $\quad(=\|x\|$, όπου $x=(x_1,...,x_n))$ τότε, $\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}$, $j=1,2,...,n$.

Η παραγώγιση γίνεται βέβαια στο ανοικτό $\Omega=R^n-\{(0,...,0)\}$.

Παρατηρούμε ότι οι, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$, $j=1,2,...,n$, δεν υπάρχουν (γιατί;).

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα. Έστω $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ (αφού, $f(x,0)=0=f(0,y)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f(x,x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x\neq0$).

Οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν όμως σε κάθε σημείο του R^2: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ στο $R^2-\{(0,0)\}$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

Αναλόγως $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ στο $R^2-\left\{(0,0)\right\}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

(Οι $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπολογίζονται εύκολα στο $U=R^2-\left\{(0,0)\right\}$, χρησιμοποιώντας π.χ. τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου συναρτήσεων από τον Απειροστικό Λογισμό).

Από το τελευταίο παράδειγμα (αλλά και από άλλα παραδείγματα) φαίνεται ότι η υπόθεση της ύπαρξης (όλων) των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο δεν είναι ο «σωστός» ορισμός της διαφορισιμότητας προκειμένου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Για να καταλήξουμε στον ζητούμενο ορισμό θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της παραγώγου συναρτήσεων $f:I\subseteq R\to R$ ορισμένων σε ένα ανοικτό διάστημα I του R.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $a\in I$, η f λέγεται διαφορίσιμη στο a αν το όριο $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=c$ (1) υπάρχει στο R. Τότε ο αριθμός c, καλείται η παράγωγος της f στο a και συμβολίζεται με $f'(a)$ ή $Df(a)$ ή και $\dfrac{df}{dx}(a)$. Ο ορισμός που δίνεται με την (1) <u>δεν</u> μπορεί να γενικευθεί ως έχει για συναρτήσεις $f:U\subseteq R^n\to R^m$ για $n\geq 2$, καθώς το $x-a$ είναι τότε ένα διάνυσμα και είναι αδύνατο να διαιρέσουμε τον αριθμό $f(x)-f(a)$ με το $x-a$. Η (1) μπορεί όμως να γραφεί ισοδύναμα ως εξής. $\left(c=f'(a)\right)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}=0$ η τελευταία σχέση είναι ακόμη ισοδύναμη με την, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left|f(x)-f(a)-c(x-a)\right|}{|x-a|}=0$. (2)

Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση $\mathrm{T}(x)=cx, x\in R$ είναι γραμμική

Παρατηρούμε ότι η (2) εμπλέκει πηλίκα πραγματικών αριθμών και έτσι μπορεί να γενικευθεί για συναρτήσεις $f:U\subseteq R^n\to R$. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν θέσομε $l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ που είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $\left(a,f(a)\right)$ και είναι εφαπτομένη στο γράφημα της f και ακόμη θέσομε $\varepsilon(x-a)=f(x)-l(x), x\in I$ τότε η (2) μπορεί να γραφεί ως, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0$. Άρα, $x\in I, f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x-a)$ με

$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0. \qquad (3)$$

Η σχέση (3) σημαίνει ότι η διαφορισιμότητα είναι ένα βαθμό πάνω από την συνέχεια, αφού, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$ και το τελευταίο όριο σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Σημείωση. Επειδή στην θεωρία της διαφόρισης συναρτήσεων είναι ουσιώδες η μεταβλητή x να προσεγγίζει το υπό εξέταση σημείο a από όλες τις δυνατές διευθύνσεις θα υποθέτομε πάντοτε ότι οι συναρτήσεις που εξετάζουμε είναι ορισμένες σε ανοικτά υποσύνολα του R^n.
Για λόγους απλότητας θα εξετάσουμε πρώτα την διαφορισιμότητα πραγματικών συναρτήσεων $f : U \subseteq R^n \to R, (m=1)$.

5.2 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ και $f : U \to R$ συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $\mathrm{T} : R^n \to R$ ώστε $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{|f(x) - f(a) - \mathrm{T}(x-a)|}{\|x-a\|} = 0$ (1)
Επειδή (όπως είναι εύκολο να αποδείξουμε) η γραμμική συνάρτηση Τ είναι μοναδική, αν υπάρχει, η Τ λέγεται το διαφορικό της f στο a και συμβολίζεται με $Df(a)$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο U αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $a \in U$.
Θέτοντας $x - a = h$ η (1) μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα και ως εξής

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)|}{\|h\|} = 0 \qquad (2)$$

Αν θέσομε $\varepsilon_a(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)$ για εκείνα τα $h \in R^n$ ώστε $a + h \in U$ η (2) μπορεί να γραφεί και ως

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} = 0 \quad \text{όπου} \quad f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \varepsilon_a(h) \quad (3)$$

Ας εξετάσομε τώρα πιο προσεκτικά τον ορισμό και τις συνέπειές του.
Η μοναδικότητα του διαφορικού: Έστω τυχόν $h \in R^n$.
Θεωρούμε $t \in R, t \neq 0$ με $|t|$ αρκετά μικρό ώστε $a + th \in U$, έπεται τότε από την (3) ότι $Df(a)(h) = \dfrac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big) - \dfrac{1}{t}\varepsilon_a(th)$.

Άρα $Df(a)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big)$ που σημαίνει ότι η τιμή $Df(a)(h)$ της $Df(a)$ είναι πλήρως ορισμένη από την συνάρτηση f.

Η συνέχεια της f στο a: Επειδή $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} = 0$, αν $0 < \varepsilon < 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $h \neq 0$ και $\|h\| < \delta$ τότε $\dfrac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} \leq \varepsilon$ ή $|\varepsilon_a(h)| \leq \varepsilon \|h\|$.
Υποθέτοντας – όπως μπορούμε- ότι $0 < \delta \leq \varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι, αν $\|h\| \leq \delta$ τότε $|\varepsilon_a(h)| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 < \varepsilon$, συνεπώς $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0$. Άρα πάλι από την (3) έπεται ότι $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Δηλαδή η f είναι συνεχής στο a.

Η σχέση της διαφορισιμότητας και μερικών παραγώγων.

Θα αποδείξουμε ότι ύπαρξη του διαφορικού της f στο $a \in U$ έχει ως συνέπεια την ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ της f στο a.

Πράγματι εφόσον η $Df(a)$ είναι γραμμική συνάρτηση από τον R^n στο R θα υπάρχει $c=(c_1,...,c_n)\in R^n$ (όπου $c_k = Df(a)(e_k), k=1,2,...,n$) ώστε $Df(a)(h)=c\cdot h = c_1h_1+...+c_nh_n, h=(h_1,...,h_n)\in R^n$.

Έστω $j\in\{1,2,...,n\}$, ας αφήσουμε το x να κινηθεί στην ευθεία $L=\{a+te_j : t\in R\}$ του R^n που διέρχεται από το a και έχει την διεύθυνση του διανύσματος e_j της συνήθους βάσης του R^n, δηλαδή, θέτουμε $h=te_j$ με $t\in R$. Τότε από την μορφή (2) του ορισμού του διαφορικού θα έχουμε: $\lim_{t\to 0}\frac{\left|f(a+te_j)-f(a)-Df(a)(te_j)\right|}{|t|}=0$ ή $\lim_{t\to 0}\frac{\left|f(a+te_j)-f(a)-tc_j\right|}{|t|}=0$ ή $\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}-c_j\right|=0$ ή $\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=c_j$. Από τον ορισμό της $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ μερικής παραγώγου συμπεραίνουμε ότι : $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=c_j=Df(a)(e_j).$$

Συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο a υπάρχουν (με την υπόθεση ότι η f είναι διαφορίσημη στο a) και δίνονται από τις τιμές του διαφορικού στα διανύσματα της <u>συνήθους</u> βάσης του R^n, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=Df(a)(e_j),\ j=1,2,...,n$.

(Παρατηρούμε ότι από την παραπάνω διαδικασία έπεται πάλι η μοναδικότητα του διαφορικού.)

Συμβολισμός: Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ ονομάζεται η <u>κλίση</u> (gradient) ή το <u>ανάδελτα</u> της (διαφορίσημης στην θέση a) συνάρτησης f και συμβολίζεται με $\nabla f(a)$, δηλαδή έχουμε, $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

Παρατηρούμε ότι αν $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$ τότε,
$$Df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n=\nabla f(a)\cdot h.$$

<u>Διαφορισιμότητα και κατευθυνόμενες παράγωγοι</u>: Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό $f:U\to R$ συνάρτηση και $a\in U$. Αν $h\in R^n$ με $h\neq 0$. <u>Η κατευθυνόμενη παράγωγος της</u> f στο a και στην <u>κατεύθυνση</u> h συμβολιζόμενη με $D_h f(a)$ είναι το όριο (αν υπάρχει) $D_h f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$. Με άλλα λόγια ο αριθμός $D_h f(a)$ είναι η

παράγωγος της συνάρτησης $g:(-\delta,\delta)\to R: g(t)=f(a+th)$ στο $t=0$ (επειδή το U είναι ανοικτό στο R^n υπάρχει $\delta>0: a+th\in U$ για κάθε $|t|<\delta$). Η συνάρτηση g είναι ο περιορισμός της f στην τομή του U με την ευθεία $L=\{a+th: t\in R\}$, η L είναι η ευθεία του R^n που διέρχεται από το σημείο a και έχει την διεύθυνση του διανύσματος h (είναι παράλληλη με το h).

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα (το οποίο γενικεύει το προηγούμενο που αφορά τις μερικές παραγώγους).

5.3 Πρόταση. Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσημη στο a τότε η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο a σε όλες τις κατευθύνσεις $h\in R^n-\{0\}$, μάλιστα ισχύει,
$$D_h f(a)=Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h.$$

Απόδειξη Έστω $h\in R^n$ με $h\neq 0$. Όπως και στην περίπτωση της απόδειξης της ύπαρξης των μερικών παραγώγων θα έχουμε:
$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-Df(a)(th)}{\|th\|}\right|=0 \text{ ή } \lim_{t\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t}\right|=0 \text{ ή}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t}=0 \text{ ή } \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}=Df(a)(h).$$
Συνεπώς,
$$D_h f(a)=Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h.$$

Παρατήρηση. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο a δεν είναι τίποτα άλλο από τις παραγώγους της f στις κατευθύνσεις των διανυσμάτων της κανονικής βάσης $\{e_1,\dots,e_n\}$ του R^n, δηλαδή $D_{e_k} f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), k=1,2,\dots,n$.

<u>Το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος μιας διαφορίσημης συνάρτησης</u>.
Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό και $f:U\to R$ διαφορίσημη συνάρτηση στο $a\in U$. Κατ', αναλογία με την περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής και βασιζόμενοι στην προηγούμενη συζήτηση ορίζουμε ως <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> του γραφήματος της f στο $(a, f(a))\in R^{n+1}$ το $n-$<u>διάστατο επίπεδο</u> με εξίσωση
(1)
$$z=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$$
$$=f(a)+Df(a)(x-a)=f(a)+\nabla f(a)\cdot(x-a)$$
Όπου $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ και $a=(a_1,\dots,a_n)\in U$.
Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι το παραπάνω επίπεδο στον $n+1-$διάστατο χώρο $x_1x_2\dots x_n z$ εφάπτεται στην επιφάνεια με εξίσωση $z=f(x_1,\dots,x_n)$ στο σημείο $(a, f(a))$ και βέβαια είναι το μόνο επίπεδο με την ιδιότητα αυτή. Η γεωμετρική σημασία του εφαπτόμενου επιπέδου γίνεται καλύτερα κατανοητή στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $z=f(x,y)$ οπότε το γράφημά της είναι η

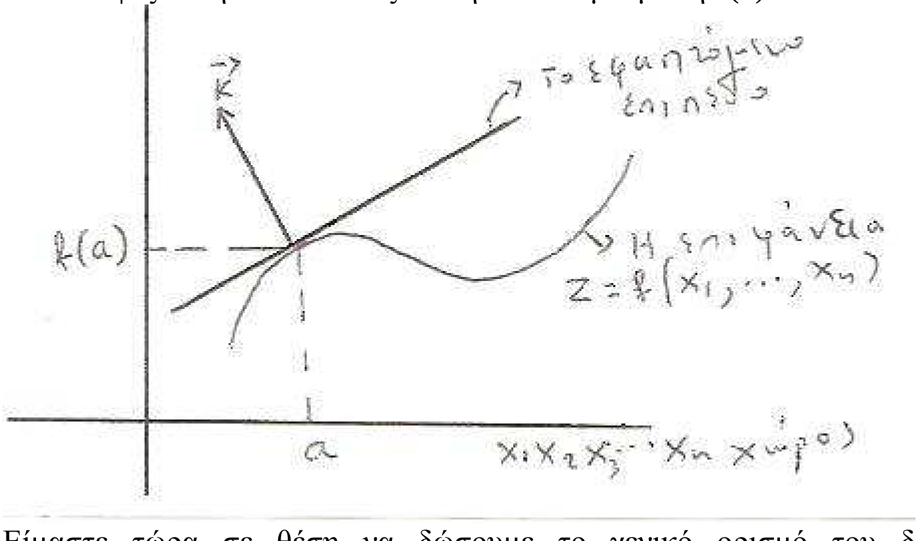
επιφάνεια $\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in U\}$ του R^3 και το εφαπτόμενο επίπεδο αυτής της επιφάνειας στο $(a,f(a))$ είναι το επίπεδο του R^3 με εξίσωση,

(2) $$z=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2),\qquad (x,y)\in R^2, a=(a_1,a_2)\in U.$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $k=\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a),1\right)=\left(-\nabla f(a),1\right)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο με εξίσωση την (1) και συνεπώς -εξ' ορισμού – κάθετο και στην επιφάνεια $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ στο σημείο $(a,f(a))$. (Το ζήτημα αυτό θα ξανασυζητηθεί αργότερα). Ας αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό (για λόγους απλότητας) στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, δηλαδή όταν έχουμε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε με εξίσωση την (2). Παρατηρούμε ότι $(a,f(a))=(a_1,a_2,f(a))\in \mathrm{E}$, επομένως αν $(x_1,x_2,z)\in \mathrm{E}$ τότε το διάνυσμα $(a_1,a_2,f(a))-(x_1,x_2,z)=(a_1-x_1,a_2-x_2,f(a)-z)$ είναι παράλληλο με το Ε. Άρα για να δείξουμε ότι $k\perp \mathrm{E}$ είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $(x_1,x_2,z)\in \mathrm{E}$ ισχύει ότι το εσωτερικό γινόμενο,

$$(a_1-x_1,a_2-x_2,f(a)-z)\cdot k=0 \Leftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(a_1-x_1)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(a_2-x_2)+f(a)-z=0$$

Είναι σαφές ότι η τελευταία εξίσωση ισοδυναμεί με την (2).



Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε το γενικό ορισμό του διαφορικού για διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής.

Υπενθυμίζουμε πρώτα την σχέση (ταύτιση) γραμμικών απεικονίσεων $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ και $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Έστω $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ γραμμική απεικόνιση, τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις της Τ είναι οι $\mathrm{T}_i=\pi_i o\mathrm{T}, i=1,2,\ldots,m$. Δηλαδή, $\mathrm{T}(x)=(\mathrm{T}_1(x),\ldots,\mathrm{T}_m(x)), x\in R^n$. Θέτομε $\mathrm{T}_i(e_j)=a_{ij}, 1\le i\le m, 1\le j\le n$ όπου $e_1,\ldots,e_n$ είναι η κανονική βάση του R^n. Τότε ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας $\mathrm{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

Αν $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, τότε
$\mathrm{T}(x)=(\mathrm{T}_1(x),...,\mathrm{T}_m(x))=(a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n,....,a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n)=$

$$=\mathrm{A}\cdot x=\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=\text{το γινόμενο του πίνακα A με το διάνυσμα στήλη, } x=\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Αντίστροφα, αν $\mathrm{A}=(a_{ij})$ είναι $m\times n$ πίνακας τότε στον Α αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ όπου $\mathrm{T}(x)=\mathrm{A}\cdot x, x=(x_1,...,x_n)\in R^n$. Έτσι εγκαθιδρύεται μία $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ του χώρου των γραμμικών απεικονίσεων $L(R^n;R^m)$ και του χώρου $V(m\times n;R)$ των, $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

$$\mathrm{T}\in L(R^n;R^m)\to \mathrm{A}\in V(m\times n;R):\mathrm{T}(x)=\mathrm{A}\cdot x, x\in R^n.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι:
(α) οι χώροι $L(R^n;R^m)$ και $V(m\times n;R)$ είναι (με τις συνήθεις πράξεις ο καθένας) διανυσματικοί και η ανωτέρω αντιστοιχία γραμμική απεικόνιση. Μέσω της αντιστοιχίας αυτής ουσιαστικά ταυτίζουμε τους πίνακες με τις γραμμικές απεικονίσεις.

β) $\dim L(R^n;R^m)=\dim V(m\times n;R)=m\cdot n$ (γιατί;).

5.4 Ορισμός Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a=(a_1,...,a_n)\in U$ και $f:U\to R^m, f=(f_1,...,f_m)$ συνάρτηση. Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο a αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$, $\mathrm{T}=(\mathrm{T}_1,...,\mathrm{T}_m)$ ώστε

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-\mathrm{T}(x-a)\|}{\|x-a\|}=0 \quad (1)$$

Θέτοντας $x-a=h$ το όριο (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}=0 \quad (2).$$

Η (μοναδική) γραμμική συνάρτηση Τ που ικανοποιεί την (1) (ή την (2)) ονομάζεται το διαφορικό της f στο a και συμβολίζεται με $Df(a)$.

Έστω $f=(f_1,...,f_m)$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο σημείο a, παρατηρούμε τα ακόλουθα:
1)Επειδή οι συντεταγμένες συναρτήσεις της,
$x\in U-\{a\}\to\dfrac{f(x)-f(a)-\mathrm{T}(x-a)}{\|x-a\|}\in R^m$ είναι οι,
$x\in U-\{a\}\to\dfrac{f_i(x)-f_i(a)-\mathrm{T}_i(x-a)}{\|x-a\|}\in R,\quad i=1,2,...,m$ έπεται από την θεωρία

των ορίων ότι το όριο στην (1) ισούται με 0 αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{x\to a}\frac{f_i(x)-f_i(a)-T_i(x-a)}{\|x-a\|}=0$ για κάθε $i=1,2,...,m$.

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν και μόνο αν η κάθε μια από τις συναρτήσεις $f_1,...,f_m$ είναι διαφορίσιμη στο a και τότε $Df_i(a)=T_i$ για κάθε $i=1,2,...,m$. Συνεπώς, $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))$.

2)Είναι προφανές, αφού οι $f_1,...,f_m$ είναι πραγματικές διαφορίσιμες συναρτήσεις, ότι οι μερικές παράγωγοι των $f_1,...,f_m$ στο a υπάρχουν και ισχύει, $Df_i(a)(h)=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)h_n$, $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$ όπου $i=1,2,...,m$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι η $T(=Df(a))$ είναι μοναδική.

3)Η διαφορισιμότητα στο a των $f_1,...,f_m$ έχει ως συνέπεια την συνέχεια αυτών των συναρτήσεων στο a, επομένως και η $f=(f_1,...,f_m)$ είναι συνεχής στο a.

4) Η διαφορισιμότητα της $f=(f_1,...,f_m)$ στο a σημαίνει ότι η f «γύρω» και «κοντά» στο σημείο a, συμπεριφέρεται περίπου όπως η γραμμική συσχετισμένη συνάρτηση $L(x)=f(a)+Df(a)(x-a), x\in R^n$. Πράγματι ο ορισμός του διαφορικού της f στο a σημαίνει όχι απλώς ότι το όριο $\lim_{x\to a}\|f(x)-L(x)\|=0$ αλλά ακόμη περισσότερο ότι η ποσότητα $\|f(x)-L(x)\|$ διαιρεμένη με την ποσότητα $\|x-a\|$ $(x\neq a)$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a.

(Το γράφημα της $L, G(L)=\{(x,L(x)):x\in R^n\}\subseteq R^n\times R^m\cong R^{n+m}$ ορίζεται ως ο γεωμετρικός εφαπτόμενος χώρος του γραφήματος της f, $G(f)=\{(x,f(x)):x\in U\}\subseteq U\times R^m$ στο $(a,f(a))$. Πρβλ και τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος συνάρτησης.)

5)Ειδικότερα αν η f είναι συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ($n=1$) παρατηρούμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_1,...,f_m$ ως πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής είναι διαφορίσιμες στο a, αυτό προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι: $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))=(f_1'(a),...,f_m'(a))$. Γράφουμε τότε $f'(a)=Df(a)$.

Βέβαια η διαφορισιμότητα μιας διανυσματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής μπορεί να ορισθεί και απ' ευθείας (χωρίς την έννοια του διαφορικού συνάρτησης πολλών μεταβλητών) με τον τύπο

$$f'(a)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$ (αν το όριο υπάρχει).

6)Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση διαφορικό $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))$ της f στο a ονομάζεται <u>ο πίνακας Jacobi</u> της f στο a και συμβολίζεται με $J_{f(a)}$. Παρατηρούμε ότι (σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε του ορισμού του διαφορικού διανυσματικής συνάρτησης),

$$J_{f(a)}=\begin{pmatrix}\nabla f_1(a)\\ \nabla f_2(a)\\ .\\ .\\ \nabla f_m(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$ (δες και την παρατήρηση (2)).

Έπεται ότι, $Df(a)(h)=J_{f(a)}\cdot h$ $\left(=J_{f(a)}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ .\\ h_n\end{pmatrix}\right)$ με $h=(h_1,..,h_n)\in R^n$.

Αν $m=1$ τότε ο πίνακας Jacobi <u>συμπίπτει</u> με το διάνυσμα γραμμή $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ δηλαδή με το ανάδελτα $\nabla f(a)$ της f στο a.

Παραδείγματα: 1) Κάθε σταθερή συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R^m$ είναι διαφορίσιμη στο U και $Df(a)=0$ για κάθε $a\in U$. Πράγματι έστω, $f(x)=c\in R^m$ για κάθε $x\in U$. Αν $a\in U$ τότε $f(x)-f(a)=c-c=0$, συνεπώς η μόνη γραμμική συνάρτηση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ που ικανοποιεί τον ορισμό του διαφορικού είναι η σταθερά μηδέν.

2) Έστω $f:R^n\to R^m$ γραμμική συνάρτηση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στον R^n και $Df(a)=f$ για κάθε $a\in R^n$.
Πράγματι, αν $a\in R^n$, τότε $f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)=f(x-a)-f(x-a)=0$ για κάθε $x\in R^n$ Από την μοναδικότητα του διαφορικού έπεται το συμπέρασμα.

3)Να αποδειχθεί με χρήση του ορισμού του διαφορικού ότι η συνάρτηση $f(x,y)=xy+y^3$ είναι διαφορίσιμη στο R^2 και να υπολογιστούν το διαφορικό, η κλίση της f στο σημείο $a=(a_1,a_2)$ καθώς και η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου του γραφήματος της f στο $(a,f(a))$.
Οι μερικές παράγωγοι της f είναι: $\frac{\partial f}{\partial x}=y$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2$. Αν η f είναι διαφορίσημη στο $a=(a_1,a_2)$ τότε το διαφορικό της εκεί θα έχει αναγκαία τη μορφή
(1) $Df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2=a_2h_1+(a_1+3a_2^2)h_2$ όπου $h=(h_1,h_2)\in R^2$.
Έπεται ότι αν $h=(h_1,h_2)\neq 0$ τότε θα έχουμε

$$\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}=\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-Df(a_1,a_2)(h_1,h_2)}{\|h\|}=$$

$$\frac{(a_1+h_1)(a_2+h_2)+(a_2+h_2)^3-(a_1a_2+a_2^3)-\left[a_2h_1+(a_1+3a_2^2)h_2\right]}{\|h\|}=$$

$$\frac{a_1a_2+a_1h_2+a_2h_1+h_1h_2+a_2^3+h_2^3+3a_2h_2^2+3a_2^2h_2-a_1a_2-a_2^3-a_2h_1-a_1h_2-3a_2^2h_2}{\|h\|}=$$

$$\frac{h_1h_2+h_2^3+3a_2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+h_2^2\cdot\frac{h_2+3a_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0.$$ Εφόσον,

$$\frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_2^2}}=|h_1|\xrightarrow[h_1\to 0]{}0 \text{ και } \left|h_2^2\cdot\frac{h_2+3a_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\le\frac{h_2^2}{|h_2|}\cdot|h_2+3a_2|\xrightarrow[h_2\to 0]{}0.$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι πράγματι το διαφορικό της f στο $a=(a_1,a_2)$ είναι η γραμμική απεικόνιση που περιγράψαμε στην (1) και συνεπώς η κλίση της f στο a είναι $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)=(a_2,a_1+3a_2^2)$. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου στο $(a,f(a))$ είναι η $z=(a_1a_2+a_2^3)+a_2(x-a_1)+(a_1+3a_2^2)(y-a_2)$

4)Το παράδειγμα που θα θεωρήσουμε τώρα το έχουμε χρησιμοποιήσει και στην παράγραφο των συνεχών συναρτήσεων (παρατήρηση 3.8).

Έστω $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Εξετάζουμε τις κατευθυνόμενες παραγώγους στο $(0,0)$ της g, και παρατηρούμε ότι αν $h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$, τότε $D_hg(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(th)-g(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\dfrac{th_1\cdot(th_2)^2}{(th_1)^2+(th_2)^4}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{h_1h_2^2}{h_1^2+t^2h_2^4}=\begin{cases}\dfrac{h_2^2}{h_1},h_1\neq 0\\ 0, \quad h_1=0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο $(0,0)$ υπάρχουν προς όλες τις κατευθύνσεις. Όμως όπως γνωρίζουμε η g δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ και επομένως δεν μπορεί να είναι διαφορίσημη στο ίδιο σημείο. (Καθόσον αφορά την μη συνέχεια της g στο $(0,0)$, υπενθυμίζουμε ότι αν $\lambda\in R$ και $t\in R$ με $t\neq 0$, τότε $g(\lambda t^2,t)=g(\lambda,1)=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}$, δηλαδή η g παραμένει σταθερή αν περιοριστεί στην παραβολή $\pi_\lambda=\{(x,y):x=\lambda y^2\}$, η οποία διέρχεται βέβαια από το $(0,0)$.
(Ακριβέστερα παραμένει σταθερή επί του συνόλου $\pi_\lambda-\{(0,0)\}$.)

Παρατήρηση. Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο a στην κατεύθυνση $h\neq 0$ υπάρχει, τότε ο περιορισμός της f στην ευθεία $L=\{a+th:t\in R\}$ είναι συνεχής στο σημείο a (γιατί;)

Κανόνες παραγώγισης

Οι κανόνες παραγώγισης που ισχύουν για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, (παραγώγιση, αθροίσματος, γινομένου , πηλίκου και σύνθετων συναρτήσεων) γενικεύονται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Παραθέτουμε πρώτα τους κανόνες παραγώγισης αθροισμάτων, γινομένων και πηλίκων.

5.5 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό $a \in U$ και $f, g : U \to R^m$ συναρτήσεις διαφορίσιμες στο a, τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (ι) Αν $\lambda \in R$ η συνάρτηση λf είναι διαφορίσιμη στο a και ισχύει, $D(\lambda f)(a) = \lambda \cdot Df(a)$

(ιι) Η συνάρτηση $f + g$ είναι διαφορίσιμη στο a και $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$

(ιιι) Έστω $m = 1$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$$

(ιν) Αν $m = 1$ και $g(a) \neq 0$, τότε η συνάρτηση (η οποία ορίζεται σε μια σφαίρα $\mathrm{B}(a, \delta) \subseteq U$) $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{\left(g(a)\right)^2}.$$

Ιδιαίτερα η $\frac{1}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{1}{\left(g(a)\right)^2} \cdot Dg(a)$$

Απόδειξη: Οι αποδείξεις των παραπάνω κανόνων είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες για διαφορίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τον ισχυρισμό (ιιι) Έστω $x \in U$, τότε έχουμε

$$\mathrm{A}(x) = \left|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a) - \left(g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)\right)(x-a)\right| =$$
$$| f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - g(a)Df(a)(x-a) - f(a)Dg(a)(x-a) +$$
$$+ f(x)Dg(a)(x-a) - f(x)Dg(a)(x-a) + f(x)g(a) - f(x)g(a) | \leq$$
$$\leq \left|f(x)\right|\left|g(x) - g(a) - Dg(a)(x-a)\right| + \left|g(a)\right|\left|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\right| +$$
$$+ \left|\left(f(x) - f(a)\right) \cdot Dg(a)(x-a)\right|$$

Αν συμβολίσουμε την τελευταία παράσταση με $\mathrm{B}(x)$ τότε θα έχουμε: $\frac{\mathrm{A}(x)}{\|x-a\|} \leq \frac{\mathrm{B}(x)}{\|x-a\|}, x \in U, x \neq a$.

Η παράσταση $\frac{\mathrm{B}(x)}{\|x-a\|}$ έχει τρεις προσθετέους εκ των οποίων οι δύο πρώτοι τείνουν στο 0 καθώς $x \to a$, από τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης και το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο a. Για τον τρίτο προσθετέο παρατηρούμε ότι

$$\frac{\left|\left(f(x)-f(a)\right)\cdot Dg(a)(x-a)\right|}{\|x-a\|}\leq\frac{\left|f(x)-f(a)\right|\cdot\kappa\|x-a\|}{\|x-a\|}\leq\kappa\left|f(x)-f(a)\right|\xrightarrow[x\to a]{}0$$

, καθώς η γραμμική συνάρτηση $Dg(a)$ είναι Lipschitz και συνεπώς υπάρχει $\kappa>0:\left|Dg(a)(x-y)\right|\leq\kappa\|x-y\|, x,y\in R^n$.

Σημείωση Καθώς το διαφορικό μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών ταυτίζεται με τον αντίστοιχο πίνακα Jacobi, οι παραπάνω ισότητες μπορούν να ερμηνευθούν και ως ισότητες πινάκων αντικαθιστώντας τα διαφορικά με τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi. Για παράδειγμα η (ι) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως $J(\lambda f)(a)=\lambda J(f)(a), \lambda\in R$, (γινόμενο πίνακα με αριθμό) και η (ιι) $J(f+g)(a)=J(f)(a)+J(g)(a)$ (άθροισμα πινάκων).

Παραδείγματα: 1) Κάθε πολυώνυμο $P:(x_1,\ldots,x_n)\in R^n\to P(x_1,\ldots,x_n)\in R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στον R^n, μάλιστα οι μερικές παράγωγοί του είναι πάλι πολυώνυμα και συνεπώς συνεχείς συναρτήσεις στον R^n.
Επειδή ένα πολυώνυμο είναι εξορισμού γραμμικός συνδυασμός μονώνυμων (δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$, όπου $k_1,\ldots,k_n\in N\bigcup\{0\}$) είναι αρκετό από τους κανόνες (ι) και (ιι) να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για μονώνυμα. Έστω λοιπόν $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$, $k_i\geq 1$, $1\leq i\leq n$, παρατηρούμε ότι $f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\pi_1(x)\right)^{k_1}\cdot\left(\pi_2(x)\right)^{k_2}\ldots\left(\pi_n(x)\right)^{k_n}$ όπου $x=(x_1,\ldots,x_n)$ και $\pi_1,\ldots,\pi_n$ οι προβολές του R^n στον R. Επειδή οι προβολές είναι γραμμικές συναρτήσεις και άρα διαφορίσιμες, από τον κανόνα (ιιι) (και με επαγωγή στον βαθμό του μονώνυμου) έπεται το συμπέρασμα. Το διαφορικό ενός μονώνυμου $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ στη θέση $a=(a_1,\ldots,a_n)\in R^n$ υπολογίζεται εύκολα αφού οι μερικές παράγωγοι του μονώνυμου μπορούν να υπολογιστούν και αυτές εύκολα: $\frac{\partial f}{\partial x_j}=k_jx_1^{k_1}\ldots x_j^{k_j-1}\ldots x_n^{k_n}, 1\leq j\leq n$ (συνεχείς συναρτήσεις στον R^n).
Έπεται ότι,

$$Df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n=$$

$$\left(k_1a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\ldots a_n^{k_n}\right)h_1+\ldots+\left(k_na_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_{n-1}^{k_{n-1}}a_n^{k_n-1}\right)h_n$$

όπου $h=(h_1,\ldots,h_n)\in R^n$.
Ιδιαίτερα για ένα μονώνυμο δύο μεταβλητών, $f(x,y)=x^\kappa\cdot y^\lambda$ έχουμε: $Df(a_1,a_2)(h_1,h_2)=\kappa a_1^{\kappa-1}a_2^{\lambda}h_1+\lambda a_1^{\kappa}a_2^{\lambda-1}h_2$.
Είναι βέβαια τώρα σαφές ότι οι μερικές παράγωγοι ενός πολυωνύμου είναι και αυτές πολυώνυμα και άρα συνεχείς συναρτήσεις.

2)Οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή τα πηλίκα πολυωνύμων $f(x_1,...,x_n)=\dfrac{P(x_1,...,x_n)}{Q(x_1,...,x_n)}$, όπου $Q\neq 0$ είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Σημειώνουμε κατ' αρχήν ότι το πεδίο ορισμού U μιας ρητής συνάρτησης όπως παραπάνω είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, αφού $U=R^n-Q^{-1}(\{0\})$ και Q συνεχής στο R^n.

Έπεται αμέσως από τον κανόνα διαφόρισης (ιν) ότι η $f=\dfrac{P}{Q}$ είναι διαφορίσημη στο U ως πηλίκο διαφορισίμων συναρτήσεων.

Ο ίδιος κανόνας μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το διαφορικό της f στο U. Σημειώνουμε ακόμη ότι αντίστοιχος κανόνας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής συμπεραίνει ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο U είναι <u>συνεχείς</u> συναρτήσεις (αφού είναι ρητές συναρτήσεις).

Ας υπολογίσουμε το διαφορικό της ρητής συνάρτησης $\phi(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ στο πεδίο ορισμού της που είναι βέβαια το $U=R^2-\{(0,0)\}$. Έστω $a=(a_1,a_2)\in R^2$ με $a\neq(0,0)$.

Θέτομε $f(x,y)=xy$ και $g(x,y)=x^2+y^2$. Από τον κανόνα (ιν) έχουμε:

$$D\phi(a)(h)=\frac{g(a)Df(a)(h)-f(a)Dg(a)(h)}{\left(g(a)\right)^2}\quad(1),\quad h=(h_1,h_2).$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε, $Df(a)(h)=a_2h_1+a_1h_2, Dg(a)(h)=2a_1h_1+2a_2h_2$, $g(a)=a_1^2+a_2^2$ και $f(a)=a_1a_2$. Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$D\phi(a)(h)=\frac{\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(a_2h_1+a_1h_2\right)-2a_1a_2\left(a_1h_1+a_2h_2\right)}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2}=\frac{\left(a_1^2-a_2^2\right)\left(a_1h_2-a_2h_1\right)}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2}$$

3)Έστω $f(x,y,z)=x^2+y+z$. Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $x_0=(1,0,0)$ στην κατεύθυνση $h=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Λύση Η f είναι διαφορίσημη συνάρτηση στον R^3 ως πολυωνυμική. Οι μερικές παράγωγοι της f στον R^3 είναι οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial f}{\partial y}=1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}=1$. Συνεπώς $\nabla f(x,y,z)=(2x,1,1)$ και $\nabla f(x_0)=\nabla f(1,0,0)=(2,1,1)$. Έπεται ότι,

$$D_hf(x_0)=Df(x_0)(h)=\nabla f(x_0)\cdot h=(2,1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$=\sqrt{3}$.

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος της διαφορισιμότητας μιας συνάρτησης με χρήση του ορισμού (του διαφορικού) παρουσιάζει στην πράξη αρκετές δυσκολίες. Υπάρχει όμως ένα κριτήριο που διευκολύνει αυτή την διαδικασία που έχει να κάνει με την ύπαρξη και την <u>συνέχεια</u> των μερικών παραγώγων. Η διατύπωση αυτού του πολύ χρήσιμου κριτηρίου αλλά και άλλων αποτελεσμάτων που θα ακολουθήσουν διευκολύνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

5.6 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $f : U \to R$ συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη ή της κλάσης $C^{(1)}$, αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ της f στο U υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Αν $a \in R^n$, με τον όρο περιοχή του a, θα εννοούμε ένα σύνολο V ώστε να υπάρχει $\delta > 0$ με $\mathrm{B}(a,\delta) \subseteq V$. Ισοδύναμα, το V είναι περιοχή του a, αν $a \in \mathrm{int}(V)$

5.7 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $a \in U$ και $f : U \to R$ συνάρτηση. Αν οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε μια περιοχή του a και είναι συνεχείς στο a, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a. Ιδιαίτερα έπεται ότι αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο U τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U.

Απόδειξη Η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Έστω $\delta > 0 : \mathrm{B}(a,\delta) \subseteq U$ και ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ να ορίζονται στην σφαίρα $\mathrm{B}(a,\delta)$ και να είναι συνεχείς στο a. Πρέπει

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left| f(a+h) - f(a) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\cdot h_k\right)\right|}{\|h\|} = 0 .$$

Έστω $h \in R^n$ με $h = (h_1,...,h_n) \neq 0$ ώστε $\|h\| < \delta$, συνεπώς $a+h \in \mathrm{B}(a,\delta)$, $a = (a_1,...,a_n)$.

Συνδέουμε τα σημεία $z_0 = a+h$ και $z_n = a$ με μία πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} = [z_0,z_1] \cup ... \cup [z_{n-1},z_n] \subseteq \mathrm{B}(a,\delta)$ της οποίας οι πλευρές είναι παράλληλες με τους άξονες που ορίζουν τα διανύσματα $e_1,...,e_n$ της κανονικής βάσης του R^n. Κατ' αυτόν τον τρόπο η f περιορισμένη στο καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $[z_{k-1},z_k], k = 1,...,n$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής , από την υπόθεσή μας, αφού το $[z_{k-1},z_k]$ είναι παράλληλο με την ευθεία $\{te_k : t \in R\}$. Έτσι θέτομε

$z_0 = a+h = (a_1+h_1,...,a_n+h_n)$,

$z_1 = (a_1, a_2+h_2,...,a_n+h_n)$,

$z_2 = (a_1,a_2,a_3+h_3,...,a_n+h_n)$

……………………………

$z_{n-1} = (a_1,...,a_{n-1},a_n+h_n)$

$z_n = (a_1,...,a_n)$

Κατόπιν γράφουμε $f(a+h) - f(a) = f(z_0) - f(z_n) = \big(f(z_0) - f(z_1)\big) + \big(f(z_1) - f(z_2)\big) + ... + \big(f(z_{n-2}) - f(z_{n-1})\big) + \big(f(z_{n-1}) - f(z_n)\big)$(Αυτό λέγεται τηλεσκοπικό άθροισμα, γιατί κάθε όρος απαλείφεται με τον προηγούμενο ή τον επόμενό του, εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο).

Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού αυτή η παράσταση μπορεί να γραφεί ως $f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(y_2)h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)h_n$, όπου $y_1=(c_1,a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n)$ και το c_1 είναι ανάμεσα στα a_1 και a_1+h_1 $y_2=(a_1,c_2,a_3+h_3,\ldots,a_n+h_n)$ και το c_2 είναι ανάμεσα στα a_2 και $a_2+h_2,\ldots,$ $y_n=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},c_n)$ και το c_n είναι ανάμεσα στα a_n και a_n+h_n.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε,

$$\left|f(a+h)-f(a)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k\right)\right|=$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)h_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)h_n\right|.$$

Από την τριγωνική ανισότητα, αυτή η παράσταση είναι μικρότερη ή ίση από την

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right||h_1|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right||h_n|\le$$

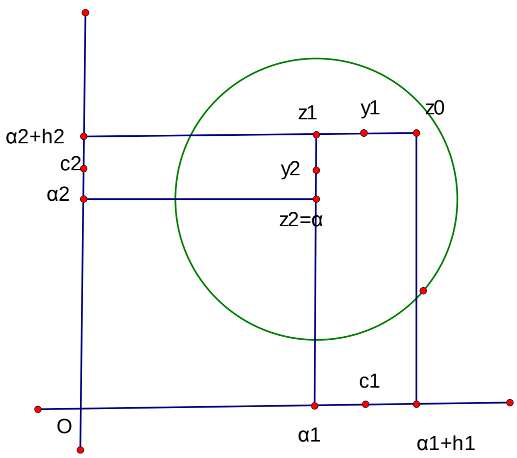
$$\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right|\right)\|h\|$$ αφού $|h_k|\le\|h\|$ για κάθε $k=1,2,\ldots,n$

Έπεται ότι

$$\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k\right)\right|}{\|h\|}\le\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right|.$$

Αλλά οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, από την υπόθεσή μας, στο σημείο a. Έπεται ότι το δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας τείνει στο 0 όταν το $\|h\|\to 0$, επομένως και το αριστερό μέλος επίσης τείνει στο 0.

Παρατήρηση Η ιδέα της απόδειξης φαίνεται καλύτερα όταν $n=2$.



$z_0=a+h=(a_1+h_1,a_2+h_2)$

$z_1=(a_1,a_2+h_2)$

$z_2=(a_1,a_2)$

Η πολυγωνική γραμμή είναι η $\mathrm{P}=[z_0,z_1]\cup[z_1,z_2]$

Γράφουμε τότε

$$f(a+h)-f(a)=f(z_0)-f(z_2)=$$
$$\left(f(z_0)-f(z_1)\right)+\left(f(z_1)-f(z_2)\right)$$

Παραδείγματα και εφαρμογές.

1)Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις (α) $f(x)=\|x\|$ και (β) $g(x)=\left(f(x)\right)^2=\|x\|^2, x\in R^n$.

Λύση Έστω $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$.

(α) Οι μερικές παράγωγοι της $f(x_1,...,x_n)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{x_j}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}=\dfrac{x_j}{\|x\|}, j=1,2,...,n$ στο σύνολο $U=R^n-\{0\}$ και βέβαια είναι συνεχείς στο U. Επομένως η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο U και άρα διαφορίσιμη εκεί.

Αν $a=(a_1,...,a_n)\in U$ τότε $Df(a)(h)=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j=\nabla f(a)\cdot h$, όπου $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$.

Η δε κλίση της f στο a είναι $\nabla f(a)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=\left(\dfrac{a_1}{\|a\|},...,\dfrac{a_n}{\|a\|}\right)$.

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου του γραφήματος της f στο $(a, f(a))$ είναι:

$$z=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)=$$

$$\|a\|+\frac{a_1}{\|a\|}(x_1-a_1)+...+\frac{a_n}{\|a\|}(x_n-a_n),\ x=(x_1,...,x_n)\in R^n.$$

Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Πράγματι, αν $j\in\{1,2,...,n\}$ τότε $f(0,...,0,x_j,0,...,0)=|x_j|$ και η συνάρτηση αυτή (ως συνάρτηση της μεταβλητής x_j) δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Επομένως οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0,....,0)$ δεν υπάρχουν.

Παρατηρήση. α) Το γράφημα της f όταν $n=2$, οπότε γράφουμε $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in R^2$ είναι ένας ανεστραμμένος ορθός κώνος με την κορυφή στο $(0,0,0)$. Ο κώνος αυτός σχηματίζεται με την περιστροφή μιας ημιευθείας που διέρχεται από το $(0,0,0)$ γύρω από τον άξονα $z'z$ σε γωνία $\dfrac{\pi}{4}(=45^0)$.

(β)Οι μερικές παράγωγοι της $g(x)=\|x\|^2=x_1^2+...+x_n^2$ είναι $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}=2x_j, j=1,2,...,n$ οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις στον R^n. Έπεται ότι η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον R^n και άρα διαφορίσιμη συνάρτηση στον R^n.

Αν $a=(a_1,...,a_n)$ τότε, $\nabla f(a)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=(2a_1,...,2a_n)$ και $Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h=2a_1h_1+...+2a_nh_n=2a\cdot h$.

Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο a είναι: $z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) =$

$\|a\|^2 + 2a_1(x_1 - a_1) + ... + 2a_n(x_n - a_n) = -\|a\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

2)Η συνάρτηση εσωτερικό γινόμενο $g : R^n \times R^n \to R : g(x, y) = x \cdot y$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $R^n \times R^n \cong R^{2n}$.

Λύση Ο χώρος $R^n \times R^n$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον Ευκλείδειο χώρο R^{2n} μέσω της κανονικής απεικόνισης $((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) \in R^n \times R^n \to (x_1,...,x_n, y_1,..., y_n) \in R^{2n}$.

Έτσι έχουμε $g((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = g(x_1,...,x_n, y_1,..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

Συνεπώς $\frac{\partial g}{\partial x_j} = y_j$ και $\frac{\partial g}{\partial y_j} = x_j$, $j = 1, 2,...,n$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι βέβαια συνεχείς στον R^n αφού είναι γραμμικές (η $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ ταυτίζεται με την j προβολή του R^{2n} και $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ με την $j+n$ προβολή του R^{2n}. Έτσι η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον R^{2n}.

Αν $(a_1, a_2) = (a_{11},...,a_{1n}, a_{21},...,a_{2n}) \in R^n \times R^n$ τότε $\nabla g(a_1, a_2) = (a_2, a_1) = (a_{21},...,a_{2n}, a_{11},...,a_{1n})$ και $Dg(a_1, a_2)(h_1, h_2) = a_2 \cdot h_1 + a_1 \cdot h_2, (h_1, h_2) \in R^n \times R^n$.

Παρατήρηση. Για $n = 1$ η g συμπίπτει με το συνηθισμένο γινόμενο πραγματικών αριθμών: $g(x, y) = xy, (x, y) \in R^2$. Συνεπώς, $\frac{\partial g}{\partial x} = y, \frac{\partial g}{\partial y} = x$ και $Dg(a_1, a_2)(h_1, h_2) = a_2h_1 + a_1h_2$ όπου $(a_1, a_2) \in R^2$ και $(h_1, h_2) \in R^2$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι το διαφορικό του εσωτερικού γινομένου $g(x, y) = x \cdot y, (x, y) \in R^n \times R^n$ μπορεί να βρεθεί και με ένα απευθείας υπολογισμό (αφού γνωρίζουμε τις μερικές παραγώγους) με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

3) Έστω $f : U \subseteq R^n \to R^n$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a = (a_1,...,a_n) \in U$. Αν το διαφορικό $Df(a): R^n \to R^n$ της f στο a είναι $1-1$ συνάρτηση (δηλαδή ο πίνακας Jacobi $Jf(a)$ της f στο a είναι αντιστρέψιμος), τότε η ρίζα a της εξίσωσης, $f(x) = f(a), x \in U$ είναι μεμονωμένη. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(a,\delta) \subseteq U$ και αν $x \in \mathrm{B}(a,\delta)$ τότε, $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

Λύση. Θέτομε $\mathrm{T} = Df(a): R^n \to R^n$. Η Τ είναι $1-1$ και γραμμική άρα είναι και επί του R^n και η αντίστροφή της είναι συνεχής αφού είναι γραμμική. Θέτομε για $h \in R^n - \{0\}$ με $h + a \in U, \varepsilon_a(h) = f(a+h) - f(a) - \mathrm{T}(h)$.

Η διαφορισιμότητα της f στο a ισοδυναμεί με $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\|\varepsilon_a(h)\right\|}{\|h\|}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon_a(h)}{\|h\|}=0$ (1)

Έπεται ότι, $\mathrm{T}^{-1}\left(\dfrac{\varepsilon_a(h)}{\|h\|}\right)=\dfrac{1}{\|h\|}\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a(h)\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0$, αφού η T^{-1} είναι συνεχής στο 0.

Έστω $\delta>0:0<\|h\|<\delta\Rightarrow\dfrac{\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a(h)\right)\right\|}{\|h\|}<\dfrac{1}{2}$. . Υποθέτουμε ότι το δ είναι αρκετά μικρό ώστε $\|h\|<\delta\Rightarrow a+h\in U$.

Παρατηρούμε ότι $\|h\|<\delta\Rightarrow\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a(h)\right)\right\|\le\dfrac{1}{2}\|h\|$, (3)

Έστω ότι για κάποιο $h\in R^n:0<\|h\|<\delta$, ισχύει ότι $f(a+h)=f(a)$ ($\Leftrightarrow f(x)-f(a)=0$ για κάποιο $x\in\mathrm{B}(a,\delta)$). Τότε, $\varepsilon_a(h)=f(a+h)-f(a)-\mathrm{T}(h)=-\mathrm{T}(h)$. Άρα από την (3) θα έχουμε, $\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a(h)\right)\right\|=\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(-\mathrm{T}(h)\right)\right\|=\|h\|<\dfrac{1}{2}\|h\|$ άτοπο.

Συνεπώς $x\in\mathrm{B}(a,\delta)$ και $f(x)=f(a)\Rightarrow x=a$.

4) Έστω $p\in R$ με $p>1$ και $f(x,y)=\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}},(x,y)\in R^2$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $R^2-\{(0,0)\}$ και <u>δεν</u> είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(x)=|x|^p,x\in R$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο R, εφόσον $g'(x)=\begin{cases}p|x|^{p-1},x>0\\0,x=0\\-p|x|^{p-1},x<0\end{cases}$

(μάλιστα η g' είναι γνήσια αύξουσα στο R και άρα η g γνήσια κυρτή).

Έπεται ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο $R^2-\{(0,0)\}$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot|x|^{p-1},x>0,y\in R\\-\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot|x|^{p-1},x<0,y\in R\\0,x=0,y\in R-\{0\}\end{cases}$$

Ανάλογα, $$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|y|^{p-1},y>0,x\in R\\-\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|y|^{p-1},y<0,x\in R\\0,y=0,x\in R-\{0\}\end{cases}$$

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ έχουν ως εξής: Αν $x \in R$ και $x \neq 0$ τότε $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \dfrac{\left(|x|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x>0 \\ -1, x<0 \end{cases}$. Άρα η $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ δεν υπάρχει.

Ανάλογα, η $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ δεν υπάρχει.

Έτσι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Επειδή όπως εύκολα εξακριβώνεται η $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $R^2 - \{(0,0)\}$ η f είναι $C^{(1)}$ στο $R^2 - \{(0,0)\}$ και άρα διαφορίσιμη εκεί.

Επίσης η f είναι συνεχής συνάρτηση στο R^2 αφού είναι σύνθεση συνεχών.

Παρατήρηση. Ανάλογα αντιμετωπίζεται και η συνάρτηση $f(x) = \|x\|_p = \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, όπου $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$ και $p>1$. Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη $\left(C^{(1)}\right)$ στον $R^n - \{0\}$ και δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0,...,0)$. Σημειώνουμε ότι η $\|\cdot\|_p : R^n \to R$ είναι μια ισοδύναμη νόρμα στον R^n.

5)Έστω $f_1,...,f_n : R \to R$ διαφορίσιμες στα σημεία $a_1,...,a_n$ του R αντίστοιχα. Ορίζουμε, $f : R^n \to R$: $f(x_1,...,x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $a = (a_1,...,a_n) \in R^n$ και $Df(a)(h) = f_1'(a_1)\cdot h_1 + ... + f_n'(a_n)\cdot h_n$, όπου $h = (h_1,...,h_n) \in R^n$. Ιδιαίτερα έπεται ότι, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f_k'(a_k), k = 1,2,...n$

Λύση. Θέτομε $\mathrm{T}(h_1,...,h_n) = f_1'(a_1)\cdot h_1 + ... + f_n'(a_n)\cdot h_n$, $(h_1,...,h_n) \in R^n$.

Τότε έχουμε ότι: αν $h = (h_1,...,h_n) \neq 0$: $\dfrac{|f(a+h) - f(a) - \mathrm{T}(h)|}{\|h\|} =$

$$= \frac{\left|\left(f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1\right) + ... + \left(f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n\right)\right|}{\|h\|} \leq$$

$$\frac{|f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1|}{\|h\|} + ... + \frac{|f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n|}{\|h\|} \leq$$

$$\frac{|f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1|}{|h_1|} + ... + \frac{|f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n|}{|h_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Συνεπώς $Df(a) = \mathrm{T}$.

Παρατήρηση Από την άσκηση αυτή προκύπτει εύκολα ότι

1)Αν οι $f_1,...,f_n$ είναι διαφορίσιμες στο R τότε και η $f : R^n \to R$ είναι διαφορίσιμη στον R^n.

2) Αν οι $f_1,...,f_n$ είναι διαφορίσιμες στο R και κάποια από αυτές δεν έχει συνεχή παράγωγο στο R π.χ. η f_1 τότε η f είναι μεν διαφορίσιμη στον R^n αλλά δεν έχει όλες τις μερικές παραγώγους της συνεχείς στο R.

Πράγματι από την προηγούμενη (5) έπεται ότι: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,...,a_i,...,a_n) = f_i^{'}(a_i)$, $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$, $i=1,2,...,n$. Άρα η $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ δεν είναι συνεχής στο R^n εφόσον η $f_1^{'}$ δεν είναι συνεχής στο R.(Ακριβέστερα έχουμε ότι, $f_i^{'}\circ \pi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,2,...,n$, απ' όπου έπεται ότι η $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι συνεχής στο R^n ακριβώς όταν η $f_i^{'}$ είναι συνεχής στο R)

Με βάση την παρατήρηση (2) μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε παραδείγματα συναρτήσεων $f: R^n \to R$ οι οποίες είναι διαφορίσιμες αλλά όχι με συνεχείς μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα έστω $f_1(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$ και $f_2(x)=x^2, x\in R$. Η $f_2(x)=x^2$ είναι βέβαια συνεχώς διαφορίσιμη στο $R^2,\left(f_2^{'}(x)=2x\right)$, όμως $f_1^{'}(x)=\begin{cases} 2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$ η οποία <u>δεν</u> είναι συνεχής στο 0. Έπεται ότι, η συνάρτηση, $f(x,y)=f_1(x)+f_2(y)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+y^2, x\neq 0, y\in R \\ y^2, x=0, y\in R\end{cases}$ είναι μεν διαφορίσιμη στο R^2, αλλά <u>δεν</u> έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (η $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$).

Ένα άλλο τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x,y)=f_1(x)+f_1(y),(x,y)\in R^2$

6)Έστω $f: U\subseteq R^n \to R^m$ διαφορίσιμη στο $a\in U$ (U ανοικτό στο R^n).
Τότε υπάρχουν $\delta>0$ ώστε $\mathrm{B}(a,\delta)\subseteq U$ και $\kappa>0: 0<\|h\|<\delta \Rightarrow \|f(a+h)-f(a)\|<\kappa\|h\|$.

Λύση Έστω $\varepsilon=1$. Από τον ορισμό του διαφορικού υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $0<\|h\|<\delta$ τότε $\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|<\varepsilon\|h\|=\|h\|$.

Έπεται ότι αν $\|h\|<\delta$ τότε,

$$\|f(a+h)-f(a)\| = \|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)+Df(a)(h)\| \leq$$
$$\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|+\|Df(a)(h)\| < \|h\|+\mathrm{M}\cdot\|h\| = (1+\mathrm{M})\cdot\|h\|.$$

Θέτομε κ=1+Μ και έχουμε το συμπέρασμα. Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα Lipschitz της γραμμικής συνάρτησης $Df(a): R^n \to R^m$. Το γεγονός ότι οι γραμμικές απεικονίσεις είναι Lipschitz έχει αποδειχθεί προηγουμένως.

Παρατήρηση. Πρέπει να είναι σαφές ότι η ανισότητα αυτή συμπεραίνει και την <u>συνέχεια</u> της f στο a.

7) Έστω $\mathrm{T}: R^n \to R^m$ γραμμική συνάρτηση. Υποθέτομε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}=0$ τότε $\mathrm{T}=0$ (δηλαδή $\mathrm{T}(x)=0$ για κάθε $x\in R^n$).

Λύση. Έστω $\mathrm{T}=(\mathrm{T}_1,...,\mathrm{T}_m)$, τότε κάθε $\mathrm{T}_i, 1\le i\le m$ είναι γραμμική και αν $h\ne 0$ τότε: $\dfrac{|\mathrm{T}_i(h)|}{\|h\|}\le\dfrac{\|\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}\le\sqrt{m}\,\dfrac{\max\{|\mathrm{T}_i(h)|:1\le i\le m\}}{\|h\|}$ (Πρβλ. την απόδειξη της μοναδικότητας του διαφορικού καθώς και την απόδειξη της Πρότασης 1.5).
Έπεται ότι αν αποδείξουμε το αποτέλεσμα για πραγματικές γραμμικές συναρτήσεις $(m=1)$, τότε θα ισχύει και για κάθε γραμμική $\mathrm{T}: R^n \to R^m$.
Υποθέτομε λοιπόν ότι $m=1$. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχει $a=(a_1,...,a_n)\in R^n : \mathrm{T}(h)=a\cdot h=a_1h_1+...+a_nh_n$ για κάθε $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$. Έστω λοιπόν $h=(h_1,...,h_n)\ne 0$ τότε $\dfrac{\mathrm{T}(h)}{\|h\|}=\dfrac{a_1h_1+...+a_nh_n}{\|h\|}$ (1).

Αν $h_1\ne 0$ και $h_2=...=h_n=0$ τότε από την (1) έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{T}(h)}{\|h\|}=\dfrac{a_1h_1}{|h_1|}\xrightarrow[h_1\to 0]{}0$

άρα κατ' ανάγκη $a_1=0$ εφόσον $\dfrac{a_1h_1}{|h_1|}=\begin{cases} a_1, & \text{αν } h_1>0 \\ -a_1, & \text{αν } h_1<0 \end{cases}$.
Ανάλογα θέτοντας $h_1=0=h_3=...=h_n=0$ και $h_2\ne 0$ λαμβάνουμε $a_2=0$, και τελικά (με τον ίδιο τρόπο) $a_1=a_2=...=a_n=0$. Συνεπώς $\mathrm{T}=0$.

Παρατηρήσεις. (α) Έπεται ιδιαίτερα από την άσκηση αυτή ότι: αν $a,\beta\in R$ τότε: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax+\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow a=\beta=0.$ Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για οποιονδήποτε αριθμό μεταβλητών $x_1,...,x_n$.
(β) Το επιχείρημα που αποδεικνύει την παραπάνω άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της μοναδικότητας του διαφορικού συνάρτησης.

8) Έστω $f:U\subseteq R^2\to R$ συνάρτηση και $a\in U$ ώστε οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a),\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ υπάρχουν.
Υποθέτουμε ότι το όριο ($h=(h_1,h_2)$)
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot h_2\right)}{\|h\|}=l$ υπάρχει στο R. Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a. (δηλαδή ότι $l=0$).

Λύση Έπεται από την υπόθεσή μας ότι τα όρια

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(a+(h_1,0))-f(a)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1}{|h_1|}=l=\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a+(0,h_2))-f(a)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2}{|h_2|}$$

υπάρχουν και είναι ίσα με l, όμως από την πρώτη υπόθεσή μας τα όρια αυτά είναι ίσα με $l=0$ (εφόσον οι μερικές παράγωγοι στο a υπάρχουν).

9) Να εξετασθεί ως προς την διαφορισιμότητα (ύπαρξη και συνέχεια μερικών παραγώγων, διαφορικού κ.λ.π.) η συνάρτηση $f(x,y)=|x|+|y|,(x,y)\in R^2$.

Λύση Είναι εύκολο να δούμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο <u>ανοικτό</u> υποσύνολο $U=\{(x,y)\in R^2 : x\neq 0 \text{ και } y\neq 0\}=R^2-\{(x,y)\in R^2 : \text{ είτε } x=0 \text{ ή } y=0\}$. Πράγματι, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $x>0$ και $y>0$, τότε $f(x,y)=x+y$, άρα η f είναι <u>γραμμική</u> στο $U_1=\{(x,y): x>0 \text{ και } y>0\}\subseteq U$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_1$.

Οι μερικές παράγωγοι της f στο U_1 είναι $\frac{\partial f}{\partial x}=1=\frac{\partial f}{\partial y}$ άρα συνεχείς εκεί ($Df(a,b)(h_1,h_2)=h_1+h_2, a>0 \text{ και } b>0$).

(β) $x<0$ και $y>0$, τότε $f(x,y)=y-x$ και η f είναι γραμμική στο $U_2=\{(x,y): x<0 \text{ και } y>0\}$. $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x}=-1,\frac{\partial f}{\partial y}=1$ στο U_2. Επομένως $Df(a,b)(h_1,h_2)=-h_1+h_2$.

(γ) $x<0$ και $y<0$, τότε $f(x,y)=-x-y$, η f είναι γραμμική στο $U_3=\{(x,y): x<0 \text{ και } y<0\}$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_3$ δηλαδή $Df(a,b)(h_1,h_2)=-h_1-h_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x}=-1=\frac{\partial f}{\partial y}$ στο U_3.

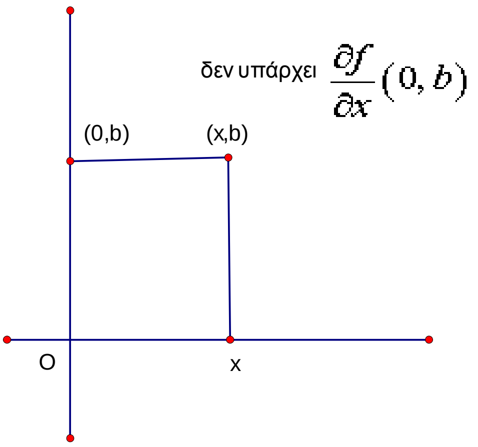
(δ) $x>0$ και $y<0$, τότε $f(x,y)=x-y$, η f είναι γραμμική στο $U_4=\{(x,y): x>0 \text{ και } y<0\}$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_4$ δηλαδή $Df(a,b)(h_1,h_2)=h_1-h_2,(h_1,h_2)\in R^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}=1,\frac{\partial f}{\partial y}=-1$ στο U_4.

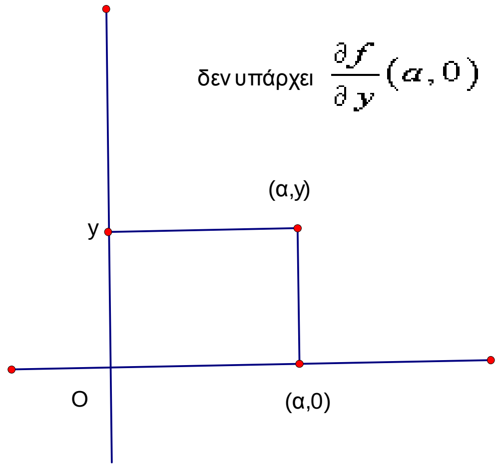
Έστω τώρα $(a,b)\in R^2$, με $a=0$ ή $b=0$ θα εξετάσουμε την ύπαρξη των $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ στο (a,b). Υποθέτουμε ότι $a=0$ τότε αν $x\neq 0, \frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0}=\frac{|x|+|b|-|b|}{x}=\frac{|x|}{x}$

Έτσι το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0}$ και άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ <u>δεν</u> υπάρχει.

Έστω τώρα $b=0$. Τότε αν $y\neq 0, \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}=\frac{|a|+|y|-|a|}{y}=\frac{|y|}{y}$

Έτσι το όριο $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}$ αυτό και άρα η $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ <u>δεν</u> υπάρχει.



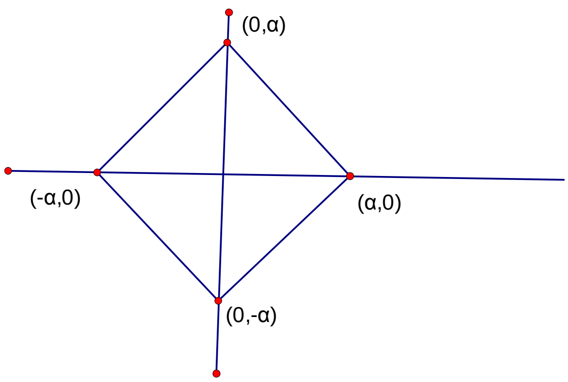


Έπεται ότι στα σημεία (a,b) των αξόνων δεν υπάρχουν είτε η $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ (αν $a=0$) ή η $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (αν $b=0$).

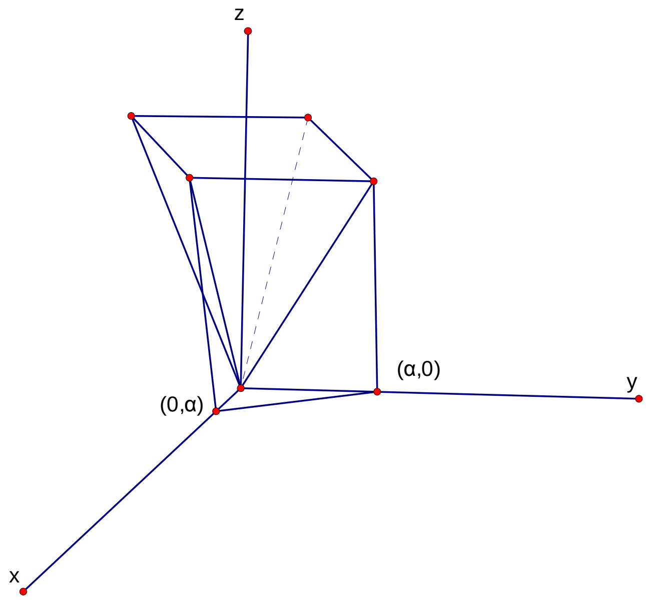
Έτσι η f δεν έχει διαφορικό στα σημεία των αξόνων.

(Ας σημειωθεί ότι αν $b\neq 0$ και $a=0$ η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)$ υπάρχει και αν $a\neq 0$ και $b=0$ η $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ υπάρχει. Αν $a=0=b$ τότε δεν υπάρχουν ούτε η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ούτε η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$).

Παρατήρηση. Αν $a>0$ τότε το σύνολο $\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|=a\}$ είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,a),(-a,0),(0,-a),(a,0)$.



Έπεται ότι το γράφημα της $f(x)=|x|+|y|$ είναι μια ανεστραμμένη τετραγωνική πυραμίδα με κορυφή στο $(0,0,0)$



10) Να εξεταστεί ως προς την διαφορισιμότητα (ύπαρξη και συνέχεια μερικών παραγώγων, διαφορικού κτλ) η συνάρτηση $f: R^2 \to R: f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

Λύση Η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $U = \{(x,y) \in R^2 : x \neq 0 \text{ και } y \neq 0\} = R^2 - \{(x,y):\text{ είτε } x = 0 \text{ ή } y = 0\}$.

Πράγματι, εύκολα υπολογίζουμε ότι στα σημεία του U έχουμε,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}.$$

Επειδή η $f(x,0) = 0, x \in R$ έπεται ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$ για κάθε $a \in R$ και επειδή $f(0,y) = 0, y \in R$ έπεται ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$ για κάθε $b \in R$.

Στα σημεία $(a,0)$ με $a \neq 0$ η $\frac{\partial f}{\partial y}$ δεν υπάρχει, πράγματι αν $y \neq 0$, τότε

$\frac{f(a,y) - f(a,0)}{y - 0} = \frac{a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{y} = a^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow[y \to 0]{} \pm\infty$ ($+\infty$ αν $a > 0$ και $-\infty$ αν $a < 0$).

Αναλόγως αν $b \neq 0$ τότε η $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν υπάρχει στο σημείο $(0,b)$.

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ υπάρχουν όπως διαπιστώσαμε και $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Όμως η f δεν διαφορίζεται στο $(0,0)$. Πράγματι το διαφορικό της f στο $(0,0)$ αν υπήρχε θα ήταν η σταθερά γραμμική συνάρτηση μηδέν, (αφού $Df(0,0)(h_1,h_2)=0\cdot h_1+0\cdot h_2=0, \quad (h_1,h_2)\in R^2$). Συνεπώς το όριο $\lim\limits_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ θα έπρεπε να ισούται με μηδέν. Όμως

$$\frac{f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^{\frac{1}{3}}h_2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}, \quad (h_1,h_2)\neq(0,0).$$

Αν θέσουμε $h=h_1=h_2>0$, τότε θα έχουμε ότι το παραπάνω πηλίκο γίνεται,

$\frac{h^{\frac{1}{3}}\cdot h^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2h^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\xrightarrow[h\to 0]{}+\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Ασκήσεις

1)Να εξετασθούν ως προς την διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις $f(x,y)=\max(|x|,|y|)$ και $g(x,y)=\sqrt{|x|\cdot|y|}$, όπου $(x,y)\in R^2$

2)Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$ και $g(x,y)=e^x(\cos y,\sin y),(x,y)\in R^2$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Να βρεθούν η κλίση της f στο $(a,b)\neq(0,0)$ και ο πίνακας Jacobi της g στο $(a,b)\in R^2$.

3)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις: $f(x)=\frac{1}{\|x\|}, x\in R^n-\{0\}$ και

$g(x)=\frac{x}{\|x\|}, x\in R^n-\{0\}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και υπολογίστε την κλίση στο σημείο $a=(a_1,...,a_n)\in R^n-\{0\}$ της f και τον πίνακα Jacobi της g στο ιδιο σημειο.

4)Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα η συνάρτηση $f:R^n\to \mathrm{B}(0,1)=\{y\in R^n:\|y\|<1\}$: $f(x)=\frac{x}{1+\|x\|}$ καθώς και η αντίστροφή της

$g:\mathrm{B}(0,1)\to R^n: g(y)=\frac{y}{1-\|y\|}$

(Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα τις f και $g=f^{-1}$, στην περίπτωση που $n=1$ ή $n=2$)

5)Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση εξωτερικό γινόμενο

$\varphi:R^3\times R^3\to R^3:\varphi(a,b)=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}k$ είναι

διαφορίσιμη στον $R^3 \times R^3 \cong R^6$ και να υπολογισθεί ο πίνακας Jacobi της f στο $(a,b) \in R^3 \times R^3$
($a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ και i, j, k η ορθοκανονική βάση του R^3, δηλαδή $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ και $k = (0,0,1)$).

6)Έστω $f_1, f_2, ..., f_n : R \to R$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Εξετάστε ως προς την ύπαρξη μερικών παραγώγων και διαφορικού την συνάρτηση $F : R^n \to R$ ώστε $F(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) .... f_n(x_n), x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$.

7) Δείξτε ότι για τις ακόλουθες συναρτήσεις υπάρχουν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο (0.0) αλλά δεν είναι συνεχείς εκεί:

α) $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } 0 < y < \chi^2 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$,

β) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y}, \ \alpha\nu \ x^2 + y \neq 0 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$.

Κανόνας της αλυσίδας

Από τον Απειροστικό Λογισμό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι: Αν $g: I \subseteq R \to R$ και $f: J \subseteq R \to R$ είναι συναρτήσεις (όπου I, J ανοικτά διαστήματα) ώστε $g(I) \subseteq J, a \in I$, g διαφορίσιμη στο a και f διαφορίσιμη στο $g(a)$ τότε η $fog: I \to R$ είναι διαφορίσιμη στο a και ισχύει ο κανόνας αλυσίδας,

$$(fog)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad (1)$$

Αν οι f και g είναι διαφορίσιμες στα πεδία ορισμού τους τότε γράφουμε,

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x), x \in I \quad (2)$$

Θέτοντας $y = g(x)$ και $z = f(g(x))$ μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (2) ως εξής:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \ ) \ (3)$$

Έστω ότι δίνεται μια πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών x, y και z, που γράφεται ως $\omega = f(x, y, z)$ και κάθε μια από τις x, y και z είναι συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t, $x = x(t), y = y(t)$ και $z = z(t)$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το ω ως συνάρτηση του t ως εξής: $\omega = f(x(t), y(t), z(t))$. Στην περίπτωση αυτή ο κανόνας της αλυσίδας γίνεται (με τις κατάλληλες υποθέσεις διαφορισιμότητας για τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις).

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Ο σκοπός μας είναι να εξηγήσουμε τέτοιους τύπους λεπτομερώς.

Καθόσον αφορά διανυσματικές συναρτήσεις παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ισοδύναμες διατυπώσεις του κανόνας της αλυσίδας. Η μία διατύπωση αφορά σύνθεση συναρτήσεων (των διαφορικών των εμπλεκομένων συναρτήσεων) και η άλλη γινόμενο πινάκων. Εφόσον στην έννοια του διαφορικού που είναι μια γραμμική συνάρτηση $\mathrm{T}: R^n \to R^m$ αντιστοιχεί ένας $m \times n$ πίνακας $\mathrm{A} = (\mathrm{T}_j(e_i)), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, όπου $\mathrm{T} = (\mathrm{T}_1, ..., \mathrm{T}_m)$.

Υπενθυμίζουμε πριν διατυπώσουμε το γενικό θεώρημα, τα ακόλουθα.

1)Αν $\mathrm{T}_1: R^n \to R^m$ και $\mathrm{T}_2: R^m \to R^p$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, $\mathrm{T} = \mathrm{T}_2 o \mathrm{T}_1$ η σύνθεσή τους και A, B,, C οι πίνακες που αντιστοιχούν στις $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ και T τότε, $C = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$ (γινόμενο πινάκων).

2)Αν $f: U \subseteq R^n \to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a \in U$ το διάνυσμα $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ ονομάζεται <u>κλίση</u> της f στο a. (Δηλαδή στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης ονομάζουμε τον πίνακα Jacobi της f κλίση της f).

3)Αν $g: \mathrm{I} \subseteq R \to R^n$, όπου $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, είναι διαφορίσιμη στο $a \in \mathrm{I}$ τότε, αν $h \in R$ και $g = (g_1, ..., g_n)$, ισχύει

$Dg(a)(h) = (Dg_1(a)\cdot h,...,Dg_n(a)\cdot h) = (g_1^{'}(a)\cdot h,...,g_n^{'}(a)\cdot h) =$
$h\cdot(g_1^{'}(a),...,g_n^{'}(a))$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας Jacobi της g στο a είναι το διάνυσμα στήλη,

$$\begin{pmatrix} g_1^{'}(a) \\ . \\ . \\ g_n^{'}(a) \end{pmatrix}.$$

Γράφουμε τότε, $g'(a) = (g_1^{'}(a),...,g_n^{'}(a))$, (Πρβλ. , Ορισμό 5.4 , Παρατ. 5 .)

6.1 Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας). Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω ακόμη $g: U \subseteq R^n \to R^m$ και $f: V \subseteq R^m \to R^p$ συναρτήσεις ώστε $g(U) \subseteq V$ και $a \in U$ ώστε η g διαφορίσιμη στο a και η f διαφορίσιμη στο $g(a)$. Τότε η fog είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(fog)(a) = Df(g(a))oDg(a) \text{ (σύνθεση συναρτήσεων)}$$

Ισοδύναμα για τους πίνακες Jacobi έχουμε:

$$J_{(fog)(a)} = J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)} \text{ (πολλαπλασιασμός πινάκων).}$$

Ο πρώτος πίνακας είναι $p\times n$ ο δεύτερος $p\times m$ πίνακας και ο τρίτος $m\times n$ πίνακας

Απόδειξη: Θα δώσουμε προς το παρόν μια απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος με την επιπλέον υπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε μια περιοχή του $g(a)$ και είναι συνεχείς στο $g(a)$.

Η ακόλουθη ειδική περίπτωση του θεωρήματος μας δίνει εύκολα και το γενικό αποτέλεσμα:

(I) Έστω $n = 1, m = 3$ και $p = 1$, δηλαδή $g: U \subseteq R \to R^3$ και $f: V \subseteq R^3 \to R$.
(Όπου το U θεωρείται τώρα ανοικτό διάστημα του R).
Έστω $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και $h = fog \Leftrightarrow h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Τότε
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \quad (0)$$

Ακριβέστερα: $\frac{dh}{dt}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(a))\cdot\frac{dx}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a))\cdot\frac{dy}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(a))\cdot\frac{dz}{dt}(a)$.

(Παρατηρούμε ότι: $\frac{dh}{dt}(a) = \nabla f(g(a))\cdot g'(a)$ είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων όπου, $g'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a)) = \left(\frac{dx}{dt}(a), \frac{dy}{dt}(a), \frac{dz}{dt}(a)\right)$ ή ακόμη, $\frac{dh}{dt}(a) = J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)}$ γινόμενο του πίνακα γραμμή $J_{f(g(a))} = \nabla f(g(a))$ και του πίνακα στήλη $J_{g(a)} = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \\ z'(a) \end{pmatrix}$)

Απόδειξη της (Ι) Η συνάρτηση h είναι βέβαια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ($\underbrace{U \subseteq R \xrightarrow{g} R^3 \supseteq V \xrightarrow{f} R}_{h=fog}$ και $g(U) \subseteq V$).

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε: $\dfrac{dh}{dt}(a) = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{h(t)-h(a)}{t-a}$.

Προσθέτοντας και αφαιρώντας δύο όρους γράφουμε, (για $t \neq a$ με $t \in U$)

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} =$$

$$\frac{f\left(x(t),y(t),z(t)\right)-f\left(x(a),y(a),z(a)\right)}{t-a} =$$

$$= \frac{f\left(x(t),y(t),z(t)\right)-f\left(x(a),y(t),z(t)\right)}{t-a} +$$

$$\frac{f\left(x(a),y(t),z(t)\right)-f\left(x(a),y(a),z(t)\right)}{t-a} +$$

$$\frac{f\left(x(a),y(a),z(t)\right)-f\left(x(a),y(a),z(a)\right)}{t-a} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού στις συναρτήσεις: (για δεδομένο $t \in U$ με $t \neq a$)

(α) $x \to f\left(x,y(t),z(t)\right)$ στο διάστημα με άκρα $x(t),x(a)$ και βρίσκουμε $c_1(t)$ ανάμεσα στα $x(t)$ και $x(a)$ ώστε

$$f\left(x(t),y(t),z(t)\right)-f\left(x(a),y(t),z(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(c_1(t),y(t),z(t)\right)\left(x(t)-x(a)\right)$$

(β) $y \to f\left(x(a),y,z(t)\right)$ στο διάστημα με άκρα $y(t)$ και $y(a)$ και βρίσκουμε $c_2(t)$ ανάμεσα στα $y(t)$ και $y(a)$ ώστε

$$f\left(x(a),y(t),z(t)\right)-f\left(x(a),y(a),z(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(a),c_2(t),z(t)\right)\cdot\left(y(t)-y(a)\right)$$

(γ) $z \to f\left(x(a),y(a),z\right)$ στο διάστημα με άκρα $z(t)$ και $z(a)$ και βρίσκουμε $c_3(t)$ ανάμεσα στα $z(t)$ και $z(a)$ ώστε

$$f\left(x(a),y(a),z(t)\right)-f\left(x(a),y(a),z(a)\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\left(x(a),y(a),c_3(t)\right)\left(z(t)-z(a)\right).$$

Έτσι η (1) ξαναγράφεται ως εξής :

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(c_1(t),y(t),z(t)\right)\cdot\frac{x(t)-x(a)}{t-a} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(a),c_2(t),z(t)\right)\cdot\frac{y(t)-y(a)}{t-a} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(x(a),y(a),c_3(t)\right)\cdot\frac{z(t)-z(a)}{t-a} \quad (2)$$

Λαμβάνουμε τώρα το όριο της (2) καθώς το $t \to a$. Παρατηρούμε ότι τότε, $x(t) \xrightarrow[t \to a]{} x(a), y(t) \xrightarrow[t \to a]{} y(a), z(t) \xrightarrow[t \to a]{} z(a)$ (οι x,y,z είναι συνεχείς στο a αφού είναι διαφορίσιμες εκεί), συνεπώς, $c_1(t) \xrightarrow[t \to a]{} x(a)$, $c_2(t) \xrightarrow[t \to a]{} y(a)$

και $c_3(t)\xrightarrow[t\to a]{} z(a)$. Έπεται από την συνέχεια των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ στο σημείο $g(a)$ ότι ισχύει ο ζητούμενος τύπος (0).

Παρατηρούμε τώρα ότι ο τύπος (0) γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση των m μεταβλητών, δηλαδή $n=1, m\geq 2$ και $p=1$($g:U\subseteq R\to R^m$ και $f:V\subseteq R^m\to R$).

Έστω λοιπόν $g(t)=(x_1(t),...,x_m(t))$ και f συνάρτηση των μεταβλητών $(x_1,...,x_m)\in R^m$. Τότε εντελώς ανάλογα (χρησιμοποιώντας ένα τηλεσκοπικό άθροισμα) αποδεικνύεται ότι αν $h=fog$, $h(t)=f(x_1(t),...,x_m(t))$, τότε,

(3) $\quad \frac{dh}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}$ (οι παράγωγοι υπολογίζονται στο $a\in U$)

(ΙΙ) Έστω $g:U\subseteq R^n\to R^m$ και $f:V\subseteq R^m\to R$ ($g(U)\subseteq V$) και $h=fog$. Δηλαδή η f είναι πραγματική συνάρτηση και η g διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής. Αν $g=(y_1,...,y_m)$ και $h=fog$ τότε $h(x_1,...,x_n)=f(g(x_1,...,x_n))=f(y_1(x_1,...,x_n),...,y_m(x_1,...,x_n))$.

Έστω $1\leq i\leq n$, τότε θεωρούμε την h ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x_i και αναγόμαστε στην περίπτωση (Ι). Ακριβέστερα θεωρούμε την συνάρτηση $t\to f(y_1(a_1,...,a_{i-1},t,a_{i+1},...,a_n),...,y_m(a_1,...,a_{i-1},t,a_{i+1},...,a_n))$ και από τον τύπο (3) λαμβάνουμε, $\frac{\partial h}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n$ (4)

Με περισσότερη ακρίβεια ισχύει ότι: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_k}(g(a))\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a), 1\leq i\leq n$ (5)

Ο (4) ή ο (5) προκύπτει και με πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πινάκων Jacobi:

$$J_{h(a)}=J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)}, a\in R^n \text{ ή } \left(\frac{\partial h}{\partial x_1},...,\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1},...,\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την περίπτωση ΙΙ, ας θεωρήσουμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω $f:R^3\to R$ και $g:R^3\to R^3$ C^1 συναρτήσεις, θεωρούμε την σύνθεση $h=fog$ των f και g. Αν $g=(u,v,\omega)$ τότε , $h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(u(x,y,z),v(x,y,z),\omega(x,y,z))$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Πράγματι, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι

$$J_{h(a)} = J_{f(g(a))} \cdot J_{g(a)}, a \in R^3$$

$$\text{ή } \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Με πολλαπλασιασμό των πινάκων βρίσκουμε τους τύπους (6).
Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την

Γενική περίπτωση: Έστω $g : U \subseteq R^n \to R^m$ και $f : V \subseteq R^m \to R^p$ ($g(U) \subseteq V$) και $h = fog$. Αν $g = (y_1, ..., y_m)$, $f = (f_1, ..., f_p)$ και $h = (h_1, ..., h_p)$ τότε βέβαια $h_j = f_j og \Leftrightarrow h_j(x_1, ..., x_n) = f_j(g(x_1, ..., x_n)) = f_j(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$ όπου $j = 1, 2, ..., p$.

$$\underbrace{R^n \supseteq U \xrightarrow{g} V \subseteq R^m \xrightarrow{f_j} R}_{h_j = f_j og}, 1 \le j \le p.$$

Αν $1 \le j \le p$ και $1 \le i \le n$ τότε θεωρώντας την h_j ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x_i, δηλαδή αναγόμενοι στην περίπτωση II, θα έχουμε από τον τύπο (4)

ότι, $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, 1 \le j \le p, 1 \le i \le n$ (και από τον τύπο (5) ότι),

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(g(a)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a), 1 \le j \le p, 1 \le i \le n.$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο που εμφανίζεται στην διατύπωση του θεωρήματος αν εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων Jacobi.

Σημείωση. Καθώς η περίπτωση (I) του Θεωρ. 6.1 είναι ιδιαίτερα σημαντική είναι καλό να την απομνημονεύσουμε ως εξής: $h'(a) = \nabla f(g(a)) \cdot g'(a)$,
όπου $a \in U$, $g'(a) = (x_1'(a), ..., x_n'(a))$ και $h = f \circ g$.

Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας χωρίς την υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων

6.2 Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας). Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω ακόμη $g : U \to V$ και $f : V \to R^p$ συναρτήσεις και $a \in U$ ώστε η g είναι διαφορίσιμη στο a και η f διαφορίσιμη στο $g(a)$. Τότε η fog είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(fog)(a) = Df(g(a)) o Dg(a)$$

Απόδειξη Θέτουμε – για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού- $\mathrm{A} = Dg(a)$, $\mathrm{B} = Df(g(a))$ και γράφουμε $\mathrm{A}h$ αντί $\mathrm{A}(h)$ και $\mathrm{B}\kappa$ αντί $\mathrm{B}(\kappa)$, όπου $h \in R^n$ και $\kappa \in R^m$.

Από τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης έχουμε: $g(a+h) = g(a) + \mathrm{A}h + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|$ και $f(g(a)+\kappa) = f(g(a)) + \mathrm{B}\kappa + \varepsilon_2(\kappa) \cdot \|\kappa\|$, όπου $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\varepsilon_1(h)\right\|=0$ και $\lim\limits_{\kappa\to 0}\left\|\varepsilon_2(\kappa)\right\|=0$ Επίσης υπενθυμίζουμε ότι, αφού οι Α και Β είναι γραμμικές απεικονίσεις και άρα Lipschitz, υπάρχουν σταθερές $c_1>0$ και $c_2>0$ ώστε $\left\|\mathrm{A}h\right\|\le c_1\left\|h\right\|, h\in R^n$ και $\left\|\mathrm{B}\kappa\right\|\le c_2\left\|\kappa\right\|, \kappa\in R^m$. Έπεται από τις παραπάνω ισότητες ότι, $(fog)(a+h)=f\left(g(a+h)\right)=f\left(g(a)+\underbrace{\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right)$, άρα, θέτοντας $\kappa=\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|$, έχουμε

$$(fog)(a+h)=f\left(g(a)\right)+\mathrm{B}\left(\underbrace{\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right)+$$

$$\underbrace{\varepsilon_2\left(\underbrace{\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right)\cdot\left\|\underbrace{\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right\|}_{\eta_2(h)\cdot\left\|h\right\|}=fog(a)+\mathrm{BA}h+\eta(h)\cdot\left\|h\right\|$$

όπου, $\eta(h)=\eta_1(h)+\eta_2(h)$, $\eta_1(h)=\mathrm{B}\varepsilon_1(h)$ και $\eta_2(h)\cdot\left\|h\right\|=\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\cdot\left\|\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\ \right\|$.

Αυτό που απομένει είναι να αποδείξουμε ότι $\left\|\eta_1(h)\right\|$ και $\left\|\eta_2(h)\right\|$ και συνεπώς $\left\|\eta(h)\right\|=\left\|\eta_1(h)+\eta_2(h)\right\|$ τείνουν στο 0 καθώς το $\left\|h\right\|\to 0$. (Διότι τότε το διαφορικό της fog στο a θα ισούται με ΒΑ, δηλαδή έχουμε την ζητούμενη ισότητα).

Παρατηρούμε ότι, $\left\|\eta_1(h)\right\|\le c_2\left\|\varepsilon_1(h)\right\|\to 0$ καθώς το $h\to 0$. Επίσης παρατηρούμε ότι,

$$\left\|\eta_2(h)\left\|h\right\|\ \right\|=\left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left\|\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\ \right\|\le$$

$$\left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(\left\|\mathrm{A}h\right\|+\left\|\varepsilon_1(h)\right\|\cdot\left\|h\right\|\right)\le\left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(c_1+\left\|\varepsilon_1(h)\right\|\right)\cdot\left\|h\right\|.$$

Επομένως θα έχουμε ότι $\left\|\eta_2(h)\right\|\le\left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h+\varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(c_1+\left\|\varepsilon_1(h)\right\|\right)\to 0$ καθώς το $\left\|h\right\|\to 0$ και έτσι η απόδειξή μας είναι πλήρης.

Σημείωση. Ο κανόνας της αλυσίδας έχει μεγάλη (όπως γνωρίζουμε από το Λογισμό της μίας μεταβλητής πρακτική αλλά και) θεωρητική σημασία . Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ερμηνεύει την κλίση ∇f μιας διαφορίσιμης συνάρτησης (Θεωρ. 10.2) και έχει πολλές άλλες εφαρμογές (Πρβλ. Θεώρ. μέσης τιμής 7.1 , ανάπτυγμα Taylor , Θεωρ. Πεπλεγμένης συνάρτησης κλπ. .)

Εφαρμογές και παραδείγματα πάνω στον κανόνα αλυσίδας

Έστω $f(x,y)$ διαφορίσιμη συνάρτηση των x και y, και έστω $x=x(t), y=y(t)$ διαφορίσιμες συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής t. Τότε ο κανόνας αλυσίδας μας λέει ότι η $z=f\left(x(t),y(t)\right)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

1)Έστω $z=\sqrt{x^2+2xy}$, όπου $x=\cos\theta$ και $y=\sin\theta$. Να βρεθεί η $\frac{dz}{d\theta}$ με τον κανόνα της αλυσίδας.

Λύση: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+2y\right)$ και $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)$.

Επίσης $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ και $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$. Από τον τύπο (1) έχουμε,

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+2y\right)\left(-\sin\theta\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)\left(\cos\theta\right)=\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x\cos\theta-x\sin\theta-y\sin\theta\right),\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

2)Ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος μεταβάλλεται σε τρόπο ώστε η ακτίνα της βάσης του r αυξάνει με ρυθμό $3cm/\min$ και το ύψος του h μειώνεται με ρυθμό $5cm/\min$. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος του κυλίνδρου την χρονική στιγμή κατά την οποία $r=10cm$ και $h=8cm$;

Λύση Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V=\pi r^2 h$ και δίδεται ότι $\frac{dr}{dt}=3$ και $\frac{dh}{dt}=-5$. Έχουμε ότι $\frac{\partial V}{\partial r}=2\pi rh$ και $\frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2$. Από τον κανόνα αλυσίδας, (δηλαδή εφαρμόζοντας την (1)) υπολογίζουμε $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=2\pi rh(3)+\pi r^2(-5)$. Επομένως, την χρονική στιγμή κατά την οποία $r=10cm$ και $h=8cm$ έχουμε $\frac{dV}{dt}=2\pi(10)(8)(3)+\pi\left(10\right)^2(-5)=-20\pi$ ίσο περίπου $-62{,}8\frac{cm^3}{\min}$

Επομένως ο όγκος μειώνεται με ρυθμό περίπου $62{,}8\frac{cm^3}{\min}$

3) Έστω $y:I\subseteq R\to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής x (I ανοικτό διάστημα του R). Υποθέτουμε ότι, $\sin\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)=y$.

Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$.

Λύση Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $\sin\left(x+y\left(x\right)\right)+\cos\left(x-y\left(x\right)\right)=y\left(x\right), x\in I$.

Θέτουμε $F\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)-y$, επομένως $F\left(x,y\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x\in I$. Έπεται ότι $\frac{\partial F}{\partial x}=\cos\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cos\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)\left(-1\right)-1=\cos\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)-1$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (τύπος (1)) υπολογίζουμε,

$$0=\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot(1)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{-\left[\cos(x+y)-\sin(x-y)\right]}{\cos(x+y)+\sin(x-y)-1}$$

(υποθέτοντας ότι $\cos(x+y)+\sin(x-y)-1\neq 0$).

Από τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι: Αν $z=f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $V\subseteq R^2$ και $x=x(u,v), y=y(u,v)$ διαφορίσιμες συναρτήσεις των μεταβλητών $(u,v)\in U$ (U ανοικτό στο R^2) ώστε $\left(x(u,v),y(u,v)\right)\in V$ για κάθε $(u,v)\in U$, τότε η σύνθετη συνάρτηση, $z=f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ είναι διαφορίσιμη στο U και

$$,\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \text{ και } \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2)$$

4)Έστω $z=4x-y^2$, όπου $x=uv^2$ και $y=u^3v$. Να υπολογιστούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

Λύση Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους. $\frac{\partial z}{\partial x}=4, \frac{\partial z}{\partial y}=-2y, \frac{\partial x}{\partial u}=v^2, \frac{\partial y}{\partial u}=3u^2v$ και $\frac{\partial x}{\partial v}=2uv, \frac{\partial y}{\partial v}=u^3$

Επομένως, από τους τύπους (2) έχουμε: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=4v^2+(-2y)(3u^2v)$

$=4v^2-6u^5v^2$ και

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=4(2uv)+(-2y)(u^3)=8uv-2u^6v$$

Φυσικά οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ μπορούν να υπολογιστούν ευκολότερα αν εκφράσουμε την $z=4x-y^2$ ως συνάρτηση των u και v αντικαθιστώντας τα x και y με τις ποσότητες uv^2 και u^3v αντίστοιχα..

5)Έστω $g(x,y)=\left(x^2+1,y^2\right)$ και $f(u,v)=\left(u+v,u,v^2\right)$.

Να υπολογιστεί ο πίνακας Jacobi, $J_{fog}(1,1)$.

Λύση Είναι βέβαια σαφές ότι οι f και g είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο R^2. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι ($\underbrace{R^2\xrightarrow{g}R^2\xrightarrow{f}R^3}_{fog}$)

$$J_{fog}(a)=J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)},\quad a\in R^2$$

Υπολογίζουμε, $J_{f(u,v)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&2v\end{pmatrix}, J_{g(x,y)}=\begin{pmatrix}2x&0\\0&2y\end{pmatrix}$

Έτσι, για $a=(1,1)$, $g(1,1)=(2,1)$, συνεπώς

$$J_{fog(1,1)}=J_{f(2,1)}\cdot J_{g(1,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

6)Έστω $f:R^2\to R^2$, C^1 συνάρτηση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Να υπολογισθεί η $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$.

Λύση Έστω $g:(0,+\infty)\times[0,2\pi)\to R^2 : g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ όπου, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta\in[0,2\pi)$ ώστε $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$. Θέτουμε $h=fog$, συνεπώς $h(r,\theta)=f(g(r,\theta))=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ για $(r,\theta)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi)$.
Η συνάρτηση h είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$. Ουσιαστικά πρέπει να υπολογίσουμε την $\dfrac{\partial h}{\partial\theta}$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ασκήσεις

1)Μία συνάρτηση $f:R^n\to R$ ονομάζεται <u>ομογενής</u> βαθμού $m\in N$, αν $f(tx)=t^m\cdot f(x)$ για κάθε $x\in R^n$ και για κάθε $t\in R$. Αν η f είναι ομογενής βαθμού m και διαφορίσιμη τότε ισχύει ότι, $x\cdot\nabla f(x)=m\cdot f(x)$ για κάθε $x\in R^n$.
[Αυτό είναι το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις. Για την απόδειξη σταθεροποιείστε ένα $x\in R^n$ και θέσατε $g(t)=f(tx)$ και υπολογίστε την $g'(1)$].
Προσπαθήστε να σκεφθείτε για το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος.

2)Έστω $f,g:R\to R$ συναρτήσεις της κλάσης C^2. Θέτουμε $F(x,y)=f(x+g(y))$ για κάθε $(x,y)\in R^2$. Βρείτε τύπους για τις μερικές παραγώγους της F πρώτης και δεύτερης τάξης συναρτήσει των παραγώγων των f και g. Επίσης αποδείξτε ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^2}$$

(Συμβουλευθείτε και την παράγραφο για τις παραγώγους ανώτερης τάξης.)

3)Έστω $f:R\to R$ διαφορίσιμη και $g:R^3\to R : g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
Αν $h=fog$, δείξτε ότι $\|\nabla h(x,y,z)\|^2=4g(x,y,z)\cdot\left(f'(g(x,y,z))\right)^2$.

Το θεώρημα μέσης τιμής

Το ακόλουθο αποτέλεσμα γενικεύει το γνωστό Θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού της μιας μεταβλητής στις πολλές μεταβλητές.

7.1 Θεώρημα. Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και $a,b \in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subseteq D$. Αν $f : D \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση τότε υπάρχει $z \in (a,b)$ ώστε, $f(b) - f(a) = \nabla f(z) \cdot (b-a)$.

Απόδειξη: Έστω $\sigma(t) = (1-t)a + tb, t \in [0,1]$ η συνήθης παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος $[a,b]$. Η συνάρτηση $\sigma : [0,1] \to R^n$ είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, αν $a = (a_1,...,a_n)$ και $b = (b_1,...,b_n)$ τότε έχουμε ότι, $\sigma(t) = (\sigma_1(t),...,\sigma_n(t))$, όπου $\sigma_k(t) = (1-t)a_k + tb_k, k = 1,2,...,n, t \in [0,1]$, άρα $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t),...,\sigma_n'(t)) = (b_1 - a_1,...,b_n - a_n) = b - a$ για $t \in [0,1]$.

Η συνάρτηση $h = fo\sigma : [0,1] \to R$ είναι διαφορίσιμη (Κανόνας της αλυσίδας) και από το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε, $h(1) - h(0) = h'(\xi)(1-0) = h'(\xi)$ ή $f(b) - f(a) = h'(\xi)$. Θέτουμε $z = (1-\xi)a + \xi b$, προφανώς $z \in (a,b)$ και $\sigma(\xi) = z$.
Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:
$h'(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\sigma(\xi)) \cdot \frac{d\sigma_k}{dt}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(z) \cdot (b_k - a_k) = \nabla f(z) \cdot (b-a)$, ή

$$f(b) - f(a) = \nabla f(z) \cdot (b-a).$$

Παρατήρηση. Αν το D είναι επί πλέον κυρτό, δηλαδή αν για κάθε $a,b \in R^n \Rightarrow [a,b] \subseteq D$, τότε η πρόταση ισχύει για κάθε $a,b \in D$.

7.2 Πόρισμα. Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και κυρτό και $f : D \to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $x,y \in D$ τότε ισχύει η ανισότητα,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in D} \|\nabla f(z)\| \cdot \|x - y\|$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι, αν $\sup_{z \in D} \|\nabla f(z)\| < +\infty$ τότε η f είναι Lipschitz στο D.

Απόδειξη: Έστω $x,y \in D$ τότε $[x,y] \subseteq D$, εφόσον D κυρτό. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι υπάρχει $z \in [x,y]$: $f(x) - f(y) = \nabla f(z) \cdot (x-y)$
Συνεπώς, $|f(x) - f(y)| = |\nabla f(z) \cdot (x-y)| \leq \|\nabla f(z)\| \cdot \|x - y\|$ (χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S).
Άρα $|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in D} \|\nabla f(z)\| \cdot \|x - y\|$, $x,y \in D$.
Το υπόλοιπο της πρότασης έπεται προφανώς από τα παραπάνω.

Υπενθυμίζουμε τα ακόλουθα:

1)Αν $z_0, z_1, ..., z_m \in R^n$, τότε η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_m$ είναι το σύνολο $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{m-1}, z_m]$

2)Ένα ανοικτό υποσύνολο $D \subseteq R^n$ είναι <u>συνεκτικό</u> αν και μόνο αν (είναι πολυγωνικά συνεκτικό, δηλαδή) για κάθε $a, b \in D$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{m-1}, z_m] \subseteq D$ με $z_0 = a$ και $z_m = b$.

7.3 Πρόταση. Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και συνεκτικό. Αν $f : D \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ στο D, για κάθε $k = 1, 2, ..., n$, τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω για απλότητα ότι $n = 2$. Έτσι η υπόθεσή μας μετατρέπεται ότι D ανοικτό συνεκτικό στο R^2 και $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ στο D.

Θα αποδείξουμε ότι, αν a, b είναι δύο τυχόντα σημεία του D τότε $f(a) = f(b)$. Είναι τότε σαφές ότι η f θα είναι σταθερή στο D. Έστω $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n] \subseteq D$ πολυγωνική γραμμή με $z_0 = a$ και $z_n = b$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$, οπότε υπάρχει $z \in [z_0, z_1]$: $f(z_1) - f(z_0) = \nabla f(z) \cdot (z_1 - z_0)$.

Επειδή $\nabla f(z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z), \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = (0, 0)$ έπεται ότι $f(z_1) = f(z_0)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα μέσης τιμής στα ευθύγραμμα τμήματα $[z_1, z_2], ..., [z_{n-1}, z_n]$ βρίσκουμε ότι $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = ... = f(z_{n-1}) = f(z_n)$. Συνεπώς $f(b) = f(a)$.

Παρατηρήσεις. 1) Το θεώρημα μέσης τιμής <u>δεν</u> ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις. Πράγματι, έστω $f : R \to R^2 : f(t) = (\cos t, \sin t), t \in R$. Τότε $f'(a) = (\cos' a, \sin' a) = (-\sin a, \cos a), a \in R$.

Έστω $a = 0$ και $b = 2\pi$, τότε $f(b) - f(a) \neq f'(\xi) \cdot (b - a)$ για κάθε $\xi \in (0, 2\pi)$.

Αφού το αριστερό μέλος ισούται με 0 ($f(2\pi) - f(0) = f(0) - f(0) = 0$), ενώ το δεξί είναι το μη μηδενικό διάνυσμα $2\pi \cdot (-\sin \xi, \cos \xi)$ του R^2.

(*) 2)<u>Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής</u>: Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό $[a, b] \subseteq D$ με $a \neq b$ και $f : D \to R$ διαφορίσιμη. Τότε υπάρχει $\omega \in (a, b)$ τέτοιο ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε του γραφήματος της f στο $(\omega, f(\omega))$ είναι παράλληλο με την ευθεία l του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(a, f(a))$ και $\mathrm{B}(b, f(b))$.

Πράγματι από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\omega \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = \nabla f(\omega) \cdot (b - a)$ όπου $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ και

$\omega=(\omega_1,\omega_2)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(\omega, f(\omega))$ του γραφήματος της f έχει εξίσωση: $z = f(\omega_1,\omega_2)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(\omega_1,\omega_2)(x-\omega_1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\omega_1,\omega_2)(y-\omega_2)$, (E), το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο στο επίπεδο με εξίσωση $z=\dfrac{\partial f}{\partial x}(\omega_1,\omega_2)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\omega_1,\omega_2)y$ (E_1) το οποίο διέρχεται από το $(0,0,0)$.

Η ευθεία ℓ που διέρχεται από τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχει εξίσωση

$$\ell(t)=(a, f(a))+t(b-a, f(b)-f(a))$$
$$=(a_1,a_2, f(a))+t(b_1-a_1,b_2-a_2, f(b)-f(a))$$

και είναι παράλληλη με το διάνυσμα

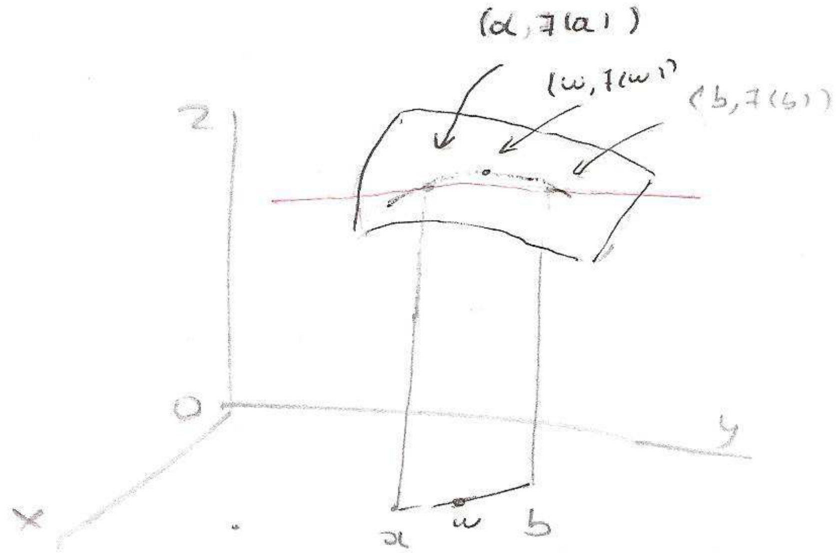
$$(b, f(b))-(a, f(a))=(b_1-a_1,b_2-a_2, f(b)-f(a)).$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(b_1-a_1,b_2-a_2, f(b)-f(a))$ ικανοποιεί την εξίσωση του E, αφού ισχύει

$$f(b)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(\omega_1,\omega_2)(b_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(\omega_1,\omega_2)(b_2-a_2)$$

ισοδύναμα ισχύει $\qquad f(b)-f(a)=\nabla f(\omega)\cdot(b-a)$

που είναι ακριβώς το θεώρημα μέσης τιμής.



8. Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, αν υπάρχουν, μιας συνάρτησης $f:U\subseteq R^n\to R$ (U ανοικτό) είναι και αυτές συναρτήσεις από το U στο R, επομένως μπορεί να ορισθεί και για αυτές η έννοια της μερικής παραγώγου. Αυτές ονομάζονται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f.

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right),1\le k,l\le n$$

Φυσικά με ανάλογο τρόπο (και χρησιμοποιώντας επαγωγή) μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους κάθε τάξης.

Έτσι για παράδειγμα, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_5\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_5\partial x_1}\right)$ εδώ πρόκειται βέβαια για μερικές παραγώγους τρίτης τάξης.

Έστω για απλότητα ότι $n=2$, δηλαδή έχουμε μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, $z=f(x,y)$. Οι μερικές παράγωγοι της f εξελίσσονται σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, που παραπέμπει στο δυαδικό δέντρο.

$$f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Σημειώνουμε ότι, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ κτλ.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R$ λέγεται ότι είναι της κλάσης C^1, αν όλες οι μερικές παράγωγοί της υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν αυτές με την σειρά τους είναι επίσης C^1 συναρτήσεις, τότε λέμε ότι η f είναι της κλάσης C^2. Δηλαδή η f είναι της κλάσης C^2 ακριβώς τότε αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l},1\le k,l\le n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο U.

Με επαγωγή μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις της κλάσης C^n όπου $n\in N$.

Η f λέγεται της κλάσης C^∞ αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης και για κάθε μεταβλητή.

Για παράδειγμα αν η f είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών η f είναι της κλάσης C^2, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι της κλάσης C^1, δηλαδή αν οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ υπάρχουν και επί πλέον είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παραδείγματα. 1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $\mathrm{P}\left(x_1,\dots,x_n\right)$ είναι της κλάσης C^∞. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_k}, k=1,2,\dots,n$ είναι και αυτές πολυώνυμα, επομένως συνεχείς συναρτήσεις. Επαγωγικά έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης του P είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και άρα συνεχείς συναρτήσεις. Έπεται προφανώς ότι το P είναι συνάρτηση της κλάσης C^∞

2) Κάθε ρητή συνάρτηση $f=\frac{\mathrm{P}}{Q}$, (όπου P και Q πολυώνυμα $n-$ μεταβλητών με $Q\neq 0$) είναι της κλάσης C^∞ στο πεδίο ορισμού της. Αυτό αποδεικνύεται όπως και για τα πολυώνυμα, αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x_k}, k=1,2,\dots,n$ για την ρητή f είναι πάλι ρητές συναρτήσεις και άρα συνεχείς.

3)Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:
(α) $f\left(x,y\right)=x^k\cdot y^\lambda$ όπου $k,\lambda\in N$ και (β) $f\left(x,y,z\right)=x^3y+\sin z$

Για το (α) παρατηρούμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}=kx^{k-1}\cdot y^\lambda, \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda y^{\lambda-1}\cdot x^k, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=k\left(k-1\right)x^{k-2}\cdot y^\lambda$ αν $k\geq 2$ και 0 αν $k=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=k\lambda x^{k-1}\cdot y^{\lambda-1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=k\lambda x^{k-1}\cdot y^{\lambda-1}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lambda\left(\lambda-1\right)y^{\lambda-2}\cdot x^k$, αν $\lambda\geq 2$ και 0 αν $\lambda=1$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Επίσης αν $k=1$ (αντίστοιχα $\lambda=1$) τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ (αντίστοιχα $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$).

(β) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y, \frac{\partial f}{\partial y}=x^3, \frac{\partial f}{\partial z}=\cos z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial y}=x^3$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\sin z$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial z}=\cos z$)

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι τα ζεύγη των μεικτών μερικών παραγώγων, όπως $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ή $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$ είναι ίσα. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει πότε ισχύει αυτό γενικότερα.
Για απλότητα διατυπώνουμε το αποτέλεσμα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. (Το ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη και για συναρτήσεις

$n-$ μεταβλητών όπου $n \in N$.) Το βασικό επιχείρημα για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι ένα επιχείρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

8.1 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^2$ ανοικτό και $f : U \subseteq R^2 \to R$ της κλάσης C^2. Τότε οι <u>μεικτές</u> μερικές παράγωγοι της f είναι ίσες, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Απόδειξη: Έστω $a = (x_0, y_0) \in U$. Θεωρούμε την ακόλουθη παράσταση: $S(h_1,h_2) = f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0+h_2) + f(x_0, y_0)$ όπου τα $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$ αρκετά μικρά ώστε να έχει νόημα η παράσταση.

Κρατώντας το h_2 σταθερό, θέτουμε $g(x) = f(x, y_0+h_2) - f(x, y_0)$.

Έπεται ότι, $S(h_1,h_2) = g(x_0+h_1) - g(x_0)$, δηλαδή η S εκφράζεται ως μια διαφορά διαφορών. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση g, υπάρχει $\overline{x} = x(h_1)$ μεταξύ των x_0 και $x_0 + h_1$ ώστε, $S(h_1,h_2) = g(x_0+h_1) - g(x_0) = g'(\overline{x}) \cdot h_1$, άρα $S(h_1,h_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0)\right] \cdot h_1$.

Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το θεώρημα μέσης τιμής, αυτή την φορά στην συνάρτηση, $h(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)$(η οποία είναι C^1) βρίσκουμε $\overline{y} = y(h_2)$ μεταξύ y_0 και $y_0 + h_2$ ώστε, $h(y_0+h_2) - h(y_0) = h'(\overline{y}) \cdot h_2$.

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση καταλήγουμε στην, $S(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot h_1 \cdot h_2$.

Παρατηρούμε ότι αν $(h_1,h_2) \to (0,0)$ τότε $(\overline{x}, \overline{y}) = (x(h_1), y(h_2)) \to (x_0, y_0)$. Έπεται από την τελευταία σχέση και την <u>συνέχεια</u> της $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο (x_0, y_0), ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{S(h_1,h_2)}{h_1 \cdot h_2} \qquad (1).$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία κρατώντας αυτή την φορά το h_1 <u>σταθερό</u>.

(Αυτή την φορά θέτομε $g(y) = f(x_0+h_1, y) - f(x_0, y)$)

Έτσι καταλήγουμε στην σχέση $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{S(h_1,h_2)}{h_1 \cdot h_2}$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο U.

Σημείωση. Το γεγονός ότι η παράσταση $S(h_1,h_2)$ γράφεται ως μια διαφορά διαφορών με δυο τρόπους (οριζόντια και κατακόρυφα, ένα σχήμα θα βοηθούσε) είναι αυτό που επιτρέπει να αποδείξουμε την ισότητα των μεικτών παραγώγων.

Οι μεικτές παράγωγοι μιας συνάρτησης $y = f(x_1,...,x_n)$ δεν είναι πάντοτε ίσες. Δηλαδή η εναλλαγή του ρόλου των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων ανώτερης τάξης <u>δεν</u> οδηγεί πάντοτε στην ίδια παράγωγο.

Παράδειγμα. Έστω $g: R^2 \to R$ φραγμένη συνάρτηση για την οποία τα όρια $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)$ και $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$ υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα. Θέτομε $f(x,y) = xy\cdot g(x,y), (x,y)\in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, αν $y \in R$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y) = y\cdot \lim_{x\to 0} g(x,y)$

Ιδιαίτερα έχουμε ότι, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Έπεται ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)$.

Αναλόγως, υπολογίζουμε ότι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$ (και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$).

Από την υπόθεσή μας συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Δηλαδή οι μεικτές παράγωγοι δεν είναι ίσες. Παρατηρούμε ότι, το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ δεν υπάρχει και ότι η συνάρτηση $f(x,y) = xy\cdot g(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ (γιατί;).

Μια συνάρτηση με τις ιδιότητες της g είναι η ακόλουθη, $g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $g(0,0)=0$. Η g είναι προφανώς φραγμένη, αφού $|g(x,y)|\leq 1$ για κάθε $(x,y)\in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, $\lim_{x\to 0} g(x,y) = -1$ για κάθε $y\in R$ με $y\neq 0$ και $\lim_{y\to 0} g(x,y) = 1$ για κάθε $x \in R$ με $x \neq 0$. Επομένως $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$.

Παρατηρήσεις. 1)Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό f_x, f_y, f_z για τις μερικές παραγώγους: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ κτλ.

Με τον συμβολισμό αυτό έχουμε, $f_{xy} = \left(f_x \right)_y = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ και $f_{yx} = \left(f_y \right)_x = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (παρατηρούμε ότι η διάταξη των x και y αντιστρέφεται).
Με τον ίδιο συμβολισμό η ισότητα των μεικτών παραγώγων, αν υφίσταται, γράφεται :

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

2)Έστω $f : U \subseteq R^n \to R$, U ανοικτό στον R^n. Αν η f είναι της κλάσης C^k για κάποιο $k \geq 2$. Τότε για κάθε επιλογή $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ ισχύει ότι, $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_k}}$ όπου, $\{ j_1, ..., j_k \}$ είναι μια οποιαδήποτε μετάθεση των συμβόλων $\{ i_1, ..., i_k \}$. Με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίζουμε μερικές παραγώγους της f μέχρι k τάξης με οποιαδήποτε σειρά αφού καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.
Για παράδειγμα, αν $\kappa = 3$ και $n = 2$ τότε, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$
Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνάρτηση $n-$ μεταβλητών τότε τυπικά ορίζονται n^k μερικές παράγωγοι της f τάξης k (κάποιες βέβαια από αυτές είναι μεταξύ τους ίσες). Για παράδειγμα αν f είναι της κλάσης C^2 υπάρχουν ουσιαστικά $\frac{n(n+1)}{2}$ το πλήθος μερικές παράγωγοι της f δεύτερης τάξης, οι εξής: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, i = 1, ..., n$ και οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, 1 \leq i < j \leq n$.

3)Αν $f, g : U \subseteq R^n \to R$ (U ανοικτό στο R^n) είναι της κλάσης C^λ ($\lambda \geq 0$) τότε οι συναρτήσεις $f + g, \lambda f$, όπου $\lambda \in R$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in U$, είναι της κλάσης C^λ
(Πράγματι, $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$ και $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f, 1 \leq i \leq n$, έτσι το αποτέλεσμα έπεται από τους παραπάνω τύπους με επαγωγή στο λ).

Μια διανυσματική συνάρτηση $f : U \subseteq R^n \to R^m$, με $f = (f_1, ..., f_m)$ λέγεται ότι είναι της <u>κλάσης</u> C^λ ($\lambda \geq 0$) αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, ..., f_m$ της f είναι όλες της κλάσης C^λ.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

(*) 8.2 Πρόταση: Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά και $g: U \subseteq R^n \to R^m$, $f: V \subseteq R^m \to R^p$ συναρτήσεις της κλάσης C^λ ($\lambda \geq 0$) με $g(U) \subseteq V$. Τότε η $h = fog$ είναι της κλάσης C^λ.

Απόδειξη: Για $\lambda = 0$ το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γνωστό (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση).
Έστω $\lambda \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση δηλαδή $p = 1$ και αυτό δεν περιορίζει την γενικότητα αφού μια διανυσματική συνάρτηση είναι της κλάσης $C^\lambda \Leftrightarrow$ οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι C^λ.
Αν $\lambda = 1$. Από τον <u>κανόνα της αλυσίδας</u> έχουμε ότι αν $h = fog$, $g = (y_1, \ldots, y_m)$ και $x \in U$ τότε: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq n, x \in U$.
Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial y_k} og, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς για κάθε $k = 1, \ldots, m$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έπεται ότι η συνάρτηση $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ είναι συνεχής στο U για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έτσι η h είναι C^1.
Αν $\lambda = 2$. Θέτουμε $\frac{\partial f}{\partial y_k} = f_k, 1 \leq k \leq m$ και $\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \varphi_i^k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$ τότε $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} (f_k og) \cdot \varphi_i^k, 1 \leq i \leq n$. Από τον κανόνα αλυσίδας και τους κανόνες παραγώγισης (δες παρατήρηση (2)) συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$ είναι συνεχής στο U για κάθε $i = 1, \ldots, n$, έτσι η h είναι της κλάσης C^2.
Πρέπει τώρα να είναι σαφές ότι το γενικό αποτέλεσμα έπεται με επαγωγή στο λ.

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι η πρόταση 8.2 όπως και η παρατήρηση 3 ισχύουν και για συναρτήσεις της κλάσης C^∞

Εφαρμογές.(*) 1) Έστω $f(x, y) = e^x \sin xy$ και $x = g(s,t), y = h(s,t)$ για κάποιες C^2 συναρτήσεις $g, h: R^2 \to R$. Θέτουμε, $\kappa(s,t) = f(g(s,t), h(s,t)), (s,t) \in R^2$.

Υπολογίστε την $\kappa_{st} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial s}$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας. [Η κ_{st} θα υπολογιστεί συναρτήσει των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης των g, h].

Λύση $\underbrace{(s,t) \in R^2 \xrightarrow{G} (g(s,t), h(s,t)) \in R^2 \xrightarrow{f} R}_{foG = \kappa}$

$\kappa(s,t) = (foG)(s,t) = f(G(s,t)) = f(g(s,t), h(s,t))$, $(s,t) \in R^2$.

Από τον κανόνα αλυσίδας για την foG παίρνουμε $\kappa_s = \frac{\partial \kappa}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial s} = f_x \cdot g_s + f_y \cdot h_s =$

$\left(e^x \sin xy + ye^x \cos xy\right) g_s + \left(xe^x \cos xy\right) h_s$ (1)

Παραγωγίζοντας ως προς t την κ_s παίρνουμε: $\kappa_{st} = \underbrace{\left[\left(f_x\right)_t \cdot g_s + f_x \cdot \left(g_s\right)_t\right]}_{\left(f_x \cdot g_s\right)_t} + \underbrace{\left[\left(f_y\right)_t \cdot h_s + f_y \cdot \left(h_s\right)_t\right]}_{\left(f_y \cdot h_s\right)_t} =$

$\left(f_x\right)_t \cdot g_s + f_x \cdot \left(g_s\right)_t + \left(f_y\right)_t \cdot h_s + f_y \cdot \left(h_s\right)_t$ (2)

Εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα της αλυσίδας στις $\left(f_x\right)_t$ και $\left(f_y\right)_t$ οπότε $\left((s,t) \to f_x\left(g(s,t),h(s,t)\right)\right.$ και $\left.(s,t) \to f_y\left(g(s,t),h(s,t)\right)\right)$, $\left(f_x\right)_t = f_{xx} \cdot g_t + f_{xy} \cdot h_t$ και $\left(f_y\right)_t = f_{yx} \cdot g_t + f_{yy} \cdot h_t$.

Οπότε αντικαθιστώντας στην (2) η κ_{st} γίνεται:

$\kappa_{st} = \left(f_{xx} \cdot g_t + f_{xy} \cdot h_t\right) g_s + f_x \cdot g_{st} + \left(f_{yx} \cdot g_t + f_{yy} \cdot h_t\right) h_s + f_y \cdot h_{st}$

$= f_{xx} \cdot g_t \cdot g_s + f_{xy}\left(h_t g_s + g_t h_s\right) + f_{yy} \cdot h_t h_s + f_x \cdot g_{st} + f_y \cdot h_{st}$.

Παρατηρούμε ότι αυτός ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός ως προς (s,t), επαληθεύοντας έτσι την ισότητα $\kappa_{st} = \kappa_{ts}$ (υπόθεση ότι g,h είναι C^2, f είναι βέβαια C^∞).

Υπολογίζοντας τις f_{xx}, f_{xy} και f_{yy} βρίσκουμε $\kappa_{st} = \left(e^x \sin xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \sin xy\right) g_s g_t +$

$\left(xe^x \cos xy + e^y \cos xy - xye^x \sin xy\right)\left(h_t h_s + h_s g_t\right) - \left(x^2 e^x \sin xy\right) h_t h_s +$

$\left(e^x \sin xy + ye^x \cos xy\right) g_{st} + \left(xe^x \cos xy\right) h_{st}$.

Όπου βέβαια <u>εννοείται</u> ότι $x = g(s,t)$ και $y = h(s,t)$.

Σημείωση

$f_{xx}(x,y) = e^x \sin xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \sin xy$

$f_{xy}(x,y) = xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \sin xy$

$f_{yy}(x,y) = -x^2 e^x \sin xy$

$f_x(x,y) = e^x \sin xy + ye^x \cos xy$

$f_y(x,y) = xe^x \cos xy$

2) Έστω $f : R^2 \to R$ C^2 συνάρτηση. Θέτομε $\varphi(t) = f(a+\lambda t, b+\mu t)$ για $t \in R$, όπου $a,b,\lambda,\mu \in R$. Τότε $\varphi''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.

Λύση $\underbrace{t \in R \xrightarrow{\sigma} (a+\lambda t, b+\mu t) \in R^2 \xrightarrow{f} R}_{\varphi = fo\sigma}$

$\varphi(t) = f(\sigma(t)) = f(a+\lambda t, b+\mu t), t \in R$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι για $t_0 \in R$ ισχύει $\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0) =$
$= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0)) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))$, για απλότητα γράφουμε $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f_x + \mu f_y$. Συνεπώς $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda \frac{d(f_x)}{dt} + \mu \frac{d(f_y)}{dt}$ (1)

(όπου με $\frac{d(f_x)}{dt}$ εννοούμε την παράγωγο της $f_x(a+\lambda t, b+\mu t), t \in R$).

Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(f_x)}{dt} &= \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \mu \\ \frac{d(f_y)}{dt} &= \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mu \end{aligned}\right\} (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) παίρνουμε,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \mu \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mu \right] = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Άρα $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t_0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sigma(t_0)) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sigma(t_0)) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sigma(t_0))$

Για $t_0 = 0$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(0) = \varphi''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Ασκήσεις

1)Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό σύνολο $(n \geq 2)$, $f: U \to R$ συνάρτηση της κλάσης C^3 και $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, ..., n\}$. Αποδείξτε ότι αν $x \in U$ τότε η $\frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}(x)$ δεν αλλάζει τιμή όταν οι δείκτες i_1, i_2, i_3 μετατεθούν με οποιονδήποτε τρόπο. Γενικεύστε για συναρτήσεις της κλάσης $C^k (k \geq 3)$.

[Υπόδειξη Οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n$ είναι συναρτήσεις της κλάσης C^{k-1} αν η f είναι της κλάσης $C^k (k \geq 3)$]

2)Για κάθε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις, εξακριβώστε ότι οι μεικτές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ είναι ίσες: (α) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$,

(β) $f(x,y) = \log(x^2+y^2), (x,y) \neq (0,0)$, (γ) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$,

(δ) $f(x,y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right), y \neq 0$.

3)Επαληθεύστε την $f_{xz\omega} = f_{z\omega x}$ για την $f(x,y,z,\omega) = e^{xyz}\sin(x\omega)$.

4)Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:
(α) $z = \sin(x^2 - 3xy)$ και (β) $z = x^2 y^2 e^{2xy}$

5)Μια συνάρτηση $f: U \subseteq R^2 \to R$ (U ανοικτό) λέγεται <u>αρμονική</u>, αν είναι της κλάσης C^2 και ικανοποιεί την <u>εξίσωση Laplace</u>, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο U. Δείξτε ότι οι .
συναρτήσεις (α) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, (β) $f(x,y) = e^x \cos y$ και $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ είναι αρμονικές.

6) Έστω $p > 0$, ορίζουμε $f(x) = x^p$, αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x \leq 0$. Τότε η f είναι της κλάσης $C^{(n)}, n \geq 0$, μόνο αν $n < p$. Έπεται ότι για κάθε $n \geq 0$ υπάρχει συνάρτηση της κλάσης $C^{(n)}$, αλλά όχι της κλάσης $C^{(n+1)}$.

7) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = xy \cdot g(x,y)$, όπου $g: R^2 \to R$ φραγμένη συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Αν $g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, όταν $(x,y) \neq (0,0)$ και $g(0,0) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι της κλάσης C^1 στο R^2.

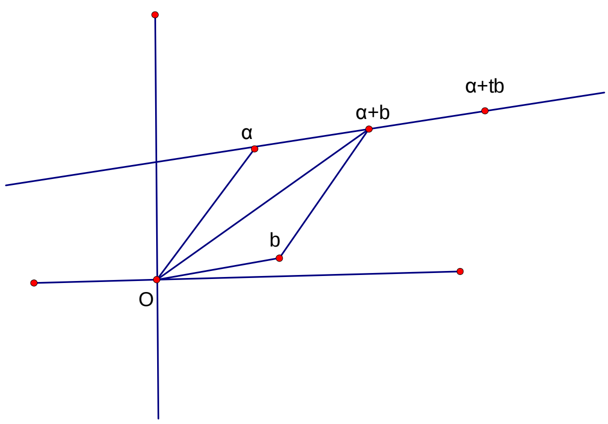
Καμπύλες στον R^n

9.1 Ορισμός Μια καμπύλη στον R^n είναι μια συνεχής συνάρτηση $\sigma : \mathrm{I} \subseteq R \to R^n$ όπου Ι διάστημα (συνήθως κλειστό και φραγμένο) στον R.
Συνήθως φανταζόμαστε την μεταβλητή $t \in \mathrm{I}$ ως τον χρόνο και την καμπύλη $\sigma(\mathrm{I})$ ως την τροχιά ενός υλικού σημείου με διάνυσμα θέσης το $\sigma(t)$ κατά την χρονική στιγμή t.
Αν $\mathrm{I} = [a,b]$, το $\sigma(a)$ είναι το αρχικό σημείο και το $\sigma(b)$ τελικό σημείο της σ. Το $\sigma([a,b])$ ονομάζεται και ίχνος της καμπύλης και συμβολίζεται με $[\sigma]$.
Έστω $\mathrm{I} = [a,b]$ και $\sigma(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$. Η σ λέγεται διαφορίσιμη (αντιστοίχως C^1) αν οι συναρτήσεις $t \in [a,b] \to x_i(t) \in R$ για κάθε $i = 1,2,...,n$ είναι διαφορίσιμες (αντιστοίχως C^1) όπου $n \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή θέτομε $\sigma'(t) = (x_1'(t),...,x_n'(t)), t \in [a,b]$.

Σημείωση. Αν $\sigma : [a,b] \to R^n$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη και $a < t_0 < b$ τότε το διαφορικό της σ στο t_0 είναι: $D\sigma(t_0)(h) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ . \\ . \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix} \cdot h, h \in R$

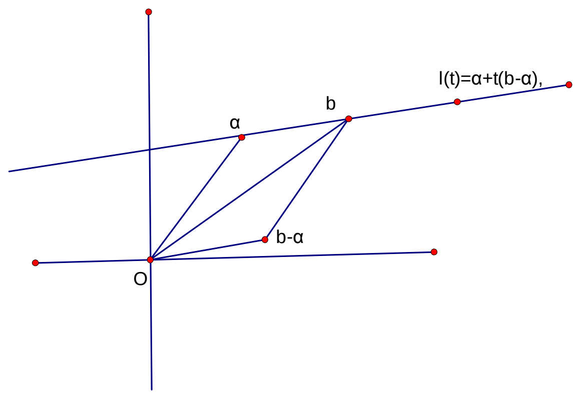
Επίσης πρέπει να είναι σαφές ότι: $\sigma'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}$.(Πρβλ. τις παρατηρησεις 5 μετα τον Ορισμο 5.4 και 3 στην παραγραφο για τον κανονα της αλυσιδας.)
Η $\sigma : [a,b] \to R^n$, $\sigma(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ λέγεται κατά τμήματα C^1, αν υπάρχει μια διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < ... < t_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε ο περιορισμός $\sigma \| [t_{k-1}, t_k]$ να είναι C^1 στο $[t_{k-1}, t_k]$ για κάθε $k = 1,2,...,n$

Παραδείγματα: 1) Έστω $a,b \in R^2$ με $b \neq 0$. Η ευθεία που διέρχεται από το a και έχει την διεύθυνση του b είναι η $l(t) = a + tb, t \in R$.

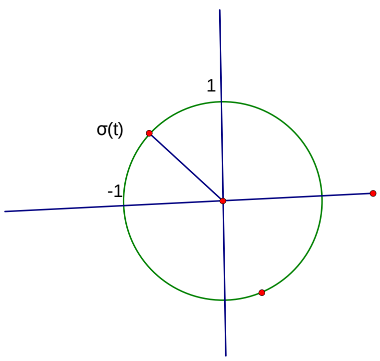


Η l διέρχεται από το a και είναι παράλληλη με το b.
Η l είναι C^1 αφού $l'(t) = b, t \in R$

2)Το <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> από το a στο b, όπου $a,b\in R^n$ είναι η καμπύλη $\sigma(t)=(1-t)a+tb=a+t(b-a),\quad t\in[0,1]$
την καμπύλη αυτή την συμβολίζουμε και με $[a,b]$.

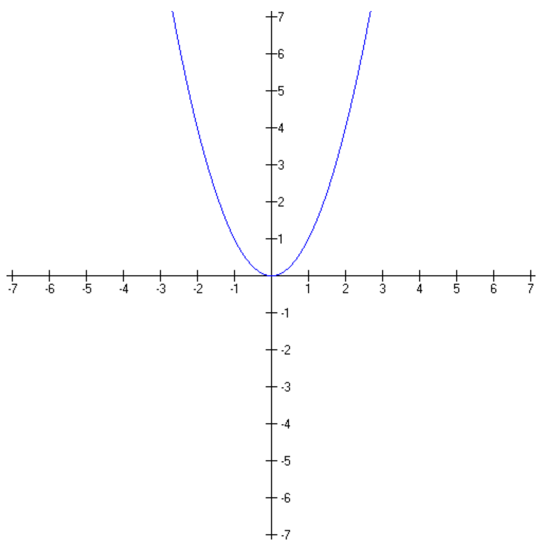


Είναι σαφές ότι το $[a,b]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $\sigma(t)=a+t(b-a),t\in R$ (αν $a\neq b$). Επίσης $\sigma^{'}(t)=b-a,t\in[0,1]$, άρα η σ είναι C^1 καμπύλη.



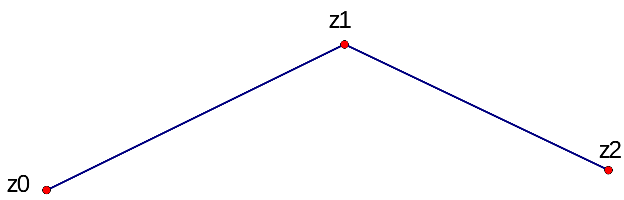
3) Αν $a=(a_1,a_2)\in R^2$ και $r>0$. Ο κύκλος κέντρου a και ακτίνας r είναι η καμπύλη $\sigma(t)=a+r(\cos t,\sin t),t\in[0,2\pi]$ ή $\sigma(t)=(a_1+r\cos t,a_2+r\sin t)$. Η καμπύλη σ είναι C^1, αφού $\sigma'(t)=r(-\sin t,\cos t),t\in[0,2\pi]$
Ειδικότερα ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο είναι ο $\sigma(t)=(\cos t,\sin t),t\in[0,2\pi]$, $a=(0,0),r=1$

4) Η καμπύλη $\sigma(t)=(t,t^2),t\in R$ έχει ως ίχνος το γράφημα της παραβολής $f(x)=x^2,x\in R$. Η σ είναι C^1 αφού $\sigma'(t)=(1,2t),t\in R$.



5) Έστω $z_0, z_1, ..., z_n \in R^k$. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_n$ είναι η καμπύλη του $R^k, \gamma:[0,n] \to R^k$, $\gamma(t) = (\lambda+1-t)z_\lambda + (t-\lambda)z_{\lambda+1}$, $t \in [\lambda, \lambda+1]$, $\lambda = 0,1,...,n-1$. Η γ είναι προφανώς κατά τμήματα C^1 αφού αν $t \in [\lambda, \lambda+1]$, τότε $\gamma'(t) = z_{\lambda+1} - z_\lambda$.

Σημείωση Ειδικότερα αν $k = 2$ και z_0, z_1, z_2 είναι τρία σημεία του R^2 που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα z_0, z_1, z_2 είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη η οποία δεν είναι C^1. Πράγματι οι πλευρικές παράγωγοι στο z_1 υπάρχουν αλλά διαφέρουν, αφού $\gamma'(t) = z_1 - z_0$ για $t \in [0,1]$ και $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ για $t \in [1,2]$ και $z_1 - z_0 \neq z_2 - z_1$

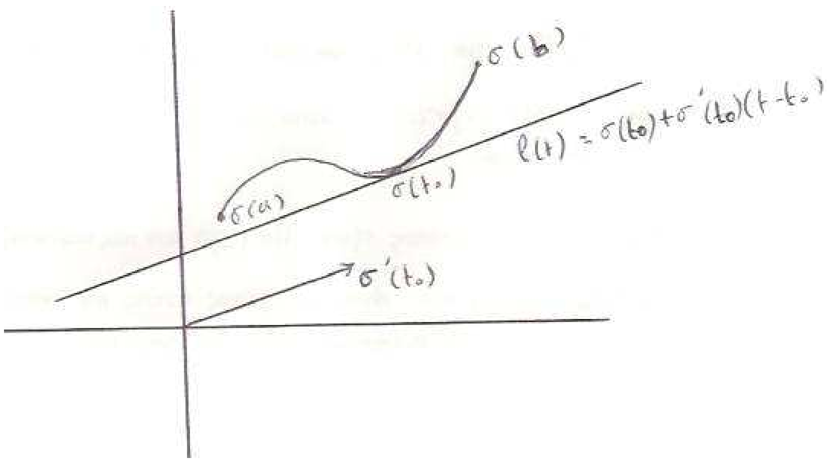


$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0,1] \\ (2-t)z_1 + (t-1)z_2, t \in [1,2] \end{cases}$$

Η καμπύλη γ με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_n$ και την παραμέτρηση που δίνουμε παραπάνω συμβολίζεται και με $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου καμπύλης. Έστω $\sigma:[a,b] \to R^n$ διαφορίσιμη καμπύλη και $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\sigma'(t_0) \neq 0$.

Η ευθεία $\ell(t) = \sigma(t_0) + \sigma'(t_0)(t - t_0), t \in R$, η οποία διέρχεται από το $\sigma(t_0)$ και έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται η <u>εφαπτομένη</u> της καμπύλης σ στο $\sigma(t_0)$. Το δε διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται το <u>εφαπτόμενο</u> διάνυσμα της σ στο $\sigma(t_0)$.



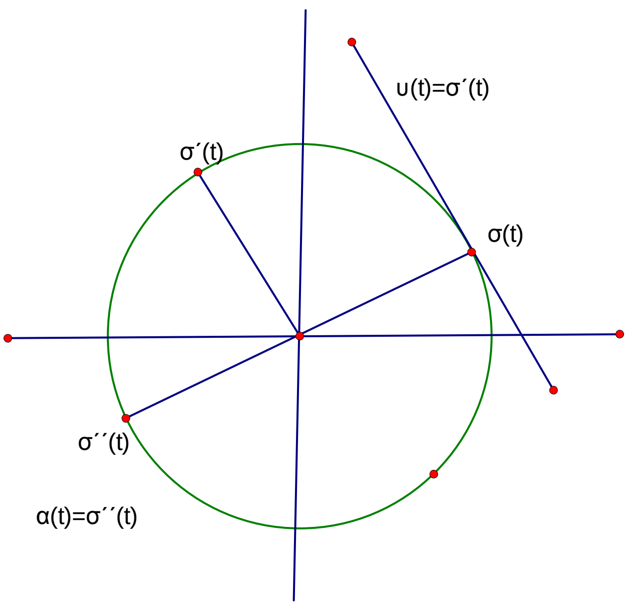
Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής: ο λόγος $\dfrac{\sigma(t_0+h)-\sigma(t_0)}{h}$ όπου $h\neq 0$ (η μέση διανυσματική ταχύτητα του $\sigma(t)$ στο διάστημα $[t_0,t_0+h]$) είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα με αρχή στο $\sigma(t_0)$ και τέλος στο $\sigma(t_0+h)$. Όταν το $h\to 0$, αυτή η παράσταση τείνει στο διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ (της στιγμιαίας ταχύτητας).

Ο ακόλουθος ορισμός είναι τώρα φυσιολογικός:

9.2 Ορισμός. Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ μια C^1- καμπύλη όπου $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Το διάνυσμα ταχύτητας στο $\sigma(t)$είναι το $\upsilon(t)=\sigma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ και το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι ίσο με $s(t)=\|\sigma'(t)\|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$.
Ως επιτάχυνση του υλικού σημείου ορίζουμε το διάνυσμα: $a(t)=\sigma''(t)$ (αν η σ είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο $[a,b]$).

Παραδείγματα: 1) Έστω $a,b\in R^3$ και $\sigma(t)=(1-t)a+tb, t\in[0,1]$ τότε $\sigma'(t)=b-a, t\in[0,1]$, $\|\sigma'(t)\|=\|b-a\|$ και $a(t)=0, t\in[0,1]$, δηλαδή έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

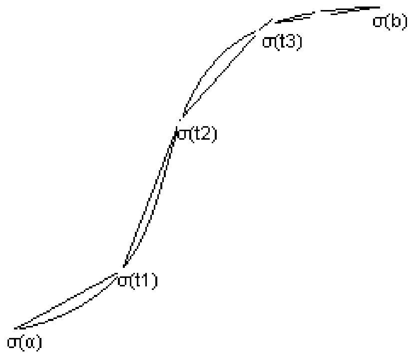
2) Έστω $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$. Τότε $\upsilon(t)=\sigma'(t)=(-\sin t,\cos t), t\in[0,2\pi]$ και $s(t)=\|\sigma'(t)\|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1, t\in[0,2\pi]$. Παρατηρούμε ότι, $\sigma(t)\cdot\upsilon(t)=\sigma(t)\cdot\sigma'(t)=(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)=-\cos t\cdot\sin t+\sin t\cdot\cos t=0$, $t\in[0,2\pi]$. Έτσι το διάνυσμα της ταχύτητας $v(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσεως $\sigma(t)$. Η ταχύτητα είναι σταθερή κατά μέτρο ($1 rad/\sec$).



Πρόκειται για την ομαλή κυκλική κίνηση.
Η επιτάχυνση του κινητού είναι $a(t)=\sigma''(t)=(-\cos t,-\sin t)=-(\cos t,\sin t)=-\sigma(t)$. Επομένως το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι αντίθετο του $\sigma(t)$ και κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου.
(Η επιτάχυνση $a(t)$ πολλαπλασιασμένη με την μάζα του κινητού μας δίνει την λεγόμενη κεντρομόλο δύναμη η οποία επιταχύνει το κινητό).

<u>Μήκος καμπύλης</u> Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ μια καμπύλη (δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση από το $[a,b]$ στον R^n). Για κάθε διαμέριση $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ του $[a,b]$ θέτομε $L(\sigma,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}\left\|\sigma(t_k)-\sigma(t_{k-1})\right\|$. Αν υπάρχει $\mathrm{M}>0: L(\sigma,\mathrm{P})\le \mathrm{M}$ για κάθε P διαμέριση του $[a,b]$ τότε λέμε ότι η καμπύλη <u>έχει μήκος</u> και ως <u>μήκος</u> της ορίζουμε τον αριθμό,

$$\ell(\sigma)=\sup\{L(\sigma,\mathrm{P}):\mathrm{P} \text{ διαμέριση του } [a,b]\}\le \mathrm{M}.$$



Δηλαδή ως μήκος της $\ell(\sigma)$ ορίζεται το supremum των μηκών όλων των <u>εγγεγραμμένων πολυγωνικών γραμμών</u> στην καμπύλη σ.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

9.3 Θεώρημα. Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ C^1 καμπύλη. Τότε η σ έχει μήκος και

$$\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt \quad \left(=\int_a^b s(t)\,dt\right)$$

Παρατηρήσεις 1) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^m$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε βέβαια η σ έχει μήκος και αν $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}:\sigma\big|[t_{k-1},t_k]$ είναι C^1 για $k=1,2,...,n$ τότε

$\ell(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\sigma'(t)\right\|dt$. Μπορούμε βέβαια πάλι να γράφουμε, $\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt$, αφού η $[a,b]\ni t\to\left\|\sigma'(t)\right\|\in R$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών.

2)Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt$ που μας υπολογίζει το μήκος μιας C^1 καμπύλης $\sigma:[a,b]\to R^3$ είναι εκ πρώτης όψεως μη αναμενόμενος. Όμως αν σκεφθούμε το $\sigma(t)$ ως το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου με ταχύτητα , της οποίας το μέτρο ισούται με $\left\|\sigma'(t)\right\|$, που κινείται από το $\sigma(a)$ στο $\sigma(b)$, τότε το μήκος

$\ell(\sigma)$ της σ δεν είναι παρά η συνολική απόσταση που διανύθηκε. Επομένως αυτό το μήκος θα πρέπει να ισούται με το ολοκλήρωμα, $\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$. Αυτό γίνεται ακόμη πιο ξεκάθαρο αν σκεφθούμε πως υπολογίζουμε την διανυόμενη απόσταση στις απλές κινήσεις, όπως είναι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (σταθερή ταχύτητα $\upsilon = ct$) και ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (σταθερή επιτάχυνση $\alpha = ct$).

3) Είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι μια C^1 καμπύλη $\sigma : [a,b] \to R^n$ έχει μήκος και μάλιστα, $\ell(\sigma) \le \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$.

Πράγματι, έστω $\mathrm{P} = \{t_0 = a < \ldots < t_m = b\}$, τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$. Τότε ισχύει η , $L(\sigma, \mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{m} \|\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})\| \le \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$ (1). Επομένως,

$\ell(\sigma) = \sup\{L(\sigma, \mathrm{P}) : \mathrm{P}$ διαμέριση του $[a,b]\} \le \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \ell(\sigma)$.

Η απόδειξη της ανισότητας $\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \le \int_a^b \|\varphi(t)\| dt$ (την οποία χρησιμοποιήσαμε) περιγράφεται στις ασκήσεις.

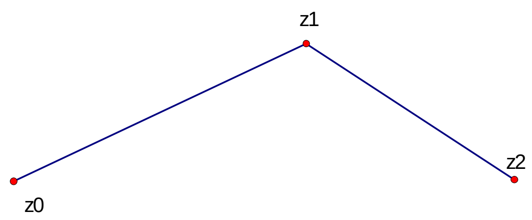
Παραδείγματα 1)Έστω $\sigma(t) = a + r(\cos t, \sin t)$ κύκλος κέντρου $a = (a_1, a_2)$ και ακτίνας r στο επίπεδο. Τότε $\sigma'(t) = r(-\sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$, $\|\sigma'(t)\| = r\sqrt{(-snt)^2 + (\cos t)^2} = r$. Συνεπώς, $\ell(\sigma) = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\| dt = 2\pi r$.

2)Έστω z_0, z_1, z_2 τρία διαφορετικά σημεία του R^3, θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή, $\sigma = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$(δηλαδή $\sigma(t) = \begin{cases} (1-t) z_0 + t z_1, & t \in [0,1] \\ (2-t) z_1 + (t-1) z_2, t \in [1,2] \end{cases}$)

Τότε $\ell(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt + \int_1^2 \|\sigma'(t)\| dt$.

Επειδή $\sigma'(t) = z_1 - z_0$ για $t \in [0,1]$ και $\sigma'(t) = z_2 - z_1$ για $t \in [1,2]$ υπολογίζουμε,

$\ell(\sigma) = \int_0^1 \|z_1 - z_0\| dt + \int_1^2 \|z_2 - z_1\| dt = \|z_1 - z_0\| + \|z_2 - z_1\|$.



Ασκήσεις

1 Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας, επιτάχυνσης καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μια από τις παρακάτω καμπύλες για την δοσμένη τιμή του t: (α) $r(t)=\left(6t,3t^2,t^3\right),t=0$, (b) $\sigma(t)=\left(\sin 3t,\cos 3t,2t^3\right),t=1$ (γ) $\sigma(t)=\left(\sin^2 t,t^2-1,\frac{1}{t}\right),t=1$, (δ) $\sigma(t)=(0,t,0),t=\frac{1}{2}$. Επίσης να βρεθεί το μήκος των καμπύλων των παραδειγμάτων (α) και (β) στο διάστημα $[0,1]$.

2) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$, C^2 καμπύλη με μηδενική επιτάχυνση. Αποδείξτε ότι η σ είναι ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο.

3)Να βρεθεί η καμπύλη σ αν $\sigma(0)=(0,-5,1)$ και $\sigma'(t)=\left(t,e^t,t^2\right)$.

(*) 4) Μία διανυσματική συνάρτηση $f:[a,b]\to R^n, f=(f_1,...,f_n)$ λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) αν κάθε μια από τις συνιστώσες $f_1,...,f_n$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θέτομε τότε, $\int_a^b f\,dx=\left(\int_a^b f_1dx,...,\int_a^b f_ndx\right)$. Αποδείξτε ότι αν η $f=(f_1,...,f_n)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε και η , $\|f\|=\sqrt{f_1^2+...+f_n^2}$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\left\|\int_a^b f\,dx\right\|\le\int_a^b\|f\|dx$.

[**Υπόδειξη:** Κάθε μία από τις f_i^2 είναι ολοκληρώσιμη άρα και το άθροισμά τους είναι ολοκληρώσιμη, επειδή η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, έπεται ότι και η $\|f\|$ είναι ολοκληρώσιμη. Καθόσον αφορά την ανισότητα παρατηρούμε ότι αν θέσομε $y=(y_1,...,y_n)$, όπου $y_i=\int_a^b f_idx, 1\le i\le n$, τότε $y=\int_a^b f\,dx$ και $\|y\|^2=\sum_{i=1}^n y_i^2=\sum_{i=1}^n y_i\cdot\int_a^b f_idx=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n y_if_i\right)dx$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι, $\sum_{i=1}^n y_if_i(t)\le\|y\|\cdot\|f(x)\|, x\in[a,b]$, άρα $\|y\|^2\le\|y\|\cdot\int_a^b\|f\|dx$. Από την οποία έπεται η ζητούμενη ανισότητα].

5)Να υπολογιστεί το μήκος των καμπύλων:

(α) $\sigma(t)=a+r(\cos t,\sin t),t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right],r>0,a\in R^2$

(β) $\sigma(t)=\left\{\left(t,t^n\right):t\in[0,1]\right\},n\ge 1$

(γ) $\sigma(t)=\left\{\left(t^n,t^n\right):t\in[0,1]\right\},n\ge 1$.

6)Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ μια C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Το διάνυσμα $\mathrm{T}(t)=\dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ (εφάπτεται στην σ στο $\sigma(t)$ και επειδή $\|\mathrm{T}(t)\|=1$, το T) λέγεται το <u>μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της σ</u>.

(α) Αποδείξτε ότι $\mathrm{T}'(t)\cdot\mathrm{T}(t)=0$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $\mathrm{T}(t)\cdot\mathrm{T}(t)=1$)

(β) Γράψτε ένα τύπο για το $\mathrm{T}'(t)$ συναρτήσει της σ.

7)Έστω f,g δύο πραγματικές C^1 συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$, με $0<f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(a,b)$ και $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$. Έστω h η διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,2b-a]$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$h(t)=\begin{cases}(t,f(t)), & t\in[a,b]\\ (2b-t,g(2b-t)), & t\in[b,2b-a]\end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η h παριστάνει μια καμπύλη Γ η οποία έχει μήκος.

(β) Εξηγείστε, με την βοήθεια ενός σχήματος, την γεωμετρική σχέση μεταξύ f,g και h.

(γ) Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων $D=\{(x,y): a\le x\le b \text{ και } f(x)\le y\le g(x)\}$ είναι ένα χωρίο του R^2 του οποίου το σύνορο είναι η καμπύλη Γ.

(*) 8) Έστω $f:[a,b]\to R$ κατά τμήματα C^1 συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t)=(t,f(t)),t\in[a,b]$ έχει μήκος το οποίο ισούται με

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

(β) Έστω $f(t)=\begin{cases}t\sin\dfrac{\pi}{t}, & t\in(0,1]\\ 0, & t=0\end{cases}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής $(0,1]$ αλλά ασυνεχής στο 0. Εν συνεχεία δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t)=(t,f(t)),t\in[0,1]$ δεν έχει μήκος

Κλίση και επιφάνειες στάθμης μιας συνάρτησης

Έστω $D \subseteq R^3$ ανοικτό και $f : D \subseteq R^3 \to R$, C^1 συνάρτηση. Αν κ πραγματική σταθερά (με $\kappa \in f(D)$) τότε η εξίσωση

$$f(x, y, z) = \kappa$$

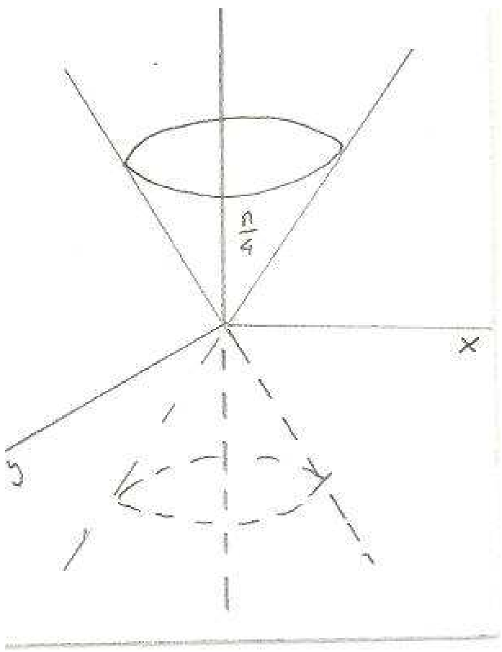
ορίζει μια επιφάνεια S στον R^3 (το υποσύνολο $S = f^{-1}(\{\kappa\})$ του D). Η S ονομάζεται συνήθως επιφάνεια στάθμης της f.

Παραδείγματα: 1)Έστω $f : R^3 \to R : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Αν $\kappa > 0$ τότε η εξίσωση, $x^2 + y^2 + z^2 = \kappa$ ορίζει την επιφάνεια μιας σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $r = \sqrt{\kappa}$ στον R^3. Ιδιαίτερα αν $\kappa = 1$, έχουμε την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του R^3. Η συνάρτηση f είναι βέβαια C^∞.

2) Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, (x, y, z) \in R^3$ ($f : R^3 \to R$ είναι μια $C^\infty -$ συνάρτηση). Αν $\kappa = 0$, η εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$ ορίζει έναν διπλό κώνο στο R^3 με κορυφή στο $(0,0,0)$.

Πράγματι, $z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Η εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ορίζει έναν ορθό κώνο που βρίσκεται πάνω από το xy επίπεδο και η $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ορίζει τον «κατά κορυφήν» κώνο που βρίσκεται κάτω από το xy επίπεδο. Η επιφάνεια αυτή σχηματίζεται με την περιστροφή μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0,0,0)$ περί τον άξονα των z και σε γωνία $\frac{\pi}{4}$ με αυτόν.



3)Έστω $f(x,y,z)=ax+\beta y+\gamma z$, όπου $a,\beta,\gamma\in R$ με $|a|+|\beta|+|\gamma|>0$. Αν $\kappa\in R$ τότε η εξίσωση $ax+\beta y+\gamma z=\kappa$, ορίζει ένα επίπεδο Ε στον R^3 κάθετο στο διάνυσμα (a,β,γ). Είναι βέβαια προφανές ότι η f είναι C^∞ στον R^3.

4)Έστω $D\subseteq R^2$ ανοικτό και $g:D\to R$ C^1 συνάρτηση. Θέτουμε $z=g(x,y),(x,y)\in D$ και ορίζουμε μια συνάρτηση $f:D\times R\to R$ θέτοντας, $f(x,y,z)=z-g(x,y),(x,y)\in D, z\in R$.

Η f είναι C^1 συνάρτηση στο $D\times R\subseteq R^3$, αφού οι μερικές παράγωγοί της, $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}=1$, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=g(x,y)$ συμπίπτει με το γράφημα $G(g)$ της g.

Πράγματι,

$S=\{(x,y,z)\in D\times R: f(x,y,z)=0\}=\{(x,y,z)\in D\times R: z=g(x,y)\}=$
$\{(x,y,g(x,y)):(x,y)\in D\}=G(g)$. (Σημειώνουμε ότι το $D\times R$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R^2.)

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί βέβαια να διατυπωθεί για κάθε $n\geq 2$ και κάθε C^1 συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R$. Αν $\kappa\in R$ τότε το σύνολο των σημείων $x=(x_1,...,x_n)\in R^n: f(x)=\kappa$, ορίζεται ως το <u>σύνολο στάθμης</u> της f. Αν $n=2$, μιλάμε για μια <u>καμπύλη στάθμης</u> και αν $n=3$ για μια <u>επιφάνεια στάθμης</u>.

Για παράδειγμα, αν $f(x,y)=x^2+y^2$ και $\kappa>0$, τότε η καμπύλη στάθμης που ορίζει η εξίσωση $x^2+y^2=\kappa$ είναι ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r=\sqrt{\kappa}$.

Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα 4 γενικεύεται και για C^1 συναρτήσεις $g:D\subseteq R^n\to R$.

10.1 Πρόταση. Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό , $x_0\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο x_0. Αν $\nabla f(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)\neq 0$, τότε η κλίση $\nabla f(x_0)$ δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει ταχύτερα.

Απόδειξη: Έστω $\eta\in R^n$ με $\|\eta\|=1$. Ο ρυθμός μεταβολής της f στο x_0 επί της ευθείας $\ell(t)=x_0+t\eta, t\in R$ δίνεται από την παράγωγο της f στο x_0 στην κατεύθυνση η, δηλαδή την ποσότητα , $\nabla f(x_0)\cdot\eta(=Df(x_0)(\eta))$.

Όμως $\nabla f(x_0)\cdot\eta=\|\nabla f(x_0)\|\cdot\|\eta\|\cdot\cos\theta=\|\nabla f(x_0)\|\cdot\cos\theta$ όπου $\theta\in[0,\pi]$ η γωνία των διανυσμάτων η και $\nabla f(x_0)$. Αν $\theta=0$ τότε $\cos\theta=1$ και ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος. Δηλαδή έχουμε τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής όταν τα διανύσματα η και $\nabla f(x_0)$ είναι παράλληλα και <u>ομόρροπα.</u>

Παραδείγματα. 1) Σε ποια κατεύθυνση ξεκινώντας από το $(0,1)$ αυξάνει ταχύτερα η $f(x,y)=x^2-y^2$;

Λύση. $x_0=(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y$. Άρα $\nabla f(0,1)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right)=(0,-2)\neq(0,0)$. Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $\nabla f(0,1)=-2\cdot(0,1)=-2j$.

2)Έστω $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2},(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης για την f στο σημείο $(1,1,1)$;

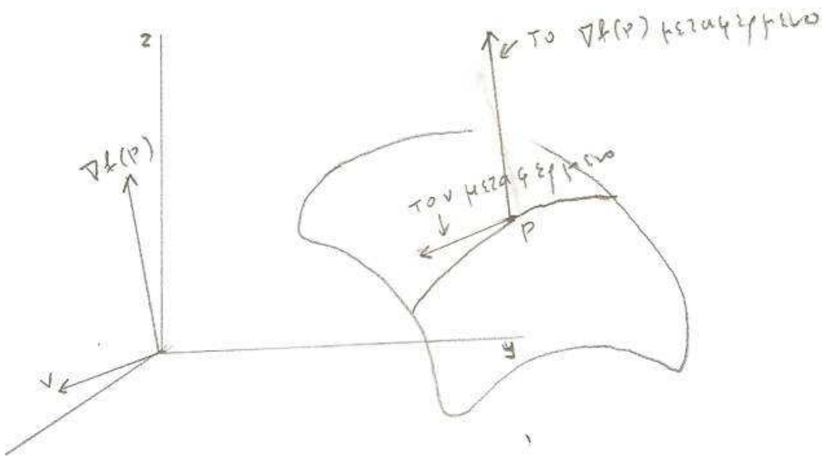
Λύση Οι μερικές παράγωγοι της f στο ανοικτό $U=R^3-\{(0,0,0)\}$ είναι οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{-2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

Συνεπώς, $\nabla f(1,1,1)=\left(-\dfrac{2\cdot 1}{3^2},-\dfrac{2\cdot 1}{3^2},-\dfrac{2\cdot 1}{3^2}\right)=-\dfrac{2}{9}(1,1,1)$. Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $-\dfrac{2}{9}(1,1,1)$.

10.2 Θεώρημα. Έστω $D\subseteq R^3$ ανοικτό και $f:D\to R$ C^1 συνάρτηση και $P=(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο στην επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z)=\kappa$ όπου κ σταθερά, ($\kappa\in f(D)$). Τότε το διάνυσμα $\nabla f(P)$ είναι κάθετο στην S υπό την ακόλουθη έννοια: Αν v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $t=0$ μιας C^1 καμπύλης $c:[a,b]\to S$ με ($0\in(a,b)$ και) $c(0)=P$, τότε

$$\nabla f(P)\cdot v=0.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεσή μας, $c([a,b])\subseteq S$, επομένως $f(c(t))=\kappa$ για κάθε $t\in[a,b]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $c(0)$ είναι το $v=c'(0)$. Εφαρμόζουμε τον <u>κανόνα αλυσίδας</u> στην σύνθετη συνάρτηση $foc:[a,b]\to R$ και στο $t=0$, οπότε έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η foc είναι <u>σταθερή</u> συνάρτηση, ότι $0=\dfrac{d(foc)}{dt}(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(c(0))\cdot\dfrac{dx}{dt}(0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(c(0))\cdot\dfrac{dy}{dt}(0)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(c(0))\cdot\dfrac{dz}{dt}(0)=$ $=\nabla f(c(0))\cdot c'(0)=\nabla f(P)\cdot v$ (όπου $c(t)=(x(t),y(t),z(t)),t\in[a,b]$



<u>Γεωμετρική σημασία της κλίσης</u>: Το ∇f είναι <u>ορθογώνιο</u> στην επιφάνεια όπου η f είναι σταθερή.

Σημείωση Το v και $\nabla f(P)$ μεταφέρονται παράλληλα ώστε να αρχίζουν από το $P=(x_0,y_0,z_0)$.

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για κάθε C^1 συνάρτηση $f:D\subseteq R^n\to R$, ($D\subseteq R^n$ ανοικτό) με $n\geq 2$. Στην περίπτωση $n=2$, η $f(x,y)=\kappa$ ορίζει μια καμπύλη $C=f^{-1}(\{\kappa\})\subseteq D$, την καμπύλη στάθμης της f.

2) Αν $f:D\subseteq R^n\to R$, ($D\subseteq R^n$ ανοικτό) είναι C^1 συνάρτηση, τότε η διανυσματική συνάρτηση,
$$\nabla f:D\subseteq R^n\to R^n : x\in D\to \nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\in R^n$$
ονομάζεται <u>διανυσματικό πεδίο κλίσεων της f</u> και είναι βέβαια <u>συνεχής</u>. Η συνάρτηση αυτή έχει μεγάλη <u>γεωμετρική σημασία</u> καθώς μας δείχνει συγχρόνως δύο πράγματα, $1^{ον}$ την κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει <u>ταχύτερα</u> και $2^{ον}$ την κατεύθυνση που είναι <u>ορθογώνια</u> στις επιφάνειες στάθμης της f.

Από την προηγούμενη συζήτηση οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

10.3 Ορισμός Έστω $f:D\subseteq R^3\to R$ C^1 συνάρτηση ($D\subseteq R^3$ ανοικτό) και S μια επιφάνεια στάθμης της f, δηλαδή S ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $f(x,y,z)=\kappa$. Το <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> της S σε ένα σημείο $P=(x_0,y_0,z_0)$ της S, ορίζεται από την εξίσωση,
$$\nabla f(P)\cdot(X-P)=0,\ \text{αν}\ \nabla f(P)\neq 0,\quad \mathrm{X}=(x,y,z)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(P)(z-z_0)=0$$
Με περισσότερη ακρίβεια το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P είναι το σύνολο,

$\mathrm{E}=\left\{x\in R^3:\nabla f\left(x\right)\cdot\left(x-P\right)=0\right\}$ Παρατηρούμε ότι αν c είναι μια C^1 καμπύλη της S με $c\left(0\right)=P$, τότε το σημείο $x=P+c'\left(0\right)$ ανήκει στο Ε.

Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο θεώρημα όπως και στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε εξίσου καλά να είχαμε εργασθεί και στις δύο ή και στις $n-$ διαστάσεις, με τις προφανείς τροποποιήσεις.

Παρατήρηση. Έστω $D\subseteq R^2$ ανοικτό και $g:D\to R$ C^1 συνάρτηση. Όπως είδαμε στο παράδειγμα (4) η g ορίζει φυσιολογικά μια C^1 συνάρτηση, $f:D\times R\to R$, θέτοντας $f\left(x,y,z\right)=z-g\left(x,y\right),\left(x,y,z\right)\in D\times R$. Επίσης παρατηρήσαμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f\left(x,y,z\right)=0$ συμπίπτει με το γράφημα $G\left(g\right)$ της g.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $P=\left(x_0,y_0,z_0\right)$, όπου $\nabla f\left(P\right)\neq 0$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, συμπίπτει με τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της g στο $\left(x_0,y_0,g\left(x_0,y_0\right)\right)$ (πρβλ. τις παρατηρήσεις μετά τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης).

Πράγματι , $\frac{\partial f}{\partial x}\left(P\right)=-\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(P\right)=-\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$ και $\frac{\partial f}{\partial z}\left(P\right)=1$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(P\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(P\right)\left(y-y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(P\right)\left(z-z_0\right)=0\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)-\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)+z-z_0=0\Leftrightarrow$$

$$z=g\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right).$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $z=x^2y+y+x$ στο σημείο $P=\left(1,0,1\right)$. Έστω $f\left(x,y,z\right)=z-\left(x^2y+y+x\right)$, θεωρούμε την επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση, $f\left(x,y,z\right)=0\Leftrightarrow z=x^2y+y+x$. Το $P=\left(1,0,1\right)\in S$, η κλίση της f στο $\left(x,y,z\right)$ είναι $\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(-2xy,-x^2-1,1\right)$. Επομένως, $\nabla f\left(P\right)=\left(-1,-2,1\right)$. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην S στο σημείο $P=\left(1,0,1\right)$. Το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα είναι το $\eta=\frac{\nabla f\left(P\right)}{\left\|\nabla f\left(P\right)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1,-2,1\right)$

Ασκήσεις

1) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια, $z=f\left(x,y\right)$ στο σημείο που υποδεικνύεται:

(α) $z=x^3+y^3-6xy,\left(1,2,-3\right)$, (β) $z=\cos x\cdot\cos y,\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)$,

(γ) $z=\cos x\cdot\sin y,\left(0,\frac{\pi}{2},1\right)$, (δ) $z=\sqrt{x^2+y^2},\left(1,0,1\right)$

2) Βρείτε ένα μοναδικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\cos xy - e^z - 2 = 0$ στο $(1,\pi,0)$

3) Έστω $r = (x,y,z)$. Αποδείξτε ότι, $\nabla\left(\frac{1}{\|r\|}\right) = -\frac{r}{\|r\|^3}$ στο $U = R^3 - \{(0,0,0)\}$

και κατόπιν ότι, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) = 0$.

4) Έστω $f : R^3 \to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a \in R^3$. Αποδείξτε ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $Df(a) : R^3 \to R$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος του R^3 που είναι κάθετος στην κλίση $\nabla f(a)$ της f στο a.

5) Υπολογίστε την κλίση ∇f για κάθε μια από τις συναρτήσεις:

(α) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (β) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

(γ) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, (δ) $f(x,y,z) = \cos x + y^2 + z$

Για κάθε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις, ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο σημείο $(1,1,1)$;

Το θεώρημα του Taylor στη μια μεταβλητή

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ $n-$ φορές διαφορίσιμη συνάρτηση στο I, $(n \geq 1)$.

Γράφουμε, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}$, όπου $R_n(x,a)$ είναι το υπόλοιπο Taylor (κέντρου a και τάξης n) και

$$\mathrm{P}_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

το πολυώνυμο Taylor (κέντρου a και τάξης n) της f. Δηλαδή

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x,a) + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}.$$

Αν το x είναι πολύ κοντά στο a το σφάλμα στην προσέγγιση της f στο a γίνεται μικρό, υπό την έννοια ότι, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$.

Πράγματι, για $n=1$ έχομε ότι, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$ ή με τον παραπάνω συμβολισμό $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_1(x,a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_1(x,a)}{x-a} = 0$, (δηλαδή, όχι μόνο ισχύει, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - \mathrm{P}_1(x,a)\right) = 0$ αλλά και ακόμα περισσότερο $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_1(x,a)}{x-a} = 0$).

Προχωρούμε με επαγωγή στο $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε συνάρτηση που είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη και έστω $f : \mathrm{I} \to R$ $n-$ φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο I και $a \in \mathrm{I}$.

Αν $\mathrm{P}_n(x,a)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f, επειδή $f(a) = \mathrm{P}_n(a,a)$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - \mathrm{P}_n(x,a)\right) = f(a) - f(a) = 0$.

Προφανώς ισχύει ότι, $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^n = 0$.

Συνεπώς από τον κανόνα L' Hospital έχουμε: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x,a)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{n} \dfrac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} =$

$\dfrac{1}{n} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} = \dfrac{1}{n} \cdot 0 = 0$.

Το όριο, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} = 0$ από την επαγωγική υπόθεση και εφόσον

(προφανώς) το $\mathrm{P}_n'(x,a)$ είναι το πολυώνυμο Taylor (τάξης $n-1$ στο a) της συνάρτησης f'.

Παράδειγμα. Έστω $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}, x\neq 1$ τότε $\mathrm{P}_n\left(x,0\right)=1+x+...+x^n$ και $R_n\left(x,0\right)=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}, x\neq 1$

Πράγματι $f^{(n)}\left(x\right)=\dfrac{n!}{\left(1-x\right)^{n+1}}, n\geq 0, x\neq 1$, όπως αποδεικνύεται επαγωγικά, έτσι, $f^{(n)}\left(0\right)=n!, n\geq 0$. Συνεπώς

$$\mathrm{P}_n\left(x,0\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+...+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n=1+x+x^2+...+x^n.$$

Επίσης

$$R_n\left(x,0\right)=f\left(x\right)-\mathrm{P}_n\left(x,0\right)=\frac{1}{1-x}-\left(1+x+...+x^n\right)=\frac{1-\left(1+x+...+x^n\right)\left(1-x\right)}{1-x}=$$

$$\frac{1-\left(1+x+...+x^n\right)+\left(x+x^2+...+x^{n+1}\right)}{1-x}=\frac{1-1+x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Έστω τώρα $\mathrm{I}\subseteq R$ ανοικτό διάστημα $a\in\mathrm{I}$ και $f:\mathrm{I}\to R$ μια συνάρτηση που είναι της τάξης $C^{n+1}, n\geq 0$, τότε το υπόλοιπο Taylor $R_n\left(x,a\right)$ παίρνει τις ακόλουθες μορφές: $R_n\left(x,a\right)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x\left(x-t\right)^n\cdot f^{(n+1)}\left(t\right)dt, x\in\mathrm{I}$ (<u>ολοκληρωτική μορφή</u> του υπολοίπου)

καθώς και την μορφή, $R_n\left(x,a\right)=\dfrac{1}{\left(n+1\right)!}\cdot f^{(n+1)}\left(\xi\right)\left(x-a\right)^{n+1}, x\in\mathrm{I}, x\neq a$ για κάποιο ξ μεταξύ x και a (<u>μορφή Lagrange</u> του υπολοίπου).

Περιγράφουμε σύντομα την απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων: Έστω $x\in\mathrm{I}$ με $x\neq a$ το οποίο σταθεροποιούμε . Ορίζουμε μια συνάρτηση $\varphi:\mathrm{I}\to R$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$\varphi\left(t\right)=R_n\left(x,t\right)=f\left(x\right)-\mathrm{P}_n\left(x,t\right)=f\left(x\right)-\left(f\left(t\right)+f'\left(t\right)\left(x-t\right)+...+\frac{f^{(n)}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n\right)$$

. Δηλαδή θεωρούμε το υπόλοιπο Taylor ως συνάρτηση του κέντρου t.

Παρατηρούμε ότι: 1) $\varphi\left(a\right)=R_n\left(x,a\right)$

και 2) $\varphi\left(x\right)=R_n\left(x,x\right)=f\left(x\right)-\mathrm{P}_n\left(x,x\right)=f\left(x\right)-f\left(x\right)=0$.

Επίσης με <u>παραγώγιση</u> της σχέσης $f\left(x\right)=\mathrm{P}_n\left(x,t\right)+\varphi\left(t\right)=\left(f\left(t\right)+f'\left(t\right)\left(x-t\right)+...+\dfrac{f^{(n)}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n\right)+\varphi\left(t\right)$ <u>ως προς t</u>,

παίρνουμε τον τύπο: 3) $\varphi'\left(t\right)=-\dfrac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}\left(t\right)\cdot\left(x-t\right)^n, t\in\mathrm{I}$.

Αποδεικνύουμε τώρα την <u>ολοκληρωτική μορφή</u> του υπολοίπου Taylor: Από το <u>θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού</u> έχουμε: (η φ' συνεχής στο I)

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x \varphi'(t)dt=-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt .$$

Επειδή $\varphi(x)=0$ έπεται η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου,

$$R_n(x,a)=\varphi(a)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt .$$

Καθόσον αφορά την μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy</u> στο διάστημα με άκρα a και x για τις συναρτήσεις $\varphi(t)$ και $g(t)=(x-t)^{n+1}$ και βρίσκουμε ξ μεταξύ x και a ώστε:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Άρα $\varphi(a)=R_n(x,a)=\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\quad\left[\varphi(x)=0=g(x)\right].$

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy που χρησιμοποιήσαμε στην μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor.

11.1 Θεώρημα (Cauchy) Έστω $\varphi,g:[a,b]\subseteq R\to R$ συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε,

$$\big(\varphi(a)-\varphi(b)\big)\cdot g'(\xi)=\big(g(a)-g(b)\big)\cdot\varphi'(\xi)\qquad (1)$$

Αν $g(a)-g(b)\neq 0$ και $g'(\xi)\neq 0$ τότε η (1) γράφεται ως εξής

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (στην μορφή του θεωρήματος Rolle) στην συνάρτηση $h(x)=\big(\varphi(a)-\varphi(b)\big)\cdot g(x)-\big(g(a)-g(b)\big)\cdot\varphi(x),\ x\in[a,b]$.

Επειδή $h(a)-h(b)=0$, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$. Έτσι έπεται η (1).

Σημείωση. Αν $g(x)=x, x\in[a,b]$, τότε $g'(x)=1, x\in[a,b]$ και έτσι έχουμε το συνηθισμένο θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Σειρές Taylor

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ C^{∞} διαφορίσιμη συνάρτηση. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε την σειρά Taylor της f στο a (με κέντρο το $a \in \mathrm{I}$)

$$(1) \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Είναι προφανές ότι η (1) συγκλίνει τουλάχιστον για $x = a$ με άθροισμα $f(a)$. Το ενδιαφέρον βέβαια είναι για ποια άλλα σημεία x του I (εκτός του a) η σειρά Taylor συγκλίνει και μάλιστα στην τιμή $f(x)$ της συνάρτησης f . Με άλλα λόγια υπάρχουν $x \in \mathrm{I}$ με $x \neq a$ ώστε

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

Επειδή προφανώς ισχύει ότι,

$$(3) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}, n \in N$$

ο τύπος (2) ισχύει ακριβώς, για εκείνα τα $x \in \mathrm{I}$ ώστε:

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$

Αν για $x \in \mathrm{I}$, ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, τότε λέμε ότι η σειρά Taylor κέντρου a <u>παριστάνει την f στο</u> x .

Παράδειγμα. Έστω $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$ τότε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1.$$

Πράγματι, όπως αποδείξαμε πριν $f(x) = \mathrm{P}_n(x,0) + R_n(x,0), n \geq 1, x \neq 1$ όπου,

$\mathrm{P}_n(x,0) = 1 + x + \ldots + x^n$ και $R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$.

Επειδή, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ για κάθε $|x| < 1$ έπεται το συμπέρασμα.

Παρατηρούμε ότι για $|x| \geq 1$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ αποκλίνει.

Ένα χρήσιμο κριτήριο (ικανή συνθήκη) που εξασφαλίζει ότι η σειρά Taylor της f κέντρου $a \in \mathrm{I}$, παριστάνει την f στο διάστημα I είναι το ακόλουθο.

11.2 Θεώρημα Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ C^{∞} διαφορίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε, $\left| f^{(n)}(x) \right| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$ και για κάθε $n \ge 0$. Τότε η σειρά Taylor της f κέντρου a παριστάνει την f για κάθε $x \in \mathrm{I}$. Δηλαδή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$.

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathrm{I}$ με $x \neq a$. Θεωρούμε την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor. Υποθέτουμε ότι $x > a$ τότε έχουμε:

$$R_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt \Rightarrow \left|R_n(x,a)\right| \le \frac{1}{n!}\int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)\right|\cdot\left|x-t\right|^n dt \le$$

$$\frac{\mathrm{M}}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{\mathrm{M}}{n!}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \mathrm{M}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Ανάλογα εργαζόμαστε αν $x < a$).

Αν χρησιμοποιούσαμε την μορφή Lagrange θα είχαμε ότι, $R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ για κάποιο ξ_n μεταξύ a και x. Συνεπώς $\left|R_n(x,a)\right| \le \mathrm{M}\cdot\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Εφαρμογές: 1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in R$.

Πράγματι, $(e^x)' = e^x$ για κάθε $x \in R \Rightarrow (e^x)^{(n)} = e^x$ για κάθε $x \in R$ για κάθε $n \ge 0$.

Συνεπώς αν $f(x) = e^x$, $x \in R$ τότε $f^{(n)}(0) = e^0 = 1, n \ge 0$.

Έπεται ότι $\mathrm{P}_n(x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, n \ge 0, x \in R$

Επειδή αν $a > 0$ τότε η $f^{(n)} = f, n \ge 0$ είναι φραγμένη στο διάστημα $[-a,a]$, έπεται από την προηγούμενη πρόταση ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$ για κάθε $x \in [-a,a]$. Επειδή $a > 0$ τυχών θετικός αριθμός έχουμε το συμπέρασμα.

2) Επειδή, όπως αποδεικνύεται με επαγωγή, $\eta\mu^{(2n+1)}x = (-1)^n \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu^{(2n)}x = (-1)^n \cdot \eta\mu x, n \ge 0, x \in R$ (συνεπώς, $\eta\mu^{(2n)}0 = 0, \eta\mu^{(2n+1)}0 = (-1)^n$ και $\left|\eta\mu^{(n)}x\right| \le 1$ για κάθε $x \in R$, για κάθε $n \ge 0$) από την προηγούμενη πρόταση βρίσκουμε,

$$\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in R$ τότε έχουμε, $\sigma\upsilon\nu^{(2n)}x = (-1)^n \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $\sigma\upsilon\nu^{(2n+1)}x = (-1)^{n+1} \cdot \eta\mu x, x \in R, n \ge 0$

Έτσι βρίσκουμε $\sigma\upsilon\nu^{(2n)}0 = (-1)^n$ και $\sigma\upsilon\nu^{(2n+1)}0 = 0, n \ge 0$, επίσης $\left|\sigma\upsilon\nu^{(n)}x\right| \le 1$ για κάθε $x \in R$, για κάθε $n \ge 0$.

Έπεται ότι: $$\sigma\upsilon\nu x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in R.$$

<u>Σημείωση.</u> Με ανάλογες μεθόδους υπολογίζουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα:

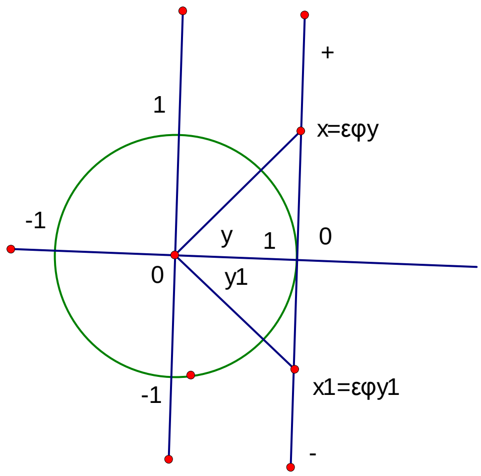
1) $\log(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad |x|<1$ (ακριβέστερα $x\in(-1,1]$.

2)Αν $a\in R$, τότε $(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\cdot x^n,\quad |x|<1$, όπου,

$$\binom{a}{n}=\begin{cases}1, n=0\\ \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, n\geq 1\end{cases}$$

3) $\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$. Η συνάρτηση $y=\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ ορίζεται ως εξής:

$$x\in R \text{ και } \tau o\xi\varepsilon\varphi x=y\Leftrightarrow \varepsilon\varphi y=x \text{ και } y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$



$$x\in R\rightarrow \tau o\xi\varepsilon\varphi x=y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, $\tau o\xi'\varepsilon\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in R$.

Το θεώρημα Taylor στις πολλές μεταβλητές

Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος τύπου Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Το θεώρημα για μια μεταβλητή θα είναι ειδική περίπτωση του γενικότερου αποτελέσματος. Σημειώνουμε ότι στην πραγματικότητα γνωρίζουμε ήδη μια μορφή του Taylor για διαφορίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Πράγματι, αν $f: U \subseteq R^n \to R$ (U ανοικτό στον R^n) είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$ και θέσουμε $R_1(x,a) = f(x) - f(a) - Df(a)(x-a), x \in U$ τότε $f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + R_1(x,a), x \in U$ και από τον ορισμό της διαφορισιμότητας έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_1(x,a)}{\|x-a\|} = 0$ (Δες και την παράγραφο την σχετική με τον ορισμό της διαφορίσιμης συνάρτησης).

Έτσι το ανάπτυγμα Taylor της f <u>πρώτης τάξης</u> γράφεται ως εξής: $f(a+h) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + R_1(h,a)$ με $\dfrac{R_1(h,a)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, όπου έχουμε θέσει, $h = x - a, h = (h_1, \dots, h_n)$ και $R_1(h,a) = R_1(x,a)$.

Θα αποδείξουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor <u>δεύτερης τάξης</u> έχει ως εξής:

Αν η $f: U \subseteq R^n \to R$ είναι της κλάσης C^3, τότε μπορούμε να γράφουμε,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + R_2(h,a)$$

όπου

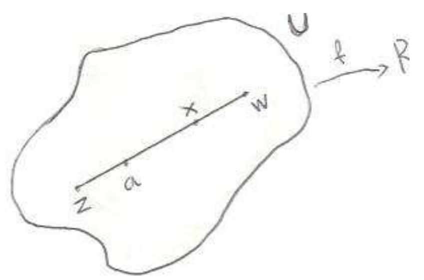
$\dfrac{R_2(h,a)}{\|h\|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ (στο δεύτερο άθροισμα υπάρχουν n^2 όροι).

Σημειώνουμε ότι για την απόδειξη του θεωρήματος όπως διατυπώνεται εδώ, αρκεί η f να είναι της κλάσης C^2, η υπόθεση ότι η f είναι της κλάσης C^3 εξασφαλίζει μια πιο εύχρηστη μορφή του υπολοίπου. Για να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα (καθώς και τις μορφές του αναπτύγματος Taylor ανώτερης τάξης) στηριζόμαστε στην αντίστοιχη θεωρία της μιας μεταβλητής. Ουσιαστικά περιορίζουμε την f στην τομή του U με την ευθεία $\ell(t) = a + t(x-a) = a + th$, και εφαρμόζουμε στην συνάρτηση $h(t) = f(a+th)$ την θεωρία του αναπτύγματος Taylor μιας μεταβλητής.

Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $f: U \subseteq R^n \to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^{m+1}, m \geq 0$. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $[z,w] \subseteq U$ ($z \neq w$) και $a \in (z,w)$. Έστω ακόμη $x \in (z,w)$ και $\sigma(t) = (1-t)a + tx, t \in R$ η ευθεία που διέρχεται από τα a, x. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $t_1 < 0$ και $t_2 > 1$ ώστε $\sigma(t_1) = z$ και $\sigma(t_2) = w$ και βέβαια $\sigma[0,1] = [a,x]$

Περιορίζουμε την f στο $[z,w]$ και έστω $h(t) = f(\sigma(t)), t \in [t_1, t_2]$

$$\underbrace{[t_1,t_2] \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow{f} R}_{h = f o \sigma}$$



Επειδή η $\sigma : R \to U$ είναι βέβαια C^{∞} διαφορίσιμη συνάρτηση η $h = fo\sigma : [t_1, t_2] \to R$ είναι C^{m+1} συνάρτηση. (Προφανώς, $[0,1] \subseteq [t_1, t_2]$.)

Έπεται ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Taylor στην h με <u>κέντρο το 0</u>. Έτσι έχουμε: (1) $h(0) = f(\sigma(0)) = f(a), h(1) = f(\sigma(1)) = f(x)$ και

(2) $$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{h^{(m)}(0)}{m!}t^m + R_m(t,0), t \in [0,1]$$ όπου,

$R_m(t,0) = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_0^t (t-y)^m \cdot h^{(m+1)}(y)dy$ (ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου)

$= \dfrac{1}{(m+1)!}h^{(m+1)}(\xi_t)t^{m+1}, \xi_t \in (0,t)$ (μορφή Lagrange του υπολοίπου)

Έπεται ιδιαίτερα ότι:

(3) $h(1) = h(0) + h'(0) + \dfrac{h''(0)}{2!} + ... + \dfrac{h^{(m)}(0)}{m!} + R_m(1,0)$,

$R_m(1,0) = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_0^1 (1-y)^m h^{(m+1)}(y)dy = \dfrac{1}{(m+1)!}h^{(m+1)}(\xi), \xi \in (0,1)$.

Έστω $a = (a_1,...,a_n), x = (x_1,...,x_n)$ και $\sigma(t) = (\sigma_1(t),...,\sigma_n(t))$ όπου $\sigma_k(t) = (1-t)a_k + tx_k, 1 \le k \le n$.

Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι η f είναι της κλάσης $C^3 (m=2)$. Θα βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της f στο a δεύτερης τάξης.

Έτσι έχουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους $h'(0), h''(0)$ και $h'''(\xi)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $h = fo\sigma : [0,1] \to R$.

Έτσι έχουμε: $h'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t))\frac{d\sigma_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i), t \in [0,1]$, (4)

Άρα, $$h'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i), \quad 4(\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα αλυσίδας για τις συναρτήσεις, $t \in [0,1] \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t)), 1 \le i \le n$ και παραγωγίζοντας την (4) υπολογίζουμε:

$$h''(t) = \frac{dh'}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_i)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t))\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_i)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma_j}{dt}(t)\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_i)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_j - a_j)\right] =$$

$$\sum_{i=1, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j)$$

Το τελευταίο άθροισμα έχει τυπικά n^2 όρους, επειδή όμως έχουμε υποθέσει την συνέχεια των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης είναι ίσο με, $h''(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i)^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma(t))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$, (5) Είναι σαφές ότι το άθροισμα αυτό αναπτύσσεται σύμφωνα με τη γνωστή αλγεβρική ταυτότητα $\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^2=\sum_{i=1}^{n} z_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} z_i z_j \qquad \left(=\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j\right)$

(Ένα άθροισμα με $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ όρους).

Έπεται ότι: $h''(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\cdot\left(x_i-a_i\right)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)$, (5α)

Πρέπει τώρα να έχει γίνει σαφές πως θα προχωρήσουμε.
Έτσι με χρήση του κανόνα αλυσίδας και παραγωγίζοντας την (5) υπολογίζουμε:

$$h'''(t)=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\left(\sigma(t)\right)\cdot\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right), \quad (6)$$

Το άθροισμα έχει τυπικά n^3 όρους, επειδή όμως έχουμε υποθέσει την συνέχεια των μερικών παραγώγων της f τρίτης τάξης αναπτύσσεται σύμφωνα με την ταυτότητα,

$$\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^3=\sum_{i,j,k=1}^{n} z_i\cdot z_j\cdot z_k=\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=3\\ k_1,...,k_n\ge 0}}\frac{3!}{k_1!...k_n!}z_1^{k_1}...z_n^{k_n}, \quad 6(\alpha)$$

Έπεται από την (3) για $m=2$ και από τις 4(α) και 5(α) ότι:

$$h(1)=h(0)+h'(0)+\frac{h''(0)}{2!}+R_2(1,0) \text{ ή } f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\left(x_i-a_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\left(x_i-a_i\right)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\left(x_i-a_i\right)\cdot\left(x_j-a_j\right)\right]+R_2(1,0). \quad (7)$$

Η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου είναι:

$$R_2(1,0)=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)^2\cdot h^{(3)}(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1(1-y)^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\left((1-y)a+yx\right)\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)dy, \quad 7(\alpha)$$

Η μορφή Lagrange του υπολοίπου είναι:

$R_2(1,0)=\frac{1}{3!}h^{(3)}(\xi)=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j x_i}(\xi)\cdot\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)$, 7(β) όπου ξ σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[a,x]$, δηλαδή $\xi=(1-t)a+tx$ για κάποιο $t\in[0,1]$.

Θέτουμε τώρα $R_2(x,a)=R_2(1,0)$. Από την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου και επειδή η ολοκληρούμενη συνάρτηση είναι συνεχής ως προς y θα είναι φραγμένη στο $[0,1]$ από κάποια σταθερά $\mathrm{M}>0$.

Επομένως

$$\left|R_2(x,a)\right|\le\frac{1}{2}\mathrm{M}\cdot\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|x_i-a_i\right|\left|x_j-a_j\right|\left|x_k-a_k\right|=\frac{1}{2}\mathrm{M}\left[\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right]^3\le$$

$\le\frac{1}{2}\mathrm{M}\cdot n^{\frac{3}{2}}\cdot\left\|x-a\right\|^3$. Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα: $\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|\le\sqrt{n}\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$

καθώς και την ταυτότητα 6(α). (Η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwartz για τα διανύσματα $\kappa = \left(|x_1|,...,|x_n|\right)$ και $(1,1,...,1)$ του R^n.)

Έπεται ότι, $$\frac{|R_2(x,a)|}{\|x-a\|^2} \le \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}\mathrm{M}\|x-a\| \xrightarrow[x\to a]{} 0 .$$

Συμπέρασμα: $$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x,a)}{\|x-a\|^2} = 0 .$$

Τις ίδιες εκτιμήσεις βρίσκουμε και με την χρήση της μορφής Lagrange του υπολοίπου Taylor. (Δες επίσης την παρατήρηση (2) μετά το θεώρημα Taylor δηλ. το θεώρημα 12.1).

Εφαρμογή. Έστω $U \subseteq R^2$ ανοικτό, $\vec{a} = (a,\beta)$ και $\vec{x} = (x,y)$ σημεία του U ώστε $\left[\vec{a},\vec{x}\right] \subseteq U$ και $f: U \to R$ συνάρτηση της κλάσης C^3. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\vec{\xi} = (\xi, n) \in \left[\vec{a},\vec{x}\right]$ ώστε: $f(x,y) = f(a,\beta) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,\beta)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,\beta)(y-\beta) +$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\beta)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,\beta)(x-a)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\beta)(y-\beta)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,n)(x-a)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi,n)(x-a)^2(y-\beta) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi,n)(x-a)(y-\beta)^2$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,n)(y-\beta)^3] .$$

Ο παραπάνω τύπος έπεται αμέσως από τους τύπους 7 και 7(β) για $n=2$. Σημειώνουμε ότι επειδή $n=2$ η $h^{(3)}(\xi)$ υπολογίζεται σύμφωνα με το ανάπτυγμα της ταυτότητας: $(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + z_2^3 + 3z_1 z_2^2 + 3z_1^2 z_2$

Επίσης σημειώνουμε ότι για το υπόλοιπο Taylor έχουμε $\lim_{(x,y)\to(a,\beta)} \frac{R_2\left((x,y),(a,\beta)\right)}{\left\|(x,y)-(a,\beta)\right\|^2} = 0$, όπου $R_2\left((x,y),(a,\beta)\right) = R_2(1,0) = \frac{1}{3!}h^{(3)}(\xi)$.

Παρατήρηση: Αν η $f: U \subseteq R^n \to R$ είναι C^2 συνάρτηση και $a \in U$. Τότε η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor τάξης 1 είναι $R_1(a,x) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 (1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left((1-y)a + yx\right)(x_i - a_i)(x_j - a_j)dy$ και η μορφή Lagrange είναι, $R_1(a,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$ όπου $\xi \in [a,x] \subseteq U$.

Με την εισαγωγή κατάλληλου συμβολισμού για τα διαφορικά ανώτερης τάξης μιας συνάρτησης $f: U \subseteq R^n \to R$ της κλάσης C^{m+1}, το ανάπτυγμα Taylor της f τάξης m λαμβάνει μια (πιο ευκολομνημόνευτη) μορφή που μας απαλλάσσει από το να σκεφτόμαστε με συντεταγμένες. Έτσι ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$D_l f(a): R^n \to R, \qquad l = 1,2,...,m+1, \qquad a \in U$$

$$D_1 f(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i, \qquad h=(h_1,...,h_n)\in R^n$$

$$D_2 f(a)(h)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i\cdot h_j$$

$$D_3 f(a)(h)=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)\cdot h_i\cdot h_j\cdot h_k$$

……………………………………………….

$$D_{m+1} f(a)(h)=\sum_{k_1,...,k_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{k_1}...\partial x_{k_{m+1}}}(a)\cdot h_{k_1}\cdot...\cdot h_{k_{m+1}}$$

Οι συναρτήσεις $D_l f(a), l=1,2,...,m+1$ ονομάζονται <u>διαφορικά ανώτερης τάξης</u> της f στο a.

Για παράδειγμα για $n=3$ και $m=2$ έχουμε:

$$D_1 f(a)(h_1,h_2,h_3)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2+\frac{\partial f}{\partial z}(a)h_3$$

$$D_2 f(a)(h_1,h_2,h_3)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)h_3^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)h_1h_2+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)h_1h_3+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)h_2h_3.$$

$$D_3 f(a)(h_1,h_2,h_3)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)h_1^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)h_2^3+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(a)h_3^3+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)h_1^2h_2+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(a)h_1^2h_3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a)h_1h_2^2+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(a)h_2^2h_3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}(a)h_1h_3^2+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(a)h_2h_3^2+6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(a)h_1h_2h_3.$$

Με την βοήθεια των διαφορικών ανώτερης τάξης, το πλήρες θεώρημα Taylor για πολλές μεταβλητές, διατυπώνεται (και αποδεικνύεται με την μέθοδο που αναπτύξαμε πριν για $m=2$) με τον ακόλουθο τρόπο.

12.1 Θεώρημα (Taylor). Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^{m+1}(m\geq 0)$. Αν $x\in U(x\neq a)$ με $[a,x]\subseteq U$ τότε υπάρχει $c\in(a,x)$ ώστε:

$$f(x)=f(a)+D_1 f(a)(x-a)+\frac{1}{2!}D_2 f(a)(x-a)+...+\frac{1}{m!}D_m f(a)(x-a)+R_m(x,a)$$

, όπου $R_m(x,a)=\frac{1}{(m+1)!}D_{m+1}f(c)(x-a)$ και $\frac{R_m(x,a)}{\|x-a\|^m}\xrightarrow[x\to a]{}0$ είναι το υπόλοιπο Taylor στο a τάξης m της f στην μορφή Lagrange.

Παρατηρήσεις: 1) Η συνάρτηση, $D_l f(a)(h)=\sum_{k_1,...,k_l}^{n}\frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1}...\partial x_{k_l}}(a)\cdot h_{k_1}\cdot...\cdot h_{k_l}$, $h=(h_1,...,h_n)$, αναπτύσσεται σύμφωνα με την ταυτότητα,

$$\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^l=\sum_{k_1,...,k_l=1}^{n} z_{k_1}\cdot z_{k_2}\cdot...\cdot z_{k_l},\left(1\le l\le m\right).$$

Έτσι τυπικά μπορούμε να γράφουμε: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\right)^l=\sum_{k_1,...,k_l=1}^{n}\frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1}...\partial x_{k_l}}(a)h_{k_1}...h_{k_l}$ (Δες και τις ασκήσεις (1) και (2) αυτής της παραγράφου)

2)Αν $a_1,...,a_n\in R$ και $m\in N$ τότε: $\lim_{(x_1,...,x_n)\to(0,0,...,0)}\frac{\left(a_1x_1+...+a_nx_n\right)^m}{\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)^{m-1}}=0$

Πράγματι, θέτουμε $a=\left(a_1,...,a_n\right)$ και $x=\left(x_1,...,x_n\right)$. Από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έπεται ότι αν $x\ne 0$ τότε:
$$\frac{\left(\left|a_1x_1+...+a_nx_n\right|\right)^m}{\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)^{m-1}}\le\frac{\|a\|^m\cdot\|x\|^m}{\|x\|^{m-1}}=\|a\|^m\cdot\|x\|\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

Με χρήση αυτού του ορίου αποδεικνύεται ότι, $\lim_{x\to a}\frac{R_m(x,a)}{\|x-a\|^m}=0$.

Πράγματι αν $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ και $a=\left(a_1,...,a_n\right)$ τότε επειδή οι μερικές παράγωγοι τάξης $m+1$ της f είναι συνεχείς συναρτήσεις στο (U και άρα στο) συμπαγές σύνολο $[a,x]\subseteq U$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Επομένως, υπάρχει $\mathrm{M}>0$ ώστε,
$$\left|R_m(x,a)\right|=\frac{1}{(m+1)!}\left|D_{m+1}f(c)(x-a)\right|\le\frac{\mathrm{M}}{(m+1)!}\left(\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right)^{m+1}\Rightarrow$$
$$\frac{\left|R_m(x,a)\right|}{\|x-a\|^m}\le\frac{\mathrm{M}}{(m+1)!}\frac{\left(\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right)^{m+1}}{\|x-a\|^m}\xrightarrow[x\to a]{}0$$

3) Η μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor αποδεικνύεται, κατά τρόπο ανάλογο με την περίπτωση των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. (Δες και τις ασκήσεις (3) και (4), αυτής της παραγράφου).

4) Έστω $f:U\subseteq R^n\to R$ C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $a\in U$ τότε μπορούμε πάλι όπως και στην μία μεταβλητή να σχηματίσουμε την αντίστοιχη σειρά Taylor της f με κέντρο το a, δηλαδή τη σειρά,

$$f(a)+D_1f(a)(x-a)+...+\frac{1}{m!}D_mf(a)(x-a)+...$$

Η σειρά Taylor της f συγκλίνει στο $f(x)$ για εκείνα τα $x\in U$ με $[a,x]\subseteq U$ για τα οποία ισχύει, $\lim_{m\to\infty}R_m(x,a)=0$.

Παραδείγματα: 1)Να βρεθούν τα αναπτύγματα Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων: (α) $f(x,y)=(x+y)^2$ και (β) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$ στο $a=(0,0)$.

Λύση Η συνάρτηση $f(x,y)=(x+y)^2$ είναι C^∞ διαφορίσιμη στο R^2. Αν $(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$ τότε (δες και εφαρμογή στην σελίδα 118) έχουμε $f(x,y)= f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\cdot x\cdot y+$ $+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2]+R_2((x,y),(0,0))$, όπου $\frac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2$.

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=2$. Επίσης $f(0,0)=0$.

Επομένως,
$f(x,y)=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+4xy)+R_2((x,y),(0,0))=x^2+y^2+2xy+R_2((x,y),(0,0))$.

Επειδή, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$, βρίσκουμε $R_2((x,y),(0,0))=0$.

Τελικά, $f(x,y)=x^2+y^2+2xy$, που ήταν αναμενόμενο καθώς η f είναι πολυωνυμική.

Για το παράδειγμα (β) εργαζόμαστε αναλόγως.

2)Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης για την $f(x,y)=(1+x)^y$ με κέντρο το $(a,\beta)=(0,2)$.

Λύση Η f είναι C^∞ διαφορίσιμη στο ανοικτό $D=(-1,+\infty)\times R\subseteq R^2$.

Παρατηρούμε ότι, $\frac{\partial f}{\partial x}=y(1+x)^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=(1+x)^y\cdot\log(1+x)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)(1+x)^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\log(1+x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(1+x)^y=\log^2(1+x)(1+x)^y$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(1+x)^y\cdot\log(1+x)+(1+x)^y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\log(1+x))=y(1+x)^{y-1}\cdot\log(1+x)+$ $(1+x)^{y-1}$ (Επίσης,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(y)(1+x)^{y-1}+y\frac{\partial}{\partial y}(1+x)^{y-1}=(1+x)^{y-1}+y(1+x)^{y-1}\cdot\log(1+x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$,
όπως βέβαια ήταν αναμενόμενο).

Έπεται ότι, $f(0,2)=(1+0)^2=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=2(1+0)^{2-1}=2$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=(1+0)^2\cdot\log(1)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)=2(2-1)(1+0)^0=2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)=\log(1+0)\cdot(1+0)^2=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)=2(1+0)^{2-1}\cdot\log(1+0)+(1+0)^{2-1}=1$.

Συνεπώς, $f(x,y) = f(0,2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)\right] +$

$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2)(x-0)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)(y-2)^2\right] +$

$R_2((x,y),(0,2)) = 1 + 2x + 0\cdot(y-2) + \frac{1}{2}[2x^2 + 2\cdot 1\cdot x(y-2) + 0\cdot(y-2)^2] +$

$+ R_2((x,y),(0,2)) = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x^2 + 2x(y-2)) + R_2((x,y),(0,2)) =$

$1 + 2x + x^2 + x(y-2) + R_2((x,y),(0,2))$, όπου, $\frac{R_2((x,y),(0,2))}{x^2+(y-2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0$.

3). Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $(0,0)$ η συνάρτηση $f(x,y) = e^{x+y}, (x,y) \in R^2$.

Λύση Η f είναι βέβαια C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση.

Πράγματι, $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ στο R^2. Επομένως $\frac{\partial^m f}{\partial^k x \partial^l y} = e^{x+y} = f(x,y)$ για κάθε $m \geq 1$ και $l \geq 0, k \geq 0 : k + l = m$.

Έπεται ότι αν $a = (a_1, a_2), h = (h_1, h_2)$ τότε,

$$D_1 f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = e^{a_1+a_2}\cdot h_1 + e^{a_1+a_2}\cdot h_2 = e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)$$

$$D_2 f(a)(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 = e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)^2$$

……………………………………………………………………………..

$$D_m f(a)(h) = \ldots\ldots = e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)^m$$

Επομένως, αν $\vec{x} = (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}$ και $a = (0,0)$ τότε

$$f(x,y) = f(0,0) + D_1 f(0,0)(\vec{x}) + \frac{1}{2!}D_2 f(0,0)(\vec{x}) + \ldots + \frac{1}{m!}D_m f(0,0)(\vec{x}) + R_m((x,y),(0,0))$$

όπου, $R_m((x,y),(0,0)) = \frac{1}{(m+1)!}D_{m+1} f(c)(x,y)$ για κάποιο $c \in ((0,0),(x,y)), c = (c_1, c_2)$.

Άρα

$$f(x,y) = e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \ldots + \frac{1}{m!}(x+y)^m + \frac{1}{(m+1)!}e^{c_1+c_2}(x+y)^{m+1}.$$

Επειδή η $f(t(x,y)), t \in [0,1]$ είναι φραγμένη στο $[0,1]$ ως συνεχής, υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : 0 \leq e^{c_1+c_2} \leq \mathrm{M}$ για κάθε $c = (c_1, c_2) \in [(0,0),(x,y)]$.

Έπεται ότι, $\frac{1}{(m+1)!}e^{c_1+c_2}(x+y)^{m+1} \leq \mathrm{M}\frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι,
$$e^{x+y}=1+(x+y)+...+\frac{(x+y)^m}{m!}+...=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x+y)^m}{m!},(x,y)\in R^2$$
Σημειώνουμε ότι η $f(x,y)=e^{x+y},(x,y)\in R^2$, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $(0,0)$ ευκολότερα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $g(z)=e^z, z\in R$ (και την μοναδικότητα των συντελεστών της σειράς Taylor).

Πράγματι, θέτουμε $z=x+y$ και έχουμε $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$

Συνεπώς, $e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}...+\frac{(x+y)^n}{n!}+...$

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε την ταυτότητα: $(z_1+z_2+...+z_n)^N=\sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=N}}\frac{N!}{k_1!...k_n!}z_1^{k_1}...z_n^{k_n}, n\geq 2, N\geq 1$

[**Υπόδειξη:** Για $n=2$, έχουμε το γνωστό μας διώνυμο του Newton. Προχωρήστε με επαγωγή στο n]

2)Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^N\ (N\geq 1)$. Αποδείξτε ότι για το διαφορικό $m-$τάξης της f στο $a\ (1\leq m\leq N)$ ισχύει: Αν $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$ τότε, $D_m f(a)(h)=\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_m}}(a)\cdot h_{j_1}...h_{j_m}=$
$$=\sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=m}}\frac{m!}{k_1!...k_n!}h_1^{k_1}h_2^{k_2}...h_n^{k_n}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}(a)$$

3)Έστω $\mathrm{P}(x,y)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m\,(m\in N)$. Αποδείξτε ότι η σχέση $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{P}(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}=0$ έπεται ότι το P είναι ταυτοτικά μηδέν.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό αποδείξτε την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

4)Έστω $\mathrm{P}(x_1,...,x_n)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m$. Αποδείξτε ότι αν, $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{P}(x_1,...,x_n)}{\|x\|^m}=0$

($x=(x_1,...,x_n)$ και $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$), τότε το πολυώνυμο είναι ταυτοτικά μηδέν. Αποδείξτε τώρα την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση $n-$ μεταβλητών

Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων

13.1 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$, $x_0 \in U$ και $f : U \subseteq R^n \to R$ συνάρτηση τότε:

1)Το x_0 λέγεται τοπικό ελάχιστο της f αν υπάρχει περιοχή V του x_0 ώστε $f(x_0) \le f(x)$ για κάθε $x \in V \bigcap U$.

Το x_0 λέγεται τοπικό μέγιστο της f αν υπάρχει περιοχή V του x_0 ώστε $f(x_0) \ge f(x)$ για κάθε $x \in V \bigcap U$.

Το x_0 λέγεται τοπικό ή σχετικό ακρότατο της f αν είναι είτε τοπικό ελάχιστο είτε τοπικό μέγιστο της f.

Υποθέτουμε περαιτέρω ότι U ανοικτό υποσύνολο στον R^n και f διαφορίσιμη συνάρτηση, το σημείο x_0 λέγεται κρίσιμο σημείο της f αν, $\nabla f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Ένα κρίσιμο σημείο που δεν είναι τοπικό ακρότατο λέγεται σαγματικό σημείο για την f.

Κατ' αναλογία με τον Λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύει η ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος Fermat:

13.2 Θεώρημα Αν $U \subseteq R^n$ ανοικτό, η $f : U \subseteq R^n \to R$ είναι διαφορίσιμη στο U και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in U$ τότε $\nabla f(x_0) = 0$, δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο για την f.

Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in U$. Αν $h \in R^n$ με $h \ne 0$ περιορίζουμε την f στην ευθεία $\ell(t) = x_0 + th$, δηλαδή θεωρούμε την $g(t) = f(x_0 + th)$ η οποία ορίζεται σε κατάλληλο διάστημα $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι, $g(0) = f(x_0) \ge f(x_0 + th) = g(t)$ για κάθε $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ για κάποιο $0 < \delta_1 \le \delta$, δηλαδή η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. Επειδή η g ως σύνθεση διαφορίσιμων (της $\ell(t)$ και $f(x)$) είναι διαφορίσιμη στο $(-\delta, \delta)$ έπεται από το θεώρημα Fermat για διαφορίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής ότι $g'(0) = 0$. Όμως από τον κανόνα της αλυσίδας, $g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i = \nabla f(x_0) \cdot h$, $h = (h_1, ..., h_n)$.

Το ίδιο συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι, $g'(0)$ ισούται με την παράγωγο της f στο x_0 στην κατεύθυνση h, δηλαδή $g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i$, όπου $h = (h_1, ..., h_n)$ με $\|h\| = 1$.

Έπεται από τα παραπάνω ότι: $\nabla f(x_0) \cdot h = 0$ για κάθε $h \in R^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i = 0$ για κάθε $h = (h_1, ..., h_n) \in R^n$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι, $\nabla f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.

Σημείωση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι αν αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : U \subseteq R^n \to R$, τότε θα πρέπει να ψάξουμε στα κρίσιμα σημεία. Εφόσον:

x_0 **τοπικό ακρότατο της** $f \Rightarrow x_0$ **κρίσιμο σημείο της** f **.**

Παραδείγματα: 1) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = x^2 y + xy^2$

Έχουμε ότι, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2$.

Εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους με μηδέν παίρνουμε το σύστημα :

$\begin{cases} 2xy + y^2 = 0 \\ 2xy + x^2 = 0 \end{cases}$ αφαιρώντας, παίρνουμε $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Αντικαθιστώντας το $x = y$ στην πρώτη εξίσωση, βρίσκουμε ότι $2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0$ οπότε $y = 0$ και άρα $x = 0$. Αν $x = -y$, τότε $-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0$, δηλαδή $y = 0$ και επομένως $x = 0$.

Επομένως το <u>μοναδικό κρίσιμο σημείο</u> της f είναι το $(0,0)$.

Επειδή $f(x,x) = 2x^3$ το οποίο παίρνει και θετικές και αρνητικές για x κοντά στο 0, το $(0,0)$ <u>δεν</u> είναι τοπικό ακρότατο της f, επομένως είναι <u>σαγματικό</u> σημείο της f.

2)Έστω $f(x,y) = x^2 + y^2$.

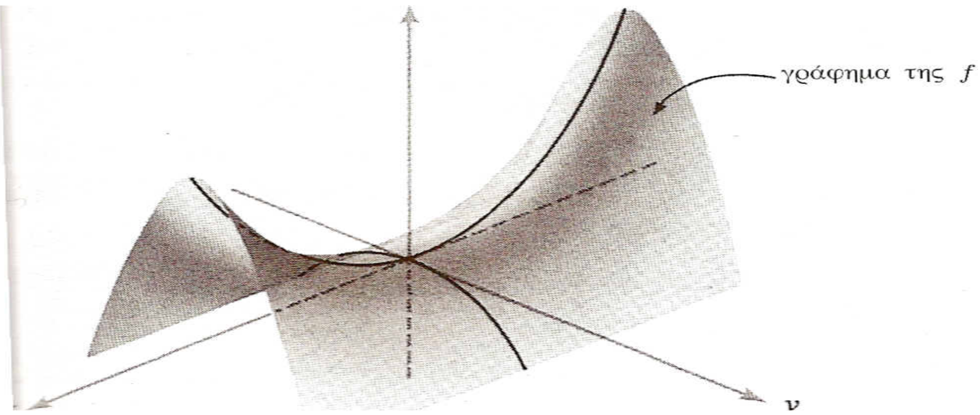
Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

Επομένως το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$.

Έτσι το μοναδικό <u>κρίσιμο</u> σημείο της f είναι το $(0,0)$. Επειδή $f(0,0) = 0 \le f(x,y) = x^2 + y^2$ για κάθε $(x,y) \in R^2$ το σημείο $(0,0)$ είναι τοπικό (μάλιστα ολικο) ελάχιστο για την f.

3) Έστω $f(x,y) = x^2 - y^2$

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Συνεπώς το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$, έχει ως μόνη λύση το $(0,0)$. Συμπεραίνουμε ότι το μόνο <u>κρίσιμο</u> σημείο της f είναι το $(0,0)$. Εξετάζοντας απ' ευθείας τις τιμές της f σε σημείο κοντά στην αρχή των αξόνων, βλέπουμε ότι $f(x,0) = x^2 \ge f(0,0) = 0$ και $f(0,y) = -y^2 \le f(0,0) = 0$.



Έπεται ότι το $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο για την f, επομένως είναι σαγματικό σημείο για την f.

4) Έστω $f(x,y)=x\cdot y$. Τότε έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}=y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x$ και το σύστημα $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$,έχει ως μόνη λύση το σημείο $(0,0)$. Το σημείο $(0,0)$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο της f και είναι σαγματικό σημείο αφού για x,y ομόσημα έχουμε $f(x,y)=xy>0$ και για x,y ετερόσημα έχουμε, $f(x,y)=xy<0$.

Παρατηρούμε ότι, $f(x,y)=\frac{1}{4}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]$, άρα αν θέσουμε $u=x+y$ και $v=x-y$ η συνάρτηση γίνεται $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)=\frac{1}{4}\left(u^2-v^2\right)$, που είναι η περίπτωση του παραδείγματος (3).

5)Θεωρούμε την συνάρτηση, $f(x,y)=\lambda x^2+\mu y^2+ax^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3$, όπου $\lambda>0,\mu>0$ και a,β,γ,δ τυχόντες πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρούμε ότι, αν θέσομε $\varphi(x,y)=ax^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3$ τότε,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)}{\lambda x^2+\mu y^2}=0.$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, $\frac{|x|^3}{\lambda x^2+\mu y^2}=\frac{|x|}{\lambda}\frac{\lambda x^2}{\lambda x^2+\mu y^2}\le\frac{|x|}{\lambda}\xrightarrow[x\to 0]{}0$,

$\frac{|xy^2|}{\lambda x^2+\mu y^2}=\frac{|x|}{\lambda}\frac{\lambda y^2}{\lambda x^2+\mu y^2}\le\frac{|x|}{\lambda}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ και παρομοίως για τις συναρτήσεις, $\frac{y^3}{\lambda x^2+\mu y^2}\xrightarrow[y\to 0]{}0$ και $\frac{x^2y}{\lambda x^2+\mu y^2}\xrightarrow[y\to 0]{}0$.

Έπεται ότι, υπάρχει $r>0:\left|\frac{\varphi(x,y)}{\lambda x^2+\mu y^2}\right|<\frac{1}{2}$, όταν $0<\sqrt{x^2+y^2}<r$.

Συνεπώς, $f(x,y)\ge\left(\lambda x^2+\mu y^2\right)-|\varphi(x,y)|\ge\frac{1}{2}\left(\lambda x^2+\mu y^2\right)\ge f(0,0)=0$ για $\sqrt{x^2+y^2}<r$, που σημαίνει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

Παρατηρούμε ότι το δευτεροβάθμιο μέρος της συνάρτησης κυριαρχεί και καθορίζει την συμπεριφορά της συνάρτησης πλησίον του σημείου $(0,0)$.

Τετραγωνικές μορφές. Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: R^n \to R$ ομογενής και $2^{ου}$ βαθμού ονομάζεται τετραγωνική μορφή ή και τετραγωνική συνάρτηση (όλα τα μονώνυμα της f είναι της μορφής $x_i x_j, 1 \le i, j \le n$).

Παραδείγματα 1) $f(x,y) = ax^2 + \beta xy + \gamma y^2, (x,y) \in R^2, a, \beta, \gamma \in R$ είναι τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών (γενική μορφή).

2) Η $f(x,y,z) = ax^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz$, $(x,y,z) \in R^3$, $a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in R$ είναι τετραγωνική μορφή 3 μεταβλητών (γενική μορφή).

3) Οι $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ και $g(x,y) = x^2 + y^2 + x + 2xy$ δεν είναι τετραγωνικές μορφές αφού στην f εμφανίζεται σταθερός όρος (μονώνυμο μηδενικού βαθμού) και στην g το πρωτοβάθμιο μονώνυμο x.

4)Η $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ και $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xz$ είναι τετραγωνικές μορφές 2 και 3 μεταβλητών αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις: (1) Μια τετραγωνική μορφή $f: R^n \to R$ γράφεται στην γενική της μορφή ως, $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i \ne j \le n} a_{ij} x_i x_j \right)$(1)

Με την βοήθεια του $n \times n$ πίνακα $\mathrm{A} = (a_{ij})$ μπορούμε να γράψουμε την (1) ως εξής,

$$f(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι ο $\mathrm{A} = (a_{ij})$ είναι συμμετρικός (δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε i, j) αφού η f δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε το a_{ij} με το $b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, αφού $x_i x_j = x_j x_i$. (Άρα, $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$.)

2)Ο τετραγωνικός χαρακτήρας της f φαίνεται και από την

$$f(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1,...,x_n), \quad \lambda \in R.$$

Μας ενδιαφέρουν κυρίως οι τετραγωνικές μορφές δύο μεταβλητών και δευτερευόντως οι τετραγωνικές μορφές τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = ax^2 + \beta xy + \gamma y^2$ η γενική τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών. Θέτοντας $\beta' = \frac{\beta}{2}$, μπορούμε να γράψουμε:

$f(x,y)=ax^2+2\beta' xy+\gamma y^2$. Η f δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα $\begin{pmatrix} a & \beta' \\ \beta' & \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \dfrac{\beta}{2} \\ \dfrac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$, αφού $f(x,y)=ax^2+2\beta' xy+\gamma y^2=(x,y)\begin{pmatrix} a & \beta' \\ \beta' & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Έτσι μια τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών θα γράφεται:

$$f(x,y)=ax^2+2\beta xy+\gamma y^2.$$

Σημειώνουμε ότι αν ο πίνακας της f είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν $\alpha\gamma-\beta^2\neq 0$, τότε το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f (γιατί;)

13.3 Ορισμός Μια τετραγωνική μορφή $f:R^n\to R$ λέγεται:

(α) Θετικά ορισμένη, αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in R^n$ με $x\neq 0$ και

(β) Αρνητικά ορισμένη, αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in R^n$ με $x\neq 0$.

(γ) Η f λέγεται θετικά ημιορισμένη αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R^n$.

Ανάλογα ορίζεται και η αρνητικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή.

(δ) Η f λέγεται αόριστη αν υπάρχουν $x,y\in R^n$ ώστε $f(x)<0<f(y)$

Προφανώς, $f(0)=0$ για κάθε τετραγωνική μορφή, αφού δεν περιέχει σταθερό όρο (διάφορο του μηδενός).

Παρατηρούμε ότι: 1) Αν η f είναι θετικά (αντιστοίχως αρνητικά) ορισμένη τότε το $0\in R^n$ είναι ολικό ελάχιστο (αντιστοίχως ολικό μέγιστο) για την f. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για τις ημιορισμένες τετραγωνικές μορφές.

2) Αν η f είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη τότε ο συμμετρικός πίνακας Α που ορίζει την f (υπενθυμίζουμε ότι, $f(x_1,...,x_n)=(x_1,...,x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ για κάποιο συμμετρικό πίνακα Α) είναι αντιστρέψιμος (γιατί;).

Η συμπεριφορά μιας τετραγωνικής μορφής δύο μεταβλητών κοντά στο σημείο $(0,0)$ περιγράφεται στην επόμενη

13.4 Πρόταση. Έστω $f(x,y)=ax^2+2\beta xy+\gamma y^2$ τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Αν $a>0$ και $a\gamma-\beta^2>0$ τότε η f είναι θετικά ορισμένη άρα το $(0,0)$ είναι ολικό ελάχιστο για την f.

(ιι) Αν $a<0$ και $a\gamma-\beta^2>0$ τότε η f είναι αρνητικά ορισμένη άρα το $(0,0)$ είναι ολικό μέγιστο για την f.

(ιιι) Αν $a\gamma-\beta^2<0$, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(ιν) Αν $a\gamma-\beta^2=0$ τότε η f στο $(0,0)$ έχει, (α) μέγιστο ή ελάχιστο ανάλογα αν $a<0$ ή $a>0$ και (β) αν $a=0$, μέγιστο ή ελάχιστο ανάλογα αν $\gamma<0$ ή $\gamma>0$.

Απόδειξη: Αν $a=\gamma=0$ τότε $f(x,y)=2\beta xy$ με $\beta\neq 0$ και εύκολα βλέπουμε ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f (δες και το παράδειγμα (4)). Παρατηρούμε ακόμη ότι τότε $a\gamma-\beta^2=-\beta^2<0$ και η περίπτωση αυτή εντάσσεται στην (ιιι). Υποθέτουμε λοιπόν χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $a\neq 0$. Αντιμετωπίζοντας την f ως συνάρτηση του x ή του y και ενθυμούμενοι ότι ένα τριώνυμο παραγοντοποιείται «συμπληρώνοντας τα τετράγωνα» έχουμε ,

$$f(x,y)=a\left(x^2+2\frac{\beta}{a}xy+\frac{\gamma}{a}y^2\right)=a\left[x^2+2x\cdot\frac{\beta y}{a}+\left(\frac{\beta y}{a}\right)^2+\frac{\gamma}{a}y^2-\left(\frac{\beta y}{a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{\beta}{a}y\right)^2+\frac{a\gamma-\beta^2}{a^2}\cdot y^2\right].$$ (Αν $\gamma\neq 0$, τότε εναλλάσσοντας το a με το γ και το x με το y έχομε: $f(x,y)=\gamma\left[\left(y+\frac{\beta}{\gamma}x\right)^2+\frac{a\gamma-\beta^2}{\gamma^2}\cdot x^2\right]$)

Έπεται ότι: (ι) Αν $a>0$ και $a\gamma-\beta^2>0$, στο σημείο $(0,0)$ η f έχει ελάχιστη τιμή.

(ιι) Αν $a<0$ και $a\gamma-\beta^2>0$ στο σημείο $(0,0)$ η f παίρνει μέγιστη τιμή.

(ιιι) Αν $a\gamma-\beta^2<0$ το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Πράγματι, αν $y>0$ τότε οι ρίζες της εξίσωσης $f(x,y)=0$ ως προς x, είναι οι $\rho_1(y)=y\rho_1$ και $\rho_2(y)=y\rho_2$, όπου, $\rho_i=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-a\gamma}}{a}, i=1,2$.

Έπεται εύκολα ότι για $y>0$ με y μικρό αριθμό, υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ με $|x_1|,|x_2|$ μικρούς αριθμούς ώστε $f(x_1,y)>0$ και $f(x_2,y)<0$ (ο x_1 θα είναι εκτός του διαστήματος των ριζών $\rho_1(y)$ και $\rho_2(y)$ και ο x_2 θα επιλεγεί εντός αυτού του διαστήματος). Συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Σημειώνουμε ότι το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει ακόμη και αν $a=0$ (με την προϋπόθεση ότι $a\gamma-\beta^2<0$). Πράγματι αν $\gamma\neq 0$, εναλλάσσοντας τους ρόλους των a και γ βρίσκουμε $f(x,y)=\gamma\left[\left(y+\frac{\beta}{\gamma}x\right)^2-\frac{\beta^2x^2}{\gamma^2}\right]$.

Από όπου εύκολα συμπεραίνουμε ότι το $(0,0)$ είναι πράγματι σαγματικό σημείο της f.

(ιν) Αν $a\gamma-\beta^2=0$ και $a\neq 0$ τότε $f(x,y)=a\left(x+\frac{\beta y}{a}\right)^2$.

Από όπου έπεται αμέσως ο πρώτος ισχυρισμός.

Αν $a\gamma-\beta^2=0$ και $a=0$, τότε $\beta=0$ και άρα $f(x,y)=\gamma y^2$, από όπου έπεται ο δεύτερος ισχυρισμός.

Παρατήρηση. Έστω $f(x_1,...,x_n)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_i\cdot x_j$, μια τετραγωνική μορφή που ορίζεται από τον συμμετρικό πίνακα $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας αποδεικνύεται ότι:

1)Η f είναι θετικά ορισμένη ($f(x)>0$ για κάθε $x\in R^n$ με $x\neq 0$) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι θετικές.

2)Η f είναι αρνητικά ορισμένη ($f(x)<0$ για κάθε $x\in R^n$ με $x\neq 0$) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι αρνητικές.

3) Η f είναι θετικά ημιορισμένη ($f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R^n$) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ≥ 0.

Η f είναι αρνητικά ημιορισμένη ($f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R^n$) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ≤ 0.

4) Η f είναι αόριστη αν και μόνο αν ο A έχει αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές. Δηλαδή η f δεν είναι θετικά αλλά ούτε αρνητικά ημιορισμένη.

Επίσης υπενθυμίζουμε τα ακόλουθα για ένα τετραγωνικό πίνακα A.

5) Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (χαρακτηριστικού πολυωνύμου) του A, δηλαδή της $\det(A-\lambda I)=0$, όπου I ο ταυτοτικός πίνακας.

6) Για την ορίζουσα $\det A$ του A ισχύει ότι $\det A=$ το γινόμενο των ιδιοτιμών του A.

7) Αν ο A είναι επιπλέον συμμετρικός τότε οι ιδιοτιμές του είναι όλες πραγματικές.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε τους ισχυρισμούς (1), (2), (3) και (4) στην περίπτωση μιας τετραγωνικής μορφής δύο μεταβλητών.

Έστω, $f(x,y)=ax^2+2\beta xy+\gamma y^2=(x,y)\begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ είναι το $\varphi(\lambda)=\det\begin{vmatrix} a-\lambda & \beta \\ \beta & \gamma-\lambda \end{vmatrix}$. Επομένως $\varphi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda)=(a-\lambda)(\gamma-\lambda)-\beta^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-(a+\gamma)\lambda+(a\gamma-\beta^2)=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\varphi(\lambda)$ είναι η $\Delta=(a-\gamma)^2+4\beta^2$.

Οι πραγματικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\varphi(\lambda)$ είναι οι, $\lambda_1=\dfrac{a+\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}$ και $\lambda_2=\dfrac{a+\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}$. Οι ρίζες αυτές είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα Α. Το γινόμενο των ριζών του $\varphi(\lambda)$ είναι το $P=\det A=a\gamma-\beta^2$ το δε άθροισμα των ριζών του είναι το $S=a+\gamma$.

Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε τους παραπάνω ισχυρισμούς .

Παρατηρούμε ότι αν οι ρίζες είναι ετερόσημες, δηλαδή το $P=a\gamma-\beta^2<0$ (η f είναι αόριστη τετραγωνική μορφή)τότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

13.5 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $x_0 \in U$ και $f : U \to R$ συνάρτηση της κλάσης C^2. Η <u>Εσσιανή</u> (Hessian) της f στο x_0 είναι η τετραγωνική μορφή $Hf\left(x_0\right): R^n \to R$ που ορίζεται ως,

$$Hf\left(x_0\right)\left(h\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_0\right) h_i h_j\,,\ h = \left(h_1, ..., h_n\right) \in R^n\,.$$

Παρατηρούμε ότι: 1) Η $\mathrm{H}f\left(x_0\right)$ είναι ακριβώς το <u>διαφορικό δεύτερης τάξης</u> της f στο x_0, δηλαδή $\mathrm{H}f\left(x_0\right) = D_2 f\left(x_0\right)$.

Υπενθυμίζουμε ότι από την συνέχεια των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης της f, έχουμε ότι αν $h = \left(h_1, ..., h_n\right) \in R^n$ τότε: $D_2 f\left(x_0\right)\left(h\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(x_0\right) h_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_0\right) h_i h_j$ και άρα η Εσσιανή είναι πράγματι τετραγωνική μορφή.

Ακόμη ότι το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο x_0 είναι το $f\left(x_0 + h\right) = f\left(x_0\right) + D_1 f\left(x_0\right)\left(h\right) + \frac{1}{2!} D_2 f\left(x_0\right)\left(h\right) + R_2\left(h, x_0\right)$ όπου $R_2\left(h, x_0\right)$ είναι το υπόλοιπο Taylor της f στο x_0 για το οποίο ισχύει $\lim_{h \to 0} \frac{R_2\left(h, x_0\right)}{\left\|h\right\|^2} = 0$.

2) Ο πίνακας (Hesse) που δίνει την τετραγωνική μορφή $\mathrm{H}f\left(x_0\right)$, δηλαδή την Εσσιανή, είναι ο συμμετρικός πίνακας

$$\left[\mathrm{H}f\left(x_0\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\left(x_0\right)..... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\left(x_0\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(x_0\right)...... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}\left(x_0\right) \\ .... & .... & .... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}\left(x_0\right)... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\left(x_0\right) \end{pmatrix}$$

των δευτέρων μερικών παραγώγων της f στο x_0.

Παρατηρούμε ότι, $\mathrm{H}f(x_0)(h)=(h_1,\dots,h_n)\cdot\left[\mathrm{H}f(x_0)\right]\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j$,

όπου $h=(h_1,\dots,h_n)\in R^n$ και ακόμη ότι $\left[\mathrm{H}f(x_0)\right]=\begin{pmatrix} \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix}$.

13.6 Λήμμα Έστω $\mathrm{H}:R^n\to R$ τετραγωνική μορφή. Αν η H είναι θετικά ορισμένη τότε υπάρχει σταθερά $\mathrm{M}>0$ ώστε, $\mathrm{H}(h)\geq \mathrm{M}\cdot\|h\|^2$ για κάθε $h\in R^n$.

Απόδειξη: Έστω $\mathrm{H}(h)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_i h_j$ και $S^{n-1}=\left\{h\in R^n:\|h\|=1\right\}$, ορίζουμε την συνάρτηση $g:S^{n-1}\to R: g(h)=\mathrm{H}(h)$, δηλαδή περιορίζουμε την H στο S^{n-1}.
Επειδή η g είναι συνεχής (η H είναι συνεχής στον R^n ως πολυώνυμο) και η επιφάνεια S^{n-1} της μοναδιαίας σφαίρας του R^n είναι συμπαγές σύνολο η g επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή στην S^{n-1}, η οποία είναι βεβαίως θετικός αριθμός, αφού η H είναι θετικά ορισμένη. Έστω $\mathrm{M}=\min\left\{g(h):\|h\|=1\right\}>0$. Επειδή η H είναι τετραγωνική μορφή θα έχουμε, ότι αν $h\neq 0$ τότε, $\mathrm{H}(h)=\mathrm{H}\left(\frac{h}{\|h\|}\cdot\|h\|\right)=\|h\|^2\cdot\mathrm{H}\left(\frac{h}{\|h\|}\right)=\|h\|^2\cdot g\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\geq\|h\|^2\cdot\mathrm{M}$. Αν $h=0$ το αποτέλεσμα είναι προφανώς σωστό.

Πρόκειται να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα για διαφορίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που γενικεύει το ακόλουθο κλασσικό αποτέλεσμα για μια πραγματική μεταβλητή.
Αν $\mathrm{I}\subseteq R$ είναι ανοικτό διάστημα, $x_0\in\mathrm{I}$ και $f:\mathrm{I}\to R$ είναι μια συνάρτηση της κλάσης C^2 ώστε $f'(x_0)=0$ τότε:
(ι) Αν $f''(x_0)>0$, το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της f
(ιι) Αν $f''(x_0)<0$, το x_0 είναι τοπικό μέγιστο της f.

Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $x_0\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης C^3 ώστε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f. Επειδή τότε $\nabla f(x_0)=0$, το ανάπτυγμα Taylor της f στο x_0, δεύτερης τάξης γράφεται ως εξής:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(h)+R_2(h,x_0).$$

Η γενίκευση στην οποία αναφερθήκαμε έχει ως ακολούθως.

13.7 Θεώρημα (Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου .) Αν η $f : U \subseteq R^n \to R$ είναι της κλάσης C^3 και το $x_0 \in U$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της f τότε:

(ι) Αν η Εσσιανή $\mathrm{H}f(x_0)$ είναι <u>θετικά</u> ορισμένη, δηλαδή αν οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα $[\mathrm{H}f(x_0)]$ της $\mathrm{H}f(x_0)$ είναι όλες θετικές , τότε το x_0 είναι <u>τοπικό ελάχιστο</u> για την f .

(ιι) Αν η Εσσιανή $\mathrm{H}f(x_0)$ είναι <u>αρνητικά</u> ορισμένη, δηλαδή αν οι ιδιοτιμές του $[\mathrm{H}f(x_0)]$ είναι όλες αρνητικές, τότε το x_0 είναι <u>τοπικό</u> μέγιστο για την f .

(ιιι) Αν η Εσσιανή $\mathrm{H}f(x_0)$ δεν είναι θετικά αλλά ούτε αρνητικά ημιορισμένη, δηλαδή ο $[\mathrm{H}f(x_0)]$ έχει αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές τότε το x_0 είναι σαγματικό σημείο της f .

Απόδειξη: Όπως παρατηρήσαμε ήδη ο τύπος του Taylor στο x_0, δεύτερης τάξης γράφεται $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(h) + R_2(h, x_0)$ όπου $\lim\limits_{h\to 0}\frac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} = 0$.

(ι) Επειδή η $H(f)(x_0)$ είναι θετικά ορισμένη από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε $\mathrm{H}f(x_0)(h) \geq \mathrm{M}\|h\|^2$ για κάθε $h \in R^n$.

Αφού $\frac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, υπάρχει $\delta > 0 : 0 < \|h\| < \delta$ τότε $|R_2(h,x_0)| < \frac{\mathrm{M}}{2}\|h\|^2$.

Συνεπώς, αν $0 < \|h\| < \delta$ τότε, $0 < \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0) + R_2(h,x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$. Άρα $f(x_0) < f(x_0+h)$ για κάθε $h \neq 0$ με $\|h\| < \delta$, δηλαδή το x_0 είναι (γνήσιο !) τοπικό ελάχιστο για την f .

Η απόδειξη στην περίπτωση που η $\mathrm{H}f(x_0)$ είναι <u>αρνητικά</u> ορισμένη είναι παρόμοια (εξάλλου έπεται αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην $-f$) και έτσι παραλείπεται.

(ιιι) Έστω $h_1, h_2 \in R^n$ ώστε, $\mu_1 = \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(h_1) > 0$ και $\mu_2 = \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(h_2) < 0$. Είναι σαφές ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε : $0 < t < \delta \Rightarrow \mu_1 - \frac{|R_2(th_1,x_0)|}{\|th_1\|^2}\cdot\|h_1\|^2 > 0$ και $\mu_2 + \frac{|R_2(th_2,x_0)|}{\|th_2\|^2}\cdot\|h_2\|^2 < 0$.

Έπεται ότι αν $0 < t < \delta$ τότε,

$$f(x_0+th_1) = f(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(th_1) + R_2(th_1,x_0) =$$

$$f(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{H}f(x_0)(h_1)t^2 + R_2(th_1,x_0) == f(x_0) + \mu_1 t^2 + R_2(th_1,x_0) > f(x_0),$$

(εφόσον $\mu_1 t^2 - |R_2(th_1,x_0)| > 0 \Rightarrow \mu_1 t^2 + R_2(th_1,x_0) \geq \mu_1 t^2 - |R_2(th_1,x_0)| > 0$).

Ανάλογα βρίσκουμε:

$f\left(x_0+th_2\right)=f\left(x_0\right)+\dfrac{1}{2}\mathrm{H}f\left(x_0\right)\left(th_2\right)+R_2\left(th_2,x_0\right)=$

$f\left(x_0\right)+\mu_2 t^2+R_2\left(th_2,x_0\right)<f\left(x_0\right)$.

Άρα για $0<t<\delta$ έχουμε, $f\left(x_0+th_2\right)<f\left(x_0\right)<f\left(x_0+th_1\right)$, από όπου συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0. Δηλαδή το x_0 είναι σαγματικό σημείο της f.

Ακολούθως εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα και την πρόταση 13.4 σε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Έστω λοιπόν $z=f\left(x,y\right)$ πραγματική συνάρτηση της κλάσης C^3, ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο U του R^2 και $\vec{x}=\left(x_0,y_0\right)\in U$ <u>κρίσιμο</u> σημείο της f, δηλαδή $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{x}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{x}\right)=0$.

Θέτομε, $a=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\vec{x}\right),\beta=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\vec{x}\right),\gamma=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\vec{x}\right)$ και $\Delta=a\gamma-\beta^2$.

Η ποσότητα $\Delta=a\gamma-\beta^2$ ονομάζεται <u>διακρίνουσα</u> και ισούται με την ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα της f στο $\vec{x}=\left(x_0,y_0\right)$. (Παρατηρούμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της f στο ακόλουθο θεώρημα είναι αντιστρέψιμος, εφόσον η ορίζουσά του ισούται με $\Delta=a\gamma-\beta^2\neq 0$.)

13.8 Θεώρημα Ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Αν $a>0$ και $a\gamma-\beta^2>0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\left(x_0,y_0\right)$

(ιι) Αν $a<0$ και $a\gamma-\beta^2>0$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\left(x_0,y_0\right)$

(ιιι) Αν $a\gamma-\beta^2<0$, το $\left(x_0,y_0\right)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απόδειξη: Ας συμβολίσουμε με Q την Εσσιανή $\mathrm{H}f\left(x_0,y_0\right)$ της f στο $\vec{x}=\left(x_0,y_0\right)$. Τότε έχουμε, $Q\left(h_1,h_2\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\vec{x}\right)h_1^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\vec{x}\right)h_1h_2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\vec{x}\right)h_2^2$, όπου $\left(h_1,h_2\right)\in R^2$.

Συνεπώς σύμφωνα με τον συμβολισμό που υιοθετήσαμε

$$Q\left(h_1,h_2\right)=ah_1^2+2\beta h_1h_2+\gamma h_2^2,\left(h_1,h_2\right)\in R^2.$$

Οι ισχυρισμοί (ι) , (ιι) και (ιιι) είναι τώρα εύκολη συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος σε συνδυασμό με την πρόταση 13.4.

Σημείωση. Μια ενδιαφέρουσα απευθείας απόδειξη του ισχυρισμού (ιιι) του θεωρήματος 13.8 έχει ως ακολούθως:

Παρατηρούμε ότι επειδή

$a\gamma-\beta^2<0$ από τον ισχυρισμό (ιιι) της πρότασης 13.4 το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της Q, επομένως υπάρχουν σημεία $\vec{u}=(u_0,u_1)$ και $\vec{v}=(v_0,v_1)$ του R^2 ώστε $Q(\vec{u})>0$ και $Q(\vec{v})<0$.

Υποθέτουμε, όπως μπορούμε, ότι $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$.

Έστω $\delta>0:\mathrm{B}(\vec{x},\delta)\subseteq U$, θεωρούμε τις συναρτήσεις (της κλάσης C^3) που ορίζονται από τους τύπους, $\varphi(t)=f(\vec{x}+t\vec{u})$ και $\psi(t)=f(\vec{x}+t\vec{v})$ για $|t|<\delta$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας δύο φορές στις συναρτήσεις φ και ψ (δηλαδή στις φ και φ' και ψ και ψ'), υπολογίζουμε ότι

$\varphi'(0)=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{u}=0$ και $\varphi''(0)=Q(\vec{u})>0$

$\psi'(0)=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{v}=0$ και $\psi''(0)=Q(\vec{u})<0$.

Έπεται από την θεωρία της μιας πραγματικής μεταβλητής ότι η φ επιτυγχάνει στο 0 τοπικό ελάχιστο και η ψ τοπικό μέγιστο. Συμπεραίνουμε ότι,

$f(\vec{x}+t\vec{v})=\psi(t)<\psi(0)=f(\vec{x})=\varphi(0)<\varphi(t)=f(\vec{x}+t\vec{u})$ για αρκετά μικρό $|t|$. Είναι σαφές από αυτές τις ανισότητες ότι η f δεν μπορεί να έχει στο σημείο $\vec{x}=(x_0,y_0)$ τοπικό ακρότατο, έτσι το $\vec{x}=(x_0,y_0)$ είναι πράγματι σαγματικό σημείο της f.

Οι υπολογισμοί, με τον κανόνα της αλυσίδας, των φ' και φ'' στην προηγούμενη απόδειξη έχουν ως εξής: Για $t\in(-\delta,\delta)$ έχουμε,

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_0+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_1, \text{ άρα, } \varphi''(t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_0\right]\cdot u_0+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_0\right]\cdot u_1+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_1\right]\cdot u_0+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_1\right]\cdot u_1=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_0^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_0u_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}+t\vec{u})\cdot u_1^2$$

Συνεπώς, $\varphi'(0)=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{u}=0$ και $\varphi''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x})\cdot u_0^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x})\cdot u_0u_1+$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x})\cdot u_1^2=Q(\vec{u})>0.$$

Οι υπολογισμοί για τις ψ' και ψ'' είναι παρόμοιοι.

Παρατηρήσεις: 1) Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης f της κλάσης C^3 κοντά στο κρίσιμο σημείο x_0 υπό την προϋπόθεση ότι ο Εσσιανός πίνακας $[\mathrm{H}f(x_0)]$ είναι αντιστρέψιμος (στην περίπτωση που η f είναι δύο μεταβλητών αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα, $\Delta=a\gamma-\beta^2\neq 0$) καθορίζεται από το <u>δευτεροβάθμιο</u> μέρος της, δηλαδή την Εσσιανή $\mathrm{H}f(x_0)$ της f. Τα κρίσιμα σημεία στα οποία ο $[\mathrm{H}f(x_0)]$ είναι αντιστρέψιμος ονομάζονται <u>μη εκφυλισμένα</u>, τα υπόλοιπα κρίσιμα σημεία όπου ο $\left[\mathrm{H}f\left(x_0\right)\right]$ δεν είναι αντιστρέψιμος ονομάζονται <u>εκφυλισμένα</u> .

2)Η μελέτη μιας C^3 συνάρτησης δύο μεταβλητών συνοψίζεται ως εξής:

(α) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$

(β) Υπολογίζουμε τις Εσσιανές των κρίσιμων σημείων της f :

(ι) κάποιες από αυτές μπορεί να είναι θετικά ορισμένες, υποδεικνύοντας τα σχετικά ελάχιστα, κάποιες μπορεί να είναι αρνητικά ορισμένες υποδεικνύοντας τα σχετικά μέγιστα ($\Delta = a\gamma-\beta^2>0$).

(ιι) Κάποιες μπορεί να μην είναι <u>ούτε</u> θετικά <u>ούτε</u> αρνητικά ορισμένες υποδεικνύοντας τα <u>σαγματικά σημεία</u> (αν $\Delta<0$).

(γ) Τα κρίσιμα σημεία για τα οποία $\Delta = a\gamma-\beta^2\neq 0$ (μη εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία) είναι (τοπικά) μέγιστα και ελάχιστα ή σαγματικά σημεία. Τα υπόλοιπα κρίσιμα σημεία όπου $\Delta=0$ εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία), συνήθως ελέγχονται απευθείας.

3) Το ‘‘ Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου’’ (θεώρημα 13.7) μπορεί να αποφανθεί υπό την προϋπόθεση ότι το κρίσιμο σημείο είναι μη εκφυλισμένο, διότι τότε όλες οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα είναι μη μηδενικές, από όπου έπεται ότι μια από τις τρείς περιπτώσεις του θεωρήματος ισχύει. Παραδείγματα όπως τα $f\left(x,y\right)=\pm\left(x^4+y^4\right)$ και x^4-y^4, δείχνουν ότι η f μπορεί να έχει ελάχιστο, μέγιστο ή σαγματικό σημείο αντίστοιχα στο $\left(0,0\right)$, ενώ ο Εσσιανός πίνακας στο σημείο αυτό είναι ο μηδενικός πίνακας

Παραδείγματα: 1) Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f\left(x,y\right)=x^3+x^2y-y^2-4y,\quad \left(x,y\right)\in R^2.$$

Λύση $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2xy,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2-2y-4$. Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2xy=0\\ x^2-2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(3x+2y\right)=0\\ x^2-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}x=0\\ x^2-2y=4\end{cases}\right\}\vee\left\{\begin{matrix}3x+2y=0\\ x^2-2y=4\\ x\neq 0\end{matrix}\right\}.$$

Το πρώτο σύστημα έχει ως λύσεις τις $x=0$ και $y=-2$.

Το δεύτερο σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left\{\begin{matrix}x^2+3x-4=0\\ x^2-2y=4\\ x\neq 0\end{matrix}\right\}$ και έχει ως λύσεις τις

$x=1$ και $y=-\dfrac{3}{2}$ και $x=-4$ και $y=6$

Έτσι οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι: $\left(0,-2\right),\left(1,-\dfrac{3}{2}\right),\left(-4,6\right)$.

Έπεται ότι τα κρίσιμα σημεία της f είναι $\left(0,-2\right),\left(1,-\dfrac{3}{2}\right),\left(-4,6\right)$

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της f είναι:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Στο κρίσιμο σημείο (x_0,y_0) η Εσσιανή είναι: $Q(h_1,h_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)h_2^2$.

(Ι) Στο κρίσιμο σημείο $(0,-2)$ έχουμε: $a=-4,\beta=0,\gamma=-2$. Επομένως $a<0$ και $a\gamma-\beta^2=(-4)\cdot(-2)-0^2=8>0$. Άρα η f έχει στο $(0,-2)$ τοπικό μέγιστο.

(ΙΙ) Στο κρίσιμο σημείο $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ έχουμε: $a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1,-\frac{3}{2}\right)=6+2\left(-\frac{3}{2}\right)=6-3=3$, $\beta=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(1,-\frac{3}{2}\right)=2$ και $\gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1,-\frac{3}{2}\right)=-2$.

Συνεπώς $a\gamma-\beta^2=3\cdot(-2)-2^2=-10<0$ και άρα το $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ είναι σαγματικό σημείο για την f.

(ΙΙΙ) Στο κρίσιμο σημείο $(-4,6)$ έχουμε: $a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,6)=6\cdot(-4)+2\cdot 6=-24+12=-12$, $\beta=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-4,6)=2\cdot(-4)=-8$ και $\gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-4,6)=-2$. Συνεπώς, $a\gamma-\beta^2=(-12)\cdot(-2)-(-8)^2=24-64=-40<0$ και το $(-4,6)$ είναι σαγματικό σημείο για την f.

Η μελέτη μας μπορεί να συνοψισθεί στον ακόλουθο πίνακα:

x	y	$a=f_{xx}$	$\beta=f_{xy}$	$\gamma=f_{yy}$	$\Delta=a\gamma-\beta^2$	Κατάταξη
0	-2	-4	0	-2	8	Τοπικό μέγιστο
1	$-\frac{3}{2}$	3	2	-2	-10	Σαγματικό σημείο
-4	6	-12	-8	-2	-40	Σαγματικό σημείο

2) Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης
$f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$, $(x,y)\in R^2$. (Πρβλ το παράδειγμα (5) μετά το θεώρημα 13.2)

Λύση $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2-10x-8y$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y-8x-10y$

Έτσι έχουμε να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ δηλαδή το $\begin{cases}2xy^2-10x-8y=0\\ 2x^2y-8x-10y\end{cases}$ (1)

Παρατηρούμε ότι αν $x=0$ τότε (και μόνο τότε) $y=0$.

Άρα μία λύση είναι η $(x,y)=(0,0)$. Υποθέτοντας ότι $x\neq 0$ (και άρα $y\neq 0$) πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με $-y$ και την πρώτη με x και καταλήγουμε στο $\left\{\begin{array}{l} 2x^2y^2-10x^2-8xy=0 \\ -2x^2y^2+8xy+10y^2=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2=y^2$

Συνεπώς με την υπόθεση ότι $x\neq 0$ (και $y\neq 0$) το αρχικό σύστημα ισοδυναμεί με το

$$\left\{\begin{array}{l} x^2=y^2 \\ 2x^2y-8x-10y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \text{ και } y=-1 \\ x=-1 \text{ και } y=1 \\ x=3 \text{ και } y=3 \\ x=-3 \text{ και } y=-3 \end{array}\right\}$$

Έτσι οι λύσεις του συστήματος (1) και άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα ακόλουθα $(0,0),(1,-1),(-1,1),(3,3),(-3,-3)$.

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της f είναι:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^2-10$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy-8$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2-10$

Η Εσσιανή της f στο κρίσιμο σημείο (x_0,y_0) είναι: $Q(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h_1^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)h_1h_2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)h_2^2$.

(I) Στο κρίσιμο σημείο $(0,0)$ έχουμε:

$a=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-10$, $\beta=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-8$ και $\gamma=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-10$

Συνεπώς $a=-10<0$ και $a\gamma-\beta^2=(-10)(-10)-(-8)^2=100-64=36>0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την f.

(II) Στο κρίσιμο σημείο $(1,-1)$ έχουμε: $a=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)=-8$, $\beta=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1)=-12$, $\gamma=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)=-8$.

Συνεπώς ($a=-8$) και $a\gamma-\beta^2=(-8)(-8)-(-12)^2=64-144<0$. Άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό σημείο για την f.

(III) Στο κρίσιμο σημείο $(-1,1)$ έχουμε: $a=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)=-8$, $\beta=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1)=-12$, $\gamma=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)=-8$.

Συνεπώς ($a=-8$) και $a\gamma-\beta^2=(-8)(-8)-(-12)^2=64-144<0$. Άρα το $(-1,1)$ είναι σαγματικό σημείο για την f.

(IV) Στο κρίσιμο σημείο $(3,3)$ έχουμε: $a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3)=2\cdot 3^2-10=8$,
$\beta=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,3)=4\cdot 3\cdot 3-8=28$ και $\gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,3)=2\cdot 3^2-10=8$

Συνεπώς ($a=8$ και) $a\gamma-\beta^2=8\cdot 8-28^2=64-28^2<0$. Έτσι το $(3,3)$ είναι επίσης σαγματικό σημείο για την f.

(V) Στο κρίσιμο σημείο $(-3,-3)$ έχουμε: $a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,-3)=2\cdot(-3)^2-10=8$,
$\beta=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-3,-3)=4\cdot(-3)\cdot(-3)-8=28$ και $\gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,-3)=2\cdot(-3)^2-10=8$.

Έπεται όπως προηγουμένως ότι $a\gamma-\beta^2=8\cdot 8-28^2=64-28^2<0$.

Έτσι και το σημείο $(-3,-3)$ είναι επίσης σαγματικό σημείο για την f.

3)Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=x^3-3x-y^3+9y+z^2.$$

Λύση Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f είναι οι, $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2+9$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2z$.

Οι μερικές παράγωγοι της f δεύτερης τάξης είναι οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2$ όλες οι υπόλοιπες μικτές παράγωγοι της f δεύτερης τάξης είναι ταυτοτικά μηδέν ($\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0$, κτλ).

Έπεται ότι ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0,y_0,z_0) είναι ο

$$\left[\mathrm{H}f(x_0,y_0,z_0)\right]=\begin{pmatrix}6x_0 & 0 & 0\\ 0 & -6y_0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Η Εσσιανή $Q=\mathrm{H}f(x_0,y_0,z_0)$ είναι η τετραγωνική μορφή:

$$Q(h_1,h_2,h_3)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)h_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)h_2^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)h_3^2+$$
$$2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0)h_1h_3+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0)h_2h_3\right)$$
$$=6x_0h_1^2-6y_0h_2^2+2h_3^2,\ h=(h_1,h_2,h_3)\in R^3.$$

Τα κρίσιμα σημεία (x_0, y_0, z_0) της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα ακόλουθα: (α) $\left(1, \sqrt{3}, 0\right)$, (β) $\left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$, (γ) $\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right)$ και (δ) $\left(-1, \sqrt{3}, 0\right)$.

Έτσι έχουμε:

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathrm{H}f\left(1, \sqrt{3}, 0\right)$ είναι το $\varphi(\lambda) = (6-\lambda)\left(-6\sqrt{3}-\lambda\right)(2-\lambda)$, που έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$. Επειδή οι ρίζες αυτές είναι ετερόσημες το κρίσιμο σημείο $\left(1, \sqrt{3}, 0\right)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathrm{H}f\left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$ είναι το $\varphi(\lambda) = (6-\lambda)\left(6\sqrt{3}-\lambda\right)(2-\lambda)$, που έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 6\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ οι οποίες είναι θετικές, άρα το κρίσιμο σημείο $\left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

(γ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathrm{H}f\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right)$ είναι το $\varphi(\lambda) = (-6-\lambda)\left(6\sqrt{3}-\lambda\right)(2-\lambda)$, που έχει ρίζες τις $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 6\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$. Επειδή οι ρίζες αυτές είναι ετερόσημες το κρίσιμο σημείο $\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(δ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathrm{H}f\left(-1, \sqrt{3}, 0\right)$ είναι το $\varphi(\lambda) = (-6-\lambda)\left(-6\sqrt{3}-\lambda\right)(2-\lambda)$, που έχει ρίζες τις $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -6\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$. Επειδή οι ρίζες αυτές είναι ετερόσημες το κρίσιμο σημείο $\left(-1, \sqrt{3}, 0\right)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

4)Έστω $f(x, y) = \dfrac{ax^2 + by^2}{e^{x^2+y^2}}, (x, y) \in R^2$, όπου $a > b > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Λύση $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + by^2\right) \cdot e^{x^2+y^2} - \left(ax^2 + by^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right)}{e^{2\left(x^2+y^2\right)}} = \frac{2x\left(a - ax^2 - by^2\right)}{e^{x^2+y^2}},$$

$(x, y) \in R^2$.

Έπεται ότι (λόγω συμμετρίας): $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y\left(b - ax^2 - by^2\right)}{e^{x^2+y^2}}$, $(x, y) \in R^2$.

Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι βέβαια C^{∞} – διαφορίσιμη στο R^2 ως πηλίκο των C^{∞} – διαφορίσιμων συναρτήσεων ax^2+by^2 (πολυωνυμική) και της $e^{x^2+y^2}$.

Λύνουμε τώρα το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της f.

Έτσι έχουμε το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{2x\left(a-ax^2-by^2\right)}{e^{x^2+y^2}}=0 \\ \dfrac{2y\left(b-ax^2-by^2\right)}{e^{x^2+y^2}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x\left(ax^2+by^2-a\right)=0 \\ y\left(ax^2+by^2-b\right)=0 \end{cases}\right\} (1).$$

Μια προφανής λύση του συστήματος (1) είναι η $x=0=y$.

Οι υπόλοιπες λύσεις του (1) είναι οι λύσεις των συστημάτων $\begin{cases} x=0 \\ by^2-b=0 \end{cases}$ και $\begin{cases} y=0 \\ ax^2-a=0 \end{cases}$, οι οποίες είναι οι $x=0, y=1$ και $x=0, y=-1$ για το πρώτο και $x=1, y=0$ και $x=-1, y=0$ για το δεύτερο.

Έτσι οι λύσεις του (1) και άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι ακόλουθες: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

Παρατηρούμε ότι: $f(0,0)=0$, $f(0,1)=f(0,-1)=\dfrac{b}{e}$ και $f(1,0)=f(-1,0)=\dfrac{a}{e}$, άρα η μεγαλύτερη τιμή είναι η $f(1,0)=f(-1,0)=\dfrac{a}{e}$ (2)

Ισχυρισμός: $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=0$

Απόδειξη ισχυρισμού. Προφανώς ισχύει $0\le f(x,y)\le \dfrac{a\left(x^2+y^2\right)}{e^{x^2+y^2}}$, $(x,y)\in R^2$. Θέτουμε $z=x^2+y^2$ και παρατηρούμε ότι $z\to+\infty \Leftrightarrow \sqrt{z}=\|(x,y)\|\to+\infty$.

Όπως είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό μιας μεταβλητής $\dfrac{z}{e^z}\xrightarrow[z\to+\infty]{}0 \Rightarrow \dfrac{az}{e^z}\xrightarrow[z\to+\infty]{}0$ για κάθε $a\in R$.

Έπεται ότι, $\dfrac{a\left(x^2+y^2\right)}{e^{x^2+y^2}}\xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{}0 \Rightarrow f(x,y)=\dfrac{ax^2+by^2}{e^{x^2+y^2}}\xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{}0$.

Έστω τώρα $\delta>0$ αρκετά μεγάλο ώστε: $\|(x,y)\|>\delta \Rightarrow 0\le f(x,y)<\dfrac{a}{e}$.

(Η ύπαρξη τέτοιου δ έπεται από τον ισχυρισμό). Είναι τότε σαφές ότι, $(1,0)\in \widehat{\mathrm{B}}(0,\delta)$.

Έπεται τότε ότι: $\dfrac{a}{e}=f(1,0)\le \sup\limits_{\|(x,y)\|\le\delta} f(x,y)=\sup\limits_{(x,y)\in R^2} f(x,y)$ (3)

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε το $\sup\limits_{(x,y)\in R^2} f(x,y)$ αρκεί να περιοριστούμε στον κλειστό δίσκο $\widehat{\mathrm{B}}(0,\delta)$.

Επειδή η f συνεχής και $\widehat{\mathrm{B}}(0,\delta)$ συμπαγές σύνολο η f επιτυγχάνει μέγιστη τιμή (x_0,y_0) στον δίσκο $\widehat{\mathrm{B}}(0,\delta)$ άρα και στον R^2. Το σημείο (x_0,y_0) θα είναι ένα από τα κρίσιμα σημεία της f, δηλαδή ένα από τα $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

Επειδή από την (2) την μεγαλύτερη τιμή την παίρνει στο $(1,0)$,(και το $(-1,0)$) και η τιμή αυτή είναι $f(1,0)=f(-1,0)=\dfrac{a}{e}$, έπεται ότι στο $(1,0)$ (και στο $(-1,0)$) η f παίρνει την μέγιστη τιμή της.

Συμπέρασμα: Αν $a>b>0$ τότε,

$$0\le f(x,y)=\frac{ax^2+by^2}{e^{x^2+y^2}}\le\frac{a}{e}=f(1,0)=f(-1,0) \text{ για κάθε } (x,y)\in R^2.$$

<u>Παρατήρηση</u> Το παράδειγμα 4 μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως εξής: Η συνάρτηση $g(z)=\dfrac{z}{e^z}, z\ge 0$ παίρνει την μέγιστη τιμή της στο $z=1$ (όπως μπορεί να ελεγχθεί με παραγώγους ή με ένα επιχείρημα συμπάγειας όπως στο παράδειγμα 4). Θέτομε $z=x^2+y^2$ και παρατηρούμε ότι: $\dfrac{ax^2+by^2}{e^{x^2+y^2}}\le a\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}}\le a\dfrac{z}{e^z}\le\dfrac{a}{e}, z\ge 0$.

Επειδή, $f(1,0)=\dfrac{a}{e}$, έπεται ότι το $(1,0)$ είναι θέση ολικού μεγίστου για την f

Ασκήσεις

1)Έστω $f:R^2\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=0$. Αποδείξτε ότι η f επιτυγχάνει μέγιστη τιμή στον R^2. Γενικεύστε στον R^n.

2)Έστω $f:R^3\to R$ μια τετραγωνική συνάρτηση τριών μεταβλητών ώστε, $f(x,y,z)=ax^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\varepsilon xz+\zeta yz$. Αποδείξτε ότι μπορούμε να γράψουμε, $f(x,y,z)=(x,y,z)\mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, όπου Α ο συμμετρικός πίνακας,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a & \frac{\delta}{2} & \frac{\varepsilon}{2}\\ \frac{\delta}{2} & \beta & \frac{\zeta}{2}\\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\zeta}{2} & \gamma\end{pmatrix}.$$ Γενικεύστε για μια τετραγωνική συνάρτηση $n-$μεταβλητών.

3)Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

(α) $f\left(x,y\right)=\left(1+x^2+y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$, (β) $f\left(x,y\right)=\dfrac{9x}{x^2+y^2+1}$

(γ) $f\left(x,y\right)=e^{xy}$, (δ) $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2xy$

(ε) $f\left(x,y\right)=x^2+y^2+\dfrac{32}{xy}$, (στ) $f\left(x,y,z\right)=xyz\left(4-x-y-z\right)$

4)Δείξτε ότι η $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z^2$ έχει ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι τοπικό ακρότατο. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της f.

5)Έστω $f\left(x,y,z\right)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$. Δείξτε ότι το 0 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

6) Θεωρούμε την συνάρτηση f του παραδείγματος 5(μετά το θεώρημα 13.2)

(α) Αποδείξτε ότι το $\left(0,0\right)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f.

(β) Υπολογίστε την Εσσιανή $\mathrm{H}f\left(0,0\right)$ και συμπεράνατε ότι το $\left(0,0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο για την f.

7)(*) Έστω $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ συμμετρικός $n\times n$ πίνακας. Θέτομε $\mathrm{B}\left(x,y\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\cdot y_j$ όπου $x=\left(x_1,...,x_n\right), y=\left(y_1,...,y_n\right)\in R^n$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η Β είναι μια <u>συμμετρική διγραμμική μορφή</u> επί του R^n, δηλαδή ισχύουν:

(ι) $\mathrm{B}\left(x,y\right)=\mathrm{B}\left(y,x\right)$, (ιι) $\mathrm{B}\left(\lambda x,y\right)=\mathrm{B}\left(x,\lambda y\right)=\lambda\mathrm{B}\left(x,y\right),\left(\lambda\in R\right)$,

(ιιι) $\mathrm{B}\left(x_1+x_2,y\right)=\mathrm{B}\left(x_1,y\right)+\mathrm{B}\left(x_2,y\right)$

και (άρα) (ιv) $\mathrm{B}\left(x,y_1+y_2\right)=\mathrm{B}\left(x,y_1\right)+\mathrm{B}\left(x,y_2\right)$

(β) Η απεικόνιση $x\in R^n\to\mathrm{B}\left(x,x\right)$ είναι μια τετραγωνική μορφή επί του R^n

(γ) Αν η Β είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή επί του R^n με την επιπλέον ιδιότητα ότι $\mathrm{B}\left(x,x\right)>0,\forall x\neq 0$ (η Β είναι θετικά ορισμένη). Τότε η Β λέγεται ένα <u>εσωτερικό γινόμενο</u> επί του R^n. (Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο το παίρνουμε θεωρώντας την διγραμμική μορφή $\mathrm{B}\left(x,y\right)$ που ορίζει ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας I_n). Αποδείξτε ότι:

1) Για ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{B}\left(x,y\right)$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz,

$$\left|\mathrm{B}\left(x,y\right)\right|\leq\sqrt{\mathrm{B}\left(x,x\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{B}\left(y,y\right)}.$$

2) Η απεικόνιση $x\in R^n\to\left\|x\right\|\underset{o\rho}{=}\sqrt{\mathrm{B}\left(x,x\right)}$, έχει τις ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας:

(ι) $\left\|x\right\|\geq 0, x\in R^n$ και $\left\|x\right\|=0\Leftrightarrow x=0$,

(ιι) $\left\|\lambda x\right\|=\left|\lambda\right|\cdot\left\|x\right\|,\lambda\in R, x\in R^n$ και

(ιιι) $\left\|x+y\right\|\leq\left\|x\right\|+\left\|y\right\|, x,y\in R^n$ (τριγωνική ανισότητα).

Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται <u>νόρμα</u> επί του R^n.

[Υπόδειξη. Για το (γ) 1). Έστω $x,y\in R^n$ με $y\neq 0$. Παρατηρούμε ότι,

$$(3)\ 0\leq\mathrm{B}\left(x+ty,x+ty\right)=\mathrm{B}\left(x,x\right)+2t\mathrm{B}\left(x,y\right)+t^2\mathrm{B}\left(y,y\right)$$

για κάθε $t \in R$. Η δεξιά πλευρά της ταυτότητας (3) είναι ένα τριώνυμο φ(t) ως προς t με ελάχιστη τιμή στο $t_0 = -\dfrac{B(x,y)}{B(y,y)}$. Αντικαθιστώντας το t με το t_0 στην ταυτότητα (3) βρίσκουμε $0 \le B(x+t_0y, x+t_0y) = B(x,x) - \dfrac{|B(x,y)|^2}{B(y,y)}$, από όπου έπεται η ζητούμενη ανισότητα. (Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι, επειδή $\varphi(t) \ge 0, \forall t \in R$ και ο συντελεστής $B(y,y)$ του t^2 είναι θετικός, θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι, $\Delta = 4(B(x,y))^2 - 4B(x,x)\cdot B(y,y) \le 0$ επομένως, $|B(x,y)| \le \sqrt{B(x,x)}\cdot\sqrt{B(y,y)}$.). [Καθόσον αφορά το (γ) 2), χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα.]

Άσκηση 8) (*) Έστω $\|\cdot\|$ τυχούσα νόρμα στον R^n. Αν $|\cdot|$ συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα, αποδείξτε ότι, υπάρχουν σταθερές $m > 0$ και $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in R^n$,

$$m|x| \le \|x\| \le M|x| .$$

[Υπόδειξη Θέτομε $M = n \cdot \max\{\|e_1\|, ..., \|e_n\|\}$, όπου $\{e_1, ..., e_n\}$ η συνήθης βάση του R^n. Αν $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ τότε $x = x_1e_1 + ... x_ne_n$, άρα $\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \dfrac{M}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Όμως $|x_i| \le |x|, \forall i = 1,2,...,n$. Επομένως $\|x\| \le M|x|$ (1). Από την (1) έπεται ότι $\|x-y\| \le M|x-y|, \forall x, y \in R^n$ η οποία έπεται ότι η $\|\cdot\|$ είναι (Lipschitz και άρα) συνεχής συνάρτηση επί του R^n. Η $\|\cdot\|$ ως συνεχής επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή επί του συμπαγούς συνόλου $S^{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$. Έστω $m = \min\{\|x\| : x \in S^{n-1}\} > 0$. Η ανισότητα $m|x| \le \|x\|, x \in R^n$ αποδεικνύεται όπως η αντίστοιχη ανισότητα στο Λήμμα 13.6.]

<u>Σχόλιο</u> (*) Έχοντας μια νόρμα στον R^n μπορούμε να ορίσουμε σφαίρες ανοικτά και κλειστά σύνολα (όρια συναρτήσεων και ακολουθιών) ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και για την Ευκλείδεια νόρμα. Το αποτέλεσμα που περιγράφεται στην άσκηση 8) μας λέει ότι όλες οι νόρμες στον R^n είναι μεταξύ τους <u>ισοδύναμες</u> και άρα ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα (τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες, συνεχείς συναρτήσεις κτλ.) με την Ευκλείδεια νόρμα. Ακόμη σημειώνουμε ότι δεν προέρχονται όλες οι νόρμες στον R^n από κάποιο εσωτερικό γινόμενο (όπως περιγράφεται στην άσκηση 7)). Ένα παράδειγμα τέτοιας νόρμας είναι η $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$

Προσοχή η επόμενη παράγραφος που είναι «το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης» αρχίζει πάλι από την σελίδα 152.

Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $f : \mathrm{I} \to R$ διαφορίσιμη της κλάσης C^1 και $a \in \mathrm{I} : f'(a) \neq 0$. Τότε από την συνέχεια της f' υπάρχει $\delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \subseteq \mathrm{I}$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Συνεπώς, είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$ αν $f'(a) > 0$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$ αν $f'(a) < 0$. Έπεται ότι η f είναι $1-1$ στο $:(a-\delta, a+\delta)$ (γνήσια μονότονη στο $:(a-\delta, a+\delta)$) και ακόμη ότι η $g = f^{-1} \big| (a-\delta, a+\delta)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ για $x \in (a-\delta, a+\delta)$ και $y = f(x)$.

Δηλαδή η υπόθεση ότι η f είναι C^1 στο Ι και ότι $f'(a) \neq 0$ για κάποιο $a \in \mathrm{I}$ έπεται ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο a, με άλλα λόγια αν y «κοντά» στο $f(a)$ μπορούμε να λύσουμε μοναδικά την εξίσωση $y = f(x)$ για x «κοντά» στο a. Ο σκοπός μας είναι η παρουσίαση του αντίστοιχου αποτελέσματος στις πολλές μεταβλητές.

14.1 Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης). Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και $f : D \subseteq R^n \to R^n$ C^1 απεικόνιση. Αν $a \in D$ ώστε $\det\left(J_{f(a)}\right) \neq 0$, τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο a, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq R^n$ με $a \in U$ και $b = f(a) \in V$, ώστε η $f|U$ να είναι $1-1$, $f(U) = V$ και η αντίστροφη απεικόνιση $g = f^{-1} : V \to U$ να είναι της κλάσης C^1. Επί πλέον για τον πίνακα Jacobi της g ισχύει:

$$J_{g(f(x))} = \left[J_{f(x)}\right]^{-1} \text{ για } x \in U .$$

Αν η f είναι της κλάσης C^p, $p \geq 1$, τότε το ίδιο είναι και η $g = f^{-1}|U$.

Σημείωση. Έστω $f = (f_1, ..., f_n)$, το συμπέρασμα με άλλα λόγια του θεωρήματος είναι το ακόλουθο.

Αν $y = (y_1, ..., y_n)$ είναι σημείο «κοντά» στο $b = f(a)$ τότε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, ..., x_n) = y_n \end{cases}$$

έχει ακριβώς μια λύση «κοντά» στο a. Επί πλέον η εξάρτηση των λύσεων $x_1 = x_1(y_1, ..., y_n), ..., x_n = x_n(y_1, ..., y_n)$ (ή $x_i = g_i(y), 1 \leq i \leq n$ όπου $g = f^{-1}$ και $g = (g_1, ..., g_n)$) από τα $y_1, ..., y_n$ είναι C^1 (ή C^p).

Καθόσον αφορά τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_i}, 1 \leq i \leq n$ των λύσεων $x_i = g_i(y), 1 \leq i \leq n$, παρατηρούμε ότι επειδή ο πίνακας Jacobi $J_{g(y)}, y = f(x)$ είναι αντίστροφος του $J_{f(x)}$, όπου $J_{g(y)} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ και $J_{f(x)} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}$,οι μερικές παράγωγοι, $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(y), 1\le i, j\le n$ υπολογίζονται λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα n^2 εξισώσεων με n^2 αγνώστους, το οποίο προκύπτει από την εξίσωση των πινάκων,

$$[\, J_{g(y)} \cdot J_{f(x)} = \mathrm{I}, y = f(x), x\in U \,]$$

όπου $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ο ταυτοτικός πίνακας.

Συμβολισμός: Έστω $f : U \subseteq R^n \to R^m$ διαφορίσιμη συνάρτηση, $f = (f_1, ..., f_m)$. Αν $a \in U$ τότε ο πίνακας Jacobi $J_{f(a)}$ της f στο a μερικές φορές θα συμβολίζεται και με $J_{f(a)} = \dfrac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a)$ ($= \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$).

Παραδείγματα. 1) Η απεικόνιση $f : R^2 \to R^2$ που ορίζεται από την, $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε σημείο του R^2 αλλά δεν είναι $1-1$.

Λύση Θέτομε $u = e^x \cos y$ και $v = e^x \sin y$. Ο πίνακας Jacobi της f είναι ο

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

και η ορίζουσά του είναι η

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = e^{2x}\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) = e^{2x} > 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in R^2.$$

Έπεται προφανώς από το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε σημείο $(x, y) \in R^2$. Η f δεν είναι $1-1$, αφού $u(x, y+2\pi) = u(x, y)$ και $v(x, y+2\pi) = v(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, το παράδειγμα που εξετάσαμε μας δείχνει ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα (συνέπεια του θεωρήματος Darboux) από τον Λογισμό της μίας μεταβλητής δεν ισχύει για συναρτήσεις δύο μεταβλητών:

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα και $f : \mathrm{I} \to R$ διαφορίσιμη ώστε $f'(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$, τότε είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$. Επομένως η f είναι γνήσια μονότονη και έτσι είναι $1-1$.

Σημείωση. Οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα:

$$J_f \cdot J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f},$$

$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}$ και $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f}$, όπου $\det J_f = e^{2x}$.

Συνεπώς, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cos y}{e^x}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\sin y}{e^x}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\sin y}{e^x}$ και $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\cos y}{e^x}$. (Θέτομε $g = f^{-1}$,

οπότε, $g(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v)\right)$ και $J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$).

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε τις εξισώσεις, $\frac{x^4 + y^4}{x} = u$ και $\sin x + \cos y = v$. Κοντά σε ποια σημεία (x, y) μπορούν να επιλυθούν ως προς x, y αυτές οι εξισώσεις (εννοούμε να εκφράσουμε τα x και y ως $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$);

Λύση Εδώ έχουμε την απεικόνιση, $f : D \subseteq R^2 \to R^2 : f = (u,v)$ με $u(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x}$ και $v(x,y) = \sin x + \cos y$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D = \left\{(x,y) \in R^2 : x \neq 0\right\}$, που βέβαια είναι ανοικτό σύνολο. Ο πίνακας Jacobi της f στο $(x,y) \in D$ είναι,

$J_f = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}$ και η ορίζουσά του:

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}\right) = \frac{\sin y}{x^2}\left(y^4 - 3x^4\right) - \frac{4y^3}{x}\cos x$$

Σε εκείνα τα σημεία (x, y) όπου αυτή η έκφραση <u>ορίζεται</u> και <u>δεν</u> μηδενίζεται μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις ως προς x και y. Επομένως μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις κοντά σε εκείνα τα σημεία (x, y) για τα οποία $x \neq 0$ και επί πλέον, $\sin y\left(y^4 - 3x^4\right) \neq 4xy^3 \cos x$. (Τα σημεία αυτά συνιστούν ένα ανοικτό υποσύνολο του R^2 και άρα του D).

Για παράδειγμα, αν $x_0 = \frac{\pi}{2}$ και $y_0 = \frac{\pi}{2}$ τότε

$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}\right)(x_0, y_0) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4} \neq 0$. Επομένως μπορούμε να λύσουμε τις δοσμένες εξισώσεις ως προς x και y κοντά στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Σημείωση: Οι παράγωγοι των λύσεων, $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$ υπολογίζονται σύμφωνα με το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως, αντιστρέφοντας τον πίνακα Jacobi της f. Έτσι έχουμε: $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$, $J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$.

(Γράφουμε, $g = f^{-1}$ και τότε, $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$). Άρα,

$J_f \cdot J_g = J_g \cdot J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}$,

$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f}$.

Έτσι βρίσκουμε: $\frac{\partial x}{\partial u} = -\sin y \cdot \frac{x^2}{\sin y\left(y^4 - 3x^4\right) - 4xy^3 \cos x}$,

$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{4y^3}{x} \cdot \frac{x^2}{\sin y\left(y^4 - 3x^4\right) - 4xy^3 \cos x} = \frac{-4y^3 x}{\sin y\left(y^4 - 3x^4\right) - 4xy^3 \cos x}$.

Ανάλογα υπολογίζουμε και τις παραγώγους $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

Παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι που βρήκαμε εκφράζονται μέσω των x και y και όχι των u και v. Ο υπολογισμός αυτών των παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δίνει την τιμή της παραγώγου στο $\left(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\right)$. Για παράδειγμα αν $x_0 = y_0 = \frac{\pi}{2}$ τότε

$u(x_0,y_0) = \frac{\pi^3}{4}, v(x_0,y_0) = 1$. Έτσι, $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\left(\frac{\pi^3}{4},1\right)} = \frac{-\left(x_0^2 \sin y_0\right)}{\sin y_0\left(y_0^4 - 3x_0^4\right) - 4y_0^3 x_0 \cos x_0} = \frac{2}{\pi^2}$.

(Θυμίζουμε ότι, $x = x(u,v), y = y(u,v)$ και $\left[J_{g(f(x_0,y_0))}\right] = \left[J_{f(x_0,y_0)}\right]^{-1}$, όπου $g = f^{-1}$ η τοπική αντίστροφη της f στο (x_0, y_0).

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως μας υποδεικνύει την <u>ύπαρξη</u> λύσεων σε εξισώσεις και μας λέει πώς να διαφορίσουμε τις λύσεις αν και ενδέχεται να μην είναι δυνατόν να καταγράψουμε τις λύσεις αυτών των εξισώσεων.

3)Έστω $g: R^n \to R^n$ C^1 συνάρτηση, ώστε $\|g(x)\| \le \mathrm{M}\|x\|^2, x \in R^n$ για κάποια σταθερά $\mathrm{M} > 0$. Αν $L: R^n \to R^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε η συνάρτηση $f(x) = g(x) + L(x)$, $x \in R^n$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο 0.

<u>Λύση</u> Παρατηρούμε ότι αν $T: R^n \to R^n$ η σταθερά συνάρτηση 0 ($T(x) = 0$ για κάθε $x \in R^n$) τότε (παρατηρώντας ότι $g(0) = 0$)

$\frac{\|g(x) - g(0) - T(x-0)\|}{\|x - 0\|} = \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \le \frac{\mathrm{M} \cdot \|x\|^2}{\|x\|} = \mathrm{M}\|x\|$ για κάθε $x \ne 0$.

Συνεπώς $\lim_{x\to 0}\frac{\left\|g(x)-g(0)-T(x-0)\right\|}{\left\|x-0\right\|}\le \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{M}\cdot\left\|x\right\|\right)=0$. Έπεται ότι $Dg(0)=\mathrm{T}=0$.

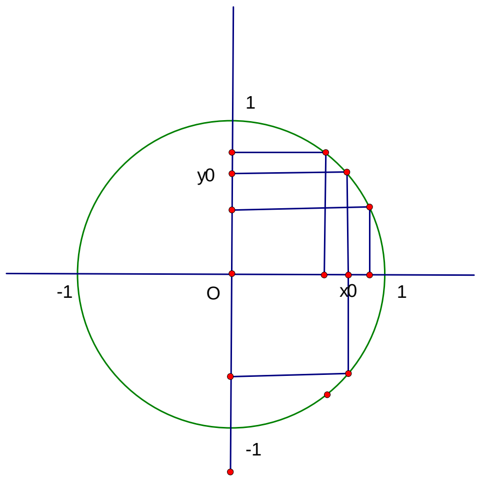
Άρα για την C^1 συνάρτηση, $f=g+L$ έχουμε $Df(0)=Dg(0)+DL(0)=Dg(0)+L=L$.

Επειδή L γραμμικός ισομορφισμός ο πίνακας Jacobi $J_{f(0)}$ ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα της γραμμικής L είναι αντιστρέψιμος, έτσι έχουμε το συμπέρασμα

Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Έστω $F: D \subseteq R^2 \to R$ μια (τουλάχιστον) C^1 συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό D και $(x_0, y_0) \in D$ ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη μοναδικής διαφορίσιμης συνάρτησης f ορισμένης σε μια περιοχή V του x_0 ώστε $y_0 = f(x_0)$ και επιπλέον $F(x, f(x)) = 0$ για κάθε $x \in V$. Το ενδιαφέρον μας αυτό δικαιολογείται και από το γεγονός ότι οι επίπεδες καμπύλες ορίζονται συνήθως από εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$. Έτσι θα θέλαμε να γνωρίζουμε, αφενός αν οι καμπύλες αυτές είναι τοπικά γραφήματα διαφορίσιμων συναρτήσεων , δηλαδή αν μπορούμε να γράψουμε $y = f(x), x \in \mathrm{I}$ και συνεπώς $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathrm{I}$, όπου Ι διάστημα του R, και αφετέρου να υπολογίσουμε την παράγωγο $\dfrac{df}{dx}$ της f.

Για παράδειγμα, αν $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in R^2 : x_0^2 + y_0^2 = 1$ με $x_0 \neq \pm 1$, μπορούμε να ορίσουμε ως $f(x)$ την κατάλληλη τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης $1 - x^2$. Το σημείο y_0 καθορίζει ποια ρίζα πρέπει να πάρουμε: Έτσι αν $y_0 > 0$ τότε η $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ ικανοποιεί την απαίτησή μας ενώ αν $y_0 < 0$ τότε η $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Τα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ αποκλείονται καθώς οι συναρτήσεις $x \in [-1, 1] \to \sqrt{1 - x^2}$ και $x \in [-1, 1] \to -\sqrt{1 - x^2}$ δεν παραγωγίζονται στα σημεία ± 1 (εξάλλου υπάρχουν σημεία $(x, 0)$ πολύ κοντά στο $(1, 0)$ ή στο $(-1, 0)$ όπου η τετραγωνική ρίζα της $1 - x^2$ δεν ορίζεται).



Παρατηρούμε ότι αν $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ή $(-1, 0)$ τότε $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Επομένως, φαίνεται ότι μια συνθήκη του τύπου $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ είναι αναγκαία ώστε τοπικά να υπάρχει μοναδική διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(x_0) = y_0$ και $F(x, f(x)) = 0$.

Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε μια «ομαλή» συνάρτηση $F: D \subseteq R^n \times R^m \to R^m$ και μελετούμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ ή ισοδύναμα το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Όπου βέβαια, $F=\left(F_1,...,F_m\right)$. Ο σκοπός μας είναι να επιλύσουμε το ανωτέρω σύστημα των $m-$εξισώσεων ως προς τους αγνώστους $y_1,y_2,...,y_m$ και να εκφράσομε τις λύσεις ως συναρτήσεις των $x_1,...,x_n$ δηλαδή $y_1=y_1\left(x_1,...,x_n\right),\ldots,y_m=y_m\left(x_1,...,x_n\right)$.

14.2 Θεώρημα (Πεπλεγμένης συνάρτησης). Έστω $D\subseteq R^n\times R^m$ ανοικτό, και $F:D\to R^m$ συνάρτηση της κλάσης C^p ($p\geq 1$), $F=\left(F_1,...,F_m\right)$ και $\left(a,b\right)\in D$ με $F\left(a,b\right)=0$ ($a\in R^n$ και $b\in R^m$). Θεωρούμε τον πίνακα

$$\Delta=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\left(a,b\right).....\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\left(a,b\right) \\ .... \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\left(a,b\right).....\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(a,b\right) \end{pmatrix}$$

($F\left(x,y\right)=\left(F_1\left(x,y\right),...,F_m\left(x,y\right)\right)$, όπου $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)$, $\left(x,y\right)\in D$), και υποθέτουμε για την ορίζουσά του ότι $\det\Delta\neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $U\subseteq R^n$ με $a\in U$ και μια μοναδική συνάρτηση $f:U\to R^m$ της κλάσης C^p ώστε, $f\left(a\right)=b$ και $F\left(x,f\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x\in U$. (Εννοείται ότι $U\times f\left(U\right)\subseteq D$).

Σημείωση. Το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορεί να αποδειχθεί με εφαρμογή του θεωρήματος αντιστρόφου συναρτήσεως στην συνάρτηση: $\left(x,y\right)\in D\subseteq R^n\times R^m\to\left(x,F\left(x,y\right)\right)\in R^n\times R^m$.

Παρατήρηση. Από την εξίσωση $F\left(x,f\left(x\right)\right)=0,x\in U$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f, δηλαδή τις $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},...,\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}\right),i=1,2,...,n$, όπου $f=\left(f_1,...,f_m\right)$, με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

Έστω για απλότητα $m=1$, δηλαδή $f:U\subseteq R^n\to V\subseteq R$ και $F:D\subseteq R^n\times R\to R$. Ορίζουμε, $g:U\to R^n\times R$ με $g=\left(\pi_1,...,\pi_n,f\right)$, όπου π_i η i προβολή, $i=1,2,...,n$ και παρατηρούμε ότι, $Fog=F\left(\pi_1,...,\pi_n,f\right)$, άρα αν $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in U$ τότε, $\left(Fog\right)\left(x_1,...,x_n\right)=F\left(x_1,...,x_n,f\left(x_1,...,x_n\right)\right)=F\left(x_1,...,x_n,y\right)$ όπου $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$.

Έπεται από τον κανόνα αλυσίδας ότι ($\underbrace{U\subseteq R^n\xrightarrow{g}D\subseteq R^n\times R\xrightarrow{F}R}_{Fog}$) αν $1\leq i\leq n$ τότε: $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial\pi_k}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (1) αφού, $\dfrac{\partial\pi_k}{\partial x_i}=\begin{cases}0,i\neq k\\1,i=k\end{cases}$.

Επειδή όμως, $F\left(x, f\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x \in U$, έπεται ότι $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}\left(x\right)=0$ για κάθε $x \in U$. Συνεπώς η (1) δίνει $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, όπου ο υπολογισμός γίνεται στα σημεία $x \in U$ με $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x\right)\neq 0$.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που $m=1$ ο πίνακας Δ του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (είναι 1×1 και) είναι ο αριθμός $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(a,b\right)\neq 0$.

Στην γενική περίπτωση οι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$ της συνάρτησης $f=\left(f_1,...,f_m\right)$ υπολογίζονται ως εξής. Από τον κανόνα της αλυσίδας για την συνάρτηση $Fog: U\subseteq R^n \to R^m$ όπου $g=\left(\pi_1,...,\pi_n, f_1,...,f_m\right)$ έχουμε για το διαφορικό της Fog στο $x\in U$, $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $0=D\left(Fog\right)\left(x\right)=DF\left(y\right)oDg\left(x\right)$ όπου $y=g\left(x\right)=\left(x_1,...,x_n, f_1\left(x_1,...,x_n\right),..., f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)$

Άρα για τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi έχουμε: $0=\left[D\left(Fog\right)\left(x\right)\right]=\left[DF\left(y\right)\right]\cdot\left[Dg\left(x\right)\right]$ ή $0=\left(A,B\right)\cdot\begin{pmatrix} I \\ C\end{pmatrix}$ (1), όπου,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

και I ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας.

Έπεται από την (1) ότι, $0=A+BC$ ή $C=-B^{-1}A$.

Από την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε τις ζητούμενες μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$ της συνάρτησης f.

Παράδειγμα 1 Έστω ότι δίδεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left(\Sigma\right)\ \begin{cases} xu+yv^2=0 \\ xv^3+y^2u^6=0\end{cases}$$

(α) Μπορεί το (Σ) να επιλυθεί ως προς u και v συναρτήσει των x και y κοντά στα σημεία: (ι) $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$

και (ιι) $x=0, y=1, u=0, v=0$;

(β) Υπολογίστε την $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=1$ και $y=-1$ και $x=0, y=1$, αν υπάρχει.

Λύση Θεωρούμε την συνάρτηση $F: R^2\times R^2 \to R^2, F=\left(F_1, F_2\right)$ όπου, $F_1\left(x,y,u,v\right)=xu+yv^2$ και $F_2\left(x,y,u,v\right)=xv^3+y^2u^6$. Η F είναι της κλάσης C^∞ στο

$R^2 \times R^2 \cong R^4$ και $F(1,-1,1,-1) = \left(1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)^2, 1\cdot(-1)^3 + (-1)^2\cdot 1^6\right) = (0,0)$, επίσης $F(0,1,0,0) = (0,0)$.

Θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως προς $u(x,y)$ και $v(x,y)$.

Έτσι θεωρούμε την ορίζουσα, $\det\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix} = 3x^2v^2 - 12y^3u^5v$.

Στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$ έχουμε ότι $\det\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Έπεται από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης ότι υπάρχει μοναδική λύση του (Σ) ως προς $u(x,y), v(x,y)$ κοντά στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$.

Διαφορίζοντας ως προς x τις εξισώσεις του συστήματος (Σ) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xu + yv^2\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot u + x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial x}\cdot v^2 + y\frac{\partial v^2}{\partial x} = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$ και

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xv^3 + y^2u^6\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot v^3 + x\frac{\partial v^3}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x}\cdot u^6 + y^2\cdot\frac{\partial u^6}{\partial x} = v^3 + 3xv^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

.

Δηλαδή (Σ΄) $\left\{\begin{aligned} & u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ & v^3 + 3xv^2\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} & u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ & v^3 + 6y^2u^5\frac{\partial u}{\partial x} + 3xv^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}$

Θέτοντας $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο σύστημα: $\begin{cases} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -1 + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ Απαλείφοντας την $\frac{\partial v}{\partial x}$ βρίσκουμε: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5}{9}$ και $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{7}{9}$ (εννοείται στο σημείο, $(x,y) = (1,-1)$).

Καθόσον αφορά το σημείο $x=0, y=1, u=0$ και $v=0$, παρατηρούμε ότι $\det\Delta = 0$, έτσι το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης δεν μπορεί να αποφανθεί αν οι εξισώσεις του (Σ) επιλύονται μοναδικά σε αυτό το σημείο.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η ορίζουσα του συστήματος (Σ΄) συμπίπτει με την $\det\Delta = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}$ η οποία για $x=0, y=1, u=0, v=0$ μηδενίζεται. Έτσι η $\frac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=0, y=1$ δεν υπάρχει.

Σημείωση Διαφορίζοντας ως προς y τις εξισώσεις του (Σ) και θέτοντας στις προκύπτουσες εξισώσεις $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους, $\frac{\partial u}{\partial y}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}$ στο $(x,y) = (1,-1)$.

Επανερχόμαστε τώρα στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου και το επιλύουμε, με την βοήθεια του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, για συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Η γενίκευση στις $n-$ διαστάσεις αφήνεται ως άσκηση.

Εφαρμογή Η επιφάνεια στάθμης έστω S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$, όπου $F(x,y,z)$ είναι μια C^1 συνάρτηση, είναι τοπικά το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης δύο μεταβλητών στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$, υπό την προϋπόθεση ότι $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Πράγματι, έστω ότι η F ορίζεται και είναι C^1 στο ανοικτό υποσύνολο D του R^3 και έστω ακόμη $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Άρα μία τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους της F στο (x_0,y_0,z_0) δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε ότι $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης στην $g=F-c_0$, συνεπώς $g(x_0,y_0,z_0)=0$ και $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Έπεται ότι υπάρχουν $U\subseteq R^2$ και $V\subseteq R$ ανοικτά σύνολα με $(x_0,y_0)\in U$, $z_0\in V$ και μια μοναδική C^1 συνάρτηση $f:U\to V$ με $f(x_0,y_0)=z_0$ ώστε

$$g(x,y,f(x,y))=0 \text{ για κάθε } (x,y)\in U.$$

Ισοδύναμα: $F(x,y,f(x,y))=c_0$ για κάθε $(x,y)\in U$.

Έτσι η επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$ ταυτίζεται πλησίον του (x_0,y_0,z_0) με το γράφημα μιας C^1-συνάρτησης $f:U\subseteq R^2\to R$. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\nabla F(x,y,z)\neq 0$ για κάθε $(x,y,z)\in S$ τότε: Για κάθε $(x,y,z)\in S$ η S πλησίον του (x,y,z) ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1-συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Σημειώνουμε ακόμη ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου Ε της S στο (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla g(x_0,y_0,z_0)=0,$$

(πρβλ και τον σχετικό ορισμό στην παράγραφο για τις επιφάνειες στάθμης.)

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y=1$. Να βρεθούν σημεία (x,y,z) της επιφάνειας S πλησίον των οποίων η S ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $z=f(x,y)$.

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης που συζητήσαμε προηγουμένως.
Έστω $F(x,y,z)=x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y-1$. Η F είναι βέβαια C^∞ συνάρτηση (ως πολυωνυμική) και η επιφάνεια S ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=0$.
Ουσιαστικά ο στόχος μας είναι να επιλύσουμε την εξίσωση $F(x,y,z)=0$ ως προς z ώστε το z να εκφράζεται ως συνάρτηση μόνο των μεταβλητών x και y. Από την προηγούμενη εφαρμογή αυτό μπορεί να γίνει κοντά σε εκείνα τα σημεία $(x_0,y_0,z_0)\in S$ ώστε, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ (1). Επειδή, $\frac{\partial F}{\partial z}=16xz-9z^2y$, έπεται από την (1) ότι τα ζητούμενα σημεία $(x,y,z)\in S$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει, ότι, $16xz-9z^2y\neq 0 \Leftrightarrow z(16x-9zy)\neq 0 \Leftrightarrow z\neq 0$ και $16x-9zy\neq 0$. Για παράδειγμα τα σημεία του R^3, $\left(0,1,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ και $\left(0,-\frac{1}{3},\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι η εξίσωση $xy+z+3xz^5=4$ λύνεται ως προς z σαν συνάρτηση του (x,y) κοντά στο $(1,0,1)$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(1,0)$.

2)Ελέγξτε απ' ευθείας (χωρίς την χρήση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης) σε ποια σημεία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση, $F(x,y)=y^2+y+3x+1=0$ ως προς y συναρτήσει του x. Στην συνέχεια επαληθεύστε την απάντηση σας με την απάντηση που δίνει το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.
Υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$.

3) Δείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} 3x+y-z+u^2=0 \\ x-y+2z+u=0 \\ 2x+2y-3z+2u=0 \end{cases}$ μπορεί να επιλυθεί ως προς x,y,u συναρτήσει του z, ως προς x,z,u συναρτήσει του y, ως προς y,z,u συναρτήσει του x, αλλά όχι ως προς x,y,z συναρτήσει του u.

4)Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x,y)=2x^3-3x^2+2y^3+3y^2$.
(α) Βρείτε τα (τέσσερα) σημεία (x,y) του R^2 στα οποία ισχύει $\nabla f(x,y)=0$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο στο R^2.
(β) Έστω S η καμπύλη του R^2 που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y)=0$. Να βρεθούν εκείνα τα σημεία (x_0,y_0) της S που δεν έχουν καμία περιοχή U στην

οποία η εξίσωση $f(x,y)=0$ να μπορεί να επιλυθεί ως προς y συναρτήσει του x (ή ως προς x συναρτήσει του y).

5)Έστω $f(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\frac{xy}{x^2+y^2}\right),(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$. Αντιστρέφεται τοπικά η f κοντά στο σημείο $(0,1)$;

6)Δείξτε ότι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του R^3, $S^2=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $(a,\beta,\gamma)\in S^2$ η S^2 κοντά στο (a,β,γ) είναι το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Τέτοιες επιφάνειες ονομάζονται συνήθως ομαλές επιφάνειες και ο ορισμός αυτός επεκτείνεται εύκολα στον $R^n (n\geq 2)$. Γενικεύστε το παραπάνω αποτέλεσμα για την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα του $R^n (n\geq 2)$.

7)Δείξτε ότι οι επιφάνειες, του R^3 που ορίζονται από τις εξισώσεις: $x^4-y^3+z^2-1=0$, $x^4+2y+z^2-1=0$ και $x^5+2y^2+3z^3-2=0$ είναι ομαλές.

8)Δείξτε ότι η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2-z^2=0$ δεν είναι ομαλή κοντά στο $(0,0,0)$

Ακρότατα υπό συνθήκη και οι πολλαπλασιαστές του Lagrange

Ας υποθέσουμε ότι ένας δεδομένος χώρος θερμαίνεται και η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) αυτού του χώρου δίδεται από την συνάρτηση $\mathrm{T}(x,y,z)$. Ας υποθέσουμε ότι η επιφάνεια $z=f(x,y)$ βρίσκεται σ' αυτόν τον χώρο και ότι θέλουμε να βρούμε το σημείο $z_0=f(x_0,y_0)$ αυτού του χώρου όπου η θερμοκρασία είναι μέγιστη (ή ελάχιστη). Με άλλα λόγια ποια είναι η μέγιστη (ή η ελάχιστη) τιμή της Τ κάτω από την συνθήκη (ή περιορισμό) $z=f(x,y)$ και που αυτή η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται;
Ο σκοπός μας σ' αυτήν την παράγραφο είναι να συζητήσουμε μεθόδους που να αντιμετωπίζουν προβλήματα αυτού του τύπου. Μια πολύ κομψή και χρήσιμη μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αναπτύχθηκε από τον Lagrange.

15.1 Θεώρημα (των πολλαπλασιαστών του Lagrange)
Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό και $f:U\to R$ C^1 συνάρτηση. Έστω ακόμη $g:U\to R$ C^1 συνάρτηση, $\overrightarrow{x_0}\in U$, $g\left(\overrightarrow{x_0}\right)=c$ και S η επιφάνεια στάθμης που ορίζεται από την εξίσωση $g\left(\vec{x}\right)=c$ (δηλαδή $S=\left\{\vec{x}\in U: g\left(\vec{x}\right)=c\right\}$). Υποθέτουμε ότι $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)\neq 0$.
Αν η $f|S$, δηλαδή ο περιορισμός της f στο S, έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\overrightarrow{x_0}$, τότε υπάρχει πραγματικός λ ώστε $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)=\lambda\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι $n=3$. Έστω ότι το $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την $f|S$, επομένως υπάρχει $\delta>0$ και μια σφαίρα $\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)\subseteq U$ ώστε αν $\vec{x}\in\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)\bigcap S$ τότε $f\left(\vec{x}\right)\leq f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, εν ανάγκη περιορίζοντας τις f και g στη σφαίρα $\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)$ ότι $U=\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)$. Όπως γνωρίζουμε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε της επιφάνειας S στο $\overrightarrow{x_0}$ ορίζεται από την εξίσωση $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)=0$ (1).
Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται, όπως είδαμε στην σχετική παράγραφο, από το γεγονός ότι αν $\gamma:[a,b]\to S$ C^1 καμπύλη της S με $\gamma(0)=\overrightarrow{x_0}$ ($a<0<b$) και $\gamma'(0)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο $t=0$ τότε το $\gamma'(0)$ είναι κάθετο στο $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ ($\gamma'(0)\perp\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$). Επειδή η $f|S$ έχει μέγιστο $\overrightarrow{x_0}$ η $fo\gamma:[a,b]\to S$ έχει μέγιστο στο $t=0$, άρα από το θεώρημα του Fermat του Λογισμού της μιας μεταβλητής $\frac{d}{dt}(fo\gamma)|_{t=0}=0$.
Από την άλλη μεριά ο κανόνας της αλυσίδας δίνει ότι $0=\frac{d}{dt}(fo\gamma)|_{t=0}=\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)\cdot\gamma'(0)$.
Συμπεραίνουμε από τις παραπάνω παρατηρήσεις ότι το διάνυσμα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(0)$ της γ, το οποίο είναι βέβαια παράλληλο με το επίπεδο Ε που ορίζεται από την εξίσωση (1).

Ισχυριζόμαστε ότι το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι <u>κάθετο</u> στο Ε και συνεπώς <u>παράλληλο</u> με το διάνυσμα $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$. Πράγματι, έστω $\vec{v}$ τυχόν μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο με το Ε, επομένως υπάρχει $\vec{x}=(x,y,z)\in \mathrm{E}$ ώστε $\vec{v}=\vec{x}-\overrightarrow{x_0}$. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι το $\vec{v}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης σ της S στο $\sigma(0)=x_0$. Όπως είναι γνωστό, από μια εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (σελίδα 151), εφόσον $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)\neq 0$ η επιφάνεια S πλησίον του $\overrightarrow{x_0}$ είναι το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών έστω $z=h(x,y)$, (δηλαδή υπάρχουν $V\subseteq R^2$ ανοικτό, $\mathrm{I}\subseteq R$ ανοικτό διάστημα με $V\times \mathrm{I}\subseteq U,(x_0,y_0)\in V$ και μοναδική C^1 συνάρτηση $h:V\to \mathrm{I}\subseteq R$ ώστε $h(x_0,y_0)=z_0$ και $g(x,y,h(x,y))=c$ για κάθε $(x,y)\in V$). Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζεται με τον τύπο (όπου $\vec{x}=(x,y,z)\in \mathrm{E}$ ώστε $\vec{v}=\vec{x}-\overrightarrow{x_0}\neq 0$)

$$\sigma(t)=\left(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),h\left(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0)\right)\right).$$

Πρέπει να είναι σαφές ότι για $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό η σ ορίζεται στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$ και είναι μια C^1 καμπύλη της S. Παρατηρούμε ότι $\sigma(0)=\left(x_0,y_0,h(x_0,y_0)\right)=(x_0,y_0,z_0)=\overrightarrow{x_0}$.

Από τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι

$$\sigma'(0)=\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=0}=\left(x-x_0,y-y_0,\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right)\ (2)$$

Η συνάρτηση $h:V\subseteq R^2\to R$ είναι C^1 επομένως το γράφημά της έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ το οποίο έχει εξίσωση της μορφής

$$z=z_0+\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\quad (3)$$

Το επίπεδο που ορίζεται από την (3) ταυτίζεται όμως με το επίπεδο Ε που ορίζεται από την (1), αφού η S και το γράφημα της h πλησίον του $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ ταυτίζονται. Με περισσότερη ακρίβεια έχουμε (όπως προκύπτει από τους υπολογισμούς που κάναμε στην εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης της σελίδας 151) ότι $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}$ και $\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο ισότητες στην (3) παίρνουμε την (1). Από την (3) και την (2) έπεται αμέσως ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της σ στο $t=0$ είναι το $\sigma'(0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\vec{v}$. Έπεται, εφόσον η σ είναι καμπύλη της S, ότι $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)\perp \vec{v}$. Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι το διάνυσμα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε (μη μηδενικό) διάνυσμα παράλληλο του επιπέδου Ε, συνεπώς το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι πράγματι κάθετο στο Ε.

Εφόσον τα διανύσματα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ και $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλα και άρα αφού $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right) \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι πολλαπλάσιο του $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$, που είναι και το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Έπεται προφανώς από το προηγούμενο θεώρημα το ακόλουθο αποτέλεσμα γεωμετρικού χαρακτήρα.

15.2 Πόρισμα. Αν η συνάρτηση f περιορισμένη σε μια επιφάνεια S έχει τοπικό ακρότατο στο $\overrightarrow{x_0}$ τότε το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο στην S στο $\overrightarrow{x_0}$.

Παρατηρήσεις. 1) Τα προηγούμενα αποτελέσματα μας υποδεικνύουν ότι για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης υπό συνθήκη (περιορισμό) πρέπει να ψάξουμε ανάμεσα σε εκείνα τα $\overrightarrow{x_0}$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του θεωρήματος ή του πορίσματος. Το αν αυτά είναι πράγματι μέγιστα ή ελάχιστα ή τίποτα από τα δύο, πρέπει να ελεγχθεί με άλλους τρόπους, πχ με γεωμετρικά επιχειρήματα.
2) Ο αριθμός λ που εμφανίζεται στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται πολλαπλασιαστής του Lagrange.

Το θεώρημα των πολλαπλασιαστών του Lagrange γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο.

15.3 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $f: U \to R$ C^1 συνάρτηση. Έστω ακόμη $g_1,\dots,g_k : U \to R$, $k-$το πλήθος C^1 συναρτήσεις όπου $k<n$ και S η επιφάνεια που ορίζεται από τις εξισώσεις $g_1\left(x_1,\dots,x_n\right)=c_1$, …., $g_k\left(x_1,\dots,x_n\right)=c_k$, (δηλαδή $S=\left\{\left(x_1,\dots,x_n\right)\in U : g_\lambda\left(x_1,\dots,x_n\right)=c_\lambda, \lambda=1,2,\dots,k\right\}$). Έστω $\overrightarrow{x_0}\in S$ ώστε τα διανύσματα $\nabla g_1\left(\overrightarrow{x_0}\right),\dots,\nabla g_k\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν η f περιορισμένη στην S (δηλαδή η $f|S$) έχει τοπικό ακρότατο τότε υπάρχουν σταθερές $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in R$ ώστε

$$\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)=\lambda_1\nabla g_1\left(\overrightarrow{x_0}\right)+\dots+\lambda_k\nabla g_k\left(\overrightarrow{x_0}\right).$$

Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι ανάλογη με την απόδειξη του θεωρήματος των πολλαπλασιαστών του Lagrange και έτσι παραλείπεται.

Παρατήρηση. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε τις θέσεις ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης πάνω σε μια επιφάνεια (ή τομή επιφανειών) πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων, πχ στην περίπτωση του θεωρήματος

15.1 πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) \\ \text{...} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \\ g(x_1,...,x_n) = c \end{cases}$ ως προς $x_1,...,x_n$ και λ

Παραδείγματα 1) Να βρεθεί σημείο πάνω στην επιφάνεια $z^2 - xy = 1$ το οποίο είναι πλησιέστερα στο $\text{O} = (0,0,0)$.

Λύση Αυτό που ζητάμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ισοδύναμα την συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ πάνω στην επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $g(x,y,z)=1$, όπου $g(x,y,z) = z^2 - xy$.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \\ &\frac{\partial g}{\partial x} = -y, \frac{\partial g}{\partial y} = -x, \frac{\partial g}{\partial z} = 2z \end{aligned}.$$

Θα επιλύσουμε σύμφωνα με το θεώρημα των πολλαπλασιαστών του Lagrange, το σύστημα: $\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}, g(x,y,z) = 1 \right\}$ ως προς x, y, z και λ.
Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους βρίσκουμε το σύστημα
$\left\{ 2x = \lambda(-y), 2y = \lambda(-x), 2z = \lambda(2z) \text{ και } z^2 - xy = 1 \right\}$.
Η τρίτη εξίσωση του συστήματος μας δίνει $\lambda = 1$ υπό την προϋπόθεση ότι $z \neq 0$.
Έτσι οι δύο πρώτες εξισώσεις (για $\lambda = 1$) δίνουν $\begin{Bmatrix} 2x = -y \\ 2y = -x \end{Bmatrix}$ και το σύστημα αυτό έχει την μηδενική λύση, $x = y = 0$. Θέτοντας $x = y = 0$ στην τέταρτη εξίσωση βρίσκουμε $z = \pm 1$.
Έτσι για $\lambda = 1$ έχουμε τις λύσεις: $(0,0,1),(0,0,-1)$.
Υποθέτουμε τώρα ότι $z = 0$ τότε η τέταρτη εξίσωση γίνεται $xy = -1$, επομένως τα x και y είναι και τα δύο διαφορετικά του μηδενός και ετερόσημα. Το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων γράφεται, $\begin{Bmatrix} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y = 0 \end{Bmatrix}$.
Αν το δούμε ως γραμμικό σύστημα των x και y τότε η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η $4 - \lambda^2$. Αν $4 - \lambda^2 \neq 0$, τότε $x = y = 0$ και αυτό αποκλείεται, επομένως $4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$. Η τιμή $\lambda = -2$ αποκλείεται αφού τότε η εξίσωση $2x = \lambda(-y)$ γίνεται $2x = -2(-y) = 2y$, συνεπώς $x = y$ (τα x και y οφείλουν να είναι ετερόσημα). Έτσι απομένει να εξετάσουμε την τιμή $\lambda = 2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $2x = \lambda(-y)$ γίνεται $2x = 2(-y) \Rightarrow x = -y$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση $xy = -1$ βρίσκουμε ότι $-x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Συνοψίζοντας

έχουμε ότι στην περίπτωση που $z=0$ οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $\lambda=2$ και $(1,-1,0)$ και $(-1,1,0)$. (Παρατηρείστε ότι για όλες τις λύσεις που βρήκατε ισχύει, $\nabla g(x,y,z)\neq 0$)

Οι τιμές της συνάρτησης f στις λύσεις (x,y,z) που βρήκαμε είναι οι ακόλουθες: $f(1,-1,0)=f(-1,1,0)=2$ και $f(0,0,\pm1)=1$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $(0,0,1)$ και $(0,0,-1)$ της επιφάνειας $z^2-xy=1$ είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $z^2-xy=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 1\left(=f(0,0,\pm1)\right)$.

Πράγματι, αν $z^2-xy=1$ τότε $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+xy+1\geq 1$ αφού $x^2+y^2+xy\geq 0$ για κάθε $x,y\in R$. (Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής συνέπεια της ταυτότητας $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$).

2)Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $x+y=1$ στα οποία η συνάρτηση $f(x,y)=1-x^2-y^2$ παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή υπό την προϋπόθεση ότι $x\geq 0$ και $y\geq 0$.

Λύση Η καταρχήν συνθήκη είναι η $x+y=1$, έτσι θέτομε $g(x,y)=x+y$. Η επί πλέον υπόθεση $x\geq 0$ και $y\geq 0$σημαίνει ότι αναζητούμε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο τμήμα εκείνο της ευθείας $g(x,y)=1$ που συνδέει τα σημεία $a=(1,0)$ και $b=(0,1)$. Επειδή η f είναι συνεχής και το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]\subseteq R^2$ συμπαγές σύνολο η f επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε σημεία του $[a,b]$. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y, \frac{\partial g}{\partial x}=1$ και $\frac{\partial g}{\partial y}=1$

Έτσι έχουμε να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases}-2x=\lambda(1)=\lambda\\ -2y=\lambda(1)=\lambda\\ x+y=1\end{cases}$ η μόνη λύση αυτού του συστήματος είναι $x=y=\frac{1}{2}$ και $\lambda=-1$. Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

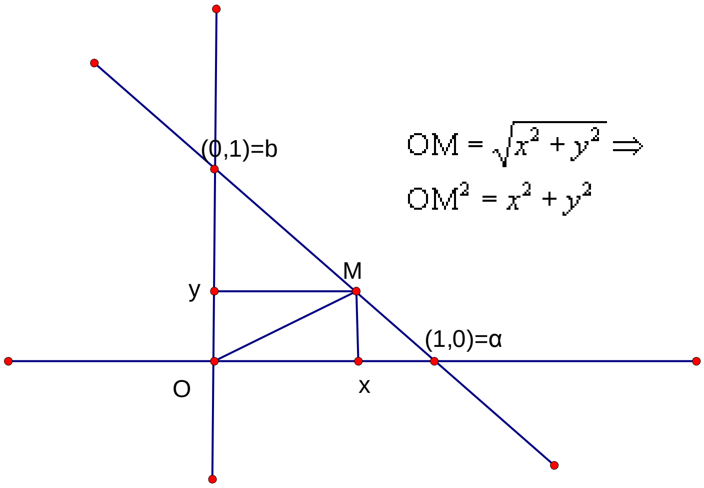
Οι τιμές στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος $[a,b]$ είναι

$f(a)=f(1,0)=1-1^2-0^2=0$

$f(b)=f(0,1)=1-0^2-1^2=0$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f περιορισμένης στο $[a,b]$ είναι $\frac{1}{2}$στο $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και η ελάχιστη 0 στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$, αφού $f(x,y)=1-x^2-y^2\geq 0$ για κάθε $(x,y)\in[a,b]$

Σημειώνουμε ότι στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε και γεωμετρικά, όπως φαίνεται και από το σχήμα



3) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=2$ και $x+z=1$

<u>Λύση</u> Εδώ έχουμε δύο περιορισμούς $g_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ και $g_2(x,y,z)=x+z-1=0$.

Η πρώτη εξίσωση είναι η εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας με βάση τον κύκλο $x^2+y^2=2$ του xy επιπέδου και άξονα τον άξονα των z. Η δεύτερη είναι η εξίσωση ενός επιπέδου που είναι κάθετο στο xz επίπεδο και διέρχεται από τα σημεία $(0,0,1)$ και $(1,0,0)$. Αναζητούμε τα ακρότατα της f στην τομή αυτών των δύο επιφανειών.

Πρέπει να βρούμε x,y,z,λ_1 και λ_2 τέτοια ώστε

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z) \\ \text{και } g_1(x,y,z)=0 \\ \quad g_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, $\nabla f=(1,1,1)$, $\nabla g_1=2(x,y,0)$ και $\nabla g_2=(1,0,1)$ και επισημαίνουμε ότι τα διανύσματα $\nabla g_1=2(x,y,0)$ και $\nabla g_2=(1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εφόσον το (x,y,z) ανήκει στην τομή των δύο επιφανειών.

Αντικαθιστώντας τις κλίσεις στην πρώτη από τις εξισώσεις του συστήματος (1) καταλήγουμε στο σύστημα πέντε εξισώσεων με πέντε αγνώστους (τους $x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$)

$$\left.\begin{array}{l} 1=\lambda_1 2x+\lambda_2\cdot 1 \\ 1=\lambda_1 2y+\lambda_2\cdot 0 \\ 1=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1 \\ x^2+y^2=2 \\ x+z=1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Από την τρίτη εξίσωση έπεται ότι $\lambda_2=1$, άρα οι δύο πρώτες γίνονται $2x\lambda_1=0$ και $2y\lambda_1=1$. Αφού από την δεύτερη πρέπει να είναι $\lambda_1\neq 0$ έπεται ότι $x=0$. Άρα από τις δύο τελευταίες εξισώσεις του συστήματος (2) συνάγομε ότι $z=1$ και $y=\pm\sqrt{2}$

Συνεπώς τα ακρότατα που ζητάμε πρέπει να είναι τα $\left(0,\sqrt{2},1\right)$ και $\left(0,-\sqrt{2},1\right)$. Υπολογίζοντας τις τιμές της f έχουμε $f\left(0,-\sqrt{2},1\right)=0-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}<0$ και $f\left(0,\sqrt{2},1\right)=0+\sqrt{2}+1=1+\sqrt{2}>0$. Άρα το μεν $\left(0,-\sqrt{2},1\right)$ δίνει την ελάχιστη τιμή και το $\left(0,\sqrt{2},1\right)$ την μέγιστη τιμή.

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $S=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2-2 \text{ και } x+z-1=0\right\}$, δηλαδή η τομή των δύο επιφανειών είναι, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, κλειστό και φραγμένο σύνολο, άρα συμπαγές. Έτσι η συνεχής συνάρτηση f επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στην S.

Ασκήσεις

1)Βρείτε την μέγιστη τιμή της $f(x,y)=xy$ υπό την συνθήκη $2x+2y=5$

2)Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y)=x^2+y^2$ υπό την συνθήκη $xy=1$

3)Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y)=x^2-y^2$ υπό την συνθήκη $x^2+y^2=4$

4)Βρείτε την μέγιστη τιμή της $f(x,y)=\log\left(xy^2\right)$ υπό την συνθήκη $2x^2+3y^2=8$ για $x>0$

5)Έστω $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της f στην σφαίρα $x^2+y^2+z^2=R^2$ είναι $\dfrac{R^6}{27}$.

6)Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ υπό τις συνθήκες $x+y=4$ και $y+z=6$.

7)Βρείτε την μέγιστη τιμή της $f(x,y,z)=xyz$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=3$ και $y=2z$

8)Βρείτε την μέγιστη τιμή της $f(x,y,z)=xy+xz$ υπό τις συνθήκες $2x+3z=5$ και $xy=4$

ΙΙΙ Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Βασικές έννοιες στη μια μεταβλητή

Έστω $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση ($a,b\in R, a<b$). Αν $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ θέτομε, $U(f,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}_k(t_k-t_{k-1})$, όπου $\mathrm{M}_k=\sup\{f(t):t\in[t_{k-1},t_k]\}, k=1,2,...,n$ το <u>άνω άθροισμα</u> της f ως προς P και $L(f,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}m_k(t_k-t_{k-1})$, όπου $m_k=\inf\{f(t):t\in[t_{k-1},t_k]\}$, $k=1,2,...,n$ το <u>κάτω άθροισμα</u> της f ως προς P.

Αποδεικνύονται εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες:

1) $L(f,\mathrm{P})\le U(f,\mathrm{P})$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

2) Αν $\mathrm{P}\subseteq Q$ (η Q είναι λεπτότερη της P) τότε $L(f,\mathrm{P})\le L(f,Q)$ και $U(f,Q)\le U(f,\mathrm{P})$

3) Για κάθε ζεύγος P,Q διαμερίσεων του $[a,b]$ ισχύει $L(f,\mathrm{P})\le U(f,Q)$

(Για την απόδειξη θεωρούμε την $\mathrm{P}\bigcup Q$ και χρησιμοποιούμε την (2)).

Έπεται ότι: $\sup\{L(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}\le\inf\{U(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$.

Οι αριθμοί

$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$,

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$ ονομάζονται <u>κάτω</u> και <u>άνω</u> ολοκλήρωμα της f. Προφανώς $\underline{\int_a^b} f(x)dx\le\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Η f λέγεται ότι είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν : $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$. Η κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος ονομάζεται <u>ολοκλήρωμα Riemann</u> της f στο $[a,b]$, και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$ δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση και $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ τότε κάθε άθροισμα της μορφής $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(t_k-t_{k-1})$, όπου $x_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,...,n$, είναι τυχούσα επιλογή ενδιάμεσων σημείων σχετικά με την διαμέριση P,

ονομάζεται ένα <u>άθροισμα Riemann ως προς P</u> και συνήθως συμβολίζεται με $S(f,\mathrm{P})$ ή $S(f,\mathrm{P},(x_k))$ αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην επιλογή ενδιάμεσων σημείων (x_k). Παρατηρούμε ότι αν P είναι διαμέριση του $[a,b]$ τότε ισχύει $L(f,\mathrm{P})\le S(f,\mathrm{P})\le U(f,\mathrm{P})$ για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$.
Ο αριθμός $\delta(\mathrm{P})=\max\{t_k-t_{k-1}:1\le k\le n\}$ ονομάζεται <u>λεπτότητα</u> της διαμέρισης P.
Οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

16.1 Θεώρημα Έστω $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη
(ιι) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,\mathrm{P})-L(f,\mathrm{P})\le\varepsilon$
(ιιι) Υπάρχει $\mathrm{I}\in R$ ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν P διαμέριση του $[a,b]$ με $\delta(\mathrm{P})\le\delta$ τότε, $\left|S(f,\mathrm{P})-\mathrm{I}\right|\le\varepsilon$
για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$. (Τότε, $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx$.)

Σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός (ιι) του θεωρήματος ονομάζεται <u>κριτήριο του Riemann</u>.

Με την βοήθεια της ομοιόμορφης συνέχειας και του κριτηρίου Riemann αποδεικνύεται επίσης το ακόλουθο θεμελιώδες.

16.2 Θεώρημα Αν η $f:[a,b]\to R$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann

Παρατηρούμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί (με λίγο περισσότερη προσπάθεια) και για μια <u>φραγμένη</u> συνάρτηση με <u>πεπερασμένο</u> πλήθος ασυνεχειών.

Οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann περιγράφονται στην
16.3 Πρόταση. Έστω $f,g:[a,b]\to R$ φραγμένες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(ι) Αν οι f,g είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$, για κάθε $\lambda,\mu\in R$.
(ιι) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει η θεμελιώδης ανισότητα $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$.
(ιιι) Αν $a<c<b$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν οι $f\big|[a,c]$ και $f\big|[c,b]$ είναι ολοκληρώσιμες. Ισχύει τότε

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Παρατηρήσεις 1) Έστω $f:[a,b]\to R$ ολοκληρώσιμη (π.χ. συνεχής) συνάρτηση. Έπεται τότε από τον ισχυρισμό (ιιι) του χαρακτηρισμού των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα 16.1) ότι:
Αν (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\delta(\mathrm{P}_n)\to 0$ τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\int_a^b f(x)dx$, για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\geq 1$.

Ιδιαίτερα έπεται ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$ (γιατί;)

Αντιστρόφως: Αν η $f:[a,b]\to R$ είναι φραγμένη συνάρτηση, (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ και $\mathrm{I}\in R$ ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\mathrm{I}$, για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\geq 1$ τότε αποδεικνύεται, πάλι με τον ισχυρισμό (ιιι) του θεωρήματος 16.1, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και βέβαια

$$\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx.$$

2) Ακόμη είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε ότι αν $f,g:[a,b]\to R$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

16.4 Ορισμός Με τον όρο <u>$n-$διάστατο ορθογώνιο</u> στον R^n θα εννοούμε ένα καρτεσιανό γινόμενο της μορφής $\Re=\mathrm{I}_1\times\mathrm{I}_2\times\ldots\times\mathrm{I}_n$ όπου $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ <u>διαστήματα</u> του R, οποιουδήποτε είδους (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά, φραγμένα ή μη φραγμένα κτλ.) .
Αν όλα τα διαστήματα $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ είναι ανοικτά (αντίστοιχα κλειστά) στο R θα ονομάζουμε το ορθογώνιο $\Re$ ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό).
Αν όλα τα διαστήματα $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ είναι <u>φραγμένα</u> ορίζουμε ως <u>$n-$διάστατο όγκο</u> η <u>μέτρο</u> του $\Re$ τον αριθμό $\mu(\Re)=\mu(\mathrm{I}_1)\cdot\ldots\cdot\mu(\mathrm{I}_n)$ όπου για ένα φραγμένο διάστημα $\mathrm{I}\subseteq R$ ο αριθμός $\mu(\mathrm{I})$ είναι το <u>μήκος</u> του. Έτσι αν τα άκρα του I είναι οι αριθμοί a και b με $a<b$ τότε $\mu(\mathrm{I})=b-a$, π.χ. αν $\mathrm{I}=(0,1]$ τότε $\mu(\mathrm{I})=1-0=1$.

Έχοντας ως οδηγό τις ιδέες από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό της μιας μεταβλητής μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του ολοκληρώματος στις πολλές μεταβλητές.

Δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, για λόγους απλότητας, στην περίπτωση των δύο μεταβλητών. Η επέκταση του ορισμού στην περίπτωση των τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών μπορεί να γίνει εύκολα από τον αναγνώστη.

Έστω $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ κλειστό ορθογώνιο του Ευκλειδείου επιπέδου R^2. Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Re\to R$. Αν $\mathrm{P}_1=\{t_0=a_1<\ldots<t_n=b_1\}$ και

$\mathrm{P}_2 = \{x_0 = a_2 < ... < x_m = b_2\}$ είναι διαμερίσεις των διαστημάτων $[a_1, b_1]$ και $[a_2, b_2]$ αντίστοιχα, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ ονομάζεται διαμέριση του ορθογωνίου $\mathfrak{R}$. Είναι σαφές ότι η P υποδιαιρεί το $\mathfrak{R}$ σε $m \cdot n$ το πλήθος ορθογώνια τα οποία είναι τα

$$\mathfrak{R}_{k,\lambda} = [t_{k-1}, t_k] \times [x_{\lambda-1}, x_\lambda], 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m.$$

Θέτουμε $U(f, \mathrm{P}) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} \mathrm{M}_{k,\lambda} \cdot \mu(\mathfrak{R}_{k,\lambda})$ όπου

$\mathrm{M}_{k,\lambda} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in \mathfrak{R}_{k,\lambda}\}, 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m$.

Επίσης θέτομε $L(f, \mathrm{P}) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} m_{k,\lambda} \cdot \mu(\mathfrak{R}_{k,\lambda})$ όπου

$m_{k,\lambda} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in \mathfrak{R}_{k,\lambda}\}, 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m$.

Οι ποσότητες $U(f, \mathrm{P})$ και $L(f, \mathrm{P})$ ονομάζονται <u>άνω</u> και <u>κάτω</u> αθροίσματα της f ως προς P και έχουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές στην περίπτωση της μιας μεταβλητής. Έτσι έχουμε:

1) $L(f, \mathrm{P}) \le U(f, \mathrm{P})$ για κάθε διαμέριση P του $\mathfrak{R}$ (προφανές).

2) Αν $\mathrm{P} \subseteq Q \Rightarrow L(f, \mathrm{P}) \le L(f, Q)$ και $U(f, Q) \le U(f, \mathrm{P})$

3) $L(f, \mathrm{P}) \le U(f, Q)$ για κάθε ζεύγος διαμερίσεων P και Q του $\mathfrak{R}$.

Σημειώνουμε ότι, αν $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2, Q = Q_1 \times Q_2$ τότε:

$$\mathrm{P} \subseteq Q \Leftrightarrow \mathrm{P}_1 \subseteq Q_1 \text{ και } \mathrm{P}_2 \subseteq Q_2.$$

Επίσης, $\mathrm{P} \subseteq Q$ σημαίνει ότι κάθε κλειστό υποορθογώνιο της Q περιέχεται σε κάποιο κλειστό υποορθογώνιο της P.

Οι αριθμοί $\underline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y) = \sup\{L(f, \mathrm{P}) : \mathrm{P} \text{ διαμέριση του } \mathfrak{R}\}$ και

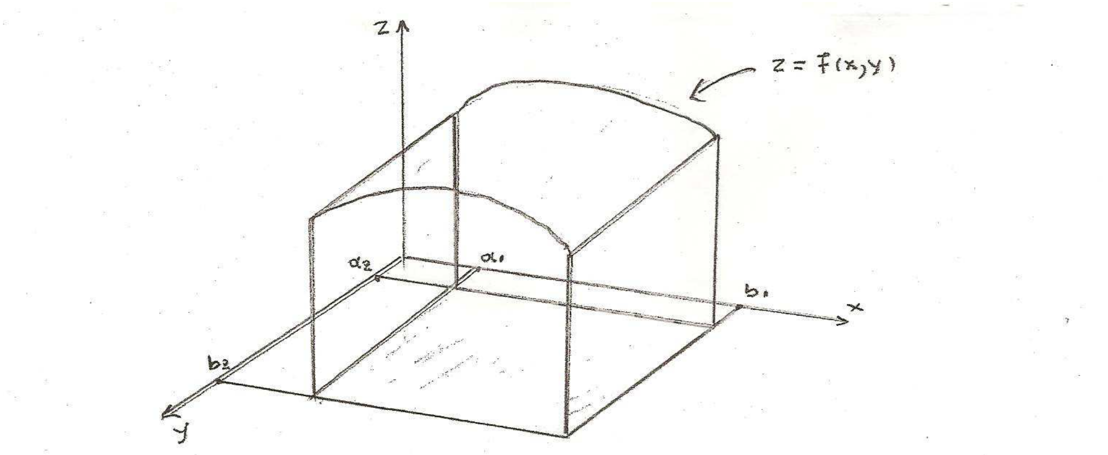
$\overline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y)\,dxdy = \inf\{U(f, \mathrm{P}) : \mathrm{P} \text{ διαμέριση του } \mathfrak{R}\}$ ονομάζονται <u>κάτω</u> και <u>άνω</u> ολοκλήρωμα της f. Προφανώς $\underline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y)\,dxdy \le \overline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y)\,dxdy$. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και θέτομε,

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x,y)\,dxdy = \underline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y)\,dxdy = \overline{\int_{\mathfrak{R}}} f(x,y)\,dxdy.$$

Έστω $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ κλειστό ορθογώνιο του R^2 και $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ διαμέριση του $\mathfrak{R}$, όπου $\mathrm{P}_1 = \{t_0 = a_1 < ... < t_n = b_1\}$ και $\mathrm{P}_2 = \{x_0 = a_2 < ... < x_m = b_2\}$ και $f : \mathfrak{R} \to R$ φραγμένη συνάρτηση.

Κάθε άθροισμα της μορφής, $\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} f(z_{k,\lambda}) \cdot \mu(\mathfrak{R}_{k,\lambda})$ όπου, $\mathfrak{R}_{k,\lambda} = [t_{k-1}, t_k] \times [x_{\lambda-1}, x_\lambda]$ και $z_{k,\lambda} \in \mathfrak{R}_{k,\lambda}$, $1 \le k \le n$, $1 \le \lambda \le m$ είναι επιλογή ενδιαμέσων σημείων των ορθογωνίων της διαμέρισης $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$, ονομάζεται ένα <u>άθροισμα Riemann</u> σε σχέση με την Ρ και συμβολίζεται με $S(f,\mathrm{P})$ ή $S\left(f,\mathrm{P},\left(z_{k,\lambda}\right)\right)$. Παρατηρούμε ότι αν Ρ διαμέριση του $\Re$ τότε ισχύει, $L(f,\mathrm{P})\le S(f,\mathrm{P})\le U(f,\mathrm{P})$ για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_{\Re} f(x,y)\,dxdy$ ερμηνεύεται και ως <u>όγκος</u>. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν υποθέσουμε ότι $f(x,y)\ge 0$ για κάθε $(x,y)\in\Re$



Σημείωση. Αν $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2$ είναι διαμέριση του ορθογωνίου $\Re$ τότε (με τους παραπάνω συμβολισμούς) ο αριθμός $\delta(\mathrm{P})=\max\left\{diam\left(\Re_{k,\lambda}\right):1\le k\le n, 1\le\lambda\le m\right\}$ ονομάζεται λεπτότητα της διαμέρισης Ρ, όπου $diam\left(\Re_{k,\lambda}\right)$ είναι η διάμετρος, (δηλαδή το μήκος της διαγωνίου) του υποορθογωνίου $\Re_{k,\lambda}$.

Όλα τα βασικά αποτελέσματα του Λογισμού ολοκλήρωσης στην μια μεταβλητή ισχύουν και αποδεικνύονται με τις προφανείς τροποποιήσεις στην απόδειξή τους (η οποία αφήνεται ως άσκηση) και για διπλά ή πολλαπλά ολοκληρώματα.

16.5 Θεώρημα Έστω $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ιι) <u>Κριτήριο Riemann</u>: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Ρ του $\Re$ ώστε $U(f,\mathrm{P})-L(f,\mathrm{P})<\varepsilon$

(ιιι) Υπάρχει $\mathrm{I}\in R$ ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$: αν Ρ διαμέριση του $\Re$ και $\delta(\mathrm{P})\le\delta$ τότε $\left|S(f,\mathrm{P})-\mathrm{I}\right|\le\varepsilon$, για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$. (Τότε $\mathrm{I}=\int\limits_{\Re} f(x,y)\,dxdy$.)

16.6 Θεώρημα Αν η $f:\Re\to R$ είναι συνεχής (ή φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών) τότε είναι ολοκληρώσιμη.

16.7 Πρόταση Έστω $f,g:\Re\to R$ φραγμένες συναρτήσεις στο κλειστό ορθογώνιο $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ τότε ισχύουν:

(ι) Αν οι f,g είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\int_{\Re}(\lambda f+\mu g)dxdy=\lambda\int_{\Re} fdxdy+\mu\int_{\Re} gdxdy$ για κάθε $\lambda,\mu\in R$.

(ιι) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left|\int_{\Re} f(x,y)\,dxdy\right|\le\int_{\Re}|f(x,y)|dxdy$$

(ιιι) Αν $\Re=\Re_1\cup\ldots\cup\Re_N$ είναι διαμέριση του $\Re$ σε κλειστά υποορθογώνια τότε η (φραγμένη) συνάρτηση $f:\Re\to R$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στο καθένα από τα $\Re_1,\ldots,\Re_N$. Ισχύει τότε $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_{\Re_1} f(x,y)dxdy+\ldots+\int_{\Re_N} f(x,y)dxdy$. (Εννοείται ότι τα εσωτερικά $\operatorname{int}(\Re_k)$ των $\Re_k, 1\le k\le N$ είναι ανά δύο ξένα σύνολα.)

Παρατηρήσεις. 1)Έστω $f:\Re\to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(\mathrm{P}_n)_{n\ge1}$, ακολουθία διαμερίσεων του $\Re$ με $\delta(\mathrm{P}_n)\to 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\int_{\Re} f(x,y)dxdy$ για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\ge1$.

Αντιστρόφως: Αν η $f:\Re\to R$ είναι φραγμένη συνάρτηση, (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $\Re$ και $\mathrm{I}\in R$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\mathrm{I}$ για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\ge1$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\mathrm{I}$

2)Αν οι $f,g:\Re\to R$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Έπεται από την προηγούμενη παρατήρηση, το ακόλουθο αποτέλεσμα:

16.8 Πρόταση Έστω $f:\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (π.χ. f συνεχής) τότε:

(1) $$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{m\cdot n}\sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le\lambda\le m}} f\left(a_1+k\frac{b_1-a_1}{n}, a_2+\lambda\frac{b_2-a_2}{m}\right)\right]=\int_{\Re} f(x,y)dxdy$$

($z_{k,\lambda}=\left(a_1+k\dfrac{b_1-a_1}{n}, a_2+\lambda\dfrac{b_2-a_2}{m}\right), 1\le k\le n, 1\le\lambda\le m$).

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{n^2}\cdot\sum_{1\le k,\lambda\le n} f\left(a_1+k\frac{b_1-a_1}{n}, a_2+\lambda\frac{b_2-a_2}{n}\right)\right]=\int_{\Re} f(x,y)dxdy$$

($z_{k,\lambda}=\left(a_1+k\dfrac{b_1-a_1}{n}, a_2+\lambda\dfrac{b_2-a_2}{n}\right), 1\le k,\lambda\le n$).

Σημείωση Οι παραπάνω ορισμοί καθώς και τα αποτελέσματα διατυπώνονται και αποδεικνύονται με τις προφανείς τροποποιήσεις για κάθε διάσταση $n \geq 2$, δηλαδή για μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Re \to R$, όπου $\Re$ το κλειστό ορθογώνιο $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ του Ευκλειδείου χώρου R^n. Έτσι θεωρούμε διαμερίσεις $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\times\ldots\times\mathrm{P}_n$ του $\Re$ (όπου P_i διαμέριση του $[a_i,b_i], 1\leq i\leq n$) σε κλειστά υποορθογώνια και κατόπιν τα άνω και κάτω αθροίσματα $U(f,\mathrm{P})$ και $L(f,\mathrm{P})$, καθώς και τα αθροίσματα Riemann $S(f,\mathrm{P})$ κτλ. Ο λόγος για τον οποίο περιοριστήκαμε στην διάσταση $n=2$, είναι αφενός γιατί στο επίπεδο xy οι έννοιες είναι γεωμετρικά πιο οικείες και ξεκάθαρες και αφετέρου για να αποφύγουμε τις τεχνικές δυσκολίες με την εμφάνιση πολλών δεικτών.

Καθόσον αφορά την ορολογία και το συμβολισμό παρατηρούμε τα ακόλουθα: Για $n\geq 2$ το ολοκλήρωμα ονομάζεται πολλαπλό ολοκλήρωμα.

Όταν $n=2$ ή $n=3$ χρησιμοποιούνται οι όροι διπλό και τριπλό ολοκλήρωμα. Ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα συμβολίζεται συνήθως με $\int\limits_{\Re} fdx, \int\limits_{\Re} f(x)dx$ ή $\int\limits_{\Re} f(x_1,\ldots,x_n)d(x_1,\ldots,x_n)$.

Επίσης χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\int\limits_{\Re} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$ αντί του $\int\limits_{\Re} f(x_1,\ldots,x_n)d(x_1,\ldots,x_n)$. Ειδικότερα για τα διπλά και τριπλά ολοκληρώματα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

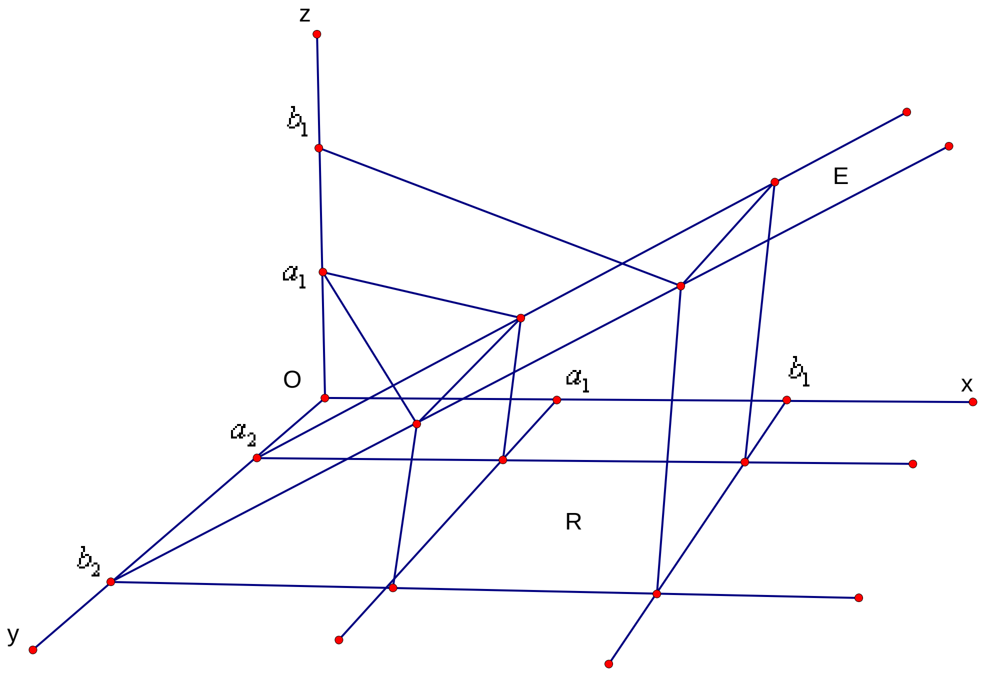
$$\iint\limits_{\Re} f(x,y)dxdy \text{ και } \iiint\limits_{\Re} f(x,y,z)dxdydz.$$

Παραδείγματα: 1)Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο στον R^2 και $f:\Re\to R$ μια συνάρτηση με σταθερή τιμή έστω $c\in R$. Πρέπει να είναι σαφές ότι από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος έχουμε: $\int\limits_{\Re} cdxdy = c\cdot\mu(\Re)$.

Γενικότερα, $\int\limits_{\Re} cd(x_1,\ldots,x_n) = c\cdot\mu(\Re) = c\cdot(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ αν $\Re=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ κλειστό ορθογώνιο του R^n.

2) Έστω $\pi_1: R^2\to R$ η πρώτη προβολή, δηλαδή $\pi_1(x,y)=x$ για κάθε $(x,y)\in R^2$. Το γράφημα της (γραμμικής) συνάρτησης π_1 είναι το επίπεδο $z=x$, το οποίο συμβολίζουμε με Ε. Ζητούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_{\Re} xdxdy$ στο κλειστό ορθογώνιο $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ του πρώτου τεταρτημόριου του xy επιπέδου,

με χρήση μόνο του ορισμού του ολοκληρώματος.



Είναι βέβαια σαφές ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ο όγκος του στερεού κάτω από το γράφημα της π_1 (δηλαδή το επίπεδο Ε) και πάνω από το ορθογώνιο $\Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Ο όγκος αυτός υπολογίζεται εύκολα <u>γεωμετρικά</u>, έτσι βρίσκουμε $V = \mu(\Re) \cdot \left(\frac{b_1 + a_1}{2}\right) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \frac{(b_1 + a_1)}{2}$.

Θα υπολογίσουμε αυτό τον όγκο, δηλαδή το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{\Re} x dx dy$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{(b_1 - a_1)^2 \cdot (b_2 - a_2)}{N} \leq \varepsilon$.

Θεωρούμε την διαμέριση $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ του $\Re$, $\Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, όπου, $\mathrm{P}_1 = \{t_0 = a_1 < t_1 < \ldots < t_N = b_1\}$, $\mathrm{P}_2 = \{x_0 = a_2 < \ldots < x_N = b_2\}$ και $t_k = a_1 + k\frac{b_1 - a_1}{N}$, $x_k = a_2 + k\frac{b_2 - a_2}{N}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Συνεπώς $\Re_{k,\lambda} = [t_{k-1}, t_k] \times [x_{\lambda-1}, x_\lambda]$ και $\mu(\Re_{k,\lambda}) = \frac{(b_1 - a_1)}{N} \cdot \frac{(b_2 - a_2)}{N}$.

Παρατηρούμε ότι,

$$U(f, \mathrm{P}) - L(f, \mathrm{P}) = \sum_{1 \leq k, \lambda \leq N} (\mathrm{M}_{k,\lambda} - m_{k,\lambda}) \mu(\Re_{k,\lambda}) = \sum_{1 \leq k, \lambda \leq N} (t_k - t_{k-1}) \cdot \mu(\Re_{k,\lambda}) =$$

$$\sum_{1 \leq k, \lambda \leq N} \frac{(b_1 - a_1)}{N} \left[\frac{(b_1 - a_1)}{N} \cdot \frac{(b_2 - a_2)}{N}\right] = N^2 \cdot \frac{(b_1 - a_1)^2 \cdot (b_2 - a_2)}{N^3} = \frac{(b_1 - a_1)^2 \cdot (b_2 - a_2)}{N}$$

$$\leq \varepsilon$$

Έπεται από το κριτήριο του Riemann ότι η π_1 είναι ολοκληρώσιμη.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της π_1 στο $\Re$. Παρατηρούμε ότι αν για μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό ορθογώνιο $\Re$ του R^2(ή του R^n) υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\mathrm{P}_n, n\geq 1$ του $\Re$ ώστε $U(f,\mathrm{P}_n)-L(f,\mathrm{P}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ και αν $\mathrm{I}=\int_{\Re} f(x)dx$ τότε, $\lim_{n\to\infty}U(f,\mathrm{P}_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,\mathrm{P}_n)=\mathrm{I}$.

Η παρατήρηση αυτή έπεται εύκολα από τον ορισμό του ολοκληρώματος και το κριτήριο Riemann (Δες επίσης την παρατήρηση1, καθώς και την πρόταση 16.8).

Είναι σαφές ότι τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στην $\pi_1|\Re$ αν για τον θετικό ακέραιο N ορίσουμε ως P_N την διαμέριση $\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2$ του $\Re$ που ορίσαμε προηγουμένως. Έτσι είναι αρκετό να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{N\to\infty}U(f,\mathrm{P}_N)=\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq k,\lambda\leq N}t_k\cdot\mu(\Re_{k,\lambda})=\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq k,\lambda\leq N}t_k\cdot\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2}=$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2}\sum_{1\leq k,\lambda\leq N}t_k\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2}\cdot\left(N\cdot\sum_{k=1}^{N}t_k\right)\right]\quad(1)$$

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{N}t_k=\sum_{k=1}^{N}\left(a_1+k\frac{b_1-a_1}{N}\right)=Na_1+\frac{b_1-a_1}{N}\sum_{k=1}^{N}k=$

$=Na_1+\frac{b_1-a_1}{N}\cdot\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N(b_1+a_1)+(b_1-a_1)}{2}$ (2) (άθροισμα των $N-$πρώτων όρων αριθμητικής προόδου).

Αντικαθιστώντας στο όριο (1) το άθροισμα (2) βρίσκουμε

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2}\cdot N\cdot\left[\frac{N(b_1+a_1)+b_1-a_1}{2}\right]=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\frac{(b_1+a_1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b_1^2-a_1^2)(b_2-a_2).$$

Σημείωση. Το στερεό τον όγκο του οποίου υπολογίσαμε είναι ένα ορθό πρίσμα με βάση τραπέζιο (το επίπεδο του οποίου είναι παράλληλο με το zx επίπεδο) με βάσεις μήκους a_1,b_1 και ύψος b_1-a_1, άρα το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(a_1+b_1)\cdot(b_1-a_1)$. Το ύψος του πρίσματος ισούται με b_2-a_2, συνεπώς ο όγκος του είναι, $V=E\cdot(b_2-a_2)=\frac{1}{2}(b_1^2-a_1^2)\cdot(b_2-a_2)$.

Σύνολα μέτρου μηδέν στον R^n και ο χαρακτηρισμός του Lebesgue των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

17.1 Ορισμός. Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$, λέμε ότι το A έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ανοικτών $n-$ διάστατων ορθογωνίων $(\Re_n)$ ώστε

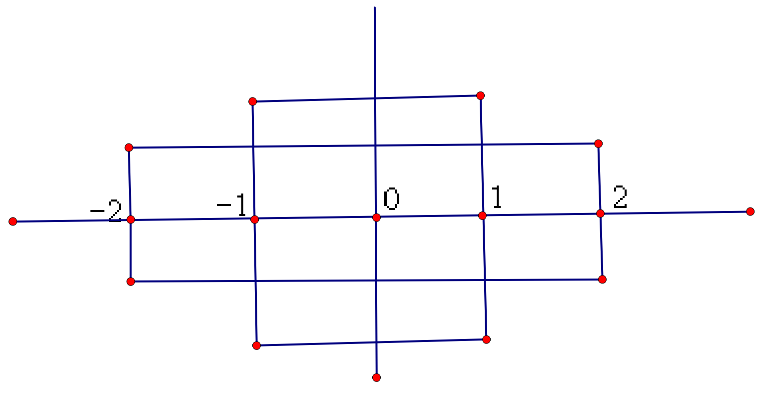
$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Re_n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Re_n) \leq \varepsilon .$$

Γράφουμε τότε $\mu_n(\mathrm{A}) = 0$ ή $\mu(\mathrm{A}) = 0$ (και λέμε ότι το A έχει μέτρο μηδέν) αν δεν υπάρχει αμφιβολία για την διάσταση.
Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η έννοια του $n-$ διάστατου μέτρου μηδέν δεν εξαρτάται από το είδος των ορθογωνίων που καλύπτουν το A, έτσι μπορούμε π.χ. να αντικαταστήσουμε στον ορισμό τα ανοικτά με κλειστά ορθογώνια.

Παραδείγματα 1) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του R^n έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.
Πράγματι, έστω $\mathrm{A} = \{x_1, \dots, x_k, \dots\} \subseteq R^n$. Αν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε για κάθε $k \geq 1$ ένα ανοικτό ορθογώνιο $\mathrm{I}_k \subseteq R^n$ με $x_k \in \mathrm{I}_k$ ώστε $\mu(\mathrm{I}_k) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Έπεται προφανώς ότι

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$$

2) Κάθε ευθεία του R^2 έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.
Ας αποδείξουμε το αποτέλεσμα – για λόγους απλότητας- για την ευθεία των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{A} = \{(x,0) : x \in R\} \subseteq R^2$. Έστω $\varepsilon > 0$, καλύπτουμε τότε την ευθεία A με την ακολουθία των ορθογωνίων $\Re_n = [-n, n] \times \left[-\dfrac{\varepsilon}{2n2^{n+1}}, \dfrac{\varepsilon}{2n2^{n+1}}\right], n \geq 1$.



Είναι προφανές ότι $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Re_n$. Επειδή $\mu(\Re_n) = \dfrac{\varepsilon}{2^n}, n \geq 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Re_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \varepsilon$, έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις 1) Η έννοια του $n-$ διάστατου μέτρου μηδέν εξαρτάται από τον χώρο που «ζει» το σύνολο που εξετάζουμε, έτσι η ευθεία των πραγματικών έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν ως υποσύνολο του R^2, όμως ως υποσύνολο του εαυτού της έχει βέβαια (μονοδιάστατο) μέτρο που είναι διαφορετικό του μηδενός (αφού απειρίζεται).

2) Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται σε κάθε διάσταση ($n \geq 2$). Έτσι αποδεικνύεται ότι κάθε υπερεπίπεδο του R^n ($n \geq 2$) έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν. (Άσκηση).

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί και το ακόλουθο αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση.

17.2 Πρόταση Έστω $\mathrm{A}_k, k \geq 1$ μια ακολουθία υποσυνόλων του R^n που το καθένα έχει $n-$ διάστατο μέτρου μηδέν, τότε το σύνολο $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ έχει $n-$ διάστατο μέτρου μηδέν.

Σύνολα διδιάστατου μέτρου μηδέν στον R^2 που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για εμάς είναι τα γραφήματα συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

17.3 Θεώρημα Έστω $f:[a,b] \subseteq R \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (ιδιαίτερα η f είναι συνεχής) τότε το γράφημα της f έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή f είναι ολοκληρώσιμη ικανοποιεί το κριτήριο Riemann. Άρα υπάρχει διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b\}$ του $[a,b]$, ώστε αν $m_k = \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$ και $\mathrm{M}_k = \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$, $k = 1,2,...,n$ τότε $U(f,\mathrm{P}) - L(f,\mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})(\mathrm{M}_k - m_k) \leq \varepsilon$ (1).

Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια $\mathfrak{R}_k = [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, \mathrm{M}_k], k = 1,2,...,n$ καλύπτουν το γράφημα της f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$. Πράγματι, αν $x \in [a,b]$ τότε υπάρχει $k \in \{1,2,...,n\}$ ώστε $x \in [t_{k-1}, t_k]$, άρα $(x, f(x)) \in [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, \mathrm{M}_k] = \mathfrak{R}_k$.

Επί πλέον από την (1) έπεται προφανώς ότι $\sum_{k=1}^{n} \mu(\mathfrak{R}_k) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})(\mathrm{M}_k - m_k) \leq \varepsilon$.

Συνεπώς το $G(f)$ έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής, τότε όπως γνωρίζουμε ικανοποιεί το κριτήριο του Riemann (ισοδύναμα είναι ολοκληρώσιμη). Ας υπενθυμίσουμε την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού:

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, ως συνεχής στο συμπαγές $[a,b]$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| \leq \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ (2).

Επιλέγουμε μια διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b\}$ του $[a,b]$ με λεπτότητα $\delta(\mathrm{P}) = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\} \leq \delta$ και παρατηρούμε (με τον προηγούμενο συμβολισμό) ότι όπως έπεται από την (2) θα έχουμε, $U(f,\mathrm{P}) - L(f,\mathrm{P}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M}_k - m_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon .$$

Έτσι η f ικανοποιεί το κριτήριο του Riemann και συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη.

Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

17.4 Θεώρημα Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του R^n και $f:\Re \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (ιδιαίτερα η f είναι συνεχής) τότε το γράφημα της f έχει $n+1-$ διάστατο μέτρο μηδέν (ως υποσύνολο του R^{n+1}).

Παραδείγματα 1) Ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ του R^2 έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Πράγματι, ο S^1 είναι ένωση του άνω και του κάτω ημικυκλίου που είναι γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$ και $g(x) = -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$ αντίστοιχα. Επομένως $\mu_2(S^1) = 0$.

2) Η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ του R^3 έχει τρισδιάστατο μέτρο μηδέν αφού μπορεί να γραφεί ως ένωση του άνω και του κάτω ημισφαιρίου που είναι γραφήματα των συναρτήσεων, $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ και $g(x,y) = -\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, με κοινό πεδίο ορισμού τον κλειστό δίσκο $\widehat{\mathrm{B}}(0,1) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ του Ευκλειδείου επιπέδου.

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα εύκολα γενικεύονται στον R^n . Έτσι η επιφάνεια $S^{n-1} = \{(x_1,...,x_n) \in R^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}, n \geq 2$ της μοναδιαίας σφαίρας του R^n έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν (Άσκηση).

3) Η καμπύλη (παραβολή) $C = \{(x,x^2) : x \in R\}$ έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν. Πράγματι, θέτομε $C_n = \{(x,x^2) : x \in [-n,n]\}$ για $n \in N$, τότε η C_n είναι γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f(x) = x^2$ περιορισμένης στο διάστημα $[-n,n]$. Επειδή $\mu_2(C_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ έχομε το συμπέρασμα.

Διατυπώνουμε τώρα, χωρίς απόδειξη, ένα σημαντικό αποτέλεσμα του Lebesgue που χαρακτηρίζει τις κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

17.5 Θεώρημα Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του R^n και $f:\Re \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ιι) Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.

Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του R^n.

Η θεωρία ολοκλήρωσης που αναπτύξαμε μέχρι τώρα αφορά πολλαπλά ολοκληρώματα $\int_{\Re} f(x)dx$ όπου $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του Ευκλειδείου χώρου R^n.

Όμως στις εφαρμογές είναι απαραίτητο να έχουμε έναν ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος σε μια κλάση υποσυνόλων του R^n ευρύτερη των ορθογωνίων. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

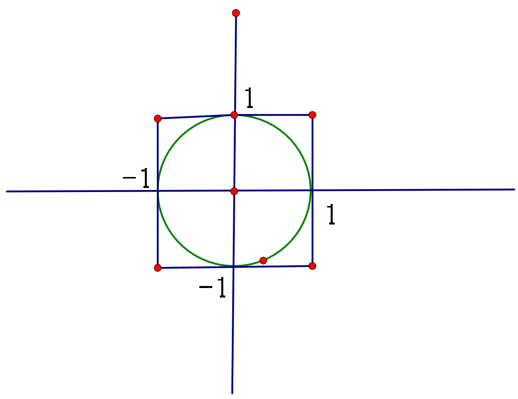
17.6 Ορισμός. Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ φραγμένο και $f : \mathrm{A} \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Έστω ακόμη $\Re$ ένα κλειστό ορθογώνιο του R^n που περιέχει το A, ορίζουμε μια συνάρτηση g επί του $\Re$ με τον ακόλουθο τρόπο: $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \mathrm{A} \\ 0, & \text{αν } x \in \Re - \mathrm{A} \end{cases}$

Η f λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) επί του A αν το ολοκλήρωμα (Riemann) $\int_{\Re} g(x)dx$ υπάρχει. Γράφουμε τότε $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx = \int_{\Re} g(x)dx$

Σημείωση Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε (π.χ. θεωρώντας τα αθροίσματα Riemann που προσεγγίζουν το $\int_{\Re} g(x)dx$) ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx$ είναι <u>ανεξάρτητο</u> του ορθογωνίου που περιέχει το A.

Ας εξετάσουμε τον καινούριο ορισμό με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x^2 + yx, (x,y) \in R^2$ και A ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του R^2, δηλαδή $\mathrm{A} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Το τετράγωνο $\Re = [-1,1] \times [-1,1]$ περιέχει τον δίσκο A και μένει να εξακριβώσουμε αν το ολοκλήρωμα $\int_{\Re} g(x,y)dxdy$ υπάρχει όπου

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, (x,y) \in \mathrm{A} \\ 0, \quad (x,y) \in \Re - \mathrm{A} \end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι η g δεν είναι συνεχής στο τετράγωνο $\Re$, μάλιστα τα σημεία ασυνέχειας της g είναι ακριβώς τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ που έχουν βέβαια άπειρο (υπεραριθμήσιμο) πλήθος. Παρόλα αυτά η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ όπως έπεται εύκολα από τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων του Lebesgue και το γεγονός (που ήδη γνωρίζουμε) ότι καμπύλες όπως ο κύκλος που είναι πεπερασμένες ενώσεις γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων έχουν μέτρο μηδέν.

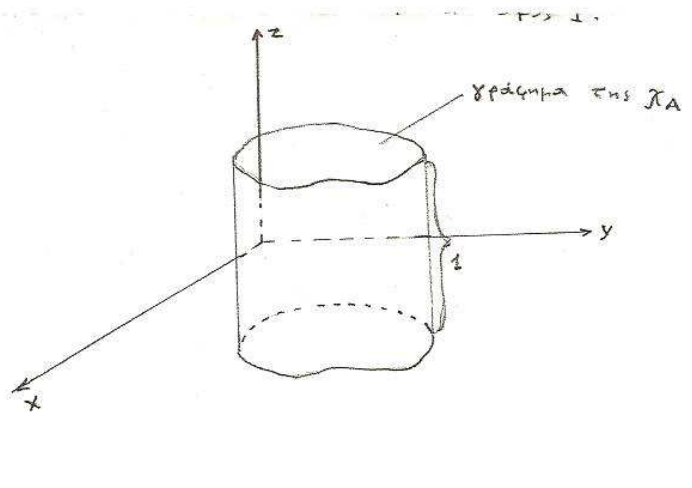
Από το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε προκύπτει ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τον ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος πάνω από ένα φραγμένο σύνολο $A \subseteq R^n$ που δώσαμε πριν, και αυτό διότι η διαδικασία αυτή εισάγει καινούριες ασυνέχειες στην συνάρτησή μας (που βρίσκονται στο σύνορο του A) και αυτό βρίσκεται σε αντίθεση με τον χαρακτηρισμό Lebesgue των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Από το ίδιο παράδειγμα (αλλά και από άλλα παραδείγματα) προκύπτει ακόμη ότι σύνολα κατάλληλα για την ολοκλήρωση είναι αυτά που το σύνορό τους είναι σχετικά ομαλό.

Ας ξεκινήσουμε την διερεύνηση των συνόλων με ομαλό σύνορο (ως προς την ολοκλήρωση) με την ακόλουθη.

Παρατήρηση. Έστω $A \subseteq R^n$, θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $f = x_A$ του συνόλου A. Τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι αν $x \in R^n$, το x είναι σημείο ασυνέχειας της f αν και μόνο αν το x ανήκει στο <u>σύνορο</u> του A. (Άσκηση).
Υπενθυμίζουμε ότι το σύνορο ∂A του A ορίζεται ως, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{R^n - A}$ και ακόμη ότι ισχύει η εξίσωση , $R^n = \operatorname{int}(R^n - A) \cup \partial A \cup \operatorname{int}(A)$.
Έπεται αμέσως από των χαρακτηρισμό του Lebesgue των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων και την παρατήρηση αυτή η ακόλουθη.

17.7Πρόταση Έστω $A \subseteq R^n$ φραγμένο σύνολο και $f = x_A$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.
(ιι) Το σύνορο του A έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν ($\mu_n(\partial A) = 0$).

17.8 Ορισμός Θα λέμε ότι ένα φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq R^n$ <u>έχει περιεχόμενο</u> ή ότι είναι <u>Jordan μετρήσιμο</u> υποσύνολο του R^n, αν η χαρακτηριστική συνάρτησή του $f = x_A$ είναι ολοκληρώσιμη, ισοδύναμα αν $\mu_n(\partial A) = 0$ (σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση).
Αν το $A \subseteq R^n$ είναι Jordan μετρήσιμο ορίζουμε τότε (ως $n-$ διάστατο) <u>περιεχόμενο</u> ή ($n-$ διάστατο) <u>όγκο</u> του A τον αριθμό $\mu_n(A) = \int_A 1dx \left(= \int_{\Re} x_A dx \right)$, δηλαδή το ολοκλήρωμα Riemann της χαρακτηριστικής συνάρτησης του A. Ο όγκος του A συμβολίζεται και με $V(A)$.
Ο ορισμός του όγκου είναι φυσιολογικός επειδή ο χώρος κάτω από το γράφημα της $f = x_A$ είναι μια « κυλινδρική» περιοχή με βάση το σύνολο A και ύψος 1.



Παρατηρήσεις 1) Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ φραγμένο, τότε το Α είναι Jordan μετρήσιμο με περιεχόμενο μηδέν (δηλαδή $\mu_n(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} 1dx = 0$) αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $\Re_1,...,\Re_N$ από ορθογώνια ώστε $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \Re_k$ και $\sum_{k=1}^{N} \mu(\Re_k) \leq \varepsilon$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). Έπεται προφανώς ότι αν το Α έχει περιεχόμενο μηδέν τότε έχει και μέτρο μηδέν.

2)Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$ είναι συμπαγές τότε το Α έχει ($n-$ διάστατο) μέτρο μηδέν , αν και μόνο αν, έχει ($n-$ διάστατο) περιεχόμενο μηδέν (Άσκηση).
Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$ φραγμένο, τότε Α Jordan μετρήσιμο αν και μόνο αν το σύνορό του έχει περιεχόμενο μηδέν.

3)Ένα φραγμένο υποσύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ ενδέχεται να έχει μέτρο μηδέν αλλά όχι περιεχόμενο μηδέν. Ένα τέτοιο παράδειγμα (στην διάσταση $n = 1$) είναι το σύνολο $\mathrm{A} = Q \bigcap [0,1]$ των ρητών του διαστήματος $[0,1]$. Πράγματι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f = x_{\mathrm{A}}$ (= η συνάρτηση του Dirichlet), δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αφού για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$ έχουμε ότι $L(f,\mathrm{P}) = 0$ και $U(f,\mathrm{P}) = 1$.
Είναι βέβαια σαφές ότι το Α ως αριθμήσιμο υποσύνολο του R έχει (μονοδιάστατο) μέτρο μηδέν. (Σημειώνομε ότι, το σύνορο $\partial\mathrm{A}$ του Α είναι το σύνολο $[0,1]$ και άρα $\mu(\partial\mathrm{A}) = 1$.)

4)Η κλάση J_n των Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του R^n είναι μια άλγεβρα, δηλαδή είναι κλειστή για τις πεπερασμένες ενώσεις και τομές, καθώς και για τα συμπληρώματα. (Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρήστε ότι $\partial(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \subseteq \partial(\mathrm{A}) \bigcup \partial(\mathrm{B})$ για $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq R^n$).

Τα σύνολα της άλγεβρας J_n έχουν ομαλό σύνορο και αυτό επιτρέπει την ολοκλήρωση φραγμένων συναρτήσεων πάνω σε αυτά οι οποίες είναι σχετικά ομαλές.

17.9Θεώρημα Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f : \mathrm{A} \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Α.
(ιι) Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο Α είναι σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του R^n που περιέχει το Α. Επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $g : \Re \to R$ (σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό) θέτοντας

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \in \mathrm{A} \\ 0, x \in \Re - \mathrm{A} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η g παραμένει φραγμένη και ότι ασυνέχειες της f κληροδοτούνται στην g. Όμως η g ενδέχεται να έχει ασυνέχειες σε κάποια ή και σ' όλα από τα συνοριακά σημεία του Α. Επειδή το Α είναι Jordan μετρήσιμο έπεται προφανώς ότι η g είναι ολοκληρώσιμη ακριβώς τότε αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο μηδέν.

Έπεται προφανώς το ακόλουθο

17.10 Πόρισμα Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο. Αν η συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to R$ είναι συνεχής και φραγμένη τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Α.

Παραδείγματα Jordan μετρήσιμων συνόλων. 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n έχει περιεχόμενο μηδέν (προφανές).
Γενικότερα κάθε φραγμένο υποσύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ με πεπερασμένο σύνολο σημείων συσσώρευσης (A' πεπερασμένο) έχει περιεχόμενο μηδέν (Άσκηση).

2)Κάθε φραγμένο ορθογώνιο $\mathfrak{R}$ του R^n είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο (αν $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ τότε ο όγκος του είναι $V(\mathfrak{R}) = (b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n)$).

3)Κάθε σφαίρα του Ευκλειδείου χώρου (ανοικτή ή κλειστή) είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο. Αυτό το αποτέλεσμα το έχουμε ήδη αποδείξει για την μοναδιαία σφαίρα του R^n (αφού η επιφάνειά της S^{n-1} έχει μέτρο μηδέν). Το γενικότερο αποτέλεσμα αποδεικνύεται παρόμοια. Ιδιαίτερα στο R κάθε φραγμένο διάστημα είναι Jordan μετρήσιμο (γιατί;).

4)Κάθε φραγμένο υποσύνολο του R^2 του οποίου το σύνορο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο γραφημάτων συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής είναι Jordan μετρήσιμο. Γενικότερα, κάθε φραγμένο υποσύνολο του $R^n (n \geq 2)$, του οποίου το σύνορο είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων $n-1$ μεταβλητών είναι Jordan μετρήσιμο, αφού τότε το σύνορό του έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.

5)Έστω $f : [a,b] \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $f \geq 0$ στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο $D = \{(t,z) \in R^2 : t \in [a,b] \text{ και } 0 \leq z \leq f(t)\}$ είναι Jordan μετρήσιμο στο R^2 (Άσκηση).

Παρατήρηση Αποδεικνύεται ότι κάθε φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του R^n είναι Jordan μετρήσιμο.

Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική ολοκλήρωση

Υπάρχουν δύο θεμελιώδη αποτελέσματα που μας βοηθούν να υπολογίζουμε πολλαπλά ολοκληρώματα.
Το πρώτο αποτέλεσμα σχετίζεται με τον υπολογισμό ενός πολλαπλού ολοκληρώματος με διαδοχική ολοκλήρωση και είναι το θεώρημα Fubini και το δεύτερο που θα εξετάσουμε αργότερα με την αλλαγή μεταβλητής.
Διατυπώνουμε το θεώρημα Fubini προς το παρόν για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

18.1 Θεώρημα (Fubini) Έστω $\Re=[a,b]\times[c,d]\subseteq R^2$ κλειστό ορθογώνιο στον R^2 και $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση.
(ι) Αν η f είναι συνεχής στο $\Re$ τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$ όπου το σύμβολο $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$, σημαίνει ότι η συνάρτηση $x\in[a,b]\to\int\limits_c^d f(x,y)dy$ ολοκληρώνεται στο $[a,b]$.
(ιι) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$. Αν επιπλέον τα ολοκληρώματα $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ υπάρχουν για κάθε $x\in[a,b]$ τότε (η $x\in[a,b]\to\int\limits_c^d f(x,y)dy$ ολοκληρώνεται στο $[a,b]$ και) ισχύει $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$.
Ανάλογα αν τα ολοκληρώματα $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ υπάρχουν για κάθε $y\in[c,d]$ τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$.
Συνεπώς αν όλες αυτές οι συνθήκες ισχύουν ταυτόχρονα τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

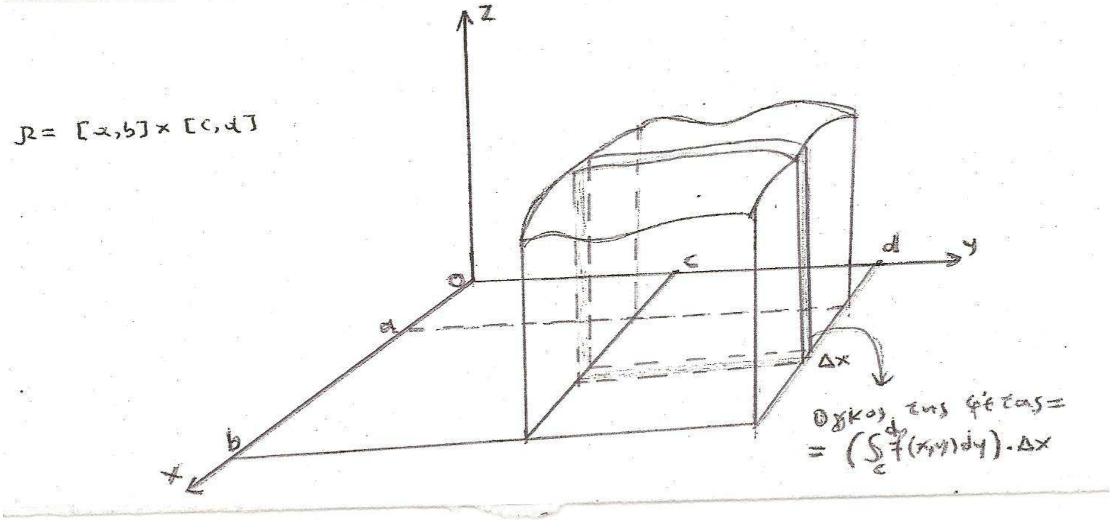
Παρατηρήσεις. 1) Οι υποθέσεις που κάναμε στον ισχυρισμό (ιι) του θεωρήματος είναι περισσότερες απ' ότι στον (ι). Είναι όμως αναγκαίες γιατί αν η f δεν είναι παντού συνεχής δεν έπεται αναγκαία ότι το ολοκλήρωμα $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ θα υπάρχει για κάθε $x\in[a,b]$.

2) Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για συναρτήσεις $n-$ μεταβλητών με $n\geq 2$. Αν π.χ. η $f:[a,b]\times[c,d]\times[u,v]\to R$ είναι συνεχής και $\mathrm{I}=\int\limits_{\Re} f(x,y,z)dxdydz$ είναι η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος, τότε υπάρχουν $3!=6$ διαδοχικά ολοκληρώματα

της συνάρτησης $f(x,y,z)$ όλα μεταξύ τους ίσα. Π.χ.

$$\mathrm{I}=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_u^v f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_u^v\left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$$

<u>Ποιοτική εξήγηση του θεωρήματος Fubini</u>



Έστω $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ συνεχής με $f\geq 0$. Αν τεμαχίσουμε τον όγκο κάτω από το γράφημα της f σε λεπτές φέτες π.χ. παράλληλες με το yz επίπεδο, τότε προσεγγιστικά ο όγκος αυτός ισούται με το άθροισμα των ποσοτήτων $\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]\cdot\Delta x$, αφού $\int_c^d f(x,y)dy$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f_x: y\in[c,d]\to f(x,y)\in R$.

Έπεται προφανώς ότι: $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ (1).

Με ανάλογη διαδικασία τεμαχισμού σε φέτες παράλληλες με το xz επίπεδο καταλήγουμε στον τύπο $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ (2)

Τελικά από τις (1) και (2) λαμβάνουμε τον τύπο του Fubini: $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

Ως ένα αλγεβρικό ανάλογο του θεωρήματος Fubini αναφέρουμε και την γνωστή ταυτότητα: $\sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda}\right)$

Το θεώρημα Fubini μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που δεν είναι ορισμένες αναγκαία σε ορθογώνια του R^2. Αυτό μπορεί να γίνει αν το συνδυάσουμε με τα αποτελέσματα των προηγουμένων παραγράφων.

Στην πράξη έχουμε το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα που είναι συνέπεια του θεωρήματος Fubini.

18.2 Θεώρημα Έστω $\varphi,\psi:[a,b]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\varphi(x)\le\psi(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Θέτομε $D=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b$ και $\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$.

Έστω $f:D\to R$ συνεχής. Τότε $\int_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι το D είναι συμπαγές υποσύνολο του R^2 (γιατί;) και η f ως συνεχής στο D είναι φραγμένη. Έστω $\Re=[a,b]\times[c,d]$ κλειστό ορθογώνιο ώστε $D\subseteq\Re$ (μπορούμε να πάρουμε ως $c=\min\{\varphi(x):x\in[a,b]\}$ και $d=\max\{\psi(x):x\in[c,d]\}$ αφού οι φ,ψ είναι συνεχείς). Ορίζουμε την συνάρτηση $g:\Re\to R$ ώστε $g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y)\in D \\ 0, & \text{αν } (x,y)\in\Re-D\end{cases}$

Τα σημεία ασυνέχειας της g είναι όλα στο σύνορο του D, το οποίο είναι ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων φ,ψ και δύο κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων του R^2, έτσι το ∂D έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν και η g από το θεώρημα 17.9 της σελίδας 176 (ή το πόρισμα 17.10 της σελίδας 176) είναι ολοκληρώσιμη.

Έπεται ότι $\int_D f(x,y)dxdy=\int_\Re g(x,y)dxdy$ (1)

Από το θεώρημα Fubini έχουμε $\int_\Re g(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d g(x,y)dy\right)dx$ (2), αφού τα ολοκληρώματα $\int_c^d g(x,y)dy$ υπάρχουν για κάθε $x\in[a,b]$ και μάλιστα, $\int_c^d g(x,y)dy=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ (3).

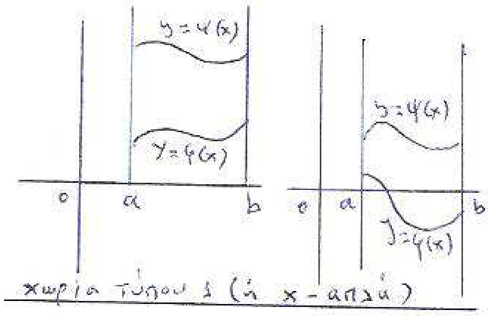
(Η συνάρτηση $y\in[c,d]\to g(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $x\in[a,b]$ αφού είναι φραγμένη και ενδεχομένως ασυνεχής μόνο στα σημεία $\varphi(x)$ και $\psi(x)$).

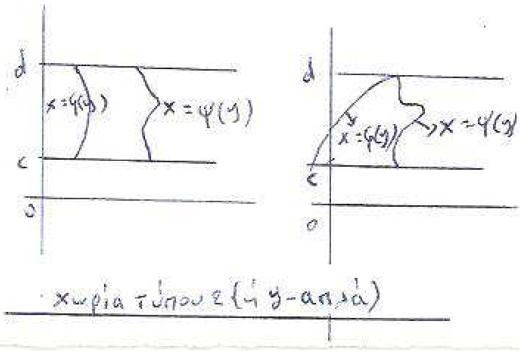
Από τις εξισώσεις (1),(2) και (3) έπεται το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις 1) Ένας ανάλογος τύπος ισχύει και για σύνολα της μορφής, $D=\{(x,y)\in R^2 : y\in[c,d]$ και $\varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$ όπου $\varphi,\psi:[c,d]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις και $\varphi(y)\le\psi(y)$ για κάθε $y\in[c,d]$. Αν $f:D\to R$ συνεχής συνάρτηση τότε: $\int_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right)dy$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι το θεώρημα 18.2 ισχύει και με την υπόθεση ότι η f είναι ορισμένη στο εσωτερικό $\operatorname{int}(D)$ του D και είναι συνεχής και φραγμένη εκεί (γιατί;). Δες επίσης και την άσκηση 5(β) αυτής της παραγράφου.

2) Τα υποσύνολα του R^2 που εμφανίζονται στην διατύπωση του θεωρήματος 18.2 καθώς και στην παρατήρηση (1) ονομάζονται <u>χωρία</u> του <u>τύπου 1</u> και του <u>τύπου 2</u>. Μερικές φορές ονομάζονται και $x-$απλά αντίστοιχα $y-$απλά σύνολα.





Χωρία τύπου 3 ονομάζονται αυτά που μπορούν να έχουν ταυτόχρονα και τις δύο περιγραφές, δηλαδή να είναι του τύπου 1 αλλά και του τύπου 2. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Συνήθως τα χωρία τύπου 1,2 και 3, αναφέρονται και ως στοιχειώδη χωρία. Παρατηρούμε ότι ένα στοιχειώδες χωρίο είναι συμπαγές υποσύνολο του R^2.

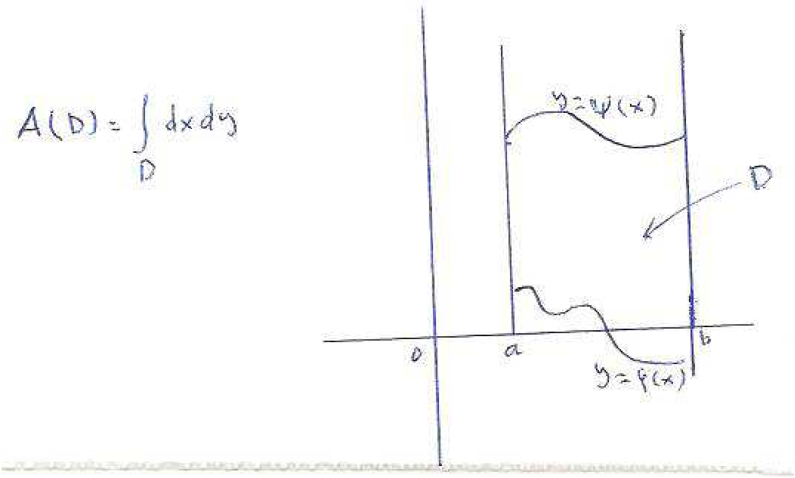
3) Στην περίπτωση που στο θεώρημα 18.2 (πόρισμα του Fubini) έχουμε $f(x,y)=1$ για $(x,y)\in D$ τότε ,

$$\int_D dxdy = \mathrm{A}(D) = \text{ το εμβαδό του } D.$$

Πράγματι,

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right) dx = \int_a^b \big(\psi(x)-\varphi(x)\big)dx = \text{το εμβαδόν}$$

του χωρίου D, όπως γνωρίζουμε και από το Λογισμό της μιας μεταβλητής (πρβλ και με τον ορισμό 17.8 του όγκου ενός Jordan μετρήσιμου συνόλου στην σελίδα 174).



Το θεώρημα μέσης τιμής για πολλαπλά ολοκληρώματα

Όπως και στον Λογισμό της μιας μεταβλητής τα πολλαπλά ολοκληρώματα ικανοποιούν μια ιδιότητα μέσης τιμής.

18.3 Λήμμα Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο και $f, g : \mathrm{A} \to R$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν

(ι) Αν $f \le g$ (δηλαδή $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$) τότε $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \int_{\mathrm{A}} g(x)dx$.

(ιι) Αν $|f(x)| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ τότε $\left|\int_{\mathrm{A}} f(x)dx\right| \le \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα όταν Α είναι κλειστό ορθογώνιο του R^n. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann έπεται ότι $\int_{\mathrm{A}} (g - f)dx \ge 0$ και συνεπώς έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

(ιι) Η $|f(x)| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισοδυναμεί με την $-\mathrm{M} \le f(x) \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ (1)

Επειδή οι σταθερές(όταν είναι ορισμένες σε Jordan μετρήσιμα σύνολα) είναι ολοκληρώσιμες και $\int_{\mathrm{A}} \mathrm{M}dx = \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$ (Πρβλ το παράδειγμα 1 μετά την Προτ. 16.7).

Έπεται από την (1) ότι, $-\mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A}) \le \int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$ και άρα η προς απόδειξη ανισότητα.

18.4 Θεώρημα (μέσης τιμής για ολοκληρώματα). Αν η $f : \mathrm{A} \to R$ είναι συνεχής και το Α Jordan μετρήσιμο συμπαγές και συνεκτικό, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A}$ ώστε

$$\int_{\mathrm{A}} f(x)\,dx = f(x_0) \cdot V(\mathrm{A}).$$

Αν $V(\mathrm{A}) \ne 0$, η ποσότητα $\frac{1}{V(\mathrm{A})} \cdot \int_{\mathrm{A}} f(x)dx$ ονομάζεται η <u>μέση τιμή</u> της f επί του Α.

Απόδειξη: Έστω $\lambda = \frac{1}{V(\mathrm{A})} \cdot \int_{\mathrm{A}} f(x)dx$. (Αν $V(\mathrm{A}) = 0$ τότε το αποτέλεσμα έπεται προφανώς από τον ισχυρισμό (ιι) του Λήμματος 18.3). Θέτομε $m = \min\{f(x) : x \in \mathrm{A}\}$ και $\mathrm{M} = \max\{f(x) : x \in \mathrm{A}\}$ (επειδή f συνεχής και Α συμπαγές η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Α). Συνεπώς $m \le f(x) \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Άρα από το Λήμμα 18.3 έπεται ότι $m \cdot V(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} m dx \le \int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \int_{\mathrm{A}} \mathrm{M}dx = \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$,

ή
$$m \le \frac{1}{V(\mathrm{A})} \int_{\mathrm{A}} f(x)\,dx \le \mathrm{M}$$

Επειδή το Α είναι συνεκτικό και η f συνεχής, η f ικανοποιεί το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής , και άρα υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A}$ ώστε $f(x_0) = \frac{1}{V(\mathrm{A})} \cdot \int\limits_{\mathrm{A}} f(x)dx$.

Παρατήρηση. Μια πιο προσεκτική εξέταση της απόδειξης μας δείχνει ότι η υπόθεση της συμπάγειας δεν είναι απαραίτητη αρκεί βέβαια η f να υποτεθεί φραγμένη.

Ένα υποσύνολο Α του R^n λέγεται <u>κατά τόξα συνεκτικό</u>, αν για κάθε $z, \omega \in \mathrm{A}$ υπάρχει καμπύλη γ του Α που συνδέει το z με το ω, δηλαδή υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathrm{A}$ ώστε $\gamma(a) = z$ και $\gamma(b) = \omega$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι κάθε κατά τόξα συνεκτικό σύνολο είναι και συνεκτικό. Η απόδειξη έπεται όπως και για τα κυρτά σύνολα με χρήση του Λήμματος 3.20. Όπως έπεται από τα αποτελέσματα της σχετικής παραγράφου (για τα συνεκτικά σύνολα) παραδείγματα κατά τόξα συνεκτικών συνόλων είναι βέβαια τα κυρτά σύνολα καθώς και τα ανοικτά και συνεκτικά σύνολα. Επίσης δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση:

18.5 Πρόταση Κάθε στοιχειώδες χωρίο D του επιπέδου είναι κατά τόξα συνεκτικό και άρα συνεκτικό σύνολο.

Από το αποτέλεσμα αυτό και το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα έπεται αμέσως το ακόλουθο.

18.6 Θεώρημα. Έστω $D \subseteq R^2$ στοιχειώδες χωρίο και $f : D \to R$ συνεχής. Τότε για κάποιο $(x_0, y_0) \in D$ ισχύει ότι $\int\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot V(D)$.

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχειώδες χωρίο είναι συμπαγές σύνολο, επειδή είναι και συνεκτικό το συμπέρασμα είναι προφανής συνέπεια του θεωρήματος 18.4.

Ασκήσεις

1) Έστω $f_k : [a_k, b_k] \to R, k = 1, 2, ..., n$, Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Θέτομε $\Re = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ και ορίζουμε την συνάρτηση $F : \Re \to R$ ώστε $F(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) ... f_n(x_n)$.

Αποδείξτε ότι, $\int\limits_{\Re} F(x_1, ..., x_n) d(x_1, ..., x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{a_k}^{b_k} f_k(t)dt$

(*) 2)Έστω $\Re = [a,b] \times [c,d]$ κλειστό ορθογώνιο του R^2 και $f : \Re \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in [c,d]$ η συνάρτηση, $f_y : x \in [a,b] \to f(x,y)$ είναι αύξουσα και ότι για κάθε $x \in [a,b]$ η συνάρτηση, $f_x : y \in [c,d] \to f(x,y)$ είναι επίσης αύξουσα. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$.

3)Ορίζουμε μια συνάρτηση f στο τετράγωνο $Q=[0,1]\times[0,1]$ ως εξής:

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ , αν είτε ο } x \text{ ή ο } y \text{ είναι άρρητος} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ αν ο } y \text{ είναι ρητός και } x=\dfrac{m}{n}, \text{ όπου } m \text{ και } n \text{ είναι σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι, $\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy=\int_Q f(x,y)dxdy=0$, όμως ότι το $\int_0^1 f(x,y)dy$ δεν υπάρχει αν ο x είναι ρητός.

4)Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: στο $\Re=[0,1]\times[0,1]$

(α) $\int_\Re x^m\cdot y^n dxdy$ όταν $m,n\in N$

(β) $\int_\Re (ax+by+c)dxdy$

(γ) $\int_\Re \sin(x+y)dxdy$.

Καθώς και τα ολοκληρώματα στο $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$

(δ) $\int_Q \sin^2 x\cdot\sin^2 y dxdy$

(ε) $\int_Q |\cos(x+y)|dxdy$.

(*) 5)Έστω $f:Q\to R$ συνεχής , όπου $Q=[a,b]\times[c,d]$. Για κάθε εσωτερικό σημείο (x_1,x_2) του Q, ορίζουμε , $F(x_1,x_2)=\int_a^{x_1}\left(\int_c^{x_2} f(x,y)dy\right)dx$.

Αποδείξτε ότι: $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο (x_1,x_2) του Q.

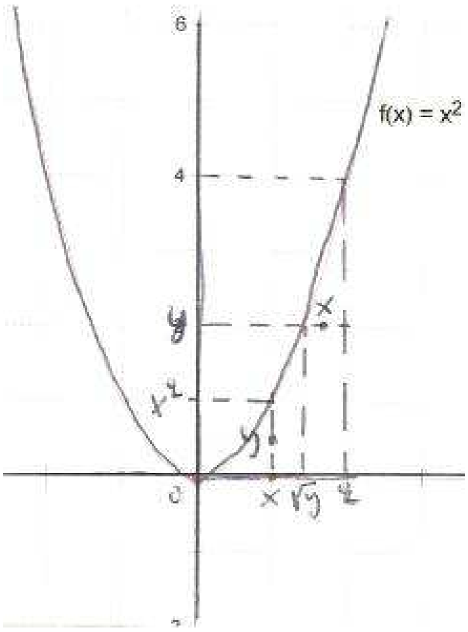
Σκεφθείτε την σχέση του θεωρήματος Fubini με την ισότητα των μεικτών παραγώγων.

(*) 6) Έστω $\gamma:[a,b]\to R^n$ καμπύλη με μήκος. Θέτομε $[\gamma]=\{\gamma(t):t\in[a,b]\}$ δηλαδή $[\gamma]$ είναι το σύνολο τιμών ή ίχνος της γ. Αποδείξτε ότι το $[\gamma]$ είναι Jordan μετρήσιμο με $n-$ διάστατο περιεχόμενο μηδέν.

Παραδείγματα (1)Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_D xydxdy$, όπου D είναι το επίπεδο χωρίο μεταξύ της παραβολής $y = x^2$ και των ευθειών $y = 0$ και $x = 2$.

Λύση $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 2 \text{ και } 0 \le y \le x^2\}$

$= \{(x, y) : 0 \le y \le 4 \text{ και } \sqrt{y} \le x \le 2\}$.



Το D είναι χωρίο του τύπου 3 έτσι έχουμε

$$\int\limits_D xydxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{x^2} xydy \right) dx = \int\limits_0^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{x^5}{2} dx = \frac{16}{3}$$, επειδή D είναι του τύπου 1.

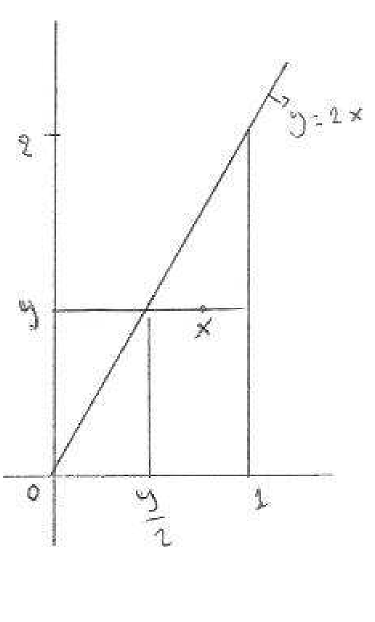
Επίσης επειδή D είναι και του τύπου 2, υπολογίζουμε

$$\int\limits_D xydxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} xydx \right) dy = \int\limits_0^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dy =$$

$$\int\limits_0^4 \left(2y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{16}{3}.$$

2)Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_D (x + y) dxdy$, όπου το D το τρίγωνο που καθορίζεται από τις ευθείες $y = 0$, $y = 2x$ και $x = 1$.

Λύση $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le 2x\} = \left\{(x, y) : 0 \le y \le 2, \frac{y}{2} \le x \le 1\right\}$



Το D είναι χωρίο τύπου 3

Επειδή το D είναι τύπου 1 υπολογίζουμε:

$$\int\limits_D (x + y) dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2x} (x + y) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx =$$

$$\int\limits_0^1 \left[x(2x) + \frac{1}{2}(2x)^2 - \left(x(0) + \frac{1}{2}(0)^2 \right) \right] dx$$

$$= \int\limits_0^1 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Επειδή το D είναι και <u>τύπου 2</u> υπολογίζουμε:

$$\int_D (x+y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1} (x+y)dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=1} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right] dy =$$

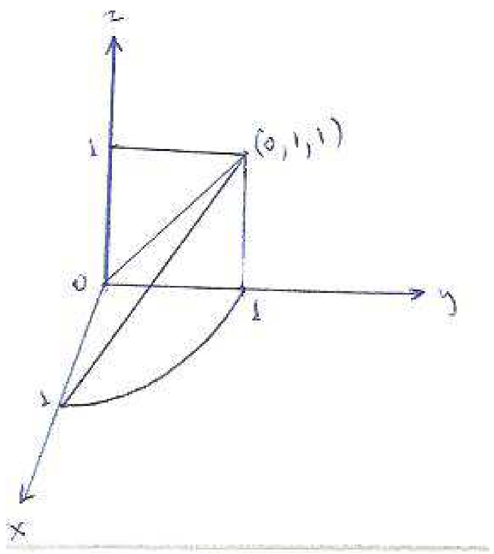
$$\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{5y^3}{24} \right]_{y=0}^{y=2} = \left[1 + 2 - \frac{5\cdot 8}{24} \right] - 10 = \frac{4}{3}.$$

3) Υπολογισμός όγκου με χρήση διπλού ολοκληρώματος

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = y$ και από κάτω στο xy επίπεδο από το πρώτο τεταρτημόριο D του μοναδιαίου δίσκου $x^2 + y^2 \le 1$.

Λύση Η συνάρτηση $z = f(x, y)$ που ολοκληρώνουμε στο D είναι η $z = f(x, y) = y$ (η δεύτερη προβολή $\pi_2 : R^2 \to R$)

Το D είναι χωρίο του <u>τύπου 3</u>. Επομένως ο ζητούμενος όγκος V υπολογίζεται με δύο τρόπους:



$$V = \int_D ydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \right) dx =$$

$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} ydx \right) dy$. Υπολογίζουμε το δεύτερο διαδοχικό ολοκλήρωμα και έτσι βρίσκουμε:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} ydx \right) dy = \int_0^1 y\left(\sqrt{1-y^2}\right) dy =$$

$\left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Το D περιγράφεται ως:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \text{ (τύπου 1)}$$

$$= \left\{ (x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\} \text{ (τύπου 2)}$$

Για τον υπολογισμό της παράγουσας, $\int y\sqrt{1-y^2}dy$, θέτομε $u = 1 - y^2$, συνεπώς $du = (-2y)dy$. Έπεται ότι,

$$\int y\sqrt{1-y^2}dy = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-y^2}\,(-2y)dy = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1-y^2} = -\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Έστω $D \subseteq R^2$ χωρίο τύπου 3 και $f: D \to R$ συνεχής συνάρτηση. Το D περιγράφεται με δύο τρόπους (ως τύπου 1 και 2) και άρα

$$D = \{(x,y): a \le x \le b \text{ και } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} =$$
$$= \{(x,y): c \le y \le d \text{ και } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

Έχουμε επομένως τους τύπους:

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy .$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ένα από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα – και τελικά το διπλό ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)dxdy$ - μπορούμε να το κάνουμε υπολογίζοντας το άλλο (εκείνο που υπολογίζεται ευκολότερα). Αυτή η τεχνική λέγεται αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

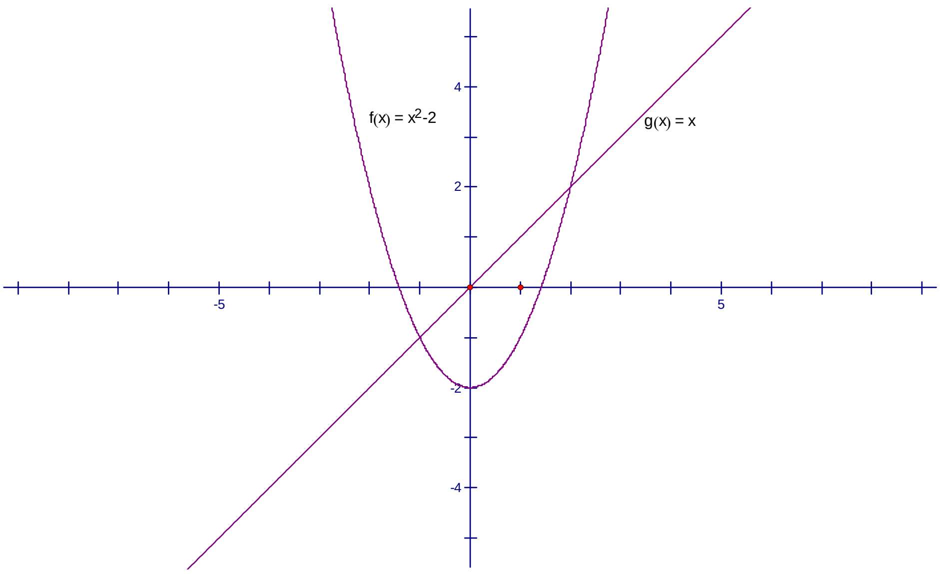
Παραδείγματα. 1)Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται (φράσσεται) από την παραβολή $y = x^2 - 2$ και την ευθεία $y = x$.

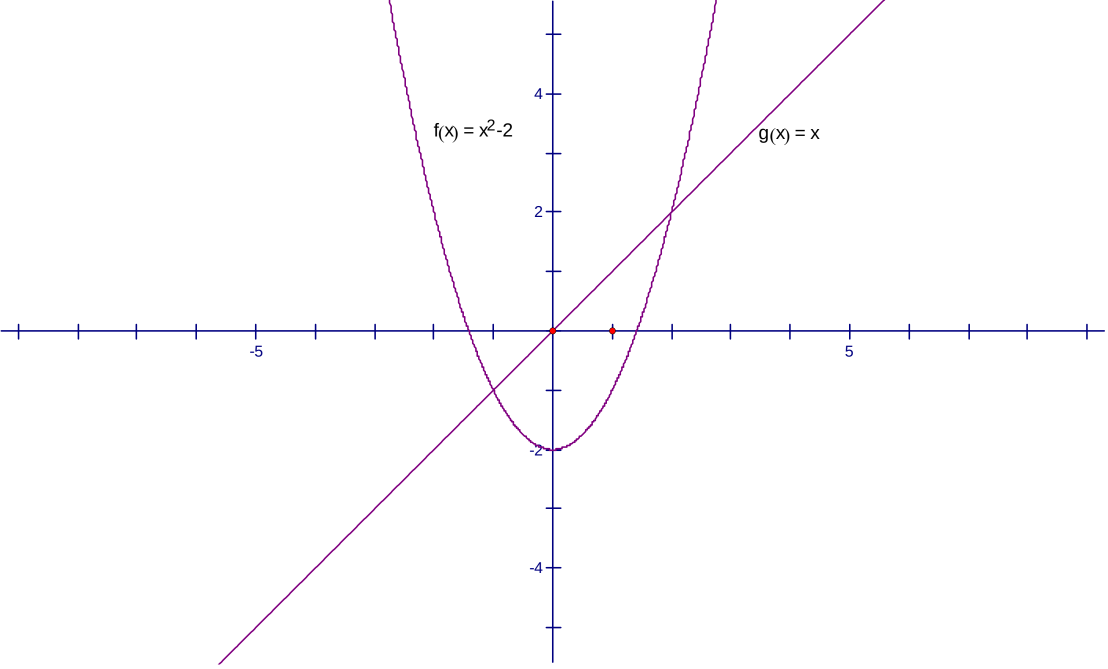
Λύση Το χωρίο D είναι του τύπου 1 και του τύπου 2, αφού

$$D = \{(x,y): -1 \le x \le 2, x^2 - 2 \le y \le x\} = \overbrace{\{(x,y): -2 \le y \le -1, -\sqrt{y+2} \le x \le \sqrt{y+2}\}}^{D_1} \cup \overbrace{\{(x,y): -1 \le y \le 2, y \le x \le \sqrt{y+2}\}}^{D_2}$$

Σχήμα Ι

Περιγραφή τύπου 1: $-1 \le x \le 2, x^2 - 2 \le y \le x$





Σχήμα ΙΙ

Περιγραφή τύπου 2:

Υπολογίζοντας το εμβαδόν του D ως χωρίο του τύπου 1, έχομε:

$$\mathrm{A}(D)=\int_D dxdy=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2-2}^{x}dy\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

Αν, όμως, θεωρηθεί ως χωρίο τύπου 2, είναι αναγκαίο να το διασπάσουμε σε δύο μέρη (χωρία) όπως στο Σχήμα ΙΙ.

Επομένως το εμβαδόν $\mathrm{A}(D)$ δίδεται από το άθροισμα των διαδοχικών ολοκληρωμάτων: $\mathrm{A}(D)=\int_{D_1}dxdy+\int_{D_2}dxdy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{y+2}}^{\sqrt{y+2}}dx\right)dy+\int_{-1}^{2}\left(\int_{y}^{\sqrt{y+2}}dx\right)dy=\ldots=\frac{9}{2}$.

Είναι σαφές ότι ο υπολογισμός του εμβαδού $\mathrm{A}(D)$ θεωρώντας το D ως χωρίο τύπου 1 είναι συντομότερος.

Σημείωση Τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2-2$ και της ευθείας $y=x$ βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(2,2)$, $(-1,-1)$.

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι η <u>μορφή</u> του χωρίου ολοκλήρωσης D μπορεί να <u>καθορίζει</u> ποια <u>διάταξη</u> (διαδοχικής) ολοκλήρωσης είναι περισσότερο κατάλληλη για τον υπολογισμό μας. Όπως θα δούμε όμως στο επόμενο παράδειγμα η προς <u>ολοκλήρωση συνάρτηση</u> παίζει και αυτή ρόλο στην επιλογή της <u>σειράς</u> ολοκλήρωσης.

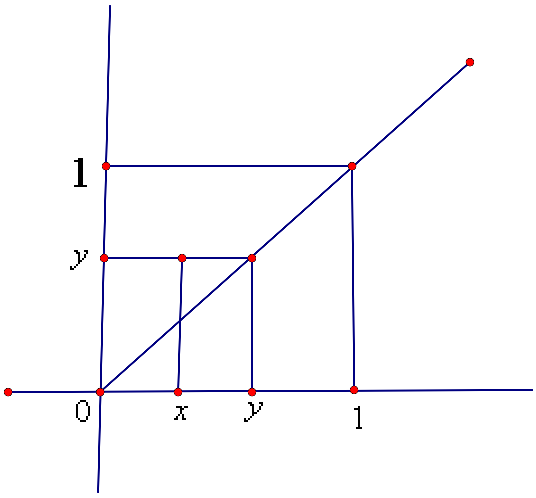
2)Υπολογίστε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx$.

Λύση Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το δοσμένο ολοκλήρωμα με την διάταξη η οποία δίδεται καθώς η παράγουσα της συνάρτησης $y \in R \to e^{y^2} \in R$ <u>δεν</u> είναι στοιχειώδης συνάρτηση (<u>δεν</u> μπορεί να υπολογισθεί)
Έτσι το δοσμένο ολοκλήρωμα θα υπολογισθεί αντιστρέφοντας την σειρά ολοκλήρωσης. Το χωρίο ολοκλήρωσης δίδεται στο ακόλουθο σχήμα και είναι βέβαια τύπου 3.
Παρατηρούμε ότι,

$$\int_D e^{y^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^y e^{y^2}dx\right)dy = \int_0^1 ye^{y^2}dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1)$$

(1)

$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\} \text{ (τύπου 1)}$$
$$= \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\} \text{ (τύπου 2)}$$



(1) Για τον υπολογισμό της παραγούσης $\int ye^{y^2}dy$, θέτομε $u = y^2$ άρα $du = 2ydy$. Έπεται ότι,
$\int ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}\int e^{y^2}2ydy = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u\Big|_{u=y^2}$.

Παράδειγμα 3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1\frac{dx}{\left(1+x^3\right)^5}\right)ydy$ και (2) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{dx}{\left(1+x^5\right)^7}\right)ydy$.

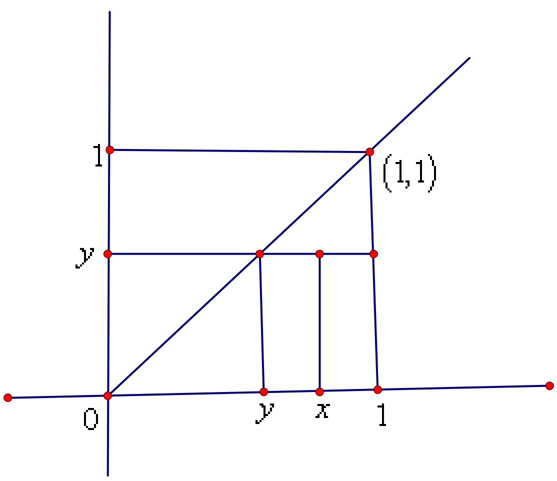
Λύση (1) Πρόκειται για μία από τις δύο εκφράσεις του διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\int_D\frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dxdy$ στο ακόλουθο χωρίο D που είναι τύπου 3,

$$D = \overbrace{\{(x,y): 0 \le y \le 1 \text{ και } y \le x \le 1\}}^{\text{τύπου 2}} = \overbrace{\{(x,y): 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le x\}}^{\text{τύπου 1}}.$$

Ισχύει ότι,

$$\int_D\frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dxdy = \underbrace{\int_0^1\left(\int_y^1\frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dx\right)dy}_{\text{τύπου 2}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^x\frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dy\right)dx}_{\text{τύπου 1}}$$



Το δοσμένο διαδοχικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται δύσκολα. Έτσι, υπολογίζουμε το δεύτερο διαδοχικό ολοκλήρωμα που προκύπτει από την έκφραση του D ως χωρίο τύπου 1.

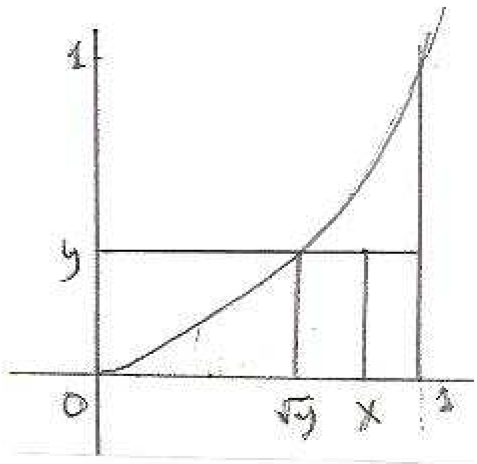
Έτσι έχουμε:

$$\int_0^1\left(\int_0^x \frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+x^3\right)^5}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^5}dx=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^5}\overset{*}{=}\frac{1}{6}\int_1^2\frac{du}{u^5}=\frac{1}{6}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^2=-\frac{1}{6}\left[\frac{u^{-4}}{4}\right]_1^2=-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]$$

* Εδώ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=1+x^3 \Leftrightarrow du=3x^2dx$

(2) Όσον αφορά το 2ο διαδοχικό ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{dx}{\left(1+x^5\right)^7}\right)ydy$, παρατηρούμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το $D=\left\{(x,y):0\le y\le 1 \text{ και } \sqrt{y}\le x\le 1\right\}$ και είναι τύπου 2, αλλά και τύπου 1, αν γραφεί ως $D=\left\{(x,y):0\le x\le 1 \text{ και } 0\le y\le x^2\right\}$



Έτσι αντί του δοθέντος διαδοχικού ολοκληρώματος, που υπολογίζεται δύσκολα υπολογίζουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα που προκύπτει από την έκφραση του D ως χωρίο τύπου 1 .

$$\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{y}{\left(1+x^5\right)^7}dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+x^5\right)^7}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4}{\left(1+x^5\right)^7}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1\frac{d\left(1+x^5\right)}{\left(1+x^5\right)^7}=\frac{1}{10}\int_1^2\frac{du}{u^7}$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u^6}\right]_1^2=-\frac{1}{60}\left(\frac{1}{64}-1\right)=\frac{63}{60\cdot 64}$$ Το

Παρατηρηση.Το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx$ του παραδείγματος (2),

υπολογίζεται και με ολοκλήρωση κατά μέρη: Θέτομε $G(x)=\int_x^1 e^{y^2}dy, x\in[0,1]$ και

παρατηρούμε ότι $G(x)=\int_0^1 e^{y^2}dy-\int_0^x e^{y^2}dy \Rightarrow G'(x)=-e^{x^2}, x\in[0,1]$.

Άρα,

$$\mathrm{I}=\int_0^1 G(x)dx=\int_0^1 x'G(x)dx=\left[xG(x)\right]_0^1-\int_0^1 xG'(x)dx=$$

$$G(1)-\int_0^1 x\left(-e^{x^2}\right)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=...=\frac{1}{2}(e-1).$$

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική ολοκλήρωση

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Fubini για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων. Ξεκινούμε με την διατύπωση του θεωρήματος Fubini για τριπλά ολοκληρώματα.

19-1 Θεώρημα Έστω $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ κλειστό ορθογώνιο στον R^3 και $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1)Αν η f είναι συνεχής τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και αν $\mathrm{I}=\int\limits_{\Re} fdx$, τότε τα έξι διαδοχικά ολοκληρώματα που παίρνουμε μεταθέτοντας τα dx,dy,dz π.χ. $\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$, $\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy$ κτλ είναι <u>όλα ίσα</u> με τον αριθμό I.

2)Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$, αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$ υπάρχει για κάθε $(x,y)\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ τότε (η συνάρτηση $(x,y)\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$ ολοκληρώνεται στο $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ και) ισχύει $$\int\limits_{\Re} fdx=\int\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}\left(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

Ανάλογα, αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z)dxdy$ υπάρχει για κάθε $z\in[a_3,b_3]$ έπεται ότι, $$\int\limits_{\Re} fdx=\int\limits_{a_3}^{b_3}\left(\int\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z)dxdy\right)dz.$$

Στην συνέχεια θα δούμε πως τριπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν πάνω από στερεά χωρία που <u>δεν</u> είναι ορθογώνια. Θα υποθέσουμε ότι το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένα <u>Jordan μετρήσιμο</u> υποσύνολο του R^3 <u>ειδικού τύπου</u> (πού είναι ανάλογος με τα επίπεδα χωρία ολοκλήρωσης που εξετάσαμε σε προηγούμενες παραγράφους).

Με περισσότερη ακρίβεια, θα υποθέσουμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης D φράσσεται από <u>πάνω</u> από μια επιφάνεια $z=u(x,y)$ και από <u>κάτω</u> από μια επιφάνεια $z=v(x,y)$ και ακόμα ότι προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο Α είτε του <u>τύπου</u> **1** είτε του <u>τύπου</u> **2.** Έτσι το D περιγράφεται ως εξής:
$$D=\{(x,y,z):(x,y)\in \mathrm{A} \text{ και } v(x,y)\le z\le u(x,y)\}.$$

Αν π.χ. το Α είναι του <u>τύπου</u> **1** και $\mathrm{A}=\{(x,y)\in R^2: a\le x\le b \text{ και } \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ όπου $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ τότε, $D=\{(x,y,z):\ a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x) \text{ και } v(x,y)\le z\le u(x,y)\}$.

19.2 Θεώρημα Έστω D στερεό χωρίο, $D \subseteq R^3$, το οποίο φράσσεται από πάνω από μια επιφάνεια $z = u(x,y)$, από κάτω από μια επιφάνεια $z = v(x,y)$ και προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο A. Αν το A είναι είτε του τύπου **1** είτε του τύπου **2**, και η $f : D \to R$ συνεχής (ή φραγμένη με αριθμήσιμο το πολύ πλήθος ασυνεχειών) συνάρτηση τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και

$\int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dz \right) d(x,y)$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

Ειδικότερα: (ι) Αν το A είναι του τύπου 1 και,

$A = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b$ και $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ τότε

$\int_D f dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dzdydx$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

(ιι) Αν το A είναι του τύπου 2 και $A = \{(x,y) \in R^2 : c \le y \le d$ και $g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$

τότε $\int_D f dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dzdxdy$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται (όπως και το ανάλογό του για διπλά ολοκληρώματα) με την βοήθεια του θεωρήματος Fubini (αφού επεκτείνουμε την f σε ένα κλειστό ορθογώνιο $\Re$ που περιέχει το D) και τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Απλώς παρατηρούμε ότι οι ασυνέχειες της f είναι μέτρου μηδέν αφού βρίσκονται στο σύνορο του D, το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων (δύο μεταβλητών) και άρα μέτρου μηδέν, δηλαδή D Jordan μετρήσιμο.

2)Τα υποσύνολα D του R^3 που εμφανίζονται στην διατύπωση του προηγουμένου θεωρήματος ονομάζονται στερεά (ή τρισδιάστατα) χωρία τύπου **1**. Ανάλογα ορίζονται τα στερεά χωρία τύπου 2 με προβολή του D στο yz επίπεδο και τα στερεά χωρία τύπου 3 με προβολή του D στο xz επίπεδο. Ένα χωρίο που είναι του τύπου 1,2 και 3 ονομάζεται χωρίο τύπου 4. Ένα παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι η μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3)Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η σταθερά ίση με 1, δηλαδή $f(x,y,z) = 1$ τότε $\int_D dx = V(D)$ =ο όγκος του D (1)

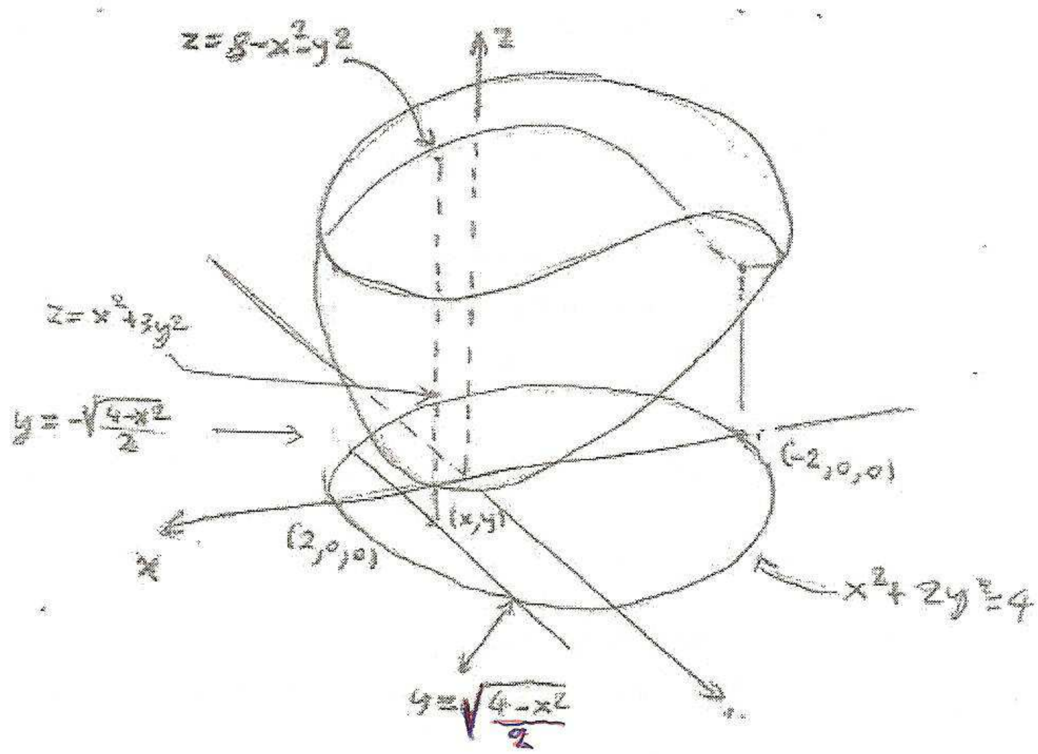
Πράγματι, $\int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} dz \right) d(x,y) = \int_A \big(u(x,y) - v(x,y)\big) d(x,y) =$

$\int_A u(x,y) d(x,y) - \int_A v(x,y) d(x,y)$ =ο όγκος του D, (αφού $u(x,y) \ge v(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$ και το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο κάτω από το γράφημα της ολοκληρωτέας συνάρτησης). Εξάλλου ο τύπος (1) έχει δοθεί και ως ο ορισμός του όγκου Jordan μετρήσιμου συνόλου $D \subseteq R^3$.

Παραδείγματα υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων.

1)Να βρεθεί ο όγκος του στερεού D που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 8 - x^2 - y^2$.

Λύση Ο όγκος $V(D)$ δίδεται από το ολοκλήρωμα $V(D) = \iiint_D dzdydx$, ($V(D) = \int_D dx$) δηλαδή το τριπλό ολοκλήρωμα της $F(x, y, z) = 1$ επί του D. Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης σχεδιάζουμε το D.



Οι επιφάνειες $S_1 = \{(x, y, z) : z = x^2 + 3y^2\}$ και $S_2 = \{(x, y, z) : z = 8 - x^2 - y^2\}$ τέμνονται στην καμπύλη $S = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 = 4 \text{ και } z = x^2 + 3y^2\}$ ($x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$). Η προβολή του S στο xy επίπεδο είναι η έλλειψη: $x^2 + 2y^2 = 4$. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό αυτής της έλλειψης είναι $\Re = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 < 4\}$. Επίσης ότι,

$(x, y) \in \Re \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 < 8 - x^2 - y^2$.

Το χωρίο $\overline{\Re} = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \le 4\}$ είναι του τύπου 1, πράγματι,

$$\overline{\Re} = \left\{(x, y) : -2 \le x \le 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} \le y \le \sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}\right\}.$$

Έπεται ότι,

$$D=\left\{(x,y,z):-2\le x\le 2,\ \ -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\text{και } x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2\right\}$$ και

$$V(D)=\iiint_D dzdydx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left[\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}dz\right]dydx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left(8-2x^2-4y^2\right)dydx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(8-2x^2\right)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}dx=\int_{-2}^{2}\left(2\left(8-2x^2\right)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=8\pi\sqrt{2}$$ (κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x=2\sin u\Rightarrow\dfrac{dx}{du}=-2\cos u\Rightarrow dx=2\cos u du$).

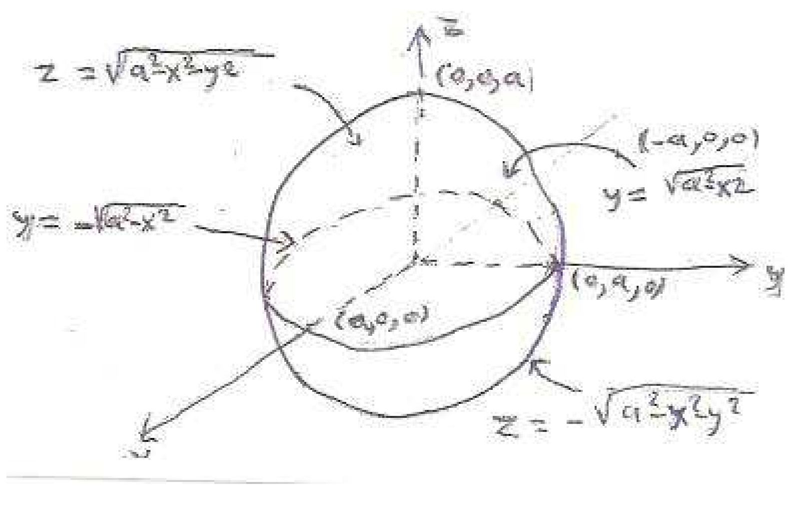
Σημείωση Το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα μπορούσε να υπολογιστεί και ως η διαφορά των διπλών ολοκληρωμάτων επί του $\overline{\Re}$, $V(\mathrm{A})=\int_{\Re}F_1(x,y)\,dxdy-\int_{\Re}F_2(x,y)\,dxdy$, όπου $F_1(x,y)=8-x^2-y^2$ και $F_2(x,y)=x^2+3y^2$, όπου $\overline{\Re}=\left\{(x,y):-2\le x\le 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\right\}=$ το εσωτερικό της έλλειψης μαζί με το σύνορο

2)Να βρεθούν τα όρια της ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος: $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$, όπου $f:D\to R$ συνεχής συνάρτηση και:

(α) $D=\left\{(x,y,z)\in R^3:x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$, $(a>0)$.

(β) $D=$ το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,0)$ και $(0,1,1)$.

Λύση (α) Η κλειστή σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $a>0$ περιγράφεται ως το σύνολο D των $(x,y,z)\in R^3$ ώστε: $-a\le x\le a$, $-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ και $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$



Η σφαίρα είναι χωρίο τύπου (4) μπορεί να περιγραφεί (λόγω συμμετρίας) με προβολές σε όλα τα επίπεδα. Έτσι π.χ. έχουμε: $-a \le y \le a, \sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ και $-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Έπεται από την πρώτη περιγραφή ότι,

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdydx$ και από την δεύτερη

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdxdy$.

Αν $f(x,y,z)=1$ η σταθερά συνάρτηση ίση με 1, βρίσκουμε τον όγκο της σφαίρας D, έτσι από την πρώτη περιγραφή έχουμε $V = \iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx = \iiint\limits_D dzdydx =$

$\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$. Κρατώντας τα x και y σταθερά και ολοκληρώνοντας ως προς z παίρνουμε ,

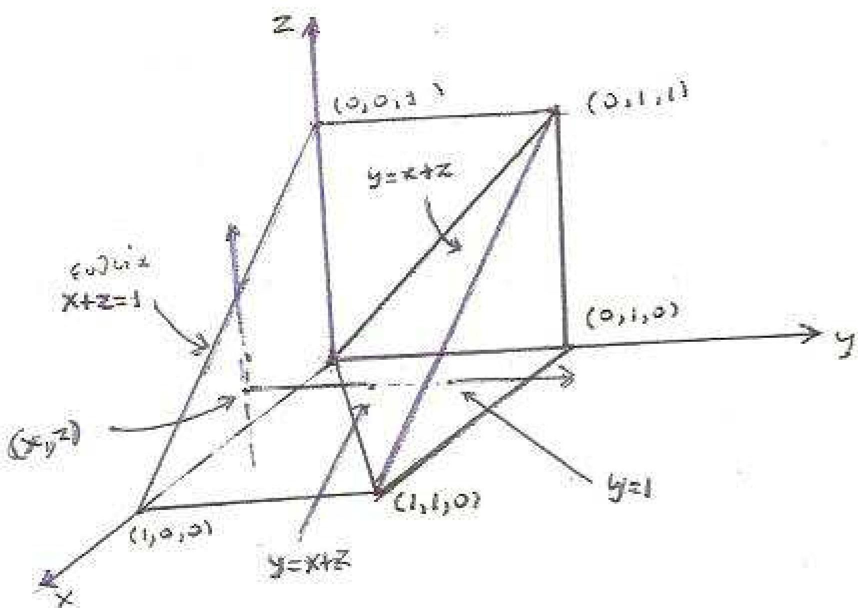
$$V = 2\int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy \right)dx .$$

Επειδή το x είναι σταθερό στο ολοκλήρωμα ως προς dy, αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int\limits_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2-y^2}\,dy$ με $\beta = \sqrt{a^2-x^2}$. Αυτό το ολοκλήρωμα παριστάνει το εμβαδόν ενός ημικυκλίου ακτίνας β, οπότε $\int\limits_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2-y^2}\,dy = \frac{\beta^2\pi}{2} = \frac{a^2-x^2}{2}\cdot\pi$

Έπεται ότι, $V = 2\int\limits_{-a}^{a} \pi\cdot\frac{a^2-x^2}{2}dx = \pi\int\limits_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Δηλαδή βρίσκουμε τον γνωστό μας από την Γεωμετρία τύπο για τον όγκο της σφαίρας.

(β)



Η προβολή του δοθέντος τετραέδρου στο xy επίπεδο είναι το (κλειστό) ορθογώνιο (στο $(0,1,0)$) τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0)$, το οποίο είναι ένα χωρίο τύπου 1 στο xy επίπεδο και περιγράφεται ως τα $(x,y)\in R^2$: $0\le x\le 1$ και $x\le y\le 1$, δηλαδή $\Re=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } x\le y\le 1\}$.

Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα $(0,0,0),(1,1,0)$ και $(0,1,1)$ είναι η $y=x+z$ και επειδή το τρίγωνο με κορυφές $(0,0,0),(1,1,0)$ και $(0,1,1)$ προβάλλεται στο $\Re$, έχουμε ότι $0\le z\le y-x$. Έτσι το τετράεδρο έχει την ακόλουθη περιγραφή: $0\le x\le 1, x\le y\le 1$ και $0\le z\le y-x$.

Έπεται ότι: $\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx=\int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} f(x,y,z)dzdydx$.

Ιδιαίτερα αν $f(x,y,z)=1$ (η σταθερά συνάρτηση ίση με 1) θα υπολογίσουμε τον όγκο $V(D)$ του D :

$$V(D)=\int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_0^{y-x} dz\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_x^1 (y-x)\,dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-xy\right]_{y=x}^{y=1}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Αν προβάλλουμε το τετράεδρο στο xz επίπεδο τότε η προβολή του είναι το ορθογώνιο στο $(0,0,0)$ τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0)$ το οποίο περιγράφεται ως τα $(x,z)\in R^2 : 0\le x\le 1$ και $0\le z\le 1-x$, δηλαδή $\mathrm{T}=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } 0\le z\le 1-x\}$.

Αν $(x,z)\in \mathrm{T}$ τότε το $(x,y,z)\in D$ αν και μόνο αν (βλέπε σχήμα), $x+z\le y\le 1$. Έπεται ότι το τετράεδρο έχει και την ακόλουθη περιγραφή: $D=\{(x,y,z)\in R^3 : 0\le x\le 1, 0\le z\le 1-x \text{ και } x+z\le y\le 1\}$

Έπεται ότι, $\iiint\limits_D f(x,y,z)dydzdx=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^1 f(x,y,z)dydzdx$.

Αν $f(x,y,z)=1$, βρίσκουμε πάλι $V(D)=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^1 dydzdx=\dfrac{1}{6}$

Σημείωση Ο όγκος του τετραέδρου $V(D)=\iiint\limits_D dxdydz$ μπορεί να υπολογισθεί και ως διπλό ολοκλήρωμα. Αφού το D μπορεί να θεωρηθεί ως το στερεό που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=y-x$ και από κάτω στο xy επίπεδο από το τρίγωνο $\Re=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } x\le y\le 1\}$.

Έτσι έχουμε $\iint\limits_{\Re}(y-x)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1(y-x)\,dy\right)dx=...=\frac{1}{6}$. Ανάλογη παρατήρηση και για τον όγκο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2\le a^2,(a>0)$. Έτσι έχουμε, $V=2\int\limits_A f(x,y)dxdy$, όπου $A=\left\{(x,y):-a\le x\le a,-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\right\}$ και $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in A$.

Ασκήσεις

1)Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int\limits_0^4\int\limits_0^{4-x}xydydx$, (β) $\int\limits_{-2}^1\int\limits_{y^2+4y}^{3y+2}dxdy$, (γ) $\int\limits_0^3\int\limits_1^{4-x}(x+y)dydx$

2)Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int\limits_D ydxdy$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y=\sqrt{x},\ y=2-x$ και $y=0$.

(β) $\int\limits_D 2xdxdy$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $x^2y=1,\ y=x,\ x=2$ και $y=0$.

3)Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα με δύο τρόπους:

(α) $\int\limits_0^4\int\limits_0^{4-x}xydydx$, (β) $\int\limits_0^1\int\limits_x^{2x}e^{y-x}dydx$, (γ) $\int\limits_1^e\int\limits_0^{\log x}xydydx$.

4)Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z=x+y+2$ και πάνω από το χωρίο D του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=2$.

5)Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int\limits_0^1\int\limits_0^y\left(x^2+y^2\right)dxdy+\int\limits_1^2\int\limits_0^{2-y}\left(x^2+y^2\right)dxdy$ και

(β) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}\,dydx$

αλλάζοντας την τάξη της ολοκλήρωσης.

6)Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z=x^2+y^2$ και πάνω από το τετράγωνο του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $|x|\le1$ και $|y|\le1$.

7)Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

(α) $\int\limits_1^4\int\limits_{-2}^3\int\limits_2^5 dxdydz$, (β) $\int\limits_1^2\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^2 8x^2yz^3dxdydz$, (γ) $\int\limits_{-1}^2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_1^4 yz\cos xydzdxdy$ και (δ) $\int_{1}^{4}\int_{-1}^{2z}\int_{0}^{\sqrt{3}\cdot x}\frac{x-y}{x^2+y^2}dydxdz$

8)Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int_D \left(x^2y+y^2z\right)dxdydz$, όπου D είναι το ορθογώνιο $1\le x\le 3,\ -1\le y\le 1$ και $2\le z\le 4$.

(β) $\int_D xyzdxdydz$, όπου D είναι το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.

(γ) $\int_D xdxdydz$, όπου D είναι το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και το επίπεδο $z=1$.

(δ) $\int_D yzdxdydz$, όπου D είναι το στερεό στο πρώτο ογδοημόριο που φράσσεται από τα ημισφαίρα $x=\sqrt{9-y^2-z^2}$ και τα επίπεδα συντεταγμένων.

9)Έστω $f:R^3\to R$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Γράψτε έξι διαδοχικά ολοκληρώματα με τα κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης τα οποία είναι ίσα με το ολοκλήρωμα, $\int_D f\left(x,y,z\right)dxdydz$, όπου D το στερεό: $y^2\le x\le 4$, $0\le y\le 2$ και $0\le z\le 4-x$.

(β) Αλλάξτε την τάξη ολοκλήρωσης στα ακόλουθα διαδοχικά ολοκληρώματα, όπως υποδεικνύεται:

(ι) $\int_0^1\int_0^x\int_0^y f\left(x,y,z\right)dzdydx \to dzdxdy$

(ιι) $\int_1^2\int_0^{z-1}\int_0^x f\left(x,y,z\right)dydxdz \to dydzdx$

(ιιι) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x,y,z\right)dzdydx \to dydxdz$

Το θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής και οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η δεύτερη βασική μέθοδος υπολογισμού πολλαπλών ολοκληρωμάτων είναι αυτή της αλλαγής μεταβλητής, την οποία έχουμε ήδη συναντήσει στον Λογισμό της μιας μεταβλητής. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στην περίπτωση αυτή. Έστω $g:[c,d]\to R$ C^1 συνάρτηση και f συνεχής στο διάστημα $g([c,d])$ τότε, $\int\limits_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx=\int\limits_{c}^{d} f(g(t))\cdot g'(t)dt$ (1).

Θέτομε $\mathrm{I}=[c,d]$ και $J=g(\mathrm{I})$.

Ας υποθέσουμε ότι $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$, επομένως είτε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ (και άρα g γνήσια αύξουσα) ή $g'(x)<0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ (και άρα g γνήσια φθίνουσα). Αν $g'(x)>0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ τότε η (1) γράφεται,

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad (2)$$

(αφού τότε, $g(\mathrm{I})=[g(c),g(d)]$).

Αν $g'(x)<0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ τότε η (1) γράφεται,

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=-\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad (3)$$

(αφού τότε $g(\mathrm{I})=[g(d),g(c)]$).

Οι (2) και (3) μπορούν να γραφούν με ενιαίο τρόπο ως εξής:

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot|g'(t)|dt \quad (4)$$

(Η (4) ισχύει ακόμη και όταν $c>d$) Η τελευταία αυτή μορφή είναι εκείνη η οποία θα γενικευθεί στα πολλαπλά ολοκληρώματα. Η συνάρτηση g η οποία μετασχηματίζει τις μεταβλητές θα αντικατασταθεί από ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων, που ορίζεται ως εξής:

20.1 Ορισμός. Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $g:U\subseteq R^n\to R^n$ καλείται ένας μετασχηματισμός των συντεταγμένων αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Η g είναι C^1 συνάρτηση.

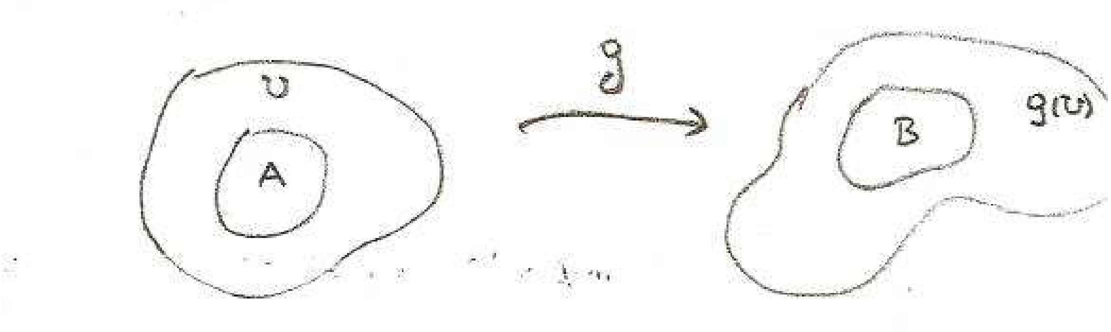
(ιι) Η g είναι $1-1$

(ιιι) Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det\left(J_{g(x)}\right)\neq 0$ για κάθε $x\in U$.

Σημειώνουμε ότι οι (ι) και (ιιι) έχουν ως συνέπεια ότι η g είναι ανοικτή απεικόνιση (δηλαδή $g(V)$ ανοικτό στον R^n για κάθε $V\subseteq U$ με V ανοικτό στον R^n), ιδιαίτερα έπεται ότι το $W=g(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n. Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι η $g^{-1}:W\to U$ είναι C^1 συνάρτηση. Μια τέτοια συνάρτηση g ονομάζεται αμφιδιαφόριση. (Πρβλ. και το βιβλίο [1])

20.2 Θεώρημα (Αλλαγής μεταβλητής για πολλαπλά ολοκληρώματα)
Έστω $A, B \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμα σύνολα, $U \subseteq R^n$ ανοικτό με $\overline{A} \subseteq U$ και $g: U \to R^n$ μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(A) = B$. Αν η $f: B \to R$ είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. f συνεχής στο $\overline{B}$) τότε η $fog \cdot \left|\det J_g\right| : A \to R$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\int\limits_{B=g(A)} f(y)dy = \int\limits_{A} f(g(x))\left|\det J_{g(x)}\right| dx$ (1).

Σημείωση 20.2.1 Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής ισχύει και με την υπόθεση ότι τα $A, B \subseteq R^n$ είναι ανοικτά Jordan μετρήσιμα σύνολα, η $g: A \to B$ είναι μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(A) = B$ και ακόμη ότι οι συναρτήσεις $\left|\det J_g\right|$ και $\dfrac{1}{\left|\det J_g\right|}$ είναι φραγμένες επί του A (δες το [5] σ. 505-6)



Παρατηρήσεις. 1) Αν η f είναι η σταθερά συνάρτηση $f \equiv 1$, τότε ο τύπος (1) δίνει για το $n-$ διάστατο όγκο (περιεχόμενο) του B:

$$V(B) = \int\limits_{A} \left|\det J_{g(x)}\right| dx \quad (2).$$

Ο τύπος (2) ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:
Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det J_g$ του μετασχηματισμού g μας δίνει το μέτρο της μεταβολής που ο g επιφέρει στους όγκους (ή στα εμβαδά αν $n = 2$). Αυτό φαίνεται καλύτερα στην περίπτωση που ο $g: R^n \to R^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, οπότε $J_g = L$, όπου L ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού g (πρβλ το παράδειγμα 2 μετά τον ορισμό 5.4) και επομένως

$$V(B) = \int\limits_{A} \left|\det L\right| dx = V(A) \cdot \left|\det L\right|.$$

2) Αν $n = 2$ $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ και συμβολίσουμε με $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ την $\det J_g$ τότε οι τύποι (1) και (2) γράφονται και ως εξής

$$\int\limits_{B=g(A)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{A} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \quad (3)$$

$$V(B) = \int\limits_{A} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \quad (4).$$

Ένας από τους σκοπούς (ίσως ο πλέον σημαντικός)του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής είναι να μας δώσει μια μέθοδο με την οποία κάποια διπλά, τριπλά ή πολλαπλά ολοκληρώματα απλοποιούνται. Έτσι μπορεί να συναντήσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int\limits_{\mathrm{B}} f(y)dy$, όπου είτε η f ή το χωρίο Β είναι πολύπλοκα και ο απευθείας υπολογισμός του ολοκληρώματος είναι δύσκολος. Με κατάλληλη επιλογή του μετασχηματισμού συντεταγμένων, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ή (γεγονός που είναι σημαντικότερο) το καινούργιο χωρίο Α $\left(=g^{-1}(\mathrm{B})\right)$ ενδέχεται να απλοποιούνται και το ολοκλήρωμα $\int\limits_{\mathrm{A}} f\left(g(x)\right)\left|\det J_{g(x)}\right|dx$ να υπολογίζεται ευκολότερα.

Αλλαγή μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιους χρήσιμους μετασχηματισμούς συντεταγμένων στο R^2.

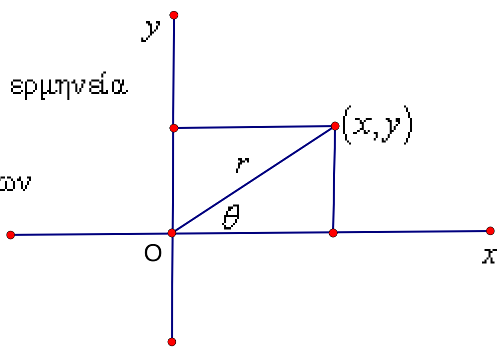
1)Ο μετασχηματισμός των πολικών συντεταγμένων στο R^2.

Έστω $g: R^2 \to R^2 : g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, δηλαδή, $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$

Η g είναι βέβαια μια C^∞ απεικόνιση καθώς οι συντεταγμένες συναρτήσεις $x(r,\theta) = r\cos\theta$ και $y(r,\theta) = r\sin\theta$ της g είναι C^∞ διαφορίσιμες. Το ζεύγος (r,θ) είναι οι <u>πολικές συντεταγμένες</u> του $(x,y)\in R^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Η g δεν είναι $1-1$ απεικόνιση, αν όμως περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού της μπορεί να γίνει $1-1$. Για παράδειγμα αν απαιτήσουμε ότι $r>0$ και $0\le\theta<2\pi$ (ή $-\pi<\theta\le\pi$) τότε η $g\big|(0,+\infty)\times[0,2\pi)$ είναι $1-1$ και $g\left((0,+\infty)\times[0,2\pi)\right) = R^2-\{(0,0)\}$. Αν περιορίσουμε ακόμη την g στο ανοικτό σύνολο $U=(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ τότε το $g(U) = R^2-\{(x,0): x\ge 0\}$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο και η g γίνεται αμφιδιαφόριση αφού η αντίστροφή της $h=g^{-1}: g(U)\to U : h(x,y)=(r,\theta)$, όπου $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta\in(0,2\pi): x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$ είναι επίσης C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση. (Η συνάρτηση $h=g^{-1}$ μας δίνει ουσιαστικά την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $x+iy\neq 0$.) Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της g είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = r.$$

Γεωμετρική ερμηνεία
των πολικών
συντεταγμένων



$(x,y)\neq(0,0)$

$\theta\in[0,2\pi)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι, όπως προκύπτει από τον γενικό τύπο (3),

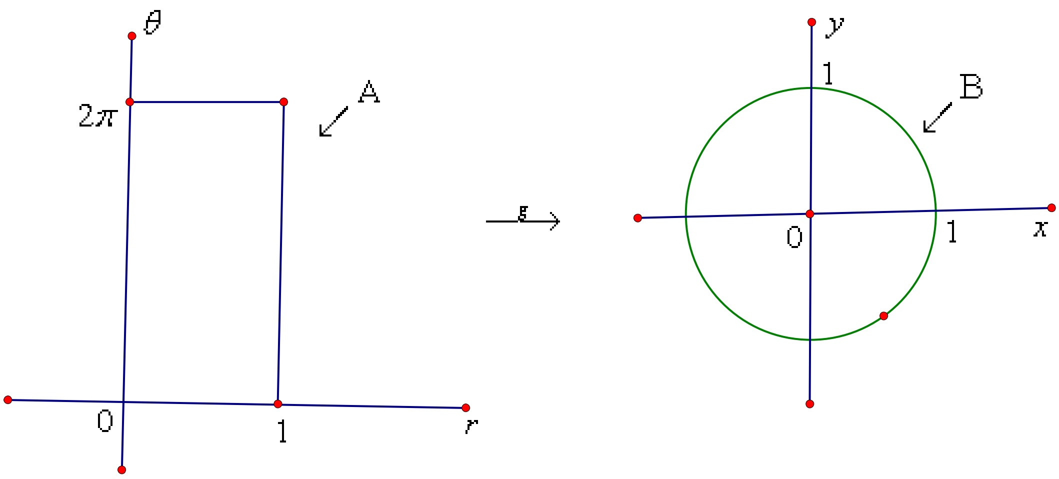
$$\int_{B=g(A)} f(x,y)\,dxdy = \int_{A} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta \quad (5)$$

Το εμβαδόν του $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ δίνεται από τον τύπο που (προκύπτει από τον (4))

$$V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}} r\,dr\,d\theta \qquad (6)$$

Το Α είναι βέβαια ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο στο επίπεδο $r\theta$ των <u>πολικών συντεταγμένων</u> με $\overline{\mathrm{A}} \subseteq (0,+\infty)\times(0,2\pi)$ και το Β η εικόνα του στο καρτεσιανό <u>xy – επίπεδο</u> μέσω του πολικού μετασχηματισμού.

Πολικό επίπεδο   Καρτεσιανό επίπεδο



Η εικόνα του ανοικτού ορθογωνίου $\mathrm{A}=(0,1)\times(0,2\pi)$ μέσω του πολικού μετασχηματισμού g είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος εκτός της ακτίνας $[(0,0),(1,0)]$. Δηλαδή $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}=\{(x,y): x^2+y^2<1\}-\{(x,0): 0\le x<1\}$. Η εικόνα του $\Re=(0,1]\times[0,2\pi)$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος εκτός του σημείου $(0,0)$.

2) Έστω $\mathrm{T}: R^2 \to R^2$ μια $1-1$ γραμμική απεικόνιση ώστε, $\mathrm{T}(u,v)=(au+\beta v, \gamma u+\delta v)$, $u,v\in R^2$. Επειδή Τ είναι $1-1$ ο πίνακας $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ που δίνει την Τ είναι αντιστρέψιμος και έχει ορίζουσα $\det \mathrm{A} = a\delta-\beta\gamma \neq 0$. Επίσης η Τ είναι και επί του R^2 $\left(\mathrm{T}(R^2)=R^2\right)$ αφού είναι γραμμική και $1-1$. Εδώ έχουμε $x=au+\beta v$ και $y=\gamma u+\delta v$.

Η Τ είναι βέβαια C^{∞} − απεικόνιση ως γραμμική. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της Τ είναι η $\det J_{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο αφού η Τ είναι γραμμική και επομένως $D\mathrm{T}(a) = \mathrm{T}$ για κάθε $a \in R^2$.

Η απεικόνιση Τ ως γραμμική απεικονίζει (παράλληλες) ευθείες σε (παράλληλες) ευθείες και άρα παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα.
Η Τ <u>δεν</u> διατηρεί αναγκαία τις γωνίες (εκτός αν $a = \delta$ και $\beta = -\gamma$).
Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής στην περίπτωση του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathrm{T}(u,v) = (au + \beta v, \gamma u + \delta v)$ είναι ο ακόλουθος (Α είναι βέβαια ένα Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του R^2).

$$\int_{\mathrm{B}=\mathrm{T}(\mathrm{A})} f(x,y)dxdy = |a\delta - \beta\gamma| \int_{\mathrm{A}} f(au + \beta v, \gamma u + \delta v)\,dudv .$$

Το εμβαδόν του $\mathrm{B} = \mathrm{T}(\mathrm{A})$ είναι το,

$$V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{B}} dxdy = |a\delta - \beta\gamma| \int_{\mathrm{A}} dudv = |a\delta - \beta\gamma| \cdot V(\mathrm{A})$$

Σημείωση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται εύκολα και για γραμμικές $1-1$ απεικονίσεις $\mathrm{T}: R^n \to R^n$ για κάθε $n \geq 1$.

Παραδείγματα 1) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{\Re} (x^2 + y^2 + 1)dxdy$, όπου $\Re$ είναι το εσωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, δηλαδή $\Re = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$.

Λύση Στο παράδειγμα αυτό το $\Re$ είναι σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Οφείλουμε να το περιγράψουμε σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή να βρούμε το $D = g^{-1}(\Re)$ όπου $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ο πολικός μετασχηματισμός. Το εσωτερικό D του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ σε πολικές συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής: $D = \{(r,\theta) : 0 \leq r < 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Το $\Re$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες περιγράφεται ως $\Re = \left\{(x,y) : -2 < x < 2 \text{ και } -\sqrt{4-x^2} < y < \sqrt{4-x^2}\right\}$ και βέβαια $g(D) = \Re$ όπου g ο πολικός μετασχηματισμός δηλαδή το $\Re$ είναι χωρίο τύπου 1.
Έτσι το δοθέν διπλό ολοκλήρωμα (χρησιμοποιώντας την περιγραφή τύπου 1 του $\Re$) γράφεται ως: $\int_{\Re} (x^2 + y^2 + 1)dxdy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 + 1)\,dy \right) dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί. Χρησιμοποιώντας όμως τον τύπο αλλαγής μεταβλητής και τον πολικό μετασχηματισμό βρίσκουμε:

$$\int\limits_{\Re=g(D)} \left(x^2+y^2+1\right)dxdy = \int\limits_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdrd\theta = \int\limits_D \left(r^2+1\right)rdrd\theta =$$

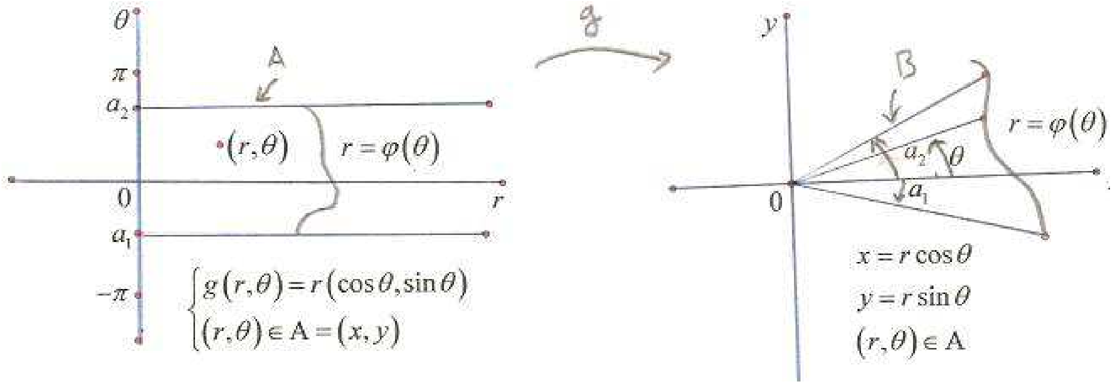
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2+1\right)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \left(r^3+r\right)dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 6d\theta = \left[6\theta\right]_0^{2\pi} = 12\pi .$$

(Πρβλ και την παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου)

2) Έστω $-\pi < a_1 < a_2 < \pi$ και $\varphi:\left[a_1,a_2\right]\to R$ συνεχής με $\varphi(\theta)>0$ για κάθε $\theta\in\left[a_1,a_2\right]$.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του συνόλου $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ (όπου g ο πολικός μετασχηματισμός και) $\mathrm{A}=\left\{(r,\theta): a_1\le\theta\le a_2 \text{ και } 0\le r\le\varphi(\theta)\right\}$.

Από τον τύπο (4) εφαρμοσμένο για τον πολικό μετασχηματισμό, βρίσκουμε $V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}} rdrd\theta = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_0^{\varphi(\theta)} rdr\right)d\theta = \int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\varphi(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}\left(\varphi(\theta)\right)^2 d\theta$. Έτσι το εμβαδόν του $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ που είναι ένα Jordan μετρήσιμο χωρίο του R^2 (που σε πολικές συντεταγμένες φράσσεται από τις ευθείες $\theta=a_1$ και $\theta=a_2$ και την καμπύλη $r=\varphi(\theta)$) δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

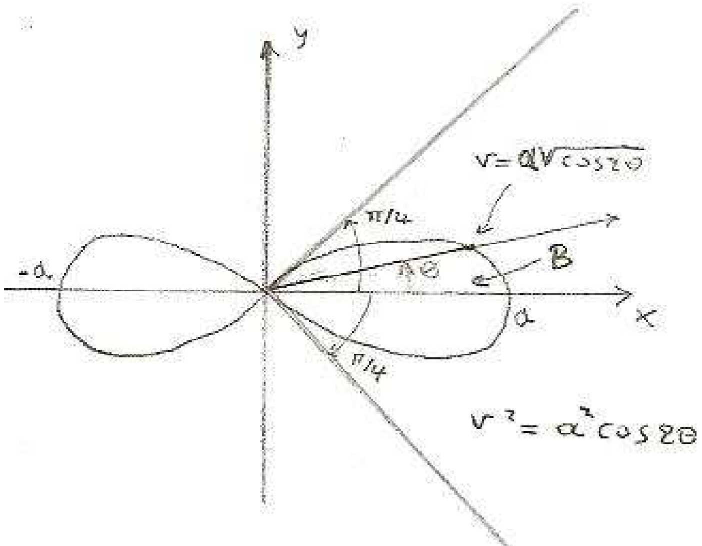


3) Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $r^2=a^2\cos 2\theta$, όπου $a>0$.

Λύση Φτιάχνουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες το γράφημα αυτής της καμπύλης, (που ονομάζεται <u>λημνίσκος</u>) ώστε να καθορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης.

Εδώ η συνάρτηση $\varphi:[0,\pi]\to R$ είναι η $\varphi(\theta)=a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Για να ολοκληρώσουμε στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, αφήνουμε το r, $0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}$ και το θ, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.



$$\mathrm{A}=\left\{(r,\theta): 0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \text{ και } 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$$

χωρίο τύπου ΙΙ στο πολικό επίπεδο, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\cup\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$

θ	r
0	a
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	0
π	a

Λόγω συμμετρίας του χωρίου που περικλείεται από την $r^2 = a^2\cos 2\theta$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι 4 φορές το εμβαδόν που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.
Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} rdr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2\cdot 2}$$

$=\frac{a^2}{4}$. Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $4\frac{a^2}{4} = a^2$.

Σημείωση. (α) Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του τμήματος του λημνίσκου που βρίσκεται στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο μπορεί να προκύψει και από παράδειγμα (2) με $a_1 = 0 < a_2 = \frac{\pi}{4}$ και $\varphi(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Έτσι έχουμε: $$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\varphi(\theta)\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4}$$

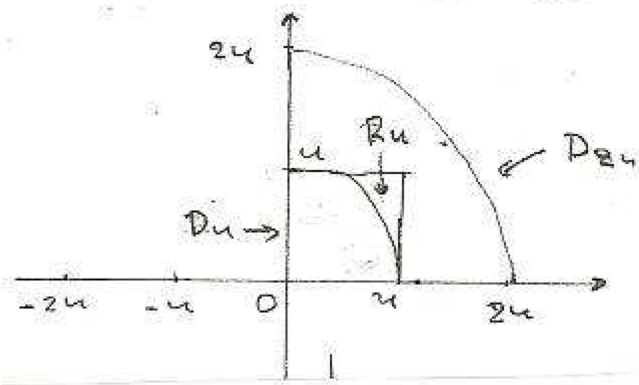
(β) Επίσης από το παράδειγμα (2) με $\varphi(\theta) = a, \theta \in [-a_1, a_2]$ $(a > 0)$ λαμβάνουμε το εμβαδόν του δίσκου $\Re = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\right\}$. Πράγματι, αν $\Re(a_1, a_2)$ είναι η εικόνα του ορθογωνίου $[0, a]\times[a_1, a_2]$ μέσω του g τότε, $V\left(\Re(a_1, a_2)\right) = \int_{\Re(a_1,a_2)} dxdy = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} a^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2(a_2 - a_1)$. Λαμβάνοντας όρια θα έχουμε, $\lim\limits_{\substack{a_1\to\pi \\ a_2\to-\pi}} V\left(\Re(a_1, a_2)\right) = \frac{1}{2}a^2(2\pi) = \pi a^2$. (Πρβλ. και την παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου).

4) Αποδείξτε ότι ισχύει: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κατά συνέπεια:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

<u>Λύση</u> Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, $(x,y) \in R^2$ και υπολογίζουμε τα διπλά ολοκληρώματα $\int\limits_{D_u} f(x,y)dxdy$, $\int\limits_{R_u} f(x,y)dxdy$ και $\int\limits_{D_{2u}} f(x,y)dxdy$, όπου $D_u = \left\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0 \text{ και } x^2+y^2 \leq u^2\right\}$,

$D_{2u} = \left\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0 \text{ και } x^2+y^2 \leq 4u^2\right\}$ και $R_u = [0,u]\times[0,u], u > 0$. Έπεται ότι $D_u \subseteq R_u \subseteq D_{2u}$



$$\int\limits_{R_u} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^u\int_0^u e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^u\left(\int_0^u e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right)dx = \int_0^u\left(e^{-x^2}\int_0^u e^{-y^2}dy\right)dx =$$

$$\int_0^u e^{-x^2}dx \cdot \int_0^u e^{-y^2}dy = \left(\int_0^u e^{-x^2}dx\right)^2 .$$ (Θεώρημα Fubini)

$$\int\limits_{D_u} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^u re^{-r^2}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(1-e^{-r^2}\right)\right]_0^u d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right).$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό $g(r,\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ και παρατηρούμε ότι $g\left([0,u]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = D_u$. Επίσης για τον υπολογισμό του $\int_0^u re^{-r^2}dr$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής, $x = -r^2 \Rightarrow \frac{dx}{dr} = -2r$, άρα

$$\int_0^u re^{-r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^{-u^2} e^x dx = -\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^{-u^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-u^2}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right)$$

Ανάλογα υπολογίζουμε: $\int\limits_{D_{2u}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-4u^2}\right)$

Επειδή $D_u \subseteq R_u \subseteq D_{2u}$ και $e^{-\left(x^2+y^2\right)} > 0$ για κάθε $(x,y) \in R^2$, έπεται ότι

$$\int\limits_{D_u} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \leq \int\limits_{R_u} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \leq \int\limits_{D_{2u}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$ για κάθε $u > 0$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι : $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(1-e^{-u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le \int\limits_0^u e^{-x^2}dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(1-e^{-4u^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $u>0$.

Από την τελευταία ανισότητα λαμβάνοντας όρια δηλαδή αφήνοντας $u \to +\infty$, ευρίσκουμε $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5) Έστω P το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις ευθείες $y=2x, y=2x-2, y=x$ και $y=x+1$. Υπολογίστε το $\int\limits_{P} xydxdy$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x=u-v$ και $y=2u-v$ δηλαδή $T(u,v)=(u-v,2u-v)$.

Λύση Ο Τ είναι ένας γραμμικός 1−1 μετασχηματισμός ($T(u,v)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ και ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αφού $\det A=-1-(-1)\cdot 2=-1+2=1>0$).

Παρατηρούμε ότι $T^{-1}(P)=P^*$,όπου P^* είναι το ορθογώνιο που ορίζεται από τις ευθείες $v=0, v=-2, u=0, u=1$

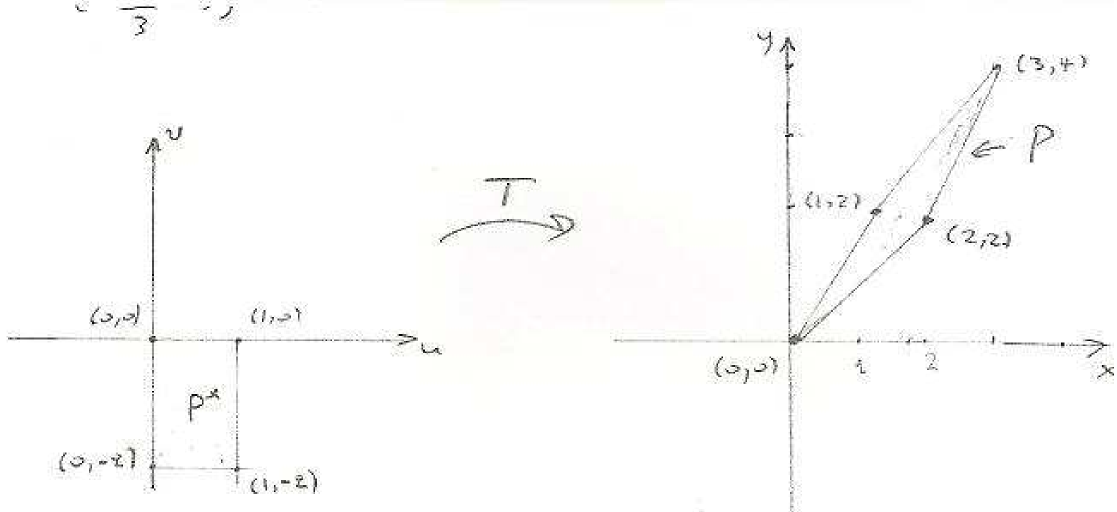
Επιπλέον , $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right| = 1$ όπως ήταν αναμενόμενο αφού Τ γραμμική συνάρτηση και άρα το διαφορικό της συμπίπτει με τον εαυτό της.

Έπεται από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής (τύπος (3) και από την εφαρμογή (2)) ότι

$$\int\limits_{P=T(P^*)} xydxdy = |\det A|\cdot\int\limits_{P^*}(u-v)(2u-v)dudv = = \int\limits_{P^*}(u-v)(2u-v)dudv =$$

$$\int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{0}^{1}\left(2u^2-3uv+v^2\right)dudv = \int\limits_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3}u^3-\frac{3u^2v}{2}+v^2u\right]_0^1 du = \int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}v+v^2\right)dv =$$

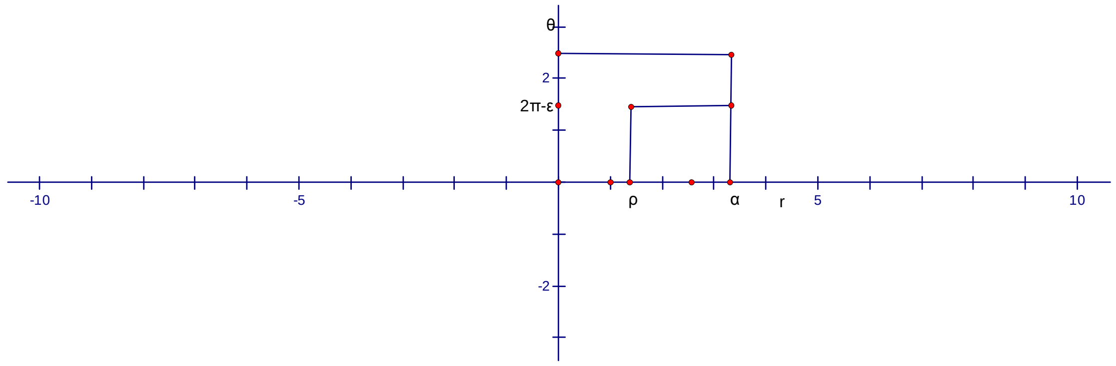
$$\left[\frac{2}{3}v-\frac{3}{4}v^2+\frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2)-3-\frac{8}{3}\right] = -\left[-\frac{12}{3}-3\right] = 7.$$

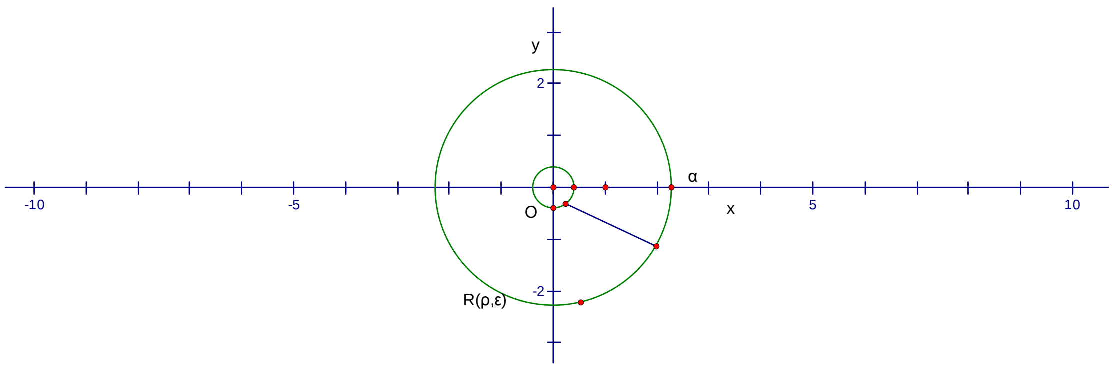


Παρατήρηση. Οι τύποι (3) και (4) του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής ισχύουν και όταν οι συνθήκες ότι ο μετασχηματισμός g είναι C^1 και 1-1 δεν ικανοποιούνται σε κάποια σημεία ή σε ένα πεπερασμένο σύνολο καμπυλών μέτρου μηδέν. Η παρατήρηση αυτή, την οποία ήδη έχουμε (σιωπηρά) χρησιμοποιήσει στα παραδείγματα, μπορεί να δικαιολογηθεί χρησιμοποιώντας το ίδιο το θεώρημα και την σημείωση 20.2.1. Ας ελέγξουμε πως μπορεί να γίνει αυτό με ένα παράδειγμα. Έστω $\Re$ ο κλειστός δίσκος $x^2+y^2 \le a, a>0$ του xy επιπέδου. Η εικόνα του τετραγώνου $[0,a]\times[0,2\pi]$ μέσω του πολικού μετασχηματισμού g είναι ο δίσκος $\Re$.

Παρατηρούμε ότι $g(r,0)=g(r,2\pi)=(r,0), r\in[0,a]$ και η g δεν είναι $1-1$.

Θεωρούμε το τετράγωνο $D(\rho,\varepsilon)=[\rho,a]\times[0,2\pi-\varepsilon]$, όπου $0<\rho<a$ και $0<\varepsilon<2\pi$ στο πολικό επίπεδο και την εικόνα του $\Re(\rho,\varepsilon)$ μέσω του g.





Οι συνθήκες του θεωρήματος ικανοποιούνται τώρα για τον g και τα χωρία $D(\rho,\varepsilon),\Re(\rho,\varepsilon)$ έτσι έχουμε:

$$V(\Re(\rho,\varepsilon))=\int\limits_{\Re(\rho,\varepsilon)} dxdy=\int\limits_{D(\rho,\varepsilon)} rdrd\theta=\int_0^{2\pi-\varepsilon}\left(\int_\rho^a rdr\right)d\theta=\int_0^{2\pi-\varepsilon}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)d\theta$$

$$=(2\pi-\varepsilon)\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right).$$

Λαμβάνοντας όρια συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\substack{\rho\to a\\ \varepsilon\to 0}} V(\Re(\rho,\varepsilon))=\lim_{\substack{\rho\to a\\ \varepsilon\to 0}}(2\pi-\varepsilon)\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)=\pi a^2$$

Ανάλογα επιχειρήματα μπορεί να εφαρμοσθούν και στη γενική περίπτωση και βέβαια ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και στην περίπτωση τριπλών ή πολλαπλών ολοκληρωμάτων.

Αλλαγή μεταβλητής στο τριπλό ολοκλήρωμα

Υπενθυμίζουμε (Θεωρημα 20.2) το γενικό τύπο αλλαγής μεταβλητής στο πολλαπλό ολοκλήρωμα: $\int\limits_{B=g(A)} f(y)dy = \int\limits_{A} f(g(x))\cdot\left|\det J_{g(x)}\right| dx$ (1),

όπου $A, B \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του R^n, $g: U \to R^n$ μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(A) = B$, $U \subseteq R^n$, ανοικτό με $\overline{A} \subseteq U$ και $f: B \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Στην περίπτωση $n = 3$ (περίπτωση τριπλού ολοκληρώματος) ο τύπος (1) γράφεται:
($g(A) = B,\ A, B \in R^3,\ \ g: U \to R^3,\ \overline{A} \subseteq U \subseteq R^3$).

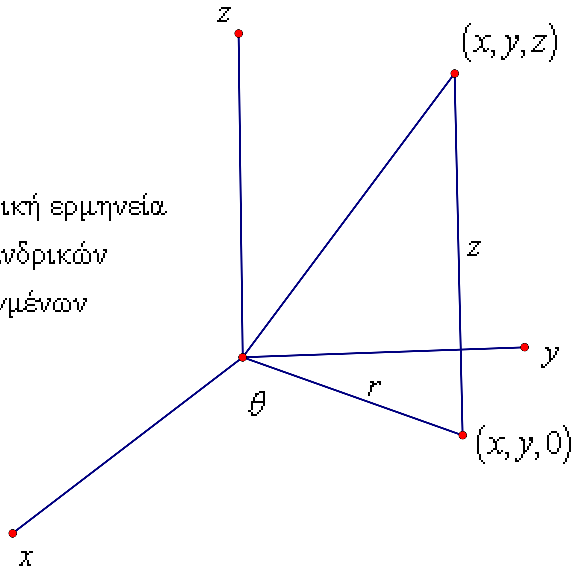
$$\int\limits_{B=g(A)} f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_{A} f\left(x(u,v,\omega), y(u,v,\omega), z(u,v,\omega)\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right| d(u,v,\omega)$$
(2)

όπου $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}$ συμβολίζει την ορίζουσα του πίνακα Jacobi $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{pmatrix}$ του μετασχηματισμού συντεταγμένων $g(u,v,\omega) = \left(x(u,v,\omega), y(u,v,\omega), z(u,v,\omega)\right)$.
Επίσης από τον τύπο (2) για $f(x,y,z) = 1$ (η σταθερή συνάρτηση ίση με 1) παίρνουμε τον όγκο $V(B)$ του B : $\quad V(B) = \int\limits_{A}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right| d(u,v,\omega)$.

Εφαρμογές. 1) Ο μετασχηματισμός των κυλινδρικών συντεταγμένων.
Έστω
$g: R^3 \to R^3 : g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ δηλ. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ και $z = z$ (1)
Έπεται ότι η g είναι μία C^∞ απεικόνιση καθώς οι συντεταγμένες συναρτήσεις $x(r,\theta,z)$, $y(r,\theta,z)$, $z(r,\theta,z)$ της g είναι C^∞ διαφορίσιμες. Η τριάδα (r,θ,z) είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x,y,z) \in R^3 - \{(0,0,z) : z \in R\}$.
Με άλλα λόγια αν ένα σημείο (x,y,z) δεν ανήκει στον άξονα των z, τότε μετατρέπουμε το (x,y) σε πολικές συντεταγμένες και αφήνουμε την συντεταγμένη z αμετάβλητη.
Η απεικόνιση που ορίζουν οι εξισώσεις (1) δεν είναι βέβαια $1-1$, αν όμως περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού της γίνεται $1-1$. Έτσι αν απαιτήσουμε $r > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$ (ή $\theta \in (-\pi, \pi]$) τότε η $g|(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times R$ είναι $1-1$ συνάρτηση και $g(V) = R^3 - \{(0,0,z) : z \in R\}$, όπου $V = (0,+\infty)\times[0,2\pi)\times R$. Έτσι αν $(x,y,z) \in R^3$ δεν ανήκει στον άξονα των z οι εξισώσεις (1) έχουν μοναδική λύση $(r,\theta,z) \in V$. Αν περιορίσουμε περαιτέρω την g στο ανοικτό

$U=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times R$ τότε $g(U)=R^3-\{(x,0,z):x\geq 0 \text{ και } z\in R\}$ ανοικτό σύνολο και η $g:U\to g(U)$ είναι μια <u>αμφιδιαφόριση</u>.

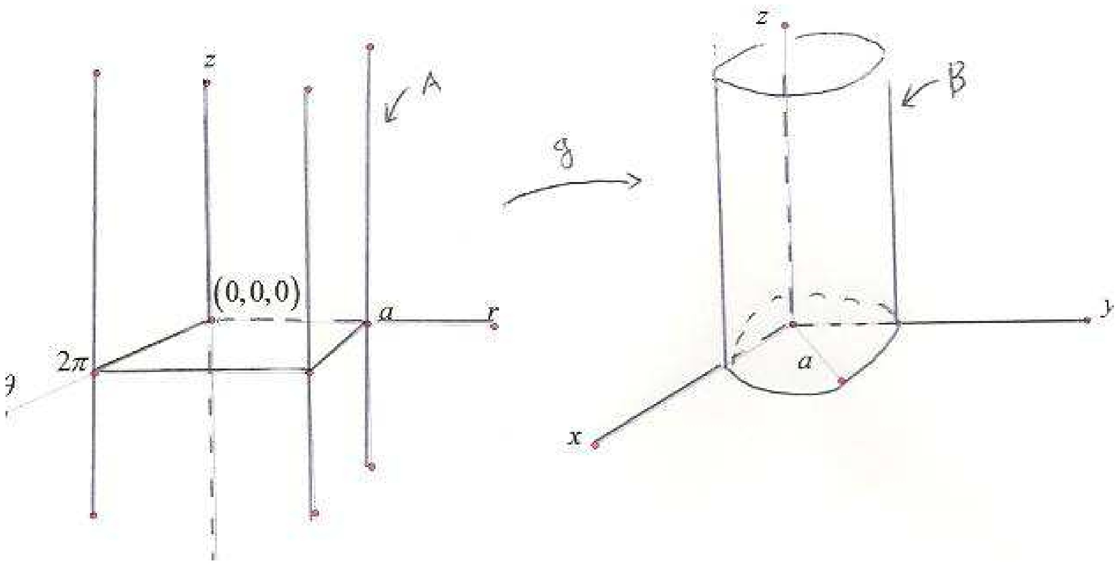
Ο όρος κυλινδρικές συντεταγμένες δικαιολογείται από το γεγονός ότι αν $C=\{(a,\theta,z):\theta\in[0,2\pi),z\in R\}$, όπου a θετική σταθερά τότε $g(C)=\{(x,y,z):x^2+y^2=a^2\}$ = κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a κάθετη στο xy επίπεδο. Η εικόνα του $\mathrm{A}=\{(r,\theta,z):0\leq r\leq a,\ \theta\in[0,2\pi) \text{ και } z\in R\}$ μέσω της g είναι το $\mathrm{B}=\{(x,y,z):x^2+y^2\leq a^2\}$, δηλαδή το εσωτερικό του κυλίνδρου ακτίνας a μαζί με την κυλινδρική επιφάνεια.



Γεωμετρική ερμηνεία των κυλινδρικών συντεταγμένων

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ και $z=z$

Το (x,y,z) δεν ανήκει στον άξονα των z



$g(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

Η αντίστροφη της $g|_V$ ($V=(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times R$) είναι η

$h=g^{-1}:R^3-\{(0,0,z):z\in R\}$ και $h(x,y,z)=(r,\theta,z)$ με $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta=$ η μοναδική γωνία στο $[0,2\pi)$ μεταξύ του θετικού ημιάξονα Ox και της ημιευθείας $\{t(x,y): t \geq 0\}$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης g είναι η

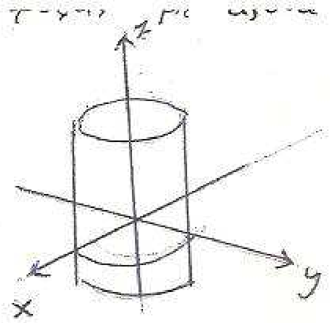
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad \left(= \det J_g\right)$$

Επομένως η $g|U = (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times R$ είναι ένας <u>μετασχηματισμός συντεταγμένων</u> με $g(U) = R^3 - \{(x,0,z): x \geq 0 \text{ και } z \in R\}$, αφού $g|U$ $1-1$, $C^\infty-$ διαφορίσιμη και $\det J_g = r > 0$ επί του U.

Ο τύπος (2) γίνεται τότε για $\overline{\mathrm{A}} \subseteq U$, A Jordan μετρήσιμο, $\mathrm{B} = g(\mathrm{A})$ και $f:\mathrm{B}\to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $\int\limits_{\mathrm{B}} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int\limits_{\mathrm{A}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,d(r,\theta,z)$

και $V(\mathrm{B}) = \int\limits_{\mathrm{A}} r\,d(r,\theta,z)$

<u>Σημείωση</u> Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι χρήσιμες για την αναπαράσταση κυλινδρικών επιφανειών εκ περιστροφής με άξονα τον $z'z$

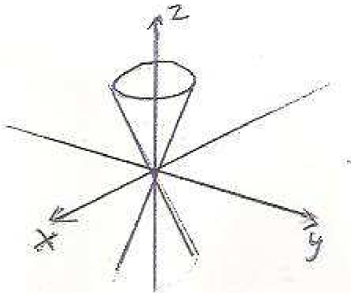


Καρτεσιανή εξίσωση

$x^2 + y^2 = a^2$

κυλινδ. εξίσωση

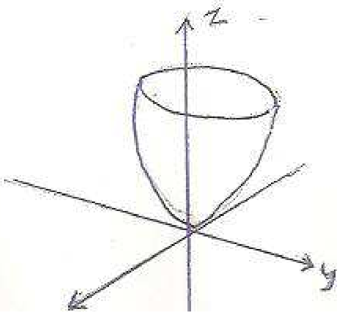
$r = a$



κώνος

$x^2 + y^2 = z^2$

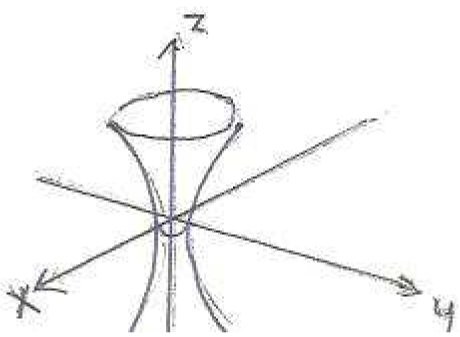
$r = z$



παραβολοειδές

$x^2 + y^2 = az$

$r^2 = az$



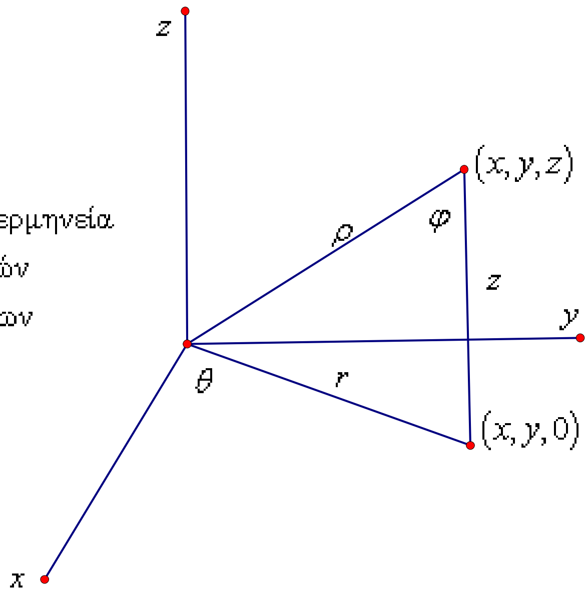
υπερβολοειδές

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$r^2 = z^2 + 1$

2) Ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων.
Θεωρούμε την απεικόνιση $g: R^3 \to R^3$ με
$g(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$. Η g είναι C^∞ −διαφορίσιμη απεικόνιση και αν την περιορίσουμε σε κατάλληλο υποσύνολο του R^3 γίνεται $1-1$.
Η g ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής: Έστω $(x,y,z) \in R^3$ με (x,y,z) να μην ανήκει στον άξονα των z. Θέτομε, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και παριστάνουμε τα x και y με πολικές συντεταγμένες στο xy επίπεδο: $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta \in [0,2\pi)$ (θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την προβολή της ημιευθείας $\{t(x,y,z): t \ge 0\}$ στο xy επίπεδο. Η συντεταγμένη z δίνεται από τον τύπο $z = \rho\cos\varphi$, όπου $\varphi \in (0,\pi)$ η κυρτή γωνία μεταξύ της ημιευθείας $\{t(x,y,z): t \ge 0\}$ και της ημιευθείας Oz, (εργαζόμαστε στο επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα των z και το διάνυσμα (x,y,z)).

Γεωμετρική ερμηνεία των σφαιρικών συντεταγμένων



$\rho > 0$, $\theta \in [0,2\pi)$ και $\varphi \in (0,\pi)$
$r = \rho\sin\varphi$
$z = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$

Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να εκφράσουμε την φ ως εξής:
$\cos\varphi = \frac{v\cdot\kappa}{\|v\|}$, δηλαδή $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{v\cdot\kappa}{\|v\|}\right)$ (όπου $v = (x,y,z)$ και $\kappa = (0,0,1)$)
Δεδομένου ότι $r = \rho\sin\varphi$ καταλήγουμε στις σφαιρικές συντεταγμένες (ρ,θ,φ) του σημείου (x,y,z) (με $|x|+|y| > 0$)
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$ όπου $\rho > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$.
Παρατηρούμε ότι η g περιορισμένη στο $\mathrm{A} = \overset{\rho}{(0,+\infty)} \times \overset{\theta}{[0,2\pi)} \times \overset{\varphi}{(0,\pi)}$ είναι $1-1$ και $g(\mathrm{A}) = R^3 - \{(0,0,z): z \in R\}$.
Αν την περιορίσουμε στο ανοικτό $U = (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$ τότε $g(U) = R^3 - \{(x,0,z): x \ge 0, z \in R\} = V \subseteq R^3$. Η g είναι τότε μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των ανοικτών συνόλων $U, V \subseteq R^3$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της g στο R^3 ευρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας ως προς την τρίτη γραμμή παίρνουμε:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\cos\varphi\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}-\rho\sin\varphi\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$-\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi\cos^2\theta-\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta-\rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta=$$

$$-\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi-\rho^2\sin^3\varphi=-\rho^2\sin\varphi.$$

Παρατηρούμε ότι $\det J_g=-\rho^2\sin\varphi\neq 0$ επί του $U=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$

Έπεται ότι η $g\big|_V:U\to R^3-\{(x,0,z):x\geq 0, z\in R\}$ είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων (οι σφαιρικές συντεταγμένες μετασχηματίζονται σε καρτεσιανές).

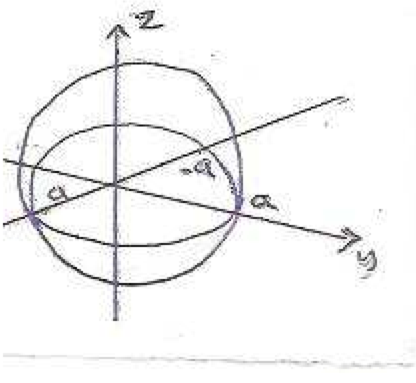
Έτσι αν $\mathrm{A}\subseteq R^3$ Jordan μετρήσιμο με $\overline{\mathrm{A}}\subseteq U$ και $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ τότε

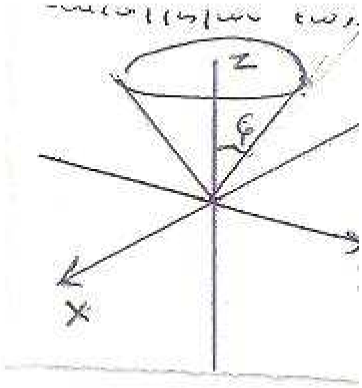
$$\int\limits_{\mathrm{B}=g(\mathrm{A})} f(x,y,z)d(x,y,z)=\int\limits_{\mathrm{A}} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)$$

($\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right|=\rho^2\sin\varphi$, καθώς $\varphi\in(0,\pi)$ και $\sin\varphi\geq 0$) και

$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}}\rho^2\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)$ (ο όγκος του Β).

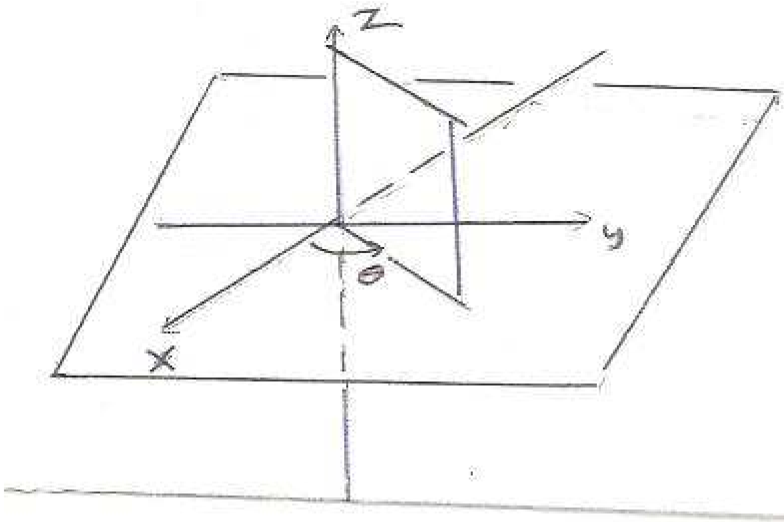
Σημειώσεις. 1) Οι σφαιρικές συντεταγμένες (σχετίζονται με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος) και είναι χρήσιμες στην αναπαράσταση σφαιρών, κώνων καθώς και καταλλήλων επιπέδων, (προβλήματα που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία).





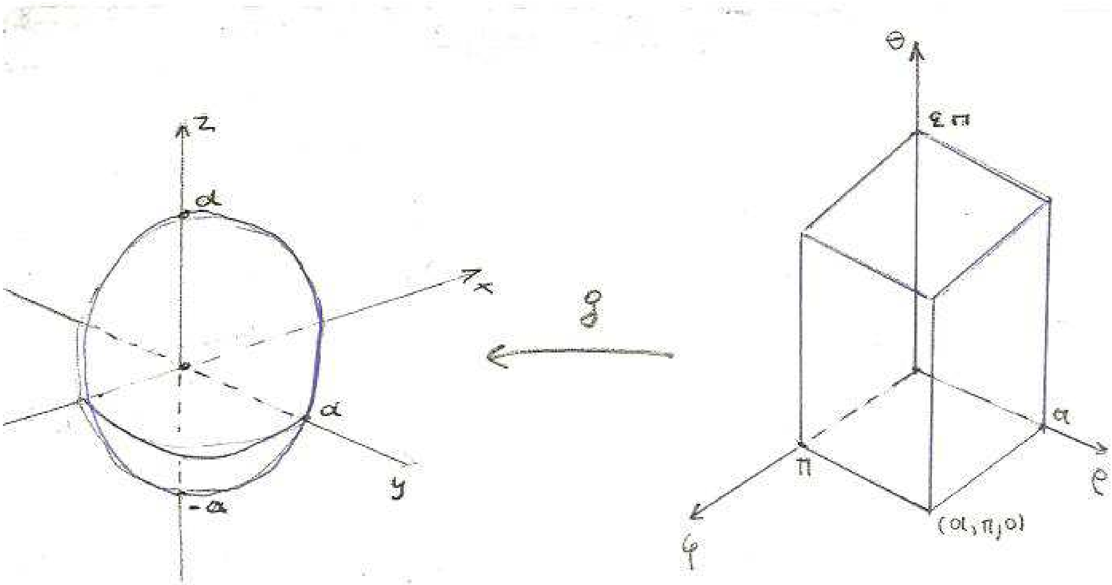
a) Η σφαίρα $\rho=\alpha$ $(\alpha>0)$

(β) Ο ημικώνος $\varphi=a$ $\quad 0<a<\dfrac{\pi}{2}$



(γ) κάθετο ημιεπίπεδο $\theta = a$

Ο όρος σφαιρικές συντεταγμένες δικαιολογείται από τις ακόλουθες παρατηρήσεις.
(α) Αν g είναι ο μετασχηματισμός καρτεσιανών σε σφαιρικές συντεταγμένες τότε
$g\left([0,a]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\right)=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$ ($a>0$) και
$g\left((0,a]\times[0,2\pi)\times[0,\pi]\right)=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}-\left\{(0,0,z):-a\le z\le a\right\}$ δηλαδή το παραλληλεπίπεδο $[0,a]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ απεικονίζεται στην κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(0,a)$



(β) Επίσης $g\left(\{a\}\times[0,2\pi)\times[0,\pi]\right)=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=a^2\right\}=$ η επιφάνεια της $\overline{\mathrm{B}}(0,a)$.
(γ) Ακόμα παρατηρούμε ότι:
$g\left([0,a]\times[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le a^2 \text{ και } z\ge 0\right\}=$ το άνω ημισφαίριο κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $a>0$.

Παραδείγματα 1) Βρείτε την εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες της επιφάνειας $z=x^2+3y^2$ (ελλειπτικό παραβολοειδές).

Λύση Θέτομε $z=z, x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$.

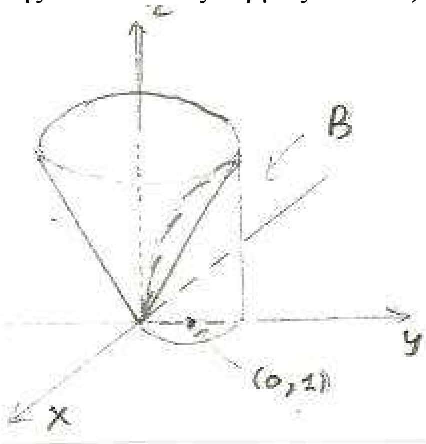
$z = x^2 + 3y^2 = (r\cos\theta)^2 + 3(r\sin\theta)^2 = r^2\left(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\right) =$
$r^2\left(\left(1-\sin^2\theta\right) + 3\sin^2\theta\right) = r^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)$

2)Να βρεθεί ο όγκος του στερεού χωρίου B στο πρώτο ογδοημόριο του χώρου που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2y$ τον ημικώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και το xy επίπεδο

Λύση Η καμπύλη $x^2 + y^2 = 2y$ στο xy επίπεδο είναι ο κύκλος κέντρου $(0,1)$ και ακτίνας 1 $\quad$ ($x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$)

Άρα η επιφάνεια $\left\{(x,y,z): x^2 + y^2 = 2y \text{ και } z \in R\right\}$ είναι <u>κυλινδρική</u> με ακτίνα 1 και <u>άξονα</u> την <u>κάθετη</u> ευθεία στο xy επίπεδο και στο σημείο $(0,1)$.

Η επιφάνεια με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2$ και $z > 0$ είναι ο <u>ορθός κώνος</u> με κορυφή στο $(0,0,0)$ που βρίσκεται στον άνω ημίχωρο με άξονα τον άξονα των z και με <u>γενέτειρα</u> μια ημιευθεία του άνω ημίχωρου που σχηματίζει <u>γωνία</u> $\frac{\pi}{4}$ με την ημιευθεία Oz.(Η $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, είναι το γράφημα της $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ δηλαδή της Ευκλείδειας νόρμας του R^2).



Οι εξισώσεις του κυλίνδρου και του κώνου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r = 2\sin\theta$ και $z = r$ αντίστοιχα.

Κύλινδρος: $\quad x^2 + y^2 = 2y$

$r^2 = 2r\sin\theta$

$r = 2\sin\theta$

Κώνος: $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = r$

Το B σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι χωρίο τύπου 1:

$B = \left\{(x,y,z): 0 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2} \text{ και } 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

Επειδή το στερεό χωρίο Β βρίσκεται στο πρώτο όγδοημόριο του χώρου xyz $\left(x \ge 0, y \ge 0 \text{ και } z \ge 0\right)$, έχουμε ότι $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Έτσι το χωρίο $B = g\left(A\right)$ περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής: $0 \le z \le r, 0 \le r \le 2\sin\theta$ και $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

(Σημειώνουμε ότι ο ημιδίσκος $\left\{\left(x, y\right) : 0 \le y \le 2 \text{ και } 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2}\right\}$ του xy επιπέδου περιγράφεται στο πολικό επίπεδο $r\theta$ ως

$$\left\{\left(r, \theta\right) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ και } 0 \le r \le 2\sin\theta\right\}.)$$

Το στερεό χωρίο $A = \left\{\left(r, \theta, z\right) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ , 0 \le r \le 2\sin\theta \text{ και } 0 \le z \le r\right\}$ (όπου $\varphi_1\left(r, \theta\right) = 0$ και $\varphi_2\left(r, \theta\right) = r$) είναι του τύπου 1 στον χώρο $r\theta z$ καθώς η προβολή του στο πολικό επίπεδο $r\theta$ είναι χωρίο τύπου 3. Έτσι έχουμε από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής σε κυλινδρικές συντεταγμένες σε συνδυασμό με την γνωστή συνέπεια του θεωρήματος Fubini (που αφορά την διαδοχική ολοκλήρωση).

$$V\left(B\right) = \int_{B = g(A)} d\left(x, y, z\right) = \int_{A} r d\left(r, \theta, z\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} \int_0^{r} r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2\sin\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

(Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\theta d\theta$ έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\theta\right) d\left(\cos\theta\right) = -\int_1^0 \left(1 - t^2\right) dt = \int_0^1 \left(1 - t^2\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}, \text{ θέτοντας } t = \cos\theta\ )$$

3)Γράψτε τις ακόλουθες εξισώσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες: (α) της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), (β) του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$.

Λύση Έχουμε ότι $x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi$ (1) (σφαιρικές $\Rightarrow$ καρτεσιανές).

(α) Επειδή $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \rho^2 = a^2 \Rightarrow \rho = a$ αφού $\rho > 0$.

Άρα η εξίσωση της σφαίρας σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $\rho = a$

(β) $z = x^2 + y^2$. Από τις εξισώσεις (1) λαμβάνουμε

$$\rho\cos\varphi = \left(\rho\sin\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(\rho\sin\varphi\sin\theta\right)^2 \Rightarrow \rho\cos\varphi = \rho^2\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) =$$

$$\rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow \rho = \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

4)Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R>0$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων απεικονίζει το παραλληλεπίπεδο $\mathrm{A}=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ του χώρου $r\theta\varphi$ στην σφαίρα $\mathrm{B}=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le R^2\}$. Έπεται ότι,

$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{B}=g(\mathrm{A})} d(x,y,z)=\int\limits_{\mathrm{A}}\rho^2\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)=\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\rho^2\sin\varphi d\varphi d\theta d\rho=$(επειδή ολοκληρώνουμε μια συνεχή συνάρτηση σε παραλληλεπίπεδο)

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right]_{\rho=0}^{\rho=R}d\varphi d\theta=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi}d\theta=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}2d\theta=2\frac{R^3}{3}\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

5)Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ επί της σφαίρας $\mathrm{B}=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<1\}$.

<u>Λύση</u> Θα χρησιμοποιήσουμε τον σφαιρικό μετασχηματισμό g.
Η ανοικτή μοναδιαία σφαίρα B είναι εικόνα του ανοικτού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $\mathrm{A}=(0,1)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$ του $r\theta\varphi$ χώρου μέσω της g (με την εξαίρεση του ημιδίσκου $x^2+z^2<1$ με $x\ge 0$ του xz επιπέδου). Αντικαθιστούμε στην $f(x,y,z)$ τις συντεταγμένες x,y,z με $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ και $z=\rho\cos\varphi$ και βρίσκουμε $f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)=\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta$

$$+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\rho^2\cos^2\varphi$$

$$=\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=\rho^2.$$

Έπεται ότι $\int\limits_{\mathrm{B}} f(x,y,z)d(x,y,z)=\int\limits_{\mathrm{A}} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$

$$\cdot\rho^2\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)=\int\limits_{\mathrm{A}}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)=\int\limits_{\mathrm{A}}\rho^4\sin\varphi d(\rho,\theta,\varphi)=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1}\rho^4\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\sin\varphi\right]_{\rho=0}^{\rho=1}d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{5}d\varphi d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi}d\theta=\frac{1}{5}\int\limits_0^{2\pi}2d\theta=\frac{4}{5}\pi.$$

Ασκήσεις

1)Σχεδιάστε το χωρίο D και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D f(r,\theta)drd\theta$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_1^3 re^{-r^2}drd\theta$, (β) $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 2r^2\cos\theta drd\theta$

(γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \sqrt{4-r^2}\cdot r dr d\theta$, (δ) $\int_0^{\pi}\int_0^{1+\sin\theta} dr d\theta$

2)Χρησιμοποιείστε ένα διπλό ολοκλήρωμα για να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείουν οι καμπύλες:
(α) $r=4$, (β) $r=2\cos\theta$, (γ) $r=1$ και $r=2\sin\theta$.

3)Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων:
(α) $\iint_D y dx dy$ όπου D ο δίσκος $x^2+y^2\le 4$
(β) $\iint_D \left(x^2+y^2\right) dx dy$ όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τον άξονα των x, την ευθεία $y=x$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$
(γ) $\iint_D x dx dy$, όπου D είναι η τιμή των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες $r=2\sin\theta$ και $r=2\cos\theta$.

4)Έστω ότι η $\mathrm{T}: R^3 \to R^3$ ορίζεται από την σχέση
$\mathrm{T}(u,v,\omega)=(u\cos v\cos\omega, u\sin v\cos\omega, u\sin\omega)$
(α) Δείξτε ότι $\mathrm{T}\left(R^3\right)=S^2$ δηλαδή κάθε (x,y,z) με $x^2+y^2+z^2=1$ γράφεται σαν $(x,y,z)=\mathrm{T}(u,v,\omega)$ για κάποιο (u,v,ω)
(β) Δείξτε ότι η Τ δεν είναι $1-1$.

5) (α) Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2+y^2\le 2, -2\le z\le 3$.
(β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z=x^2+y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le a^2$ ($a>0$), σε δύο στερεά χωρία που έχουν ίσους όγκους ($=\frac{1}{2}\pi a^4$).

6)Έστω η μοναδιαία σφαίρα $\mathrm{B}=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ του R^3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{B}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.

7)Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \frac{dx dy dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, όπου S το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες $x^2+y^2+z^2=a^2$ και $x^2+y^2+z^2=b^2$,όπου $0<b<a$. Επίσης υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$ επί του S και

ακόμη υπολογίστε (αν υπάρχει) το ολοκλήρωμα $\int\limits_{B} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, επί της σφαίρας $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

8)Με την χρήση σφαιρικών συντεταγμένων υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(\rho,\theta,\varphi)=\frac{1}{\rho}$ πάνω στο χωρίο του πρώτου ογδοημορίου του R^3 που φράσσεται από τους κώνους $\theta=\frac{\pi}{4}, \varphi=\arctan 2$ και την σφαίρα $\rho=\sqrt{6}$.

9)Η απεικόνιση $T(u,v)=(u^2-v^2,2uv)$ μετασχηματίζει το ορθογώνιο $1\le u\le 2, 1\le v\le 3$ του επιπέδου uv σε ένα χωρίο $\Re$ του επιπέδου xy.
(α) Δείξτε ότι η T είναι $1-1$ στο ανοικτό δεξί ημιεπίπεδο.
(β) Βρείτε το εμβαδόν του $\Re$ χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητής.

10)Με την χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων υπολογίστε τα ολοκληρώματα:
(α) $\int\limits_{\Re} xydxdydz$, όπου $\Re$ είναι ο κύλινδρος $x^2+y^2\le 1$ με $0\le z\le 1$,
(β) $\int\limits_{\Re} (x^4+2x^2y^2+y^4)dxdydz$, όπου $\Re$ είναι ο κύλινδρος $x^2+y^2\le a^2$ με $0\le z\le \frac{1}{\pi}$
και (γ) $\int\limits_{\Re} z(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dxdydz$, όπου $\Re$ είναι το στερεό που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=2$ και από κάτω από την επιφάνεια $2z=x^2+y^2$
11)Υπολογίστε τον όγκο $V(\Omega)$ του στερεού
$\Omega=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2\le 2ax, 0\le z\le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\right\}, a>0$
[Απάντηση: $V(\Omega)=\frac{8}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$]

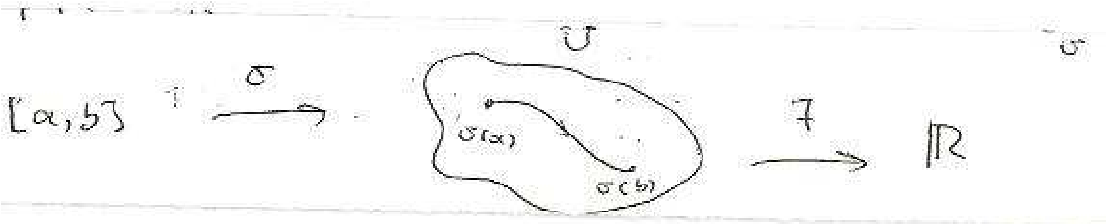
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω $U \subseteq R^3$ ανοικτό σύνολο και $f : U \subseteq R^3 \to R$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Θεωρούμε μια C^1 καμπύλη $\sigma : [a,b] \to U$ ώστε $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και την σύνθετη συνάρτηση $fo\sigma : [a,b] \to R$, δηλαδή την $t \in [a,b] \to f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \in R$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>πρώτου είδους</u> της f κατά μήκος της σ ορίζεται ως

$$\int_\sigma f ds \overset{o\rho}{=} \int_a^b f\left(\sigma(t)\right) \cdot \left\|\sigma'(t)\right\| dt = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \left\|\sigma'(t)\right\| dt .$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $\int_\sigma f(x,y,z)ds$



Παρατηρήσεις 1) Ουσιαστικά αυτό που απαιτείται για να ορισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής (δηλαδή πραγματικής) συνάρτησης $f : U \subseteq R^3 \to R$ κατά μήκος της καμπύλης σ είναι, το να είναι η $fo\sigma : [a,b] \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ας πούμε να έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών και να είναι φραγμένη.

Έτσι αν η f είναι συνεχής και η σ κατά τμήματα C^1 καμπύλη τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\sigma f ds$ ορίζεται.

2)Αν η $f \equiv 1$ (σταθερά ίση με 1) τότε βέβαια σύμφωνα με το θεώρημα 9.3 βρίσκουμε το μήκος της σ

$$\ell(\sigma) = \int_\sigma d\sigma = \int_a^b \left\|\sigma'(t)\right\| dt .$$

Παράδειγμα. Έστω $\sigma : [0, 2\pi] \to R^3 : \sigma(t) = (\cos t, \sin t, t) =$ η <u>έλικα</u> και $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Να υπολογιστεί το $\int_\sigma f(x,y,z)ds$.

Λύση

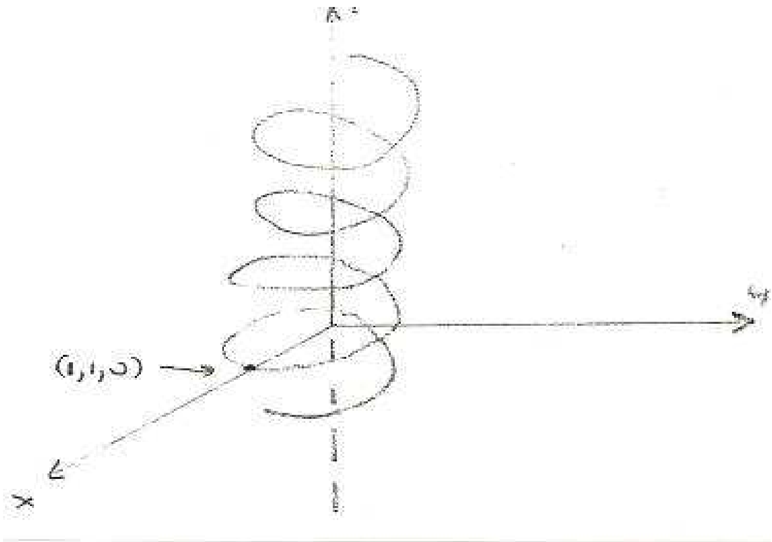
$$\left\|\sigma'(t)\right\| = \sqrt{\left(\cos'(t)\right)^2 + \left(\sin'(t)\right)^2 + \left((t)'\right)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} =$$

$$\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

Συνεπώς

$$\int_\sigma f(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \left\|\sigma'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t + t^2\right)\sqrt{2}dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(1 + t^2\right)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + t^2\right)dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(3 + 4\pi^2\right)$$



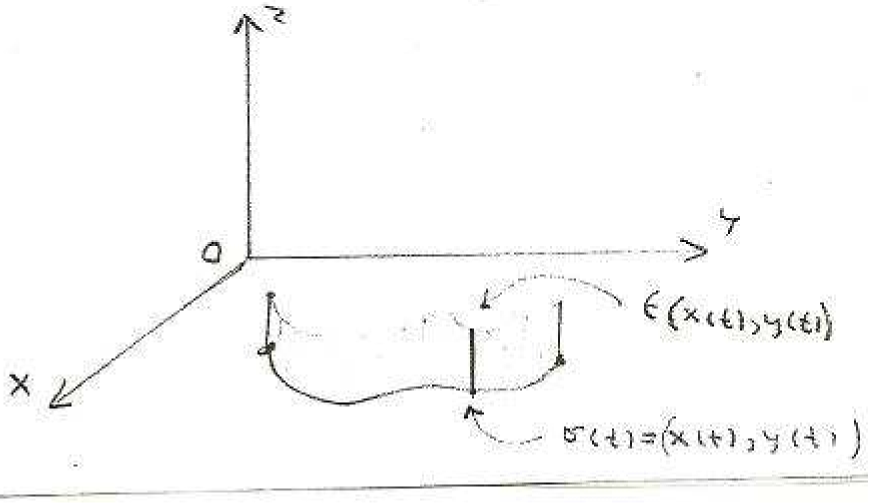
Η $\sigma(t)=(\cos t,\sin t,t)$ είναι μια δεξιόστροφη έλικα, η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου

Σημειώνουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) ορίζεται και για μια βαθμωτή συνάρτηση <u>δύο</u> μεταβλητών καθώς και για μια <u>επίπεδη</u> καμπύλη. Έτσι έχουμε ότι αν $f:U\subseteq R^2\to R$ είναι (συνεχής) συνάρτηση και $\sigma:[a,b]\to U$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη τότε, $\int_\sigma fds=\int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)\cdot\|\sigma'(t)\|dt$

(Ο ίδιος ορισμός μπορεί βέβαια να δοθεί και για μια βαθμωτή συνάρτηση $n-$μεταβλητών $f:U\subseteq R^n\to R$ και για μια καμπύλη $\sigma:[a,b]\to U\subseteq R^n$).

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν $f(x,y)\geq 0$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ έχει μια γεωμετρική ερμηνεία.

Έτσι (αν η σ κάνει μόνο μια φορά τον γύρο της εικόνας της) το ολοκλήρωμα $\int_\sigma f\left(x(t),y(t)\right)ds$ παριστάνει το εμβαδόν (της μιας πλευράς) της «κορδέλας» που σχηματίζεται.



Επικαμπύλια ολοκληρώματα β΄ είδους
Έστω $U \subseteq R^3$ ανοικτό, $F: U \subseteq R^3 \to R^3$ συνεχής συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο) και $\sigma:[a,b] \to U$ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη . Θεωρούμε την συνάρτηση, $t \in [a,b] \to F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \in R$, όπου με $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ εννοούμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $F(\sigma(t))$ και $\sigma'(t)$ του R^3.
Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους της διανυσματικής συνάρτησης F κατά μήκος της καμπύλης σ τον αριθμό

$$\int_\sigma F \cdot ds \underset{o\rho}{=} \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \qquad (1)$$

Σημείωση Με τον όρο διανυσματικό πεδίο θα εννοούμε μια συνάρτηση $F: U \subseteq R^n \to R^n$, όπου U ανοικτό στον R^n η οποία είναι συνεχής (και συνήθως της κλάσης C^1). Βέβαια για τον ορισμό του ολοκληρώματος μας αρκεί μόνο η συνέχεια της F επί του ίχνους $[\sigma] = \sigma[a,b]$ της καμπύλης σ.
Ένας άλλος συμβολισμός για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους είναι και ο ακόλουθος

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \qquad (2)$$

όπου F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου F δηλαδή $F = (F_1, F_2, F_3)$. Η παράσταση $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (3) ονομάζεται και διαφορική μορφή.
Ορίζουμε ως ολοκλήρωμα της διαφορικής μορφής (3) αυτό που δίδεται από τον τύπο (2), δηλαδή $\int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_\sigma F \cdot ds$
Αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$, τότε συνδυάζοντας το παραπάνω παίρνουμε τους τύπους: $\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$
$\int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)$
$]dt$.
Μπορούμε φυσικά να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου δύο μεταβλητών $F: U \subseteq R^2 \to R^2, F = (F_1, F_2)$ κατά μήκος μιας επίπεδης καμπύλης $\sigma:[a,b] \to U, \sigma(t) = (x(t), y(t))$. Έτσι έχουμε

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy =$$

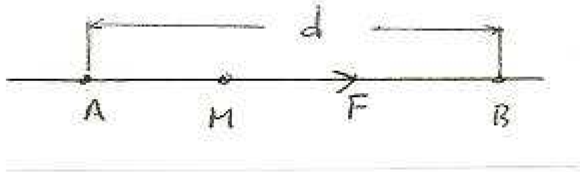
$$= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt.$$

Εννοείται βέβαια ότι η F είναι συνεχής συνάρτηση τουλάχιστον πάνω στο ίχνος $[\sigma] = \sigma[a,b]$ της καμπύλης σ, η οποία υποτίθεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη. Ανάλογα μπορεί να ορισθεί και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\sigma F \cdot ds$

στην περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου $F:U\subseteq R^n \to R^n$ πάνω σε μια καμπύλη $\sigma:[a,b]\to U \ \ (n\geq 2)$.

(*) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου ως έργο.

Γνωρίζουμε από την στοιχειώδη Μηχανική ότι αν μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει ένα υλικό σημείο κατά την διεύθυνσή της, τότε το έργο Ε που παράγεται από την δύναμη F ισούται με $\mathrm{E}=F\cdot d$ όπου d είναι η μετατόπιση του υλικού σημείου και F το μέτρο της δύναμης.



Η $\vec{F}$ μετατοπίζει το Μ από το σημείο Α στο σημείο Β.

Έστω τώρα F ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο $F:R^3\to R^3$ το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ένα πεδίο δυνάμεων π.χ. το βαρυτικό πεδίο και m μια μικρή μάζα (ή το ηλεκτρικό πεδίο και ένα μικρό ηλεκτρικό φορτίο). Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης F κατά μήκος της C^1 καμπύλης $\sigma:[a,b]\to R^3$. Τότε το έργο το παραγόμενο από την F ευρίσκεται με τον τύπο:

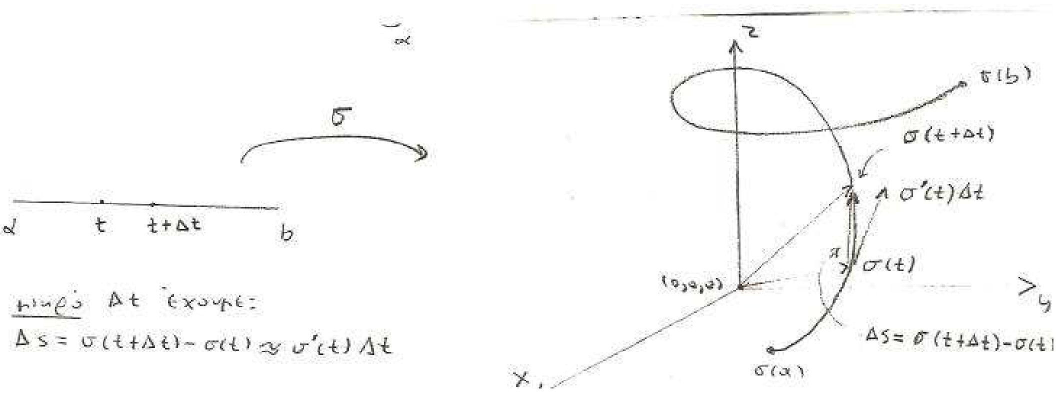
$$\mathrm{E}=\int_a^b F\left(\sigma(t)\right)\cdot\sigma'(t)dt\,.$$

Ο τύπος αυτός δικαιολογείται ως ακολούθως. Καθώς το t μεταβάλλεται σε ένα μικρό διάστημα από το t έως το $t+\Delta t$, το σωματίδιο κινείται από το $\sigma(t)$ στο $\sigma(t+\Delta t)$ και η μετατόπιση του δίνεται από το διάνυσμα $\Delta s=\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)$. Από τον ορισμό της παραγώγου καμπύλης έχουμε την προσέγγιση, $\Delta s\approx\sigma'(t)\Delta t$. Έπεται ότι το έργο που παράγεται για τη μετακίνηση της μάζας m από τη θέση $\sigma(t)$ στην θέση $\sigma(t+\Delta t)$ είναι κατά προσέγγιση $F\left(\sigma(t)\right)\cdot\Delta s\approx F\left(\sigma(t)\right)\cdot\sigma'(t)\Delta t$.

Αν υποδιαιρέσουμε το διάστημα $[a,b]$ σε $N-$μικρά υποδιαστήματα π.χ. ίσα μεταξύ τους με N πολύ μεγάλο, $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$ και $\Delta s_k=\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)$, τότε το συνολικό έργο που παράγεται από την δύναμη F είναι κατά προσέγγιση $\sum_{k=0}^{N-1}F\left(\sigma(t_k)\right)\cdot\Delta s_k=\sum_{k=0}^{N-1}F\left(\sigma(t_k)\right)\cdot\sigma'(t_k)\Delta t$ (1) (όπου $\Delta t=t_{k+1}-t_k=\dfrac{b-a}{N}$)

Όταν το $N\to\infty$, η προσέγγιση μας διαρκώς βελτιώνεται, επομένως είναι λογικό να ορίσουμε ως έργο παραγόμενο από την F καθώς η μάζα m μετατοπίζεται από τη θέση $\sigma(a)$ στην θέση $\sigma(b)$ το όριο των παραπάνω ποσοτήτων (1) . Αλλά από τον ορισμό του ολοκληρώματος με χρήση ενδιαμέσων αθροισμάτων Riemann (η F υποτίθεται συνεχής και η σ κατά τμήματα C^1) το όριο αυτό υπάρχει και ισούται με

$$\mathrm{E}=\int_a^b F\left(\sigma(t)\right)\cdot\sigma'(t)dt$$



Παραδείγματα 1) Έστω $F = (y^2 - z^2)i + 2yzj - x^2k$ και $\sigma(t) = (t^2, 2t, t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [0,1]$. Να υπολογισθεί το $\int_\sigma F \cdot ds$

Λύση $\sigma'(t) = (2t, 2, 1)$ και

$$F(\sigma(t)) = \left[(2t)^2 - t^2\right]i + \left[2(2t)\cdot t\right]j - \left[t^2\right]^2 k = 3t^2 i + 4t^2 j - t^4 k$$

Έπεται ότι $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (3t^2)\cdot 2t + (4t^2)\cdot 2 + (-t^4)\cdot 1 = 6t^3 + 8t^2 - t^4$ και άρα

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^1 (6t^3 + 8t^2 - t^4)\,dt = 6\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 8\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{119}{30}.$$

2)Υπολογίστε το $\int_\sigma x^2dx + xydy + dz$, όπου $\sigma(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [0,1]$.

Λύση $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, 2t, 0)$. Επομένως

$$\int_\sigma x^2dx + xydy + dz = \int_0^1 \left((x(t))^2 \cdot x'(t) + x(t)\cdot y(t)\cdot y'(t) + 1\cdot z'(t)\right)dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt =$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{11}{5}$$ (Εδώ η $F(x,y,z) = (x^2, xy, 1), (x,y,z) \in R^3$).

3)Έστω $F(x,y,z) = (x^3, y, z)$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων και $\sigma(t) = (0, a\cos t, a\sin t), t \in [0, 2\pi]$, όπου $a > 0$. Δείξτε ότι το έργο που παράγεται από το πεδίο F καθώς ένα σωματίδιο κινείται στον κύκλο κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας a (κύκλος του yz επιπέδου) είναι μηδέν.

Λύση $\sigma'(t) = (0, -a\sin t, a\cos t)$, συνεπώς

$$F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t) = F(x(t), y(t), z(t))\cdot(x'(t), y'(t), z'(t)) =$$

$$\left((x(t))^3, y(t), z(t)\right)\cdot(x'(t), y'(t), z'(t)) = (x(t))^3\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t) + z(t)\cdot z'(t) =$$

$0 - a^2\cos t\sin t + a^2\sin t\cos t = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Παρατηρούμε ότι το $F(\sigma(t))$ ανήκει στο yz επίπεδο και είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\sigma'(t)$ της σ στο $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως δεν παράγει έργο.

Αυτό επαληθεύεται βέβαια και από τον τύπο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β΄ είδους,

$$\mathrm{E} = \int_{\sigma} F \cdot ds = \int_{\sigma} x^3 dx + y dy + z dz = \int_{0}^{2\pi} \left(0 - a^2 \cos t \sin t + a^2 \cos t \sin t\right) dt = 0 .$$

Σχόλιο. Δύο καμπύλες με την <u>ίδια</u> γεωμετρική εικόνα (δηλαδή το ίδιο ίχνος) ενδέχεται για το <u>ίδιο</u> διανυσματικό πεδίο F να δίνουν <u>διαφορετική</u> τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, όπως θα διαπιστώσουμε με παραδείγματα. Σημασία έχει η <u>παραμέτρηση</u> της καμπύλης. (Πρβλ. την άσκηση 2 (δ).)

22.1 Ορισμός 1) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ και $\rho:[c,d]\to R^3$ καμπύλες. Έστω ακόμη $h:[a,b]\to[c,d]$ C^1 συνάρτηση η οποία είναι $1-1$ και επί με $h(a)=c$ και $h(b)=d$, (επομένως h γνήσια αύξουσα) ώστε $\sigma=\rho o h$ $\underbrace{[a,b]\xrightarrow{h}[c,d]\xrightarrow{\rho}R^3}_{\sigma=\rho o h}$

Η καμπύλη σ λέγεται τότε μια <u>αναπαραμέτρηση</u> της ρ

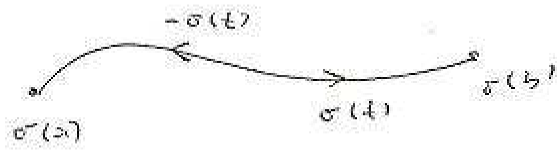
(Οι ρ και σ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Παρατηρούμε ότι $\sigma'(t)=\rho'(h(t))\cdot h'(t)$. Επειδή h γνήσια αύξουσα και διαφορίσιμη $h'(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Η h μεταβάλλει την ταχύτητα με την οποία ένα σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη ρ].

Αν επί πλέον η $h^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ είναι και αυτή C^1 τότε λέμε ότι οι σ και ρ είναι <u>ισοδύναμες</u> καμπύλες (παρατηρήστε ότι $\rho=\sigma o h^{-1}$).

2) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ καμπύλη. Η καμπύλη $-\sigma:[a,b]\to R^3:(-\sigma)(t)=\sigma(a+b-t),t\in[a,b]$ ονομάζεται <u>αντίθετη</u> καμπύλη της σ. Παρατηρούμε ότι $-\sigma=\sigma o h$ όπου $h:[a,b]\to[a,b]:h(t)=a+b-t,t\in[a,b]$.

[Η $-\sigma$ έχει αντίθετο προσανατολισμό σε σχέση με την σ].

$\underbrace{[a,b]\xrightarrow{h}[a,b]\xrightarrow{\sigma}R^3}_{-\sigma=\sigma o h}$



Παρατηρήσεις. 1) Παρατηρούμε ότι αν η σ είναι αναπαραμέτρηση της ρ, ώστε $\sigma=\rho o h$ τότε σ και ρ έχουν προφανώς το ίδιο ίχνος $[\sigma]=[\rho o h]=[\rho]$ και το ίδιο μήκος $\ell(\sigma)=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt=\int_c^d\|\rho'(t)\|dt=\ell(\rho)$.

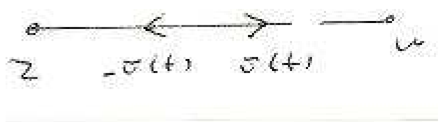
Πράγματι για το μήκος παρατηρούμε ότι: $\ell(\sigma)=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt=\int_a^b\|\rho'(h(t))\cdot h'(t)\|dt=\int_a^b\|\rho'(h(t))\|\cdot h'(t)\,dt$ (αφού $h'\geq 0$ στο $[a,b]$) $\underset{h(t)=x}{=}\int_{h(a)}^{h(b)}\|\rho'(x)\|dx=\int_c^d\|\rho'(x)\|\,dx=\ell(\rho)$.

2) Αν σ καμπύλη, τότε $[\sigma]=[-\sigma]$ και $\ell(\sigma)=\ell(-\sigma)$.

Παραδείγματα: 1) Έστω $\sigma(t)=(t^2,t^2), \rho(t)=(t,t), t\in[0,1]$. Τότε η σ είναι αναπαραμέτρηση της ρ με $h(t)=t^2, t\in[0,1]$. Πράγματι $\rho(h(t))=\rho(t^2)=(t^2,t^2)=\sigma(t), t\in[0,1]$. Εδώ το κοινό ίχνος των σ και ρ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$.

2) Έστω $\sigma(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t\in[0,1]$ και $\rho(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$, τότε $\sigma(t)=\rho(h(t))$ με $h(t)=2\pi t, t\in[0,1]$.
Πράγματι, $\rho(h(t))=\rho(2\pi t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)=\sigma(t)$. Επομένως οι σ και ρ είναι ισοδύναμες καμπύλες. Εδώ το κοινό ίχνος των σ και ρ είναι ο μοναδιαίος κύκλος του xy επιπέδου.

3)Έστω $\sigma(t)=(1-t)z+t\omega, t\in[0,1]$, όπου $z,\omega\in R^3$ με $z\neq\omega$ (το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το z στο ω).
Τότε $(-\sigma)(t)=\sigma(0+1-t)=\sigma(1-t)=[1-(1-t)]z+(1-t)\omega=(1-t)\omega+tz, t\in[0,1]$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το ω στο z.

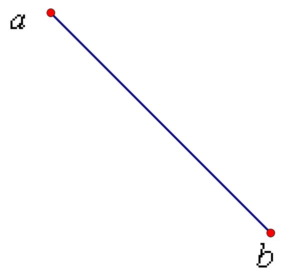


4)Έστω $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$ τότε
$(-\sigma)(t)=\sigma(2\pi-t)=(\cos(2\pi-t),\sin(2\pi-t))=(\cos(-t),\sin(-t))$
Παρατηρούμε ότι η $-\sigma:[0,2\pi]\to R^2$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται κατά την αντίθετη φορά από τον κύκλο $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$.

22.2 Ορισμός: Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ καμπύλη.
1)Η σ λέγεται <u>κλειστή</u> αν $\sigma(a)=\sigma(b)$
2)Η σ λέγεται <u>απλή</u> αν είναι $1-1$ συνάρτηση στο $[a,b]$ δηλαδή <u>δεν</u> τέμνει τον εαυτό της.
3) Η σ λέγεται <u>απλή κλειστή</u> καμπύλη, αν είναι κλειστή ($\sigma(a)=\sigma(b)$) και η $\sigma\|[a,b)$ είναι $1-1$.

Παραδείγματα: 1) Ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση $\sigma:[0,2\pi]\to R^2:\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$ είναι απλή και κλειστή καμπύλη. Η καμπύλη $\rho:[0,3\pi]\to R^2:\rho(t)=(\cos t,\sin t)$ δεν είναι κλειστή ούτε απλή, αφού $\rho(3\pi)=(-1,0)\neq\rho(0)=(1,0)$. Παρατηρούμε ότι $[\sigma]=[\rho]$.

2) Έστω $a,b\in R^2$ με $a\neq b$. Η καμπύλη $\sigma(t)=\begin{cases}(1-t)a+tb, & t\in[0,1]\\(2-t)b+(t-1)a, & t\in[1,2]\end{cases}$ είναι κλειστή καμπύλη. Παρατηρούμε ότι $[\sigma]=[\rho]$, όπου $\rho(t)=(1-t)a+tb, t\in[0,1]$.



3) Αν $f:[a,b]\subseteq R\to R$ συνεχής συνάρτηση τότε η καμπύλη $\gamma:[a,b]\to R^2, \gamma(t)=(t,f(t)), t\in[a,b]$ είναι απλή. Αν η f είναι κατά τμήματα C^1 τότε η γ έχει μήκος, $\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$.

Παρατηρήσεις 1) Η έννοια της αναπαραμέτρησης καμπύλων $\rho:[c,d]\to R^3$ και $\sigma:[a,b]\to R^3$, μπορεί να ορισθεί και ως εξής:

θεωρούμε μια C^1 απεικόνιση $h:[a,b]\to[c,d]$ ώστε h $1-1$ και επί του $[c,d]$ ώστε οι ρ και σ συνδέονται μέσω της h ώστε $\sigma=\rho o h$ $\underbrace{[a,b]\xrightarrow{h}[a,b]\xrightarrow{\rho}R^3}_{\sigma=\rho o h}$

Επειδή η h είναι συνεχής και $1-1$ ορισμένη σε διάστημα έπεται ότι είναι είτε γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα και επειδή είναι διαφορίσιμη θα έχουμε ότι είτε $h'(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$ (και άρα $h(a)=c, h(b)=d$) ή $h'(t)\leq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$ (και άρα $h(a)=d, h(b)=c$).

Στην πρώτη περίπτωση ($h'(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$) έχουμε την έννοια της αναπαραμέτρησης που έχουμε ορίσει.

Στην δεύτερη περίπτωση ($h'(t)\leq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$), θέτομε $\varphi:[a,b]\to[a,b]:\varphi(t)=a+b-t, t\in[a,b]$, και παρατηρούμε ότι $-\sigma=(\rho o h)o\varphi=\rho o(h o\varphi)$.

Η συνάρτηση $h o\varphi:[a,b]\to[c,d]$ είναι $1-1$ επί γνήσια αύξουσα και βέβαια C^1, άρα αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση. (και οι δύο έννοιες αναπαραμέτρησης είναι ουσιαστικά οι ίδιες)

2)Αποδεικνύεται ότι αν σ και ρ είναι <u>απλές</u> καμπύλες, (δηλαδή $\sigma:[a,b]\to R^3$, και $\rho:[c,d]\to R^3$ κατά τμήματα C^1 καμπύλες οι οποίες είναι $1-1$ στα $[a,b]$ και $[c,d]$ αντίστοιχα, με το <u>ίδιο ίχνος</u> δηλαδή $[\sigma]=[\rho]$ και επιπλέον $\sigma'(t)\neq 0, \forall t\in[a,b]$ και $\rho'(t)\neq 0, \forall t\in[c,d]$, τότε η μια αποτελεί αναπαραμέτρηση της άλλης από την έννοια της προηγούμενης παρατήρησης. Δηλαδή υπάρχει $h:[a,b]\to[c,d]$ C^1 $1-1$ και επί ώστε $\sigma=\rho o h$.

3) Έστω $\sigma_\kappa : [a_\kappa, b_\kappa] \to R^n, \kappa = 1,2,....,N,\ (N \geq 2)$, καμπύλες ώστε για κάθε $\kappa = 1,2,...,N-1$, το τελικό σημείο σ_κ ταυτίζεται με το αρχικό της $\sigma_{\kappa+1}$ (δηλαδή $\sigma_\kappa(b_\kappa) = \sigma_{\kappa+1}(a_{\kappa+1})$). Έτσι σχηματίζεται μια καμπύλη σ του R^n με αρχικό σημείο το $\sigma_1(a_1)$ και τελικό το $\sigma_N(b_N)$ την οποία συμβολίζουμε με $\sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_N$. Αν $f : [\sigma] \to R^n$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\int_\sigma f \cdot ds = \int_{\sigma_1} f \cdot ds + ... + \int_{\sigma_N} f \cdot ds$.

Ένας ανάλογος τύπος ισχύει και για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.
(Για την απόδειξη της παρατηρούμε ότι, με μια αναπαραμέτρηση της σ_κ που διατηρεί τον προσανατολισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της σ_κ είναι το διάστημα $[\kappa-1, \kappa]$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της σ είναι το $[0, N]$.)

22.3 Θεώρημα Έστω $\rho : [c,d] \to R^3$ καμπύλη και $F : [\rho] \to R^3$ συνεχές διανυσματικό πεδίο.
(ι) Αν σ είναι μια αναπαραμέτρηση της ρ τότε $\int_\sigma F \cdot ds = \int_\rho F \cdot ds$.
(ιι) Αν $-\rho : [c,d] \to R^3$ είναι η αντίθετη καμπύλη της ρ τότε $\int_{-\rho} F \cdot ds = -\int_\rho F \cdot ds$

Απόδειξη: (ι) Έστω $\sigma : [a,b] \to R^3$ μία αναπαραμέτρηση της ρ τότε βέβαια, $\sigma = \rho o h$ με $h : [a,b] \to [c,d]$, $\underbrace{[a,b] \xrightarrow{h} [c,d] \xrightarrow{\rho} R^3}_{\sigma = \rho o h}$ $1-1$ και επί ($h(a) = c$ και $h(b) = d$).
Έπεται ότι, $\sigma'(t) = \rho'(h(t)) \cdot h'(t), t \in [a,b]$ (κανόνας αλυσίδας)
Συνεπώς

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_a^b F(\rho(h(t))) \cdot \rho'(h(t)) \cdot h'(t) dt =$$

$$\int_a^b \left[F(\rho(h(t))) \cdot \rho'(h(t)) \right] \cdot h'(t) dt \underset{x=h(t)}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} F(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dx =$$

$$\int_c^d F(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dx = \int_\rho F \cdot ds .$$

(ιι) Έστω $\sigma = -\rho = \rho o h$ όπου $h : [c,d] \to [c,d] : h(t) = c + d - t, t \in [c,d]$.
Έπεται ότι,

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_{-\rho} F \cdot ds = \int_c^d F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_c^d F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt =$$

$$\int_c^d \left[F(\rho(h(t))) \cdot \rho'(h(t)) \right] \cdot h'(t) dt = \int_{h(a)}^{h(b)} F(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dt = \int_d^c F(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dx =$$

$$-\int_c^d F(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dx = -\int_\rho F \cdot ds$$

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄- είδους είναι ένα προσανατολισμένο ολοκλήρωμα, υπό την έννοια ότι έχουμε αλλαγή του πρόσημου αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό της καμπύλης. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους δεν έχει αυτή την ιδιότητα, όπως φαίνεται από το ακόλουθο:

22.4 Θεώρημα. Έστω $\rho:[c,d]\to R^3$ καμπύλη και $F:[\rho]\to R$ συνεχής (πραγματική) συνάρτηση.

(ι) Αν $\sigma:[a,b]\to R^3$ είναι αναπαραμέτρηση της ρ τότε $\int\limits_{\sigma} Fds=\int\limits_{\rho} Fds$.

(ιι) Αν $-\rho:[c,d]\to R^3$ είναι η αντίθετη καμπύλη της ρ τότε $\int\limits_{-\rho} Fds=\int\limits_{\rho} Fds$.

Απόδειξη: (ι) Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως το (ι) του προηγουμένου θεωρήματος.

(ιι) Έστω $\sigma=-\rho=\rho o h$, όπου $h:[c,d]\to[c,d]:h(t)=c+d-t, t\in[c,d]$, τότε $\sigma'(t)=\rho'(h(t))\cdot h'(t)=-\rho'(h(t)), t\in[c,d]$

Έπεται ότι

$$\int\limits_{-\rho} Fds=\int\limits_{\sigma} Fds=\int_c^d F(\sigma(t))\cdot\|\sigma'(t)\|dt=\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|\cdot|h'(t)|dt=$$

$$\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|dt=-\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|\cdot h'(t)dt \underset{x=h(t)}{=}$$

$$-\int_{h(c)}^{h(d)} F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=-\int_d^c F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=\int_c^d F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=\int\limits_{\rho} Fds.$$

Σημείωση. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα μελετήθηκαν κατά τον 19^{o} αιώνα σε σχέση κυρίως με προβλήματα στην Φυσική, πιο συγκεκριμένα στον ηλεκτρομαγνητισμό, στην ροή των ρευστών, σε προβλήματα που εμπλέκουν δυνάμεις κτλ.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό καθώς γενικεύει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Υπενθυμίζουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^3\to R^3$ είναι πεδίο κλίσεων αν υπάρχει $f:U\subseteq R^3\to R$ C^1 συνάρτηση με $F=\nabla f$ δηλαδή $F(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial f}{\partial y}(x),\frac{\partial f}{\partial z}(x)\right)$, $x=(x,y,z)\in U$, U ανοικτό στον R^3. Αντίστοιχος ορισμός δίδεται και για ένα διανυσματικό πεδίο κλίσεων $F:U\subseteq R^n\to R^n$, $n\geq 2$. Το αποτέλεσμα που πρόκειται να αποδείξουμε διατυπώνεται και αποδεικνύεται, για λόγους απλότητας, για διανυσματικά πεδία $F:U\subseteq R^3\to R^3$, αλλά βέβαια ισχύει και για διανυσματικά πεδία $F:U\subseteq R^n\to R^n$

22.5 Θεώρημα Έστω $f:U\subseteq R^3\to R$, C^1 συνάρτηση και $\sigma:[a,b]\to U$ (κατά τμήματα) C^1 – καμπύλη. Τότε ισχύει

$$\int\limits_{\sigma}\nabla f\cdot ds=f(\sigma(b))-f(\sigma(a))$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την σύνθετη συνάρτηση $F : t \in [a,b] \to f(\sigma(t)) \in R$. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε $\underbrace{[a,b] \xrightarrow{\sigma} U \subseteq R^3 \xrightarrow{f} R}_{F = fo\sigma}$,

$F'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t), t \in [a,b]$, (δηλαδή

$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t)) \cdot z'(t)$, $t \in [a,b]$, αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$).

Η συνάρτηση F είναι συνεχής συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ορισμένη και κατά τμήματα C^1 στο $[a,b]$. Έπεται από το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ότι : $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$.

Άρα, $\int_\sigma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$.

Παρατηρήσεις. 1) Το ανάλογο αυτού του αποτελέσματος είναι το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στην ακόλουθη μορφή. Αν $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα $f : \mathrm{I} \to R$ C^1 συνάρτηση και $a, b \in \mathrm{I}$ με $a < b$ τότε, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

2) Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι, αν ένα διανυσματικό πεδίο F είναι <u>πεδίο κλίσεων</u> (κάποιας C^1 συνάρτησης $f : U \subseteq R^3 \to R$) και Α,Β είναι σημεία του U (το οποίο υποτίθεται ανοικτό και συνεκτικό) τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F κατά μήκος μιας καμπύλης που συνδέει τα Α και Β και βρίσκεται μέσα στο U, εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα Α και Β. Έτσι αν μπορούμε να αναγνωρίσουμε το δοθέν διανυσματικό πεδίο F ως πεδίο κλίσεων οι υπολογισμοί μας διευκολύνονται κατά πολύ. Σημειώνουμε ότι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο <u>δεν</u> είναι αναγκαία το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 πραγματικής συνάρτησης, όπως φαίνεται στο παράδειγμα (3) παρακάτω.

Παραδείγματα 1) Έστω $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Αν $\sigma : [0,1] \to R^3$ είναι καμπύλη που συνδέει τα σημεία $\mathrm{A}\left(1, \sqrt{2}, -1\right)$ και $\mathrm{B}\left(0, \sqrt{3}, 2\right)$ να ευρεθεί το έργο που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο F κατά μήκος της σ. ($\sigma(0) = \mathrm{A}, \sigma(1) = \mathrm{B}$).

Λύση Το ζητούμενο έργο δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds$ (1).

Επειδή η F είναι ένα πεδίο κλίσεων, $F = \nabla f$, όπου $f(x,y,z) = xyz$, υπολογίζουμε αμέσως ότι $\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = 0 - \left(1 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1)\right) = \sqrt{2}$.

2) Έστω $F(x,y,z) = -\dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ (πρόκειται για το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας με $G = m = M = 1$). Τότε το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας όταν ένα σωματίδιο μετακινείται από το $\mathrm{A} = (x_1, y_1, z_1)$ στο $\mathrm{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ακολουθώντας οποιαδήποτε καμπύλη σ (που <u>δεν</u> διέρχεται από το $(0,0,0)$) εξαρτάται μόνο από τα δοθέντα σημεία Α και Β.

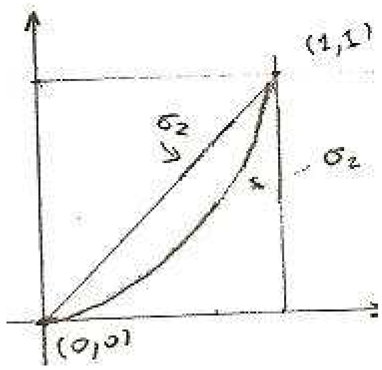
Λύση Έστω $v(x,y,z) = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι, $F = \nabla v$, ($\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$). Έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι το ζητούμενο έργο δίδεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma \nabla v \cdot ds = v(\mathrm{B}) - v(\mathrm{A}) = \frac{1}{\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

[Υποτίθεται ότι: $\sigma:[0,1]\to R^3-\{(0,0,0)\}:\sigma(0)=\mathrm{A}$ και $\sigma(1)=\mathrm{B}$]

3) Έστω $F=F(x,y)=(y,-x),(x,y)\in R^2$ και $\sigma_1:[0,1]\to R^2:\sigma_1(t)=(t,t),t\in[0,1]$, $\sigma_2:[0,1]\to R^2$ με $\sigma_2(t)=(t,t^2),t\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=(0,0)$ και $\sigma_1(1)=\sigma_2(1)=(1,1)$.

Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_1} F\cdot ds\neq\int_{\sigma_2} F\cdot ds$



Λύση Έστω $\sigma_1(t)=(x(t),y(t))=(t,t)$. Άρα $\sigma_1'(t)=(1,1),t\in[0,1]$.
$F(x(t),y(t))=(t,-t)$ και συνεπώς $F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))=(t,-t)\cdot(1,1)=t-t=0$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Έπεται ότι $\int_{\sigma_1} F\cdot ds=\int_0^1 0dt=0$.

Για την καμπύλη $\sigma_2(t)=(x(t),y(t))$ παρατηρούμε ότι : $\sigma_2'(t)=(1,2t)=(x'(t),y'(t))$ και $F(\sigma_2(t))=F(x(t),y(t))=(y(t),-x(t))=(t^2,-t)$. Επομένως $F(\sigma_2(t))\cdot\sigma_2'(t)=(y(t),-x(t))\cdot(x'(t),y'(t))=(t^2,-t)\cdot(1,2t)$ $=t^2-2t^2=-t^2,t\in[0,1]$.

Άρα $\int_{\sigma_2} F\cdot ds=\int_0^1(-t^2)dt=-\int_0^1 t^2dt=-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=-\frac{1}{3}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι : $\int_{\sigma_1} F\cdot ds=0\neq-\frac{1}{3}=\int_{\sigma_2} F\cdot ds$ και ακόμη ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=(y,-x)$ <u>δεν</u> μπορεί να είναι ίσο (σε μια ανοικτή περιοχή του τετραγώνου με κορυφές τα $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$) με το <u>πεδίο κλίσεων</u> κάποιας C^1 συνάρτησης.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=(y,-x)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση $F:R^2\to R^2$ και συνεπώς $C^\infty-$διαφορίσιμη, γεωμετρικά η F στρέφει το διάνυσμα (x,y) κατά $-\frac{\pi}{2}$ ακτίνια (αυτό φαίνεται καλύτερα αν παρατηρήσουμε ότι η F με μιγαδικό συμβολισμό είναι η $F(z)=-iz$ όπου $z=(x,y)=x+iy$). Παρόλα αυτά η F δεν είναι ίση με το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 συνάρτησης στο R^2. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει μια σημαντική διαφορά με τον Λογισμό της μιας μεταβλητής, όπου με μόνη την υπόθεση της συνέχειας μιας συνάρτησης $F:\mathrm{I}\subseteq R\to R$, στο διάστημα $\mathrm{I}\subseteq R$, έπεται η ύπαρξη παράγουσας για την F, δηλαδή υπάρχει $G:\mathrm{I}\to R$ C^1 συνάρτηση με $G'=F$ στο I.

4)Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\sigma} F \cdot ds$, όπου $F = \nabla\left(e^x \sin y - xy - 2y\right)$

και $\sigma(t) = \left(t^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad t \in [0,1]$

<u>Λύση</u> Η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \sin y - xy - 2y$ είναι C^∞ στο R^2 και η καμπύλη σ, C^∞ $-$διαφορίσιμη στο $[0,1]$.

Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι:

$$\int_{\sigma} \nabla f(x,y) \cdot ds = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) - f(0,0) =$$

$$= \left(e^1 \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2}\right) - \left(e^0 \sin 0 - 0 \cdot 0 - 0\right) = e - 3\frac{\pi}{2}.$$

Ασκήσεις

1)Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.

(α) $\int_{\sigma} \frac{1}{3+y} ds$, όπου $\sigma(t) = \left(2t^{\frac{3}{2}}, 3t\right), t \in [0,1]$.

(β) $\int_{\sigma} (3x - 2y) ds$, όπου $\sigma(t) = (\sin t, \cos t), t \in [0,\pi]$

(γ) $\int_{\sigma} \frac{y^2}{x^3} ds$, όπου $\sigma(t) = \left(2t, t^4\right), 0 \le t \le 1$.

(δ) $\int_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right) ds$, όπου $\sigma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\right), 0 \le t \le \pi$.

2)Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους:

(α) $\int_{\sigma} \left(x^2 - y^2\right) dx + x dy$, όπου $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

(β) $\int_{C} x^2 y dx - xy dy$, όπου C είναι η καμπύλη που ξεκινά από το $(0,0)$ και πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y = x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y = x$.

(γ) $\int_{C} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, όπου C είναι το τετράγωνο $|x| + |y| = 1$ το οποίο θεωρείται θετικά (αντιωρολογιακά) προσανατολισμένο.

(δ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\sigma_i} y dx, i = 1, 2$, όπου $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t), \sigma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t \in [0, 2\pi]$. Τι παρατηρείτε; [Απάντηση. $\int_{\sigma_1} y dx = -\pi$ και $\int_{\sigma_2} y dx = -2\pi$]

3) Έστω $F = \left(x^2 - y^2\right)i + 2xyj$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο R^2. Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει αυτή η δύναμη όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$.

4) Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F=\left(x^2+y^2\right)i+\left(x+y\right)j$ όταν μετακινεί αντιωρολογιακά ένα υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2+y^2=1$ από το $\left(1,0\right)$ στο $\left(-1,0\right)$ και κατόπιν πίσω στο $\left(1,0\right)$ πάνω στον άξονα των x.

5) Έστω $\sigma:\left[a,b\right]\to R^3$ ομαλή καμπύλη (δηλαδή η σ είναι C^1 και $\sigma'\left(t\right)\neq 0$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$)

(α) Αν στο $\sigma\left(t\right)$ η F είναι κάθετη στο $\sigma'\left(t\right)$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$, τότε $\int\limits_{\sigma} F\cdot ds=0$

(β) Αν στο $\sigma\left(t\right)$ η F είναι παράλληλη με το $\sigma'\left(t\right)$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$ δείξτε ότι $\int\limits_{\sigma} F\cdot ds=\int\limits_{\sigma}\left\|F\right\|ds$ (όταν λέμε παράλληλη με το $\sigma'\left(t\right)$ εννοούμε ότι $F\left(\sigma\left(t\right)\right)=\lambda\left(t\right)\sigma'\left(t\right)$, όπου $\lambda\left(t\right)>0$).)

(γ) Αν $x\in R^3$ τότε η εξίσωση $\sigma\left(t\right)=x$ έχει το πολύ πεπερασμένες λύσεις στο $\left[a,b\right]$.

(δ) Αν η σ είναι C^2 και $\sigma''\left(t\right)\neq 0,\forall t\in\left[a,b\right]$ τότε η εξίσωση η εξίσωση $\sigma'\left(t\right)=0$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων στο $\left[a,b\right]$.

6) Αν η καμπύλη $\sigma:\left[a,b\right]\to R^3$ είναι κατά τμήματα C^1 και $F:\left[\sigma\right]\to R^3$ συνεχής δείξτε ότι $\left|\int\limits_{\sigma} F\cdot ds\right|\leq \mathrm{M}\cdot\ell$ όπου $\mathrm{M}=\sup\left\{\left\|F\left(\sigma\left(t\right)\right)\right\|,t\in\left[a,b\right]\right\}$ και ℓ το μήκος της σ.

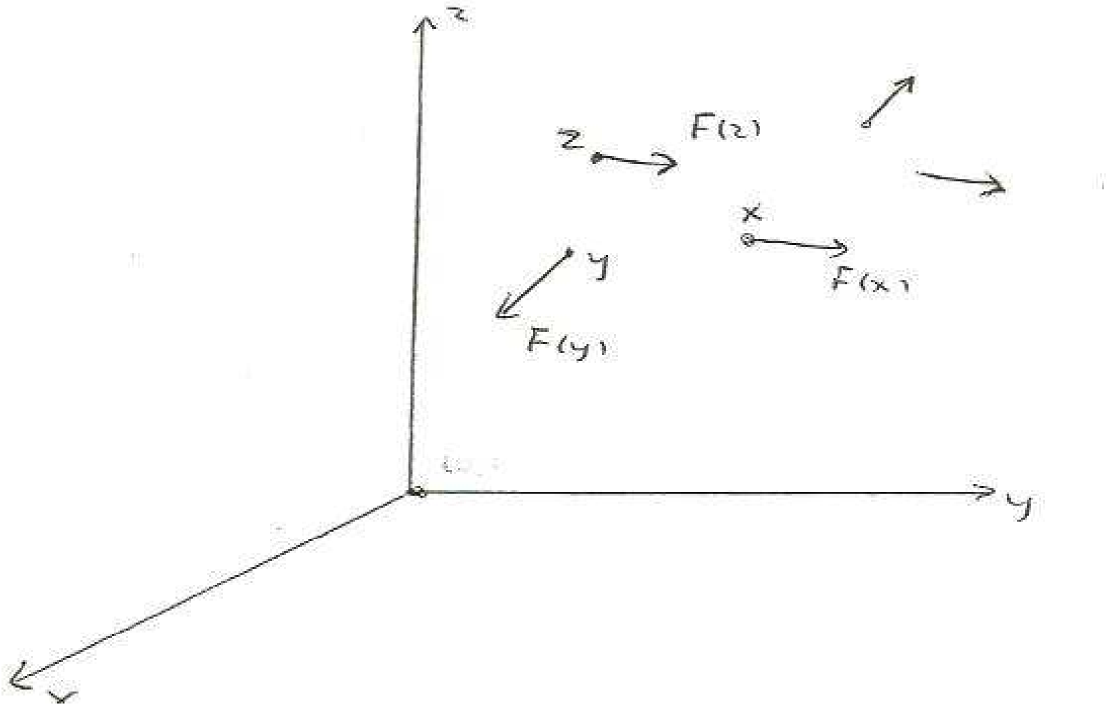
7) Έστω σ και ψ δύο καμπύλες του R^2 με τα ίδια άκρα και $F:R^2\to R^2$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ισότητα $\int\limits_{\sigma} F\cdot ds=\int\limits_{\psi} F\cdot ds$ είναι ισοδύναμη με την $\int\limits_{C} F\cdot ds=0$, όπου C είναι η κλειστή καμπύλη που προκύπτει αν μετακινηθούμε πρώτα πάνω στην σ και μετά πάνω στην ψ στην αντίθετη κατεύθυνση.

8) Έστω $\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(2xyze^{x^2},ze^{x^2},ye^{x^2}\right)$. Αν $f\left(0,0,0\right)=5$, βρείτε το $f\left(1,1,2\right)$.

9) Υπολογίστε το $\int\limits_{C} 2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $\left(1,1,1\right)$ με το $\left(1,2,4\right)$.

Διανυσματικά πεδία

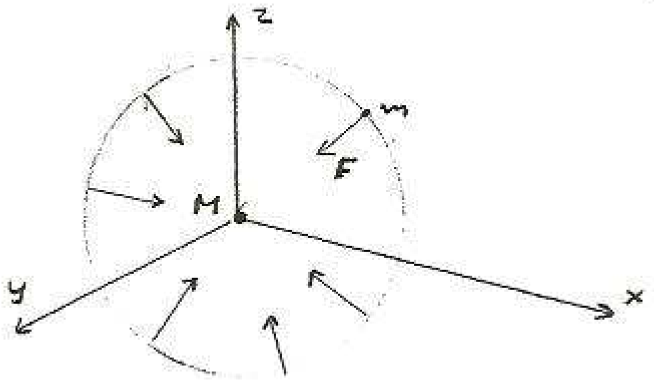
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια συνάρτηση $F:U\subseteq R^n \to R^n$. Για εμάς φυσικά μια τέτοια συνάρτηση θα θεωρείται ότι είναι τουλάχιστον συνεχής και συνήθως C^1 και βέβαια το U ανοικτό υποσύνολο του R^n.
Ένα διανυσματικό πεδίο F, μπορούμε να το φανταζόμαστε ότι αντιστοιχεί σε κάθε $x\in U$ το διάνυσμα (βέλος) $F(x)$ όπως στο σχήμα.



Τα διανυσματικά πεδία που θα μας απασχολήσουν θεωρούνται κυρίως στον R^2 και στον R^3 ($F:U\subseteq R^2 \to R^2$ ή $F:U\subseteq R^3 \to R^3$)
Παραδείγματα διανυσματικών πεδίων έχουμε ήδη εξετάσει στις προηγούμενες παραγράφους. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων όπως ορίστηκε στην παράγραφο Αλλαγής μεταβλητής στο πολλαπλό ολοκλήρωμα είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Ειδικότερα οι, πολικός, κυλινδρικός και σφαιρικός μετασχηματισμός είναι διανυσματικά πεδία
Ένα πολύ ενδιαφέρον διανυσματικό πεδίο – το οποίο έχουμε ήδη εξετάσει στο παράδειγμα (2) μετα το Θεωρημα 22.5– είναι και το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας ή βαρυτικό πεδίο, το οποίο παρουσιάζουμε εδώ με περισσότερη λεπτομέρεια.

Έστω M μια σημειακή μάζα τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων του R^3 και m μια άλλη σημειακή μάζα στο σημείο $r=(x,y,z)$. Τότε η δύναμη έλξης που ασκεί η M στην m δίνεται από τον νόμο του Νεύτωνα και είναι $F(x,y,z)=-\dfrac{Gm\mathrm{M}}{\|r\|^3}\cdot r=-\dfrac{r}{\|r\|}\cdot\dfrac{GmM}{\|r\|^2}$
(βέβαια και η m ασκεί στην M δύναμη ίση κατά το μέτρο και με αντίθετη φορά) όπου G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας ή σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Όπως έχουμε ήδη διαπιστωσει σ, το F είναι ένα πεδίο κλίσεων, αφού $F=\nabla v$, όπου

$v = \frac{mMG}{\|r\|}$. Η δύναμη F είναι μια κεντρική δύναμη, δηλαδή δρα κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα των μαζών m και M και έχει πάντοτε φορά (αφού η M έχει τοποθετηθεί στην αρχή των αξόνων) προς την αρχή των αξόνων, αυτό δηλώνεται με το αρνητικό πρόσημο στον παραπάνω τύπο.



Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να εφαρμοσθεί, όταν οι διαστάσεις των δύο μαζών είναι μικρές σε σχέση με την μεταξύ τους απόσταση, όποτε θεωρούμε ότι οι δύο μάζες είναι συγκεντρωμένες σε υλικά σημεία. Αν τα m και M είναι μάζες σφαιρικών σωμάτων με πυκνότητες που μεταβάλλονται ομοιόμορφα κατά μήκος της ακτίνας, όπως περίπου συμβαίνει με τον ήλιο και τους πλανήτες, τότε μπορούμε να πούμε ότι $\|r\|$ είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους, ακόμη και όταν το $\|r\|$ είναι μικρό. Τέλος αν η μάζα M που είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων είναι μεγάλη σε σχέση με την m, όπως για παράδειγμα είναι η μάζα του ήλιου συγκρινόμενη με την μάζα οποιουδήποτε πλανήτη ή η μάζα της Γής συγκρινόμενη με την μάζα ενός τεχνητού δορυφόρου, έχουμε την δυνατότητα να αγνοήσουμε την κίνηση της M σε σχέση με την m

23.1 Ορισμός Ένα διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^n \to R^n$, όπου U ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^n, λέγεται συντηρητικό αν $F = \nabla f$ για κάποια C^1 συνάρτηση $f : U \subseteq R^n \to R$, δηλαδή αν η F είναι το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 βαθμωτής συνάρτησης f. Η f ονομάζεται τότε και συνάρτηση δυναμικού της F. Είναι τότε σαφές ότι το ολοκλήρωμα $\int_\sigma F \cdot ds$ για κάποια καμπύλη $\sigma : [a,b] \to U$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης. Ο όρος συντηρητικό πεδίο προέρχεται από την φυσική και σχετίζεται με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας.

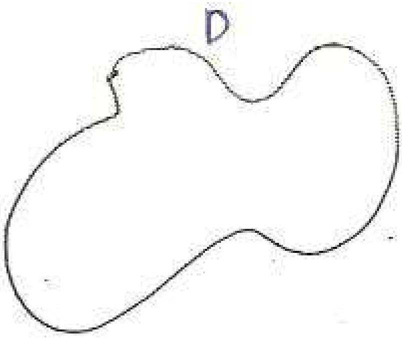
Παραδείγματα. 1) Το βαρυτικό πεδίο είναι ένα συντηρητικό πεδίο όπως είδαμε λίγο πρίν

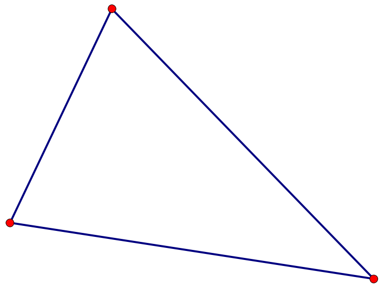
2) Το διανυσματικό πεδίο $F = 2xyi + x^2 j$ είναι συντηρητικό με συνάρτηση δυναμικού την $f(x,y) = x^2 y$.

Λύση Παρατηρούμε ότι, $\nabla f = 2xyi + x^2 j = (2xy, x^2) = F(x,y)$, $(x,y) \in R^2$, άρα η F είναι συντηρητικό πεδίο.

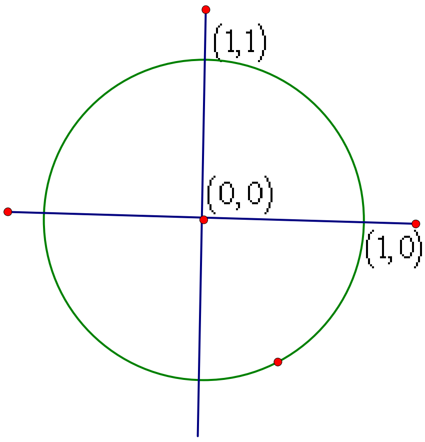
Παρατήρηση. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και συνεκτικό και $F : U \subseteq R^n \to R^n$ συντηρητικό πεδίο. Τότε υπάρχει ουσιαστικά μια συνάρτηση δυναμικού για την F, δηλαδή αν $g, f : U \to R$ C^1 συναρτήσεις ώστε $F = \nabla f = \nabla g$ τότε $f - g = c =$ σταθερά (Άσκηση).

23.2 Ορισμός Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, το D λέγεται <u>απλά συνεκτικό</u> ή απλά συνεκτικός τόπος αν κάθε κλειστή απλή καμπύλη c του D εγκλείει <u>μόνο</u> σημεία του D
(δηλαδή υπάρχει $G \subseteq D$ ανοικτό με $\partial G = c$).
Έτσι το ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $D \subseteq R^2$ είναι απλά συνεκτικό αν <u>δεν</u> έχει «τρύπες». Παραδείγματα απλά συνεκτικών ανοικτών συνόλων είναι τα <u>ανοικτά</u> και <u>κυρτά</u> υποσύνολα του R^2, όπως είναι το εσωτερικό ενός δίσκου ή μιας έλλειψης στο επίπεδο κτλ.





Απλά συνεκτικά σύνολα



Ο ανοικτός δίσκος $B(0,1)$ του επιπέδου με την εξαίρεση μιας ακτίνας του, π.χ. της ακτίνας $[0,1]$ είναι ένα (ανοικτό) απλά συνεκτικό σύνολο, που <u>δεν</u> είναι κυρτό. Ο ίδιος δίσκος με την εξαίρεση του κέντρου του είναι ένα ανοικτό συνεκτικό που δεν είναι απλά συνεκτικό

Σχετικά με την αναγνώριση των συντηρητικών πεδίων στον R^2 ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε (πλήρως) αργότερα ως συνέπεια του θεωρήματος του Green.

23.3 Θεώρημα Έστω $F : D \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο, όπου D <u>απλά συνεκτικό</u> σύνολο και $F = (u, v)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Το F είναι συντηρητικό

(ιι) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

Απόδειξη της κατεύθυνσης (ι) $\Rightarrow$ (ιι)

Έστω $F = (u, v)$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Επειδή το F υποτίθεται συντηρητικό υπάρχει συνάρτηση (τουλάχιστον) της κλάσης C^1, $f : D \to R$ ώστε $F = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$. Έπεται αμέσως ότι η f είναι (τουλάχιστον) της κλάσης C^2

αφού το F είναι C^1 και άρα οι μερικές παράγωγοι $u=\frac{\partial f}{\partial x}$ και $v=\frac{\partial f}{\partial y}$ της f θα έχουν και αυτές συνεχείς μερικές παραγώγους. Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Επειδή η f είναι C^2 συνάρτηση στο D έπεται ότι οι μεικτές παράγωγοι της f είναι ίσες. Συνεπώς $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ή $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

Σημείωση. Η κατεύθυνση (ι)$\Rightarrow$(ιι) δεν χρειάζεται, όπως φαίνεται και από την απόδειξή της, την υπόθεση της απλής συνεκτικότητας του D. Η υπόθεση αυτή θα χρειασθεί για την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης (ιι)$\Rightarrow$(ι), η απόδειξη αυτή θα γίνει αργότερα με την βοήθεια του θεωρήματος του Green.

Εφαρμογές 1) Θεωρούμε το παράδειγμα 3 της σελίδας 229. Δηλαδή $F(x,y)=(y,-x)$. Το διανυσματικό πεδίο F δεν είναι συντηρητικό εφόσον $u(x,y)=y$, $v(x,y)=-x$ και $\frac{\partial u}{\partial y}=1\neq -1=\frac{\partial v}{\partial x}$. Βέβαια πριν είχαμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα με ένα απευθείας υπολογισμό.

2) Εξακριβώστε αν το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(ye^{xy},xe^{xy}+x\right)$ είναι συντηρητικό στο R^2.

Λύση Έχουμε ότι $u(x,y)=ye^{xy}$ και $v(x,y)=xe^{xy}+x$. Άρα $\frac{\partial u}{\partial y}=xye^{xy}+e^{xy}$ και $\frac{\partial v}{\partial x}=xye^{xy}+e^{xy}+1$. Έπεται ότι $\frac{\partial u}{\partial y}\neq\frac{\partial v}{\partial x}$ και άρα το πεδίο δεν είναι συντηρητικό.

3) Εξετάστε αν τα διανυσματικά πεδία $F(x,y)=(x,-y)$ και $G(x,y)=\left(2xy,x^2-y^2\right)$ είναι συντηρητικά και αν είναι να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση δυναμικού.

Λύση Για το πρώτο παρατηρούμε ότι $u(x,y)=x$ και $v(x,y)=-y$, επομένως $\frac{\partial u}{\partial y}=0=\frac{\partial v}{\partial x}$ και το πεδίο είναι συντηρητικό. Η $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2}$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την $F(x,y)=(x,-y)$, αφού $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(x,-y)=F$

Για το διανυσματικό πεδίο $G(x,y)=\left(2xy,x^2-y^2\right)$ έχουμε ότι αν θέσουμε $u(x,y)=2xy$ και $v(x,y)=x^2-y^2$ τότε $\frac{\partial u}{\partial y}=2x=\frac{\partial v}{\partial x}$. Έπεται από τον χαρακτηρισμό των συντηρητικών πεδίων ότι G συντηρητικό πεδίο. Εύκολα επίσης διαπιστώνεται ότι η $g(x,y)=yx^2-\frac{y^3}{3}$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την G αφού $\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\left(2xy,x^2-y^2\right)=G$.

4) Έστω $U \subseteq R^2$ ανοικτό και $f: U \to R^2$ C^1 συνάρτηση ώστε $f = (u, v)$. Η f λέγεται <u>ολόμορφη</u> αν ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Παρατηρούμε σε σχέση με την συνάρτηση $G(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ του προηγουμένου παραδείγματος ότι αν θέσομε $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, τότε η F είναι ολόμορφη στο R^2.

Το παράδειγμα αυτό γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε μία ολόμορφη $f: D \subseteq R^2 \to R^2$, όπου D ανοικτό απλά συνεκτικό υποσύνολο του R^2 (π.χ. ανοικτό και κυρτό)

Έστω $f = (u, v)$, τότε η συνάρτηση $g: D \to R^2$ ώστε $g = (v, u)$ (δηλαδή $g(x, y) = (v(x, y), u(x, y)), (x, y) \in D$) είναι ένα συντηρητικό πεδίο. Πράγματι η f ως ολόμορφη ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann στο D: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Επομένως $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ και έτσι το διανυσματικό πεδίο $g = (v, u)$ είναι συντηρητικό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και το διανυσματικό πεδίο $\tilde{g} = (u, -v)$ είναι συντηρητικό.

Σημειώνουμε ότι η g προκύπτει ως η σύνθεση του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathrm{T}(x, y) = (y, x)$ με την ολόμορφη f, δηλαδή $g = \mathrm{T} o f$.

Η κλάση των ολομόρφων συναρτήσεων μελετάται στην <u>Μιγαδική Ανάλυση</u>.

5) Το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας (ή βαρυτικό πεδίο) $F: R^3 - \{(0,0,0)\} \to R^3$ ώστε $F(x, y, z) = -\frac{m\mathrm{M}G}{\|r\|^3} r$, όπου m και Μ μάζες, G η παγκόσμια βαρυτική σταθερά και $r = (x, y, z)$ είναι ένα συντηρητικό πεδίο, όπως ηδη διαπιστώσαμε, με συνάρτηση δυναμικού $v(x, y, z) = \frac{m\mathrm{M}G}{\|r\|}$.

6) Έστω $\mathrm{T}: R^2 \to R^2$ γραμμικός μετασχηματισμός, $\mathrm{T}(x, y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + \beta y, \gamma x + \delta y)$, $a, \beta, \gamma, \delta \in R$. Ο Τ είναι ένα συντηρητικό πεδίο αν και μόνο αν $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, όπου $u(x, y) = ax + \beta y$ και $v(x, y) = \gamma x + \delta y$, δηλαδή αν $\beta = \gamma$. Έτσι ο πίνακας Τ γίνεται $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$.

7) Ο πολικός μετασχηματισμός $\mathrm{T}: R^2 \to R^2 : \mathrm{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ δεν είναι συντηρητικό πεδίο καθώς αν $u = r\cos\theta$ και $v = r\sin\theta$ τότε $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta \neq \sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}$.

Παρατήρηση. Αν $F: D \subseteq R^2 \to R^2$ είναι συντηρητικό πεδίο, ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης δυναμικού για το πεδίο F γίνεται λύνοντας την διαφορική εξίσωση (που τότε ξέρουμε ότι έχει λύση)

$$\nabla f = F \Leftrightarrow u(x,y) = f_x(x,y) \text{ και } v(x,y) = f_y(x,y).$$

Εννοείται ότι, $F = (u,v)$ και D ανοικτό και συνεκτικό.

Παράδειγμα: 1) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F = \left(e^x \sin y - y, e^x \cos y - x - 2\right)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού f για την F.

Λύση Οι συνιστώσες συναρτήσεις $u(x,y) = e^x \sin y - y$ και $v(x,y) = e^x \cos y - x - 2$ του F είναι C^1 στο R^2 και ισχύει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y - 1 \text{ και } \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y - 1.$$

Επειδή $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ έπεται ότι το F είναι συντηρητικό στο R^2.

Μια συνάρτηση δυναμικού $f: R^2 \to R$ για την F πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\nabla f = F \Leftrightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x}$ και $v = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Έπεται ότι (σταθεροποιώντας την μεταβλητή y)

$$f(x,y) = \int u(x,y)\,dx = \int \left(e^x \sin y - y\right) dx = e^x \sin y - xy + \kappa(y) \quad (1)$$

Επειδή η f πρέπει να ικανοποιεί την $\frac{\partial f}{\partial y} = v$, θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x \sin y - xy + \kappa(y)\right] = e^x \cos y - x + \frac{d\kappa}{dy} = v$$

Συνεπώς $e^x \cos y - x + \frac{d\kappa}{dy} = e^x \cos y - x - 2$.

Επιλύοντας την τελευταία εξίσωση ως προς $\frac{d\kappa}{dy}$ λαμβάνουμε

$$\frac{d\kappa}{dy} = -2 \Rightarrow \kappa(y) = \int -2dy \Rightarrow \kappa(y) = -2y + c \quad (2).$$

Έπεται από τις (1) και (2) ότι $f(x,y) = e^x \sin y - xy - 2y + c$ όπου c πραγματική σταθερά. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι μια (βαθμωτή) συνάρτηση δυναμικού για την F. (Δες και την παρατήρηση μετα τον Ορισμο 23.1 .)

Απόκλιση και στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου

Έστω F ένα C^1 διανυσματικό πεδίο του R^3, δηλαδή $F: D \subseteq R^3 \to R^3$ C^1 συνάρτηση με D ανοικτό στο R^3 και $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Στο διανυσματικό πεδίο F αντιστοιχούμε ένα άλλο διανυσματικό πεδίο που ονομάζεται στροβιλισμός του F και συμβολίζεται με $curlF$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$curlF = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k$$

(όπου $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$).

Με τον συμβολισμό των τελεστών έχουμε ότι το σύμβολο, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τελεστής που δρα πάνω σε βαθμωτές (διαφορίσιμες) συναρτήσεις

Έτσι με χρήση του εξωτερικού γινομένου μπορούμε να γράψουμε:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k.$$

Συνεπώς $\quad curlF = \nabla \times F$

Παρατήρηση Αν το διανυσματικό πεδίο F είναι της κλάσης $C^k\ (k \geq 1)$ τότε το διανυσματικό πεδίο $curlF$ είναι της κλάσης $C^{(k-1)}$ (όπου C^0 είναι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων).

Παράδειγμα: Έστω $\mathrm{T}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, ο μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες τότε έχουμε:

$$\nabla \times \mathrm{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{r}\cos\theta & \mathrm{r}\sin\theta & \mathrm{z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial r}\right)j + \left(\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} - \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta}\right)k =$$

$$(0-0)i + (0-0)j + (\sin\theta - (-r\sin\theta))k = (\sin\theta + r\sin\theta)k = (1+r)\sin\theta k.$$

24.1 Θεώρημα Για κάθε C^2 συνάρτηση $f: U \subseteq R^3 \to R$ $\quad (U \subseteq R^3$ ανοικτό) ισχύει ότι:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Δηλαδή ο στροβιλισμός ενός C^1 πεδίου κλίσεων είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Απόδειξη: Έστω $F = \nabla f \Leftrightarrow F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Έπεται ότι:

$$\nabla \times F = \nabla \times \nabla f = = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) j +$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) k .$$

Επειδή η f είναι C^2 συνάρτηση οι μεικτές παράγωγοι είναι ανά δύο ίσες $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$ συνεπώς όλες οι συνιστώσες του διανύσματος $curl\left(\nabla f\right)$ μηδενίζονται και έτσι έχουμε το αποτέλεσμα.

24.2 Ορισμός Ένα διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ λέγεται <u>αστρόβιλο</u> αν $curlF = 0$ επί του U.
Ο όρος αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο <u>προέρχεται από τη Φυσική</u>. Για παράδειγμα αν το F είναι <u>πεδίο ταχυτήτων</u> ενός υγρού μέσα σε ένα σωλήνα με <u>σταθερή ροή</u>, τότε η φυσική σημασία του ότι $curlF = 0$ στο σημείο P είναι πως το υγρό δεν περιστρέφεται, είναι δηλαδή <u>αστρόβιλο</u> στο P.

Παρατηρήσεις. 1) έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι αν ένα διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ είναι <u>πεδίο κλίσεων</u> μιας C^2 συνάρτησης $f : U \subseteq R^3 \to R$, δηλαδή αν $F = \nabla f$, τότε το F είναι ένα <u>αστρόβιλο</u> διανυσματικό πεδίο. Με διαφορετικά λόγια αν ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ είναι <u>συντηρητικό</u> τότε είναι και <u>αστρόβιλο</u>.Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

2) Έστω $F : U \subseteq R^2 \to R^2$, $F = \left(F_1, F_2\right)$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον R^2, τότε το F μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικό πεδίο στον R^3 με τον ακόλουθο τρόπο: θέτομε $\overline{F} : U \times R \subseteq R^3 \to R^3$ όπου $\overline{F}\left(x, y, z\right) = \left(F\left(x, y\right), 0\right) = \left(F_1\left(x, y\right), F_2\left(x, y\right), 0\right)$, $\left(x, y\right) \in U, z \in R$. Δηλαδή $\overline{F} = \left(F_1, F_2, F_3\right)$ όπου $F_3 = 0$ στο $U \times R$.
Είναι τότε σαφές ότι $\overline{F}$ είναι C^1 (δηλαδή της ίδιας κλάσης με την F) διανυσματικό πεδίο στο R^3.
Ο στροβιλισμός του F ορίζεται τότε ως ο στροβιλισμός του $\overline{F}$

$$curlF \underset{o\rho}{=} curl\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k =$$

$0i + 0j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k$. Παρατηρούμε ότι (αν $U \subseteq R^2$ ανοικτό συνεκτικό και) και $F: U \to R^2$, $F = (F_1, F_2), C^1$ διανυσματικό πεδίο τότε το F (δηλαδή το $\overline{F}$) είναι αστρόβιλο αν και μόνο αν $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Έπεται ιδιαίτερα από το θεώρημα 23.3 (κατεύθυνση (ι) $\Rightarrow$(ιι)) ή το Θεώρημα 24.1 ότι αν F συντηρητικό τότε (το $\overline{F}$ και άρα) το F είναι αστρόβιλο.

Παραδείγματα 1) Έστω $V(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0)$. Αποδείξτε ότι το V είναι ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο στο $U = R^2 - \{(0,0)\}$.

Λύση Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $F: U \times R \to R^3 : F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $(x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}$ και $z \in R$. Έχουμε τότε:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]k =$$

$\left[\frac{-(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]k = 0 \cdot k = 0$, ($\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ και $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$).

2) Έστω $V(x,y,z) = (y, -x, 0), (x,y,z) \in R^3$. Αποδείξτε ότι το V <u>δεν</u> είναι πεδίο κλίσεων.

Λύση Αν το V ήταν πεδίο κλίσεων κάποιας $f: R^3 \to R$ η οποία είναι C^2 συνάρτηση τότε θα είχαμε ότι (σύμφωνα με το θεώρημα 24.1) curlV=0.

Όμως, $curlV = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right)k = (-1-1)k = -2k \neq 0$.

Έπεται ότι το V <u>δεν</u> μπορεί να είναι το πεδίο κλίσεων κάποιας C^2 συνάρτησης $f: R^3 \to R$ αφού ο στροβιλισμός του V <u>δεν</u> είναι μηδέν.

3) Έστω $U \subseteq R^2$ και $f : U \to R^2, f = (u,v)$ ολόμορφη συνάρτηση τότε τα διανυσματικά πεδία $g = (v,u)$ και $\tilde{g} = (u,-v)$ είναι αστρόβιλα (Πρβλ την προηγούμενη παρατήρηση και το παράδειγμα (4) μετά το θεώρημα 23.3)

Παρατήρηση24.2.1 Έστω $U \subseteq R^2$ <u>απλά συνεκτικό</u> σύνολο και $F : U \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Έπεται από το θεώρημα 23.3 και την παρατήρηση (2) μετά τον ορισμό 24.2 ότι το F είναι συντηρητικό αν και μόνο αν το F είναι αστρόβιλο, δηλαδή το επαγόμενο διανυσματικό πεδίο $\tilde{F} : U \times R \subseteq R^3 \to R^3$ με $\tilde{F}(x,y,z) = (F(x,y),0)$ είναι αστρόβιλο. Έτσι το γεγονός ότι το $V(x,y,z) = (y,-x,0), (x,y,z) \in R^3$ <u>δεν</u> είναι αστρόβιλο προκύπτει από το ότι το πεδίο $F(x,y) = (y,-x)$ <u>δεν</u> είναι συντηρητικό.

Από την άλλη μεριά το διανυσματικό πεδίο $V(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, -\dfrac{x}{x^2+y^2} \right), (x,y) \in U = R^2 - \{(0,0)\}$ <u>είναι</u> αστρόβιλο και βέβαια ικανοποιεί την συνθήκη (ιι) του θεωρήματος 23.3 , όμως <u>δεν</u> είναι συντηρητικό.

Πράγματι, αν ήταν τότε για κάθε κλειστή καμπύλη $\sigma : [a,b] \to U$ θα είχαμε $\int_\sigma V \cdot ds = 0$. Έστω $\sigma(t) = (\cos t, \sin t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση. Τότε έχουμε,

$$\int_\sigma V \cdot ds = \int_0^{2\pi} V(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{y(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2}, -\frac{x(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2} \right) \cdot (x'(t), y'(t))\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{y(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot y'(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t)(-\sin t) - (\cos t)(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \neq 0 .$$

Έπεται ότι το πεδίο V είναι αστρόβιλο αλλά όχι συντηρητικό. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 23.3 δεν μπορεί να εφαρμοσθεί (αν και ικανοποιείται η συνθήκη (ιι) του θεωρήματος) αφού το πεδίο ορισμού του V <u>δεν</u> είναι απλά συνεκτικό. (Το ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο $U = R^2 - \{(0,0)\}$ του R^2 <u>δεν</u> είναι απλά συνεκτικό). Για περαιτέρω ιδιότητες του διανυσματικού πεδίου $V(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, -\dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$, δες τις παρατηρήσεις στο τέλος αυτής της παραγράφου.

<u>Απόκλιση διανυσματικού πεδίου</u>. Έστω $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ C^1 διανυσματικό πεδίο, με $F = (F_1, F_2, F_3)$. Η <u>απόκλιση</u> του F ορίζεται ως εξής:

$$divF = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Δηλαδή η $divF$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των ∇ και F. Παρατηρούμε ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό πεδίο. Σημειώνουμε ότι η έννοια της απόκλισης έχει φυσική σημασία που σχετίζεται με την διαστολή ή συστολή ενός ρευστού.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις πράξεις του στροβιλισμού και της απόκλισης.

24.3 Θεώρημα Αν $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ με $F = (F_1, F_2, F_3)$ είναι C^2 διανυσματικό πεδίο, τότε

$$divcurlF = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

δηλαδή η απόκλιση κάθε στροβιλισμού είναι μηδέν.

Απόδειξη: Όπως και στο θεώρημα 24.1 , η απόδειξη στηρίζεται στην ισότητα των μεικτών παραγώγων μιας C^2 συνάρτησης, έτσι παραλείπεται.

24.4 Ορισμός. Αν $divF = \nabla \cdot F = 0$, τότε λέμε ότι το πεδίο είναι ασυμπίεστο.

Παρατηρούμε ότι ο στροβιλισμός ενός C^2 διανυσματικού πεδίου είναι ασυμπίεστο πεδίο.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η απόκλιση των διανυσματικών πεδίων.

(α) $F(x, y) = xy^2 i + \sin x j$

(β) $F(x, y, z) = 2xi + y^2 j + xz^2 k$, (γ) $F(x, y, z) = xi + yj - 2zk$.

Λύση (α) $divF = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x) = y^2 + 0 = y^2$.

(β) $divF = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^2) = 2 + 2y + 2xz$

(γ) $divF = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = 1 + 1 - 2 = 0$ και το πεδίο είναι ασυμπίεστο.

Παρατήρηση. Όσον αφορά το (γ) παρατηρούμε ότι

$$curlF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & -2z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(-2z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(-2z) \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) k = 0i + 0j + 0k = 0$$

και το πεδίο είναι αστρόβιλο. Το πεδίο αυτό είναι και συντηρητικό, μια συνάρτηση δυναμικού για το F είναι η $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι: $divF = 0$ και $curlF = 0$, παρόλα αυτά το F δεν είναι σταθερό. Πρέπει βέβαια να είναι σαφές ότι για ένα σταθερό διανυσματικό πεδίο $F = (c_1, c_2, c_3)$ ισχύει ότι $divF = 0$ και $curlF = 0$.

(*) Παρατηρήσεις.1) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^2$ κλειστή καμπύλη με $0\notin[\sigma]$ και $g(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Τότε , $\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} g\cdot ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\delta_{\sigma}(0)$. Δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους της g κατά μήκος της σ διαιρεμένο με 2π, ισούται με τον δείκτη στροφής της σ ως προς το 0.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του ο δείκτης στροφής της σ ως προς το σημείο 0 είναι το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\delta_{\sigma}(0)\underset{o\rho}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}$. Όμως

$$\int_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\int_a^b\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}dt=\int_a^b\frac{\left(x'(t)+iy'(t)\right)}{x(t)+iy(t)}dt=$$

$$\int_a^b\frac{\left(x'(t)\cdot x(t)+y'(t)\cdot y(t)\right)+i\left(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)\right)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt=$$

$$\int_a^b\frac{x'(t)\cdot x(t)+y'(t)\cdot y(t)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt+i\int_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\left(\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2\right)'}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt+i\int_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, $\int_a^b\frac{\left(\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2\right)'}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt=\int_{u(a)}^{u(b)}\frac{du}{u}$ όπου $u(t)=\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2$, $t\in[a,b]$. Επειδή η καμπύλη σ είναι κλειστή ισχύει ότι $u(b)=u(a)$ και συνεπώς

$$\int_{u(a)}^{u(b)}\frac{du}{u}=0 \qquad (2)$$

Έπεται από τις (1) και (2) ότι,

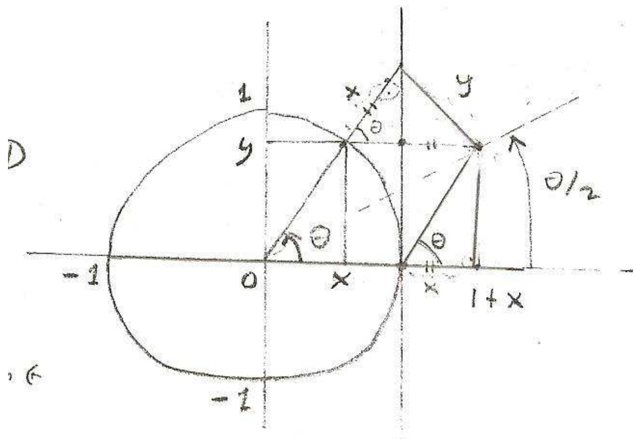
$$\delta_{\sigma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\cdot i\int_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}g\cdot ds.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι η συνάρτηση $-V$ του παραδείγματος 1, $g(x,y)=-V(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$.

Η g σε μιγαδικό συμβολισμό γράφεται $g(z)=\frac{iz}{|z|^2}, z=x+iy\neq 0$. Επίσης ότι η g προκύπτει ως σύνθεση της ολόμορφης συνάρτησης $h(z)=\frac{1}{z}, z\neq 0$ με τον μετασχηματισμό $\mathrm{T}(x,y)=(y,x)$, δηλαδή $g=\mathrm{T}oh$ (Πρβλ. και τα παραδείγματα (4) μετα το θεωρημα 23.3 και (3) μετα τον Ορισμό 24.2 .)

2) Το διανυσματικό πεδίο $V(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, (ή το $-V$) είναι <u>συντηρητικό</u> στο $D=R^2-\{(-\infty,0]\times\{0\}\}$ (ή στο $W=R^2-\{[0,+\infty)\times\{0\}\}$) Πράγματι μια συνάρτηση δυναμικού για το $f(x,y)=-V(x,y)=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ στο D είναι η συνάρτηση $\arg(x,y)=$ <u>πρωτεύον</u> <u>όρισμα</u> του (x,y), δηλαδή



$\arg(x,y)=\theta \Leftrightarrow (x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\theta,\sin\theta)$

και $\theta\in(-\pi,\pi) \Leftrightarrow x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\theta$,

$y=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\theta$ και $\theta\in(-\pi,\pi)$

θα χρειασθούμε το ακόλουθο:

24.5Λήμμα

$$\arg(x,y)=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

$(x,y)\in D$

Απόδειξη Έστω $(x,y)\in D$ τότε $x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\theta$ και $y=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\theta$ και $\theta\in(-\pi,\pi)$.

$$\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

Έπεται ότι: $\arg(x,y)=\theta=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\in D$.

[Υπενθυμίζουμε ότι: η συνάρτηση $\tau o\xi\varepsilon\varphi:R\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ορίζεται ως εξής: $\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\theta \Leftrightarrow \theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\varepsilon\varphi\theta=x$].

Η συνάρτηση arg είναι C^1 στο D (στην πραγματικότητα C^∞ στο D) και με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε ότι: $\dfrac{\partial\arg}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ και $\dfrac{\partial\arg}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \nabla\arg=-V$.

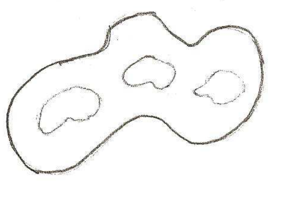
Η ύπαρξη μιας συνάρτησης δυναμικού για την V ή την $f=-V$ στο D έπεται από το γεγονός ότι το D είναι απλά συνεκτικό και ότι ικανοποιείται η συνθήκη (ιι) του θεωρήματος 23.3 για την V (ή την $f=-V$). Στην προκειμένη περίπτωση βρίσκουμε με απευθείας υπολογισμό μια συνάρτηση δυναμικού για την $f=-V$ στο D.

Το θεώρημα του Green

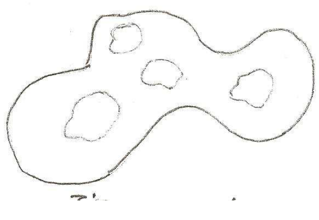
Υπενθυμίζουμε ότι μια απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ είναι μια κλειστή καμπύλη ($\sigma(a)=\sigma(b)$) ώστε ο περιορισμός $\sigma|[a,b)$ να είναι $1-1$ απεικόνιση.
Μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου ονομάζεται και καμπύλη Jordan.
Είναι ένα βαθύ τοπολογικό θεώρημα που ανήκει στον Jordan ότι:
Κάθε απλή κλειστή καμπύλη σ του επιπέδου αποσυνδέει το επίπεδο, δηλαδή το σύνολο $R^2-[\sigma]$ είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών και συνεκτικών συνόλων A και B ώστε το ένα είναι φραγμένο και το άλλο μη φραγμένο. Το φραγμένο σύνολο ονομάζεται και εσωτερικό και το μη φραγμένο εξωτερικό της καμπύλης.
Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2 ονομάζεται και χωρίο Jordan αν είναι το εσωτερικό μιας καμπύλης Jordan του επιπέδου. Είναι βέβαια σαφές ότι ένα χωρίο Jordan είναι απλά συνεκτικό (δηλαδή δεν έχει τρύπες).
Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι καμπύλες που θεωρούμε (ειδικότερα σε σχέση με επικαμπύλια ολοκληρώματα) είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες.

Ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο $D\subseteq R^2$ θα λέμε ότι έχει κατά τμήματα ομαλό σύνορο, αν το σύνορο του ∂D αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος απλές κλειστές καμπύλες οι οποίες είναι ξένες ανά δύο. Στην περίπτωση που το D είναι επί πλέον συνεκτικό το σύνορο του D αποτελείται από μια εξωτερική καμπύλη c_0 και κάποιες εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ ($\partial D=c_0\cup c_1\cup...\cup c_N$). Όταν ολοκληρώνουμε μια συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂D του D οι εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ προσανατολίζονται αρνητικά και η εξωτερική καμπύλη c_0 προσανατολίζεται θετικά (αντιωρολογιακά), δηλαδή ούτως ώστε να αφήνουν το σύνολο D στα αριστερά των.
Η σύμβαση αυτή δηλώνεται συμβολικά γράφοντας $\partial D=c_0-c_1-c_2-...-c_N$ υπονοώντας με τον τρόπο αυτό τον τρόπο που γίνεται η ολοκλήρωση επί του ∂D.

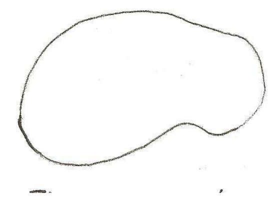
Παρατήρηση Με διαφορετική ορολογία ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου με κατά τμήματα ομαλό σύνορο είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό πολλαπλά συνεκτικό υποσύνολο του R^2 του οποίου το σύνορο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan. Δηλαδή ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 που φράσσεται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan.
Διαισθητικά ένας τόπος του R^2 (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) είναι πολλαπλά συνεκτικός αν έχει ένα πεπερασμένο αριθμό από τρύπες. Έτσι διακρίνουμε τους πολλαπλά συνεκτικούς τόπους σε τόπους συνεκτικότητας n, $n\geq 1$, αν έχουν $n-1$ αριθμό από τρύπες



Τόπος συνεκτικότητας 4



Τόπος συνεκτικότητας 5

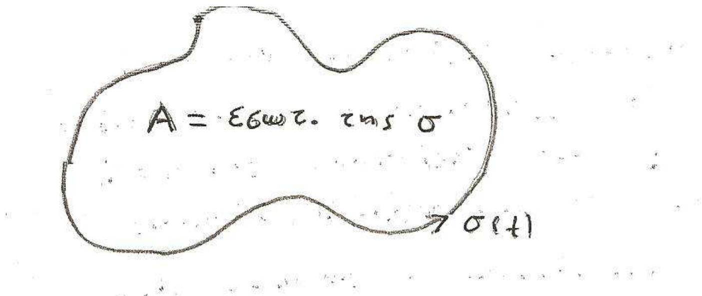


Τόπος συνεκτικότητας 1

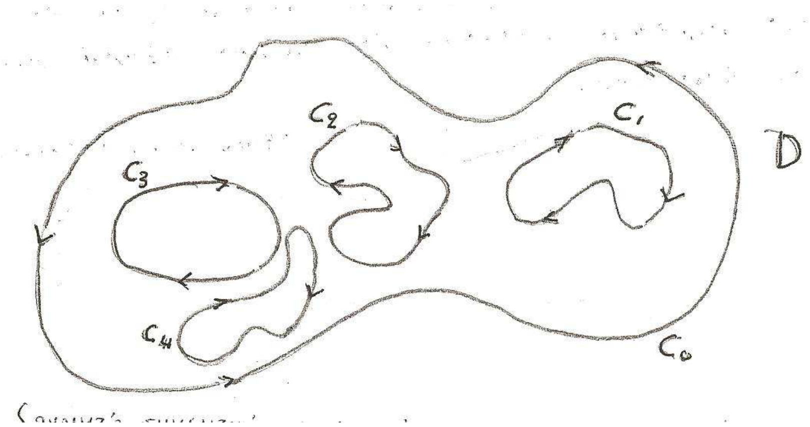
δηλ. απλά συνεκτικός

Παραδείγματα

$\sigma(a)=\sigma(b)$ B= εξωτερικό της σ



$\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan



Ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο

Με τις παραπάνω συμβάσεις το θεώρημα του Green διατυπώνεται ως ακολούθως.

25.1 Θεώρημα (του Green). Έστω $D\subseteq R^2$ ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο ∂D είναι <u>κατά τμήματα ομαλό</u>.
Αν p και q είναι πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες και C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_{\partial D}(pdx+qdy)=\int_{D}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy .$$

Όπου, αν $\partial D=c_0-c_1-...-c_N$, τότε το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ισούται με $\int\limits_{\partial D}(pdx+qdy)=\int\limits_{c_0}(pdx+qdy)-\sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_{c_k}(pdx+qdy)$.

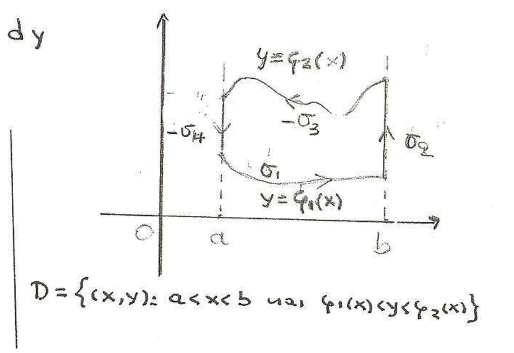
Δεν θα δώσουμε πλήρη απόδειξη του θεωρήματος του Green. Θα αποδείξουμε όμως τον <u>αναλυτικό πυρήνα</u> αυτού του σημαντικού αποτελέσματος ο οποίος εντοπίζεται στην περίπτωση που το D είναι ένα ανοικτό <u>στοιχειώδες χωρίο</u> . Ένα ανοικτό στοιχειώδες χωρίο είναι βέβαια απλά συνεκτικός τόπος που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan.

25.2 Λήμμα Έστω $D \subseteq R^2$ ένα ανοικτό χωρίο τύπου 1 και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση p είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int_{\partial D} p dx = -\int_D \frac{\partial p}{\partial y} dxdy$$

(όπου $\int_{\partial D} p dx = \int_{\partial D} p dx + q dy$ με $q = 0$).

Απόδειξη:



Υποθέτουμε ότι το $\overline{D}$ περιγράφεται από τις σχέσεις $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ είναι $\underline{C^1 \text{ συναρτήσεις}}$ με $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.

Το σύνορο ∂D του D είναι μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη η οποία σύμφωνα με το σχήμα γράφεται ως $\partial D = \sigma_1 + \sigma_2 + (-\sigma_3) + (-\sigma_4)$ (το πρόσημο $-$ δηλώνει την αντίθετη καμπύλη) , όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ είναι οι καμπύλες: $\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_2(t) = (b,t)$, $t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$, $\sigma_3(t) = (t, \varphi_2(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_4(t) = (a,t)$, $t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$.

Από το θεώρημα του Fubini μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$(1)\ \int_D \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left[p(x, \varphi_2(x)) - p(x, \varphi_1(x)) \right] dx$$

Από την άλλη μεριά θα έχουμε: $\int_{\partial D} p dx = \int_{\sigma_1} p dx + \int_{\sigma_2} p dx - \int_{\sigma_3} p dx - \int_{\sigma_4} p dx$

Αφού το x είναι σταθερό πάνω στα ίχνη των καμπύλων σ_2 και σ_4 θα έχουμε $\int_{\sigma_2} p dx = \int_{\sigma_4} p dx = 0$.

Πράγματι, $\int_{\sigma_2} p dx = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} (p(b,t), 0) \cdot (0,1) dt = 0$, ομοίως $\int_{\sigma_4} p dx = 0$ (Η φυσική ερμηνεία του μηδενισμού αυτών των ολοκληρωμάτων είναι ότι αν π.χ. η $(p(x,y), 0)$ θεωρηθεί ως δύναμη που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος του κατακόρυφου ευθύγραμμου τμήματος $[(b, \varphi_1(b)), (b, \varphi_2(b))]$ τότε δεν παράγει έργο αφού είναι κάθετη σε αυτό.)

Επίσης θα έχουμε: $\int_{\sigma_1} p dx = \int_a^b (p(t, \varphi_1(t)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t)) dt = \int_a^b p(t, \varphi_1(t)) dt =$

$$\int_a^b p\left(x,\varphi_1\left(x\right)\right)dx$$

$$\int_{\sigma_3} pdx = \int_a^b \left(p\left(t,\varphi_2\left(t\right)\right),0\right)\cdot\left(1,\varphi_2^{'}\left(t\right)\right)dt = \int_a^b p\left(t,\varphi_2\left(t\right)\right)dt = \int_a^b p\left(x,\varphi_2\left(x\right)\right)dx .$$

Επομένως, (2)

$$\int_{\partial D} pdx = \int_a^b p\left(x,\varphi_1\left(x\right)\right)dx - \int_a^b p\left(x,\varphi_2\left(x\right)\right)dx = \int_a^b \left[p\left(x,\varphi_1\left(x\right)\right) - p\left(x,\varphi_2\left(x\right)\right)\right]dx .$$

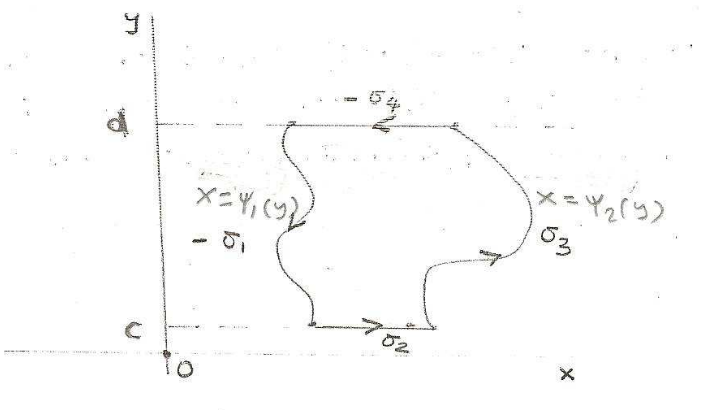
Έπεται από τις (1) και (2) ότι $\int_{\partial D} pdx = -\int_D \frac{\partial p}{\partial y}dxdy$.

Σημειώνουμε ότι μπορεί να αποδειχθεί και το ανάλογο του παραπάνω Λήμματος με τους ρόλους των x και y αντεστραμμένους.

25.3 Λήμμα Έστω D ένα ανοικτό χωρίο τύπου 2 με σύνορο το ∂D. Αν η συνάρτηση q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε $\int_{\partial D} qdy = \int_D \frac{\partial q}{\partial x}dxdy$.

Η απόδειξη αυτού του Λήμματος είναι όμοια με την προηγούμενη και έτσι παραλείπεται. Σημειώνουμε μόνο ότι το <u>αρνητικό πρόσημο απουσιάζει</u> στην περίπτωση αυτή, εφόσον η αντιστροφή των ρόλων των x και y σημαίνει και αλλαγή του προσανατολισμού του επιπέδου.

Ένα παράδειγμα χωρίου τύπου 2 και η διάσπαση του θετικά προσανατολισμένου συνόρου του σε προσανατολισμένες επί μέρους καμπύλες.



$$D = \left\{\left(x,y\right) : c < y < d \text{ και } \psi_1\left(y\right) < x < \psi_2\left(y\right)\right\}$$

$$\sigma_1\left(t\right) = \left(\psi_1\left(t\right),t\right),\ t\in\left[c,d\right],\ \sigma_2\left(t\right) = \left(t,c\right),\ t\in\left[\psi_1\left(c\right),\psi_2\left(c\right)\right]$$

$$\sigma_3\left(t\right) = \left(\psi_2\left(t\right),t\right),\ t\in\left[c,d\right],\ \sigma_4\left(t\right) = \left(t,d\right),\ t\in\left[\psi_1\left(d\right),\psi_2\left(d\right)\right]$$

$$\partial D = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4$$

Από τα προηγούμενα 2 λήμματα λαμβάνομε αμέσως την ακόλουθη ειδική αλλά σημαντική περίπτωση του θεωρήματος του Green.

25.4 Πρόταση (Green) Έστω D ένα ανοικτό χωρίο <u>τύπου 3</u> και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις p και q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε $\int\limits_{\partial D} pdx+qdy=\int\limits_{D}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$.

Παρατηρήσεις 1) Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται με λίγο περισσότερη δουλειά και για στοιχειώδη χωρία που είναι είτε του τύπου 1 ή του τύπου 2. Περαιτέρω αποδεικνύεται – με μη τετριμμένα γεωμετρικά επιχειρήματα – ότι ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο (που είναι για εμάς η γενική περίπτωση του θεωρήματος του Green) διασπάται σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία $D_1,...,D_m$, που το καθένα είναι είτε τύπου 1 είτε τύπου2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε,

$$\left(\int\limits_{D} = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{D_k} \quad \text{και} \quad \int\limits_{\partial D} = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial D_k}\right)$$

Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_k, $1\le k\le m$ και ο τύπος του Green έπεται στην γενική περίπτωση προσθέτοντας τα αποτελέσματα. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 παρακάτω η διάσπαση του D αρκεί να γίνει στην περίπτωση που το D είναι χωρίο Jordan.

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις αποδεικνύονται εύκολα (στην περίπτωση της διάσπασης του D σε στοιχειώδη χωρία $D_1,...,D_m$).

Αρκεί να παρατηρήσουμε αν τα D_k και D_λ με $1\le k<\lambda\le m$ έχουν ένα κοινό τμήμα στο σύνορό τους (τα εσωτερικά τους είναι βέβαια ξένα) τότε το τμήμα αυτό εμφανίζεται με διαφορετικό προσανατολισμό και απλοποιείται στο άθροισμα $\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial D_k}$ (πρβλ και την παρατήρηση (3)).

2) Το θεώρημα του Green είναι πολύ σημαντικό εφόσον <u>συνδέει</u> ένα <u>επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα (β΄ είδους) πάνω στο σύνορο ενός χωρίου του επιπέδου με ένα <u>διπλό ολοκλήρωμα</u> στο εσωτερικό του χωρίου. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα απ' ότι το διπλό ολοκλήρωμα.

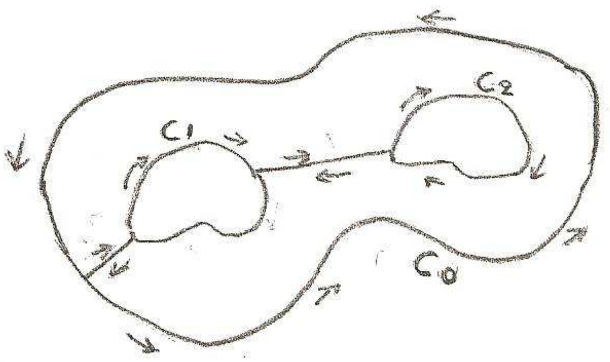
Το θεώρημα του Green θεωρείται και αυτό όπως και το θεώρημα 22.5 της σελίδας 227 ένα <u>ανάλογο</u> του <u>θεμελιώδους θεωρήματος</u> του Απειροστικού Λογισμού. Πράγματι αν $\mathrm{I}\subseteq R$ διάστημα, $a,b\in R$ με $a<b$ και $F:\mathrm{I}\to R$ C^1 συνάρτηση τότε όπως γνωρίζουμε $\int\limits_a^b F'(t)dt=F(b)-F(a)$.

Εδώ το σύνορο του $D=[a,b]$ είναι το δισύνολο $\{a,b\}$.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι αν και αποδείξαμε το θεώρημα του Green στην ειδική περίπτωση ενός στοιχειώδους χωρίου (τύπου 3), τα χωρία τα οποία εμφανίζονται στην πράξη είναι στις περισσότερες περιπτώσεις εύκολο να χωρισθούν σε στοιχειώδη χωρία ούτως ώστε να εφαρμόζεται η παρατήρηση (1).

3) Ιδιαίτερα το θεώρημα του Green ισχύει για ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο $D\subseteq R^2$ που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan c_0, δηλαδή D είναι <u>χωρίο Jordan</u> και άρα απλά συνεκτικός τόπος.

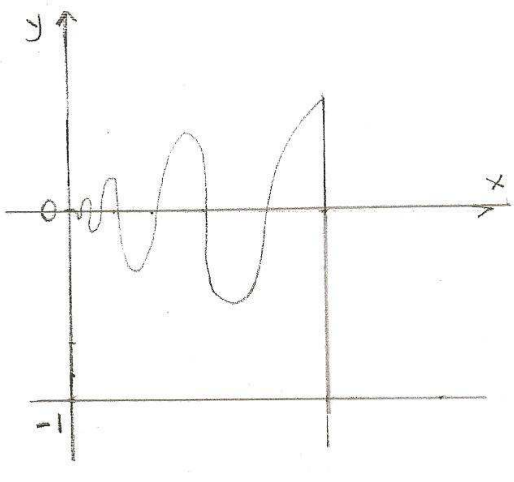
Αξίζει να σημειωθεί ότι η γενικότερη περίπτωση που το D είναι πολλαπλά συνεκτικός τόπος (που φράσσεται από πεπερασμένο πλήθος καμπύλων Jordan) ανάγεται στην περίπτωση του απλά συνεκτικού τόπου (που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan).
Έτσι αν ο D είναι τόπος συνεκτικότητας n (με $n \geq 1$) τότε μπορούμε με $n-1$ «κοψίματα» (crosscuts) να το μετατρέψουμε σε απλά συνεκτικό τόπο. Τα κοψίματα αυτά μπορούν να επιλεγούν να είναι C^1 απλές καμπύλες . Το σχήμα εξηγεί γεωμετρικά πως μπορεί να γίνει αυτό.



Ένας τόπος συνεκτικότητας 3

Επειδή το πρόσημο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος δευτέρου είδους αλλάζει όταν η κατεύθυνση της ολοκλήρωσης αλλάζει, έπεται ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στις καμπύλες που «κόβουν» το D αλληλοαναιρούνται. Έτσι τα μόνα ολοκληρώματα που «επιβιώνουν» είναι αυτά πάνω στο σύνορο του D, που στο σχήμα μας είναι το $\partial D = c_0 - c_1 - c_2$.
Είναι σαφές ότι αν εξαιρέσουμε από το D τα ίχνη των καμπύλων γ, δ, που «κόβουν» το D, τότε το $D - [\gamma] \cup [\delta]$ είναι απλά συνεκτικός τόπος .(Με n κοψίματα αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το D χωρίζεται σε δυο απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από καμπύλες Jordan.) Σημειώνουμε ότι οι παρατηρήσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε μια απόδειξη του θεωρήματος του Green (θεώρημα 25.1), βασισμένη στην πρόταση 25.4, προσεγγίζοντας τον απλά συνεκτικό τόπο D(που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan) με απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από απλές κλειστές πολυγωνικές γραμμές (πρβλ την άσκηση 11)

4) Ένα φραγμένο ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο δεν διασπάται αναγκαία σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία τύπου 3.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ακόλουθο.



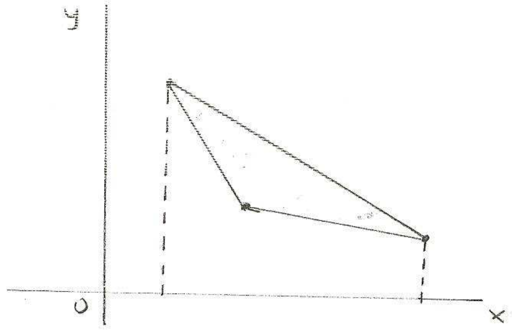
$\overline{D} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq \varphi(x)\}$

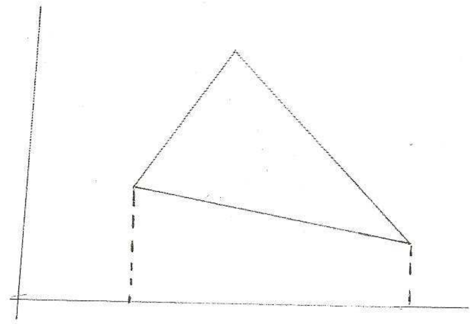
, όπου $\varphi(x) = x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.

Η φ είναι βέβαια συνεχώς διαφορίσιμη στο R.
Το D είναι τύπου 1, αλλά δεν μπορεί να διαμερισθεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων τύπου 2 (συνεπώς ούτε και

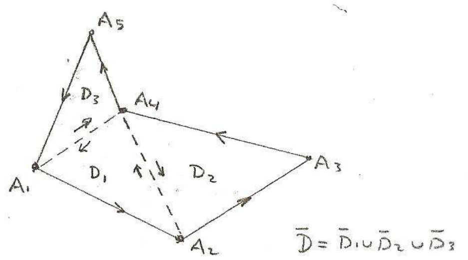
τύπου 3). Η παρατήρηση αυτή αφήνεται ως άσκηση.

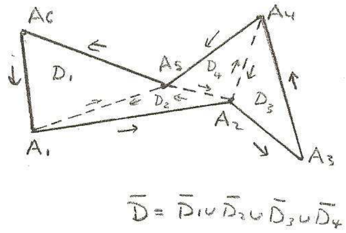
Παραδείγματα φραγμένων συνόλων με κατά τμήματα ομαλό σύνορο



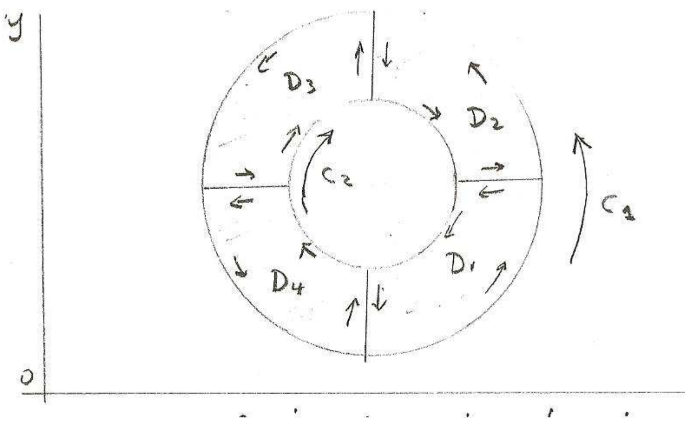


1)Το εσωτερικό ενός <u>τριγώνου</u> στο xy επίπεδο είναι ένα στοιχειώδες σύνολο <u>τύπου 3.</u>





2)Ένα <u>απλό</u> πολύγωνο του επιπέδου χωρίζεται σε τρίγωνα τα οποία είναι στοιχειώδη σύνολα <u>τύπου 3</u>. Οι προσανατολισμοί είναι σημειωμένοι στα σχήματα. (Πρβλ την άσκηση 11)



Το καθένα από τα χωρία D_1, D_2, D_3, D_4 που χωρίζεται ο δακτύλιος είναι τύπου 3.

3)Το χωρίο D είναι εδώ ένας (ανοικτός) δακτύλιος το σύνορο του οποίου αποτελείται από τους κύκλους C_1 και C_2, $\partial D = C_1 \bigcup C_2$. Ο χωρισμός του D σε στοιχειώδη χωρία γίνεται με δύο κάθετες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο. Το θεώρημα Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_1, D_2, D_3, D_4 και προσθέτουμε τα αποτελέσματα.

25.5 Πρόταση Έστω c μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου με εσωτερικό το

(απλά συνεκτικό) σύνολο D. Τότε το εμβαδόν του D(που έχει σύνορο την c) δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

(δηλαδή $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} F \cdot ds$, όπου $F(x,y) = (-y,x), \quad (x,y) \in R^2$).

Απόδειξη Θέτομε $F(x,y) = (-y,x) = \left(p(x,y), q(x,y)\right)$ δηλαδή θέτομε $p(x,y) = -y$ και $q(x,y) = x$. (Το F δεν είναι συντηρητικό πεδίο αφού $\frac{\partial p}{\partial y} = -1$ και $\frac{\partial q}{\partial x} = 1$)

Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται γιατί το D είναι ένα φραγμένο ανοικτό απλά συνεκτικό σύνολο με σύνορο το οποίο υποτίθεται ότι είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη.

Έτσι έχουμε, $\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{D}\left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]dxdy = \frac{1}{2}\int_{D}(1+1)dxdy = \int_{D} dxdy = \mathrm{A}$.

Παρατήρηση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\mathrm{A} = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} \bar{z}dz$, όπου με $\int_{\gamma} f(z)dz$ συμβολίζουμε το <u>μιγαδικό επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα της $f : [\gamma] \to C$ κατά μήκος της γ. (Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται στην Μιγαδική Ανάλυση).

Παράδειγμα (1) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την υποκυκλοειδή καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση</u> Η καμπύλη μας είναι η $\sigma(\theta) = \left(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta\right), \theta \in [0,2\pi]$ και είναι απλή και κλειστή όπως εύκολα διαπιστώνεται αναλυτικά αλλά και από το σχήμα. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\sigma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left[a\cos^3\theta\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right) - a\sin^3\theta\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)\right]d\theta =$$

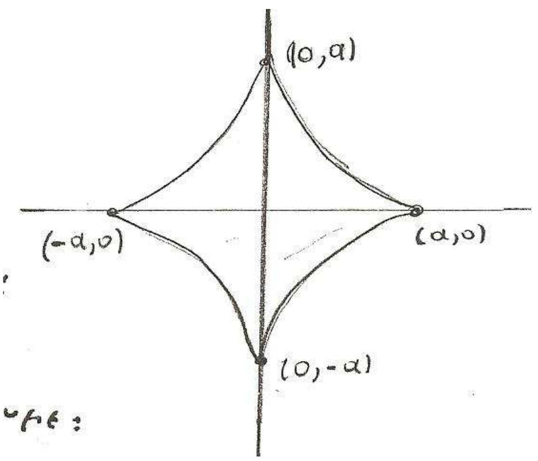
$$\frac{3}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^4\theta\right)d\theta =$$

$$\frac{3}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_{0}^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta =$$

$$\frac{3}{8}a^2\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

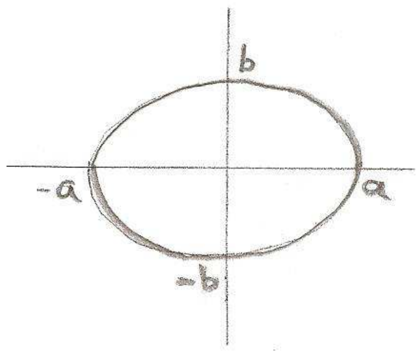
$$= \frac{3}{16}a^2\int_{0}^{2\pi}d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_{0}^{2\pi}\cos 4\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{16}a^2 \cdot 2\pi - \frac{3}{16}a^2 \cdot 0 = \frac{3}{8}\pi a^2.$$



Παράδειγμα 2 Αποδείξτε ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ έχει εμβαδόν πab ($a>0$ και $b>0$).

Λύση Η έλλειψη παραμετρικοποιείται ως, $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$, δηλαδή $x(\theta)=a\cos\theta$ και $y(\theta)=b\sin\theta$. Επομένως



$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\int_{\sigma}(-ydx+xdy)=$$

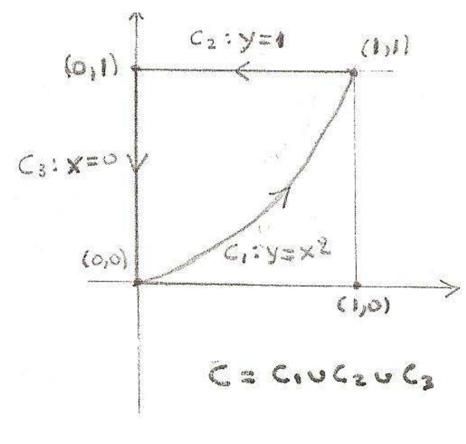
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-b\sin\theta(-a\sin\theta)+a\cos\theta(b\cos\theta)\right]d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab.$$

Σημειώνουμε ότι η $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$ είναι C^1 απλή κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα 3 Υπολογίστε το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων $F(x,y)=\left(x+xy^2, 2\left(x^2y-y^2\sin y\right)\right)$ κατά μήκος της κλειστής απλής καμπύλης c του σχήματος.

Λύση Το διανυσματικό πεδίο (δυνάμεων) $F=(p,q)$ είναι βέβαια C^1 στο R^2. Αν το D συμβολίζει το χωρίο (Jordan) που περιβάλλει η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan c τότε από το θεώρημα του Green θα έχουμε ότι το έργο που μας ζητείται ισούται με:



$$W=\int_c F\cdot ds=\int_c pdx+qdy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$\int_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y-2y^2\sin y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x+xy^2\right)\right]dxdy=$$

$$\int_D(4xy-2xy)dxdy=$$

$$2\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xydy\right)dx=2\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=1}dx$$

$$=\int_0^1\left(x-x^5\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

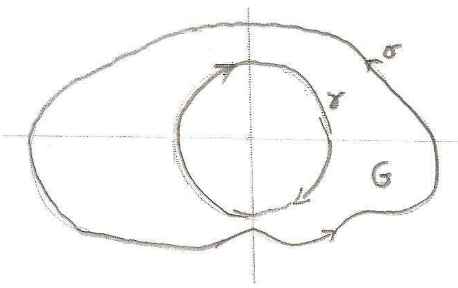
Σημειώνουμε ότι το χωρίο είναι τύπου 3 και μπορεί να περιγραφεί ως τύπου 1 ως εξής: $D=\left\{(x,y): 0<x<1 \text{ και } x^2<y<1\right\}$.

Έχουμε αποδείξει για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$, ότι $\int_\sigma F\cdot ds=2\pi$, όπου $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$, ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση που τον καθιστά καμπύλη Jordan. Το επόμενο παράδειγμα γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα. (Σύγκρινε αυτό το παράδειγμα και με την παρατήρηση της σελίδας 256)

Παράδειγμα 4 Έστω $\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας περιέχεται το $(0,0)$. Αν $F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$ τότε ισχύει

$$\int_\sigma F\cdot ds=2\pi .$$

Λύση



Έστω C_r ένας κύκλος κέντρου $(0,0)$ και αρκετά μικρή ακτίνα $r>0$, ώστε $C_r\subseteq D$, όπου D το εσωτερικό της καμπύλης σ. Θεωρούμε το χωρίο G του επιπέδου το οποίο περιβάλλεται (έχει ως σύνορο $\partial G=[\sigma]\bigcup C_r$) από τις καμπύλες $[\sigma]$ και C_r. Ο κύκλος C_r θεωρείται με την συνήθη παραμέτρηση $\gamma(t)=r(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$.

Επειδή το πεδίο F είναι όπως έχουμε αποδείξει αστρόβιλο ισχύει ότι: $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=0$ (όπου, $p(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ και $q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$).

Έπεται από το θεώρημα του Green για τον τόπο G ότι: $\int_{\partial G}F\cdot ds=\int_{\partial G}pdx+qdy=\int_G\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_G 0dxdy=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds+\int_{-\gamma}F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds-\int_\gamma F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\gamma F\cdot ds=2\pi$.

<u>Σημείωση</u>. Ένα υποσύνολο D του R^n λέγεται <u>αστρόμορφο</u> αν υπάρχει $a\in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z]\subseteq D,\forall z\in D$.

(ι) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό (πρβλ την απόδειξη της πρότασης 3.24 (ιι)).

(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο (προφανές).

(ιιι) Κάθε ανοικτό και αστρόμορφο υποσύνολο του R^2 είναι απλά συνεκτικό.
(Διαισθητικά προφανές.)

(ιv) Παραδείγματα ανοικτών και αστρόμορφων (άρα απλά συνεκτικών) υποσυνόλων του R^2 που <u>δεν</u> είναι κυρτά είναι και τα ακόλουθα:

(α) Έστω L= $[z,\infty)$ κλειστή ημιευθεία του R^2 τότε το $D=R^2-[z,\infty)$ έχει την ιδιότητα.

(β) Έστω $\mathrm{B}(a,r)$ ανοικτός δίσκος του R^2. Αν $z \in \mathrm{B}(a,r)$ και L είναι κλειστή ημιευθεία του επιπεδου με αρχή το z , τότε το D=B(α,r)-L εχει επισης την ιδιοτητα.

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια- ως εφαρμογή του θεωρήματος του Green- την κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$(ι) του θεωρήματος που χαρακτηρίζει τα συντηρητικά πεδία $F: D \subseteq R^2 \to R^2$, όπου D απλά συνεκτικός τόπος του R^2. (Θεώρημα 23.3)

Αν $D \subseteq R^2$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και $F: D \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο, $F = (p,q)$ ώστε $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$ στο D τότε το F είναι συντηρητικό (υπάρχει $f: D \to R$ C^1 συνάρτηση ώστε $F = \nabla f$).

Απόδειξη Ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν σημείο $(a,b) \in D$. Για κάθε $(x,y) \in D$ θεωρούμε μια πολυγωνική γραμμή $\Gamma_{(x,y)} \subseteq D$ με αρχικό σημείο το (a,b) και τελικό το (x,y) (το D είναι συνεκτικό και ανοικτό σύνολο, πρβλ.θεώρημα 3.25).

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f: D \to R$ ως ακολούθως:

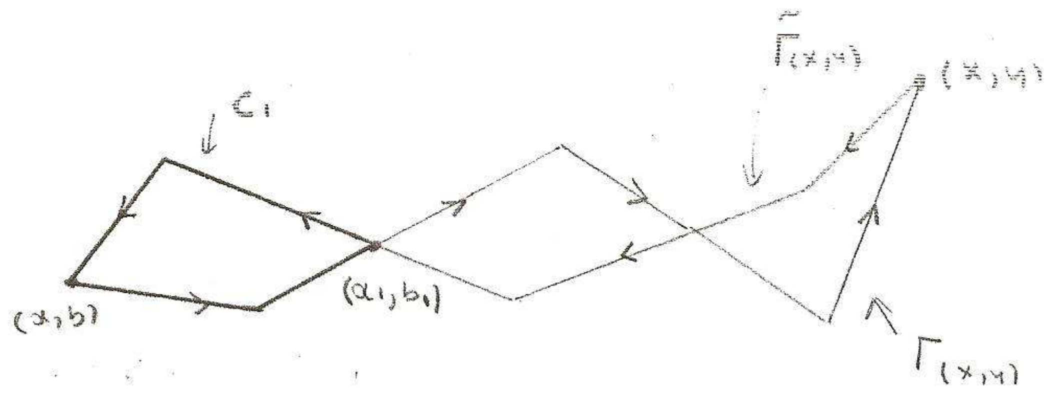
$$f(x,y) = \int_{\Gamma_{(x,y)}} F \cdot ds = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy .$$

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι καλά ορισμένη, δηλαδή αν $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια άλλη πολυγωνική γραμμή με $\tilde{\Gamma}_{(x,y)} \subseteq D$ που ξεκινά από το (a,b)και καταλήγει στο (x,y) τότε (1) $\displaystyle\int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy$.

Για να δείξουμε την (1) είναι αρκετό να δείξουμε την

(2) $\displaystyle\int_{\Gamma_{(x,y)} - \tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy - \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = 0$.

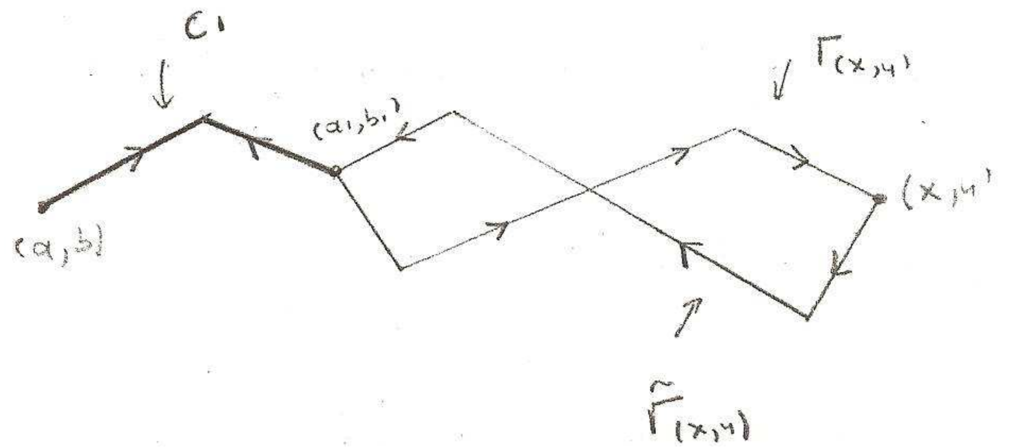
Οι πολυγωνικές γραμμές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ ξεκινούν από το σημείο (a,b) και έστω



(a_1,b_1) το πρώτο σημείο που συναντώνται μετά το (a,b). Τότε η πολυγωνική γραμμή c_1 που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1,b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια <u>απλή κλειστή καμπύλη</u> του απλά συνεκτικού τόπου D και επομένως είναι το σύνορο ενός ανοικτού απλά συνεκτικού συνόλου $G \subseteq D$. Από το θεώρημα του Green και την υπόθεσή μας έπεται ότι $\int\limits_{\partial G = c_1} pdx + qdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy = 0$.

Επομένως $\int\limits_{c_1} pdx + qdy = 0$

Οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι, ενδέχεται οι δύο πολυγωνικές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ να



ταυτίζονται σε ένα αρχικό κομμάτι τους. Στην περίπτωση αυτή αν (a_1, b_1) είναι το πρώτο σημείο στο οποίο ξεχωρίζουν, τότε η πολυγωνική γραμμή που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1, b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ - είναι βέβαια κλειστή, και – λόγω αντιθέτων προσήμων των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων (αφού ολοκληρώνουμε σε αντίθετες καμπύλες) ικανοποιεί προφανώς την σχέση $\int\limits_{c_1} pdx + qdy = 0$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή δουλεύοντας τώρα με το (a_1, b_1) στην θέση του (a,b), μετά από πεπερασμένα βήματα (αφού αν Γ είναι κλειστή πολυγωνική γραμμή του επιπέδου, το ανοικτό σύνολο $R^2 - \Gamma$ του R^2 έχει πεπερασμένο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών) καταλήγουμε στο ότι $\Gamma_{(x,y)} - \widetilde{\Gamma}_{(x,y)} = c_1 + c_2 + ... + c_N$ όπου οι $c_k, k = 1, 2, ..., N$ είναι (κλειστές) πολυγωνικές γραμμές του R^2 που ικανοποιούν τη σχέση (3) $\int\limits_{c_k} pdx + qdy = 0$ για κάθε $k = 1, 2, ..., N$.

Η σχέση (3) έπεται την (2) και άρα την (1).

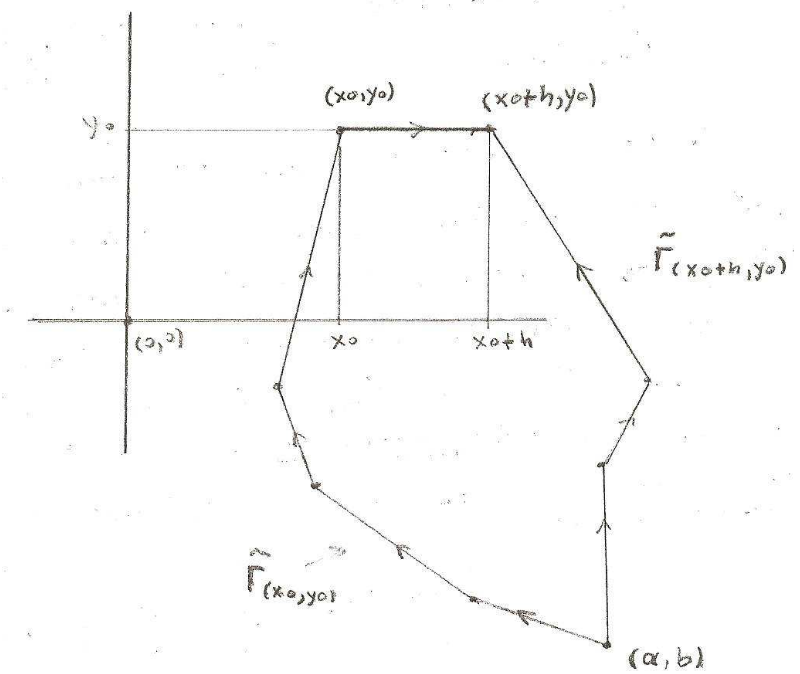
Απομένει να δείξουμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$.

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και σχηματίζουμε τις διαφορές $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \int\limits_{\Gamma_{(x_0+h, y_0)}} pdx + qdy - \int\limits_{\Gamma(x_0, y_0)} pdx + qdy$ για h αρκετά μικρό (έστω $h > 0$) ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0)]$ να περιέχεται στο D.

Έπεται αμέσως ότι $\int\limits_{\Gamma_{(x_0+h,y_0)}} pdx+qdy - \int\limits_{\Gamma(x_0,y_0)} pdx+qdy = \int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$ και

συνεπώς (4) $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$.

Παραμετρικοποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]$ ως $\sigma(t)=(x_0,y_0)+t((x_0+h,y_0)-(x_0,y_0))=(x_0+th,y_0)$, $t\in[0,1]$. Συνεπώς $\sigma'(t)=0,\ t\in[0,1]$



Οπότε από την (4) υπολογίζουμε,

$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int_0^1 p(x_0+th,y_0)hdt = h\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt$.

Έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt =$

$\int_0^1 p(x_0,y_0)dt = p(x_0,y_0)$ δηλαδή $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=p(x_0,y_0)$.

Σημειώνουμε ότι αν $h_n\to 0$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n(t)=p(x_0+th_n,y_0),n\geq 1,t\in[0,1]$ συγκλίνει (από την συνέχεια της p στο (x_0,y_0)) ομοιόμορφα στην σταθερά $p(x_0,y_0)$ και αυτό δικαιολογεί την ισότητα $\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt=\int_0^1 p(x_0,y_0)dt$.

Αναλόγως αποδεικνύεται ότι, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=q(x_0,y_0)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Σημειώνουμε ότι (σε ένα ανοικτό και συνεκτικό $D \subseteq R^2$) η πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα σημεία (a,b) και (x,y) του D μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι απλή (να μην τέμνει τον εαυτό της) και επί πλέον τα ευθύγραμμα τμήματά της να είναι παράλληλα είτε προς τον άξονα των x ή προς τον άξονα των y. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η απόδειξη απλοποιείται σε κάποιο βαθμό, υποθέτοντας ότι το D είναι αστρόμορφο. Πράγματι αν το D είναι αστρόμορφο ως προς το σημείο $(a,b) \in D$, τότε ορίζουμε την $f : D \to R$ ως εξής: $f(x,y) = \int_{\Gamma(x,y)} pdx + qdy$, όπου $\Gamma(x,y) = [(a,b),(x,y)]$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το (a,b) στο (x,y).

25.5.1 Παρατήρηση. Το θεώρημα που αποδείξαμε μας λέει σε διαφορετική αλλά ισοδύναμη διατύπωση ότι: Ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^2 \to R^2$, όπου U απλά συνεκτικός τόπος είναι συντηρητικό αν και μόνο αν είναι αστρόβιλο. (Δες και την παρατήρηση 24.2.1). Σημειώνουμε ότι ένας ανάλογος χαρακτηρισμός ισχύει και για διανυσματικά πεδία $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ υποθέτοντας ότι το U είναι ανοικτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του R^3. Επειδή δεν θα δώσουμε τον ακριβή ορισμό της απλής συνεκτικότητας στον R^3, σημειώνουμε απλώς ότι παραδείγματα ανοικτών και απλά συνεκτικών συνόλων στον R^3 είναι τα ανοικτά και κυρτά σύνολα, (άρα οι ανοικτές σφαίρες ο ίδιος ο R^3, και τα ανοικτά ορθογώνια) το $R^3 - \mathrm{K}$, όπου K πεπερασμένο σύνολο επίσης τα ανοικτά και αστρόμορφα υποσύνολα του R^3 κτλ. Αν L είναι ευθεία του R^3 τότε το ανοικτό σύνολο $R^3 - L$ είναι συνεκτικό αλλά όχι απλά συνεκτικό. Έτσι αποδεικνύεται ότι αν $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο και το U απλά συνεκτικό σύνολο, τότε το F είναι συντηρητικό ακριβώς τότε αν το F είναι αστρόβιλο.

Το θεώρημα του Green στην γλώσσα των διανυσματικών πεδίων έχει τις ακόλουθες μορφές (διατυπώσεις).

25.6 Θεώρημα (Διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green).Έστω D φραγμένος τόπος του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο και $F : D \to R^2$, $F = pi + qj$, ένα C^1 διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{D} (curlF) \cdot k d\mathrm{A}, \text{ (όπου } k = (0,0,1) \text{).}$$

Απόδειξη: Θέτομε $\widetilde{F} : D \times R \to R^3 : \widetilde{F}(x,y,z) = (F(x,y),0), (x,y) \in D, z \in R$, τότε – όπως γνωρίζουμε – ορίζουμε ως $curlF$ τον στροβιλισμό του πεδίου $\widetilde{F}$, δηλαδή $curlF \underset{o\rho}{=} = curl\widetilde{F}$.

Έχουμε υπολογίσει ότι $curl\widetilde{F} = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)k$ όπου $k = (0,0,1) \in R^3$. (Παρατήρηση 2 της σελίδας 239).

Επειδή προφανώς $(curlF) \cdot k = curl\widetilde{F} \cdot k = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)$ με αντικατάσταση έχουμε το συμπέρασμα.

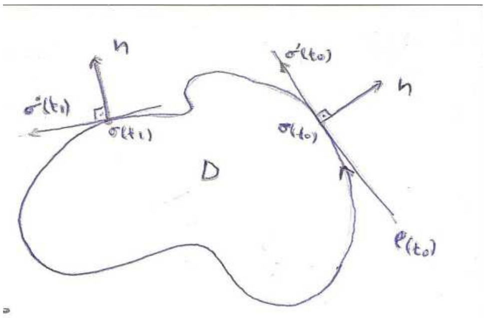
Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο <u>τόπος</u> εννοούμε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2.

25.7 Θεώρημα (της απόκλισης στο επίπεδο). Έστω D απλά συνεκτικός τόπος στο επίπεδο που φράσσεται από την απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ για την οποία υποθέτομε ότι $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Αν n συμβολίζει το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial D=[\sigma]$ και $F=(p,q)$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του $\overline{D}$ τότε

$$(1)\ \int_{\partial D} F\cdot n ds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Όπου το αριστερό μέλος της (1) συμβολίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>πρώτου είδους</u> της βαθμωτής συνάρτησης, $t\in[a,b]\to F(\sigma(t))\cdot\frac{(y'(t),-x(t))}{\|\sigma'(t)\|}$, όπου $\sigma(t)=(x(t),y(t)),t\in[a,b]$.

Απόδειξη Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $\sigma(t_0)$ είναι το $\sigma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ και η εφαπτόμενη ευθεία στο $\sigma(t_0)$ έχει εξίσωση $\ell(t)=\sigma(t_0)+\sigma'(t_0)(t-t_0),t\in R$



Το διάνυσμα n είναι κάθετο στην ευθεία $\ell(t)$ στο σημείο $\sigma(t_0)$ και το πρόσημό του επιλέγεται ώστε να αντιστοιχεί προς την εξωτερική κατεύθυνση. Έτσι το n στο σημείο $\sigma(t_0)$ του ∂D δίνεται από τον τύπο, $n=\frac{(y'(t_0),-x'(t_0))}{\|\sigma'(t_0)\|}$. Το $n\perp\ell(t_0)$, αφού $n\cdot\sigma'(t_0)=0$. Έπεται ότι $\int_{\partial D}F\cdot nds=$

$$\int_a^b\frac{p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\cdot\|\sigma'(t)\|dt=$$

$$\int_a^b\left[p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)\right]dt=\int_{\partial D}pdy-qdx\quad(2)$$

Επίσης $$\int_D divFd\mathrm{A}=\int_D\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy\quad(3)$$

Από το θεώρημα του Green και τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\partial D}F\cdot nds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση Το γεγονός ότι το πρόσημο του διανύσματος επελέγη ώστε να αντιστοιχεί στην εξωτερική κατεύθυνση μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Η γραμμική απεικόνιση $\varphi:(x,y)\in R^2\to(y,-x)\in R^2$, στρέφει κατά την αρνητική φορά το διάνυσμα (x,y) κατά $-\dfrac{\pi}{2}$. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικό συμβολισμό, αφού τότε $\varphi(z)=-iz$ ($z=x+yi$) και το πρωτεύον όρισμα του $-i$ στο $(-\pi,\pi)$ είναι το $-\dfrac{\pi}{2}$. Έτσι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\sigma'(t)=(x'(t),y'(t))$ της καμπύλης σ, στρέφεται κατά την αρνητική φορά κατά $\dfrac{\pi}{2}$ και συνεπώς γίνεται $(y'(t),-x'(t))$. Με κανονικοποίηση παίρνουμε το η.

Παραδείγματα 1) Έστω $F=(xy^2,y+x)$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_D (curlF)\cdot k dA$, πάνω στο χωρίο D του πρώτου τεταρτημόριου που φράσσεται από τις $y=x^2$ και $y=x$.

Λύση Πρώτα υπολογίζουμε τον στροβιλισμό του F, ισοδύναμα, του $\widetilde{F}(x,y,z)=(xy^2,y+x,0)$, που είναι ,

$$curl\widetilde{F}=\nabla\times\widetilde{F}=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=(0,0,1-2xy)=(1-2xy)k.$$

Άρα $curlF=curl\widetilde{F}=(1-2xy)k$.

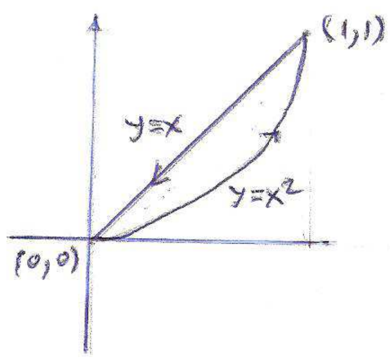
Έπεται ότι, $(curlF)\cdot k=1-2xy$. Η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται πάνω στο D που είναι χωρίο τύπου 3 με την χρήση ενός διαδοχικού ολοκληρώματος.

$$\int\limits_D (1-2xy)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(1-2xy)\,dy\right)dx=\int_0^1\left[y-xy^2\right]_{x^2}^{x}dx=$$

$$\int_0^1\left[x-x^3-x^2+x^5\right]dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

(Εδώ θεωρούμε το D ως χωρίο τύπου 1, $D=\{(x,y):0\le x\le 1 \text{ και } x^2\le y\le x\}$).

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_{\partial D} F\cdot ds$, όπου ∂D είναι το σύνορο του χωρίου D (δες το σχήμα) και κατόπιν χρησιμοποιώντας την διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green να έχουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα



Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂D του D είναι το «άθροισμα» των καμπυλών σ_1 και σ_2, $\partial D=\sigma_1+(-\sigma_2)$, όπου $\sigma_1(t)=(t,t^2),t\in[0,1]$ και $\sigma_2(t)=(t,t),t\in[0,1]$.

Έτσι έχουμε: $\int\limits_{\partial D}F\cdot ds=\int\limits_{\sigma_1}F\cdot ds-\int\limits_{\sigma_2}F\cdot ds$,

$$\int\limits_{\sigma_1}F\cdot ds=\int_0^1 F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt=$$

$$\int_0^1 F\left(x_1(t), y_1(t)\right)\cdot\left(x_1'(t), y_1'(t)\right)dt = \int_0^1 F\left(t,t^2\right)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 \left(t\cdot t^4, t^2+t\right)\cdot(1,2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^5 + 2t^3 + 2t^2\right)dt = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

$$\int_{\sigma_2} F\cdot ds = \int_0^1 F\left(\sigma_2(t)\right)\cdot\sigma_2'(t)\,dt = \int_0^1 F\left(x_2(t), y_2(t)\right)\cdot\left(x_2'(t), y_2'(t)\right)dt = \int_0^1 F(t,t)\cdot(1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3, 2t\right)\cdot(1,1)dt = \int_0^1 \left(t^3+2t\right)dt = \frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}.$$

Επομένως, $\int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{1}{12}$ και από την διανυσματική μορφή του θεωρήματος Green $\int_D (curlF)\cdot kd\mathrm{A} = \int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{1}{12}$.

2) Έστω $F=\left(y^3, x^5\right)$. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) $\int_{\partial D} F\cdot nds$ στο σύνορο του μοναδιαίου τετραγώνου D.

Λύση Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε: $\int_{\partial D} F\cdot nds = \int_D divF\cdot d\mathrm{A}$

Επειδή , $divF = \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^5\right)}{\partial y}=0$, άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.

Παραδείγματα και εφαρμογές

1)Έστω D απλά συνεκτικός τόπος στο R^2 που φράσσεται από την (κατά τμήματα C^1) καμπύλη c. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν $\mathrm{A}(D)$ του D δίνεται από τους τύπους

$$\mathrm{A}(D)=\int_c xdy=-\int_c ydx$$

Απόδειξη (I) Αποδεικνύουμε πρώτα τον τύπο $\mathrm{A}(D)=\int_c xdy$. Εδώ έχουμε ότι, $(p,q)=(0,q)=(0,x)$. Συνεπώς από το θεώρημα του Green $\int_c pdx+qdy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$. Άρα θα έχουμε

$$\int_c xdy=\int_D\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(0)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D dxdy=\mathrm{A}(D).$$

(II) Για τον τύπο $\mathrm{A}(D)=-\int_c ydx$, παρατηρούμε ότι $(p,q)=(p,0)=(-y,0)$. Από το θεώρημα του Green λαμβάνουμε

$$\int_c(-y)dx=-\int_c ydx=\int_D\left(\frac{\partial(0)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D dxdy=\mathrm{A}(D)$$

2) Έστω D τετράγωνο και c η (θετικά προσανατολισμένη) περίμετρος του D. Αποδείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy$, εξαρτάται μόνο από την πλευρά του τετραγώνου και όχι από την θέση του στο xy επίπεδο.

Λύση Έστω $p(x,y)=xy^2$, $q(x,y)=x^2y+2x$. Παρατηρούμε ότι οι p,q είναι C^1 συναρτήσεις (ως πολυωνυμικές) και $\frac{\partial p}{\partial y}=2xy, \frac{\partial q}{\partial x}=2xy+2$.

Από το θεώρημα του Green λαμβάνουμε

$$\int_c pdx+qdy=\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_D 2dxdy$$

$$=2\int_D dxdy=2\mathrm{A}(D).$$

Έπεται ότι δεν έχει σημασία η θέση του τετραγώνου στο $xy-$επίπεδο αλλά το εμβαδόν του, ισοδύναμα η πλευρά του.

Παρατήρηση Αν c είναι κλειστή απλή (κατά τμήματα C^1) καμπύλη του επιπέδου τότε πρέπει να είναι σαφές ότι αν D είναι το εσωτερικό της c, θα ισχύει $\mathrm{A}(D)=\frac{1}{2}\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy$, δηλαδή έχουμε έναν ακόμη τύπο για την εύρεση του εμβαδού του εσωτερικού καμπύλης.

Στην πραγματικότητα υπάρχει μια απειρία τέτοιων τύπων. Πράγματι αν F είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F:R^2\to R^2$ με $F=(p,q)$, ώστε $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=k\neq 0$

(k σταθερά) τότε, $\mathrm{A}(D)=\frac{1}{k}\int_c pdx+qdy$, για κάθε κλειστή απλή καμπύλη c του R^2. (Αν $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0$, τότε από το θεώρημα 23.3 το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό.)

3) Έστω c απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_c 4x^3ydx+x^4dy$, $\int_c -y^3dy+x^3dx$

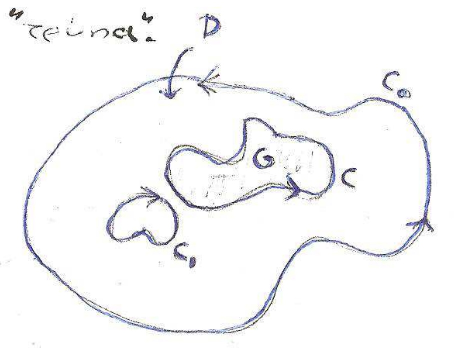
Λύση Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι αν, $p(x,y)=4x^3y$ και $q(x,y)=x^4$ τότε $\frac{\partial p}{\partial y}=4x^3=\frac{\partial q}{\partial x}$, επομένως το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι συντηρητικό στο R^2 και συνεπώς το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτομε $p(x,y)=x^3$ και $q(x,y)=-y^3$. Επομένως $\frac{\partial p}{\partial y}=0=\frac{\partial q}{\partial x}$, έτσι το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι συντηρητικό στο R^2 και το ολοκλήρωμα ισούται πάλι με μηδέν.

4) Μια συνάρτηση $f:D\subseteq R^2\to R$, όπου D ανοικτό σύνολο, λέγεται <u>αρμονική</u> στο D, αν είναι C^2 και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Έστω c απλή κλειστή καμπύλη του R^2, με εσωτερικό το D και f αρμονική συνάρτηση σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Αποδείξτε ότι $\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=0$.

Λύση Έστω $p=\frac{\partial f}{\partial y}$ και $q=-\frac{\partial f}{\partial x}$, τότε οι p και q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$ και το θεώρημα του Green μπορεί να εφαρμοσθεί. Έτσι έχουμε: $\int_c pdx+qdy=\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=0$.

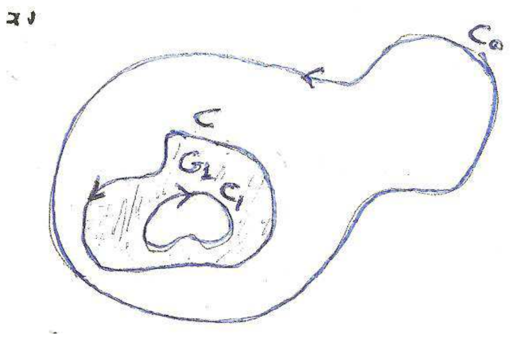
5) Έστω D φραγμένος τόπος του R^2, ο οποίος φράσσεται από δύο καμπύλες Jordan. Έστω ακόμη c μια καμπύλη Jordan στον D ($c\subseteq D$). Αν $F=(p,q)$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο στον D με $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$, πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να λάβει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_c pdx+qdy$;

<u>Λύση</u> Το D είναι ένας τόπος του R^2 που φράσσεται από δύο (κατά τμήματα C^1) καμπύλες Jordan, c_0 (εξωτερική) και c_1 (εσωτερική). Επομένως έχει μία «τρύπα».



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
(Ι) Η καμπύλη c δεν περιβάλλει την «τρύπα». Στην περίπτωση αυτή και επειδή το πεδίο F είναι συντηρητικό σε μια περιοχή του $\overline{G}$, όπου G το

εσωτερικό της c, έπεται από το θεώρημα του Green ότι $\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=\int_{G}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0$.



(ΙΙ) Έστω ότι η καμπύλη c περιβάλλει την «τρύπα». Έστω G_1 ο τόπος που φράσσεται από τις καμπύλες c και c_1.

(α) Υποθέτουμε ότι η c είναι θετικά προσανατολισμένη. Τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green στον τόπο G_1 και έχουμε: $\left(\partial G_1=c-c_1\right)$

$$\int_{c-c_1} pdx+qdy=\int_{G_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0 \Rightarrow$$

$\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=\int_{c_1} pdx+qdy$.

(β) Υποθέτουμε ότι η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την αντίθετη καμπύλη $-c$ της c και εφαρμόζουμε πάλι όπως προηγουμένως το θεώρημα του Green στον τόπο G_1, παρατηρώντας ότι, $\partial G_1=-c-c_1$.

Επομένως

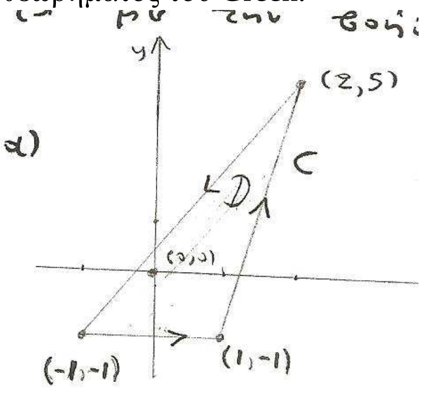
$$\int_{-c-c_1} pdx+qdy=\int_{G_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0 \Rightarrow -\int_{c} pdx+qdy-\int_{c_1} pdx+qdy=0 \Rightarrow$$

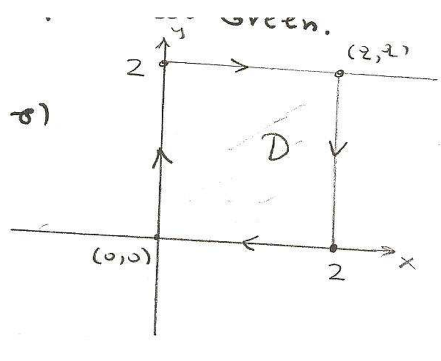
$\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=-\int_{c_1} pdx+qdy$.

Άρα στην περίπτωση που η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη το $\int_{c} pdx+qdy$ λαμβάνει την αντίθετη της προηγούμενης τιμής.

Επομένως υπάρχουν τρεις πιθανές τιμές για το ζητούμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

6) Υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα με την βοήθεια του θεωρήματος του Green.





$\int_{c} x\sin xdx-e^{y^2}dy$

$\int_{c} 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y dx-\frac{x^2y^2}{1+y^2}dy$

Λύση (α) Έστω $p(x,y)=x\sin x$ και $q(x,y)=-e^{y^2}$ τότε έχουμε
$$\int_c x\sin xdx-e^{y^2}dy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_D 0dxdy=0$$
(β) Έστω $p(x,y)=2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y$ και $q(x,y)=-\dfrac{x^2y^2}{1+y^2}$ (υπενθυμίζουμε ότι $\tau o\xi\varepsilon\varphi:R\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\tau o\xi\varepsilon\varphi y=x\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\varepsilon\varphi x=y$. Επίσης ότι, $\tau o\xi'\varepsilon\varphi y=\dfrac{1}{1+y^2},\ y\in R$ η παράγωγος της $\tau o\xi\varepsilon\varphi y$)

Επειδή η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη και το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι C^1 στο R^2, το θεώρημα του Green εφαρμόζεται:
$$\int_c 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi ydx-\frac{x^2y^2}{1+y^2}dy=-\int_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2y^2}{1+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y\right)\right)dxdy=$$
$$-\int_0^2\left(\int_0^2\left[-\frac{2xy^2}{1+y^2}-\frac{2x}{1+y^2}\right]dx\right)dy=-\int_0^2\left[\left(\frac{-y^2-1}{1+y^2}\right)x^2\right]_0^2dy=\int_0^2\left[x^2\right]_0^2dy=\int_0^2 4dy=8$$
(Απευθείας εφαρμογή του θεωρήματος Fubini στο τετράγωνο D).

7) Έστω D φραγμένος τόπος του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο ∂D (το οποίο προσανατολίζεται θετικά).

(α) Αν $f,g:R\to R$ είναι C^1 συναρτήσεις να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{\partial D}f(x)dx+g(y)dy$

(β) Αν k και h είναι πραγματικές σταθερές να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{\partial D}kydx+hxdy$

Λύση (α) Οι συναρτήσεις $p(x,y)=f(x)$ και $q(x,y)=g(y)$, $(x,y)\in R^2$ είναι C^1 στο R^2 και $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}=0$ στο R^2. Δηλαδή το διανυσματικό πεδίο, $F=(p,q)=(f,g)\Leftrightarrow F(x,y)=(f(x),g(y))$ είναι συντηρητικό στο R^2. Έπεται αμέσως από το θεώρημα του Green ότι $\mathrm{I}=0$

(β) Έστω $p(x,y)=ky$ και $q(x,y)=hx,(x,y)\in R^2$. Οι συναρτήσεις p και q είναι C^1 στο R^2 και το θεώρημα του Green εφαρμόζεται:
$$\int_{\partial D}kydx+hxdy=\int_D\left(\frac{\partial(hx)}{\partial x}-\frac{\partial(ky)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D(h-k)dxdy=(h-k)\cdot\mathrm{A}(D).$$

(*) 8) Έστω $D = R^2 - \left((-\infty, 0] \times \{0\} \right)$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x,y) = \left(\log\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y) \right), (x,y) \in D$, όπου $\arg(x,y) = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στο D. (Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία $\arg(x,y) \in (-\pi, \pi)$ για $(x,y) \in D$ είναι το πρωτεύον όρισμα του $(x,y) = x+iy$. Δες και την παρατήρηση (2) μετά τον Ορισμό 24.4. Για τον ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης, δες την εφαρμογή 4 μετά το Θεωρημα 23.3 .)

Λύση Επειδή οι $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ και $v(x,y) = \arg(x,y)$ είναι C^1 συναρτήσεις στο D, είναι αρκετό να αποδείξουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο D.

Δηλαδή, θέτοντας $u = \log\sqrt{x^2+y^2}$ και $v = \arg(x,y)$ τότε, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Πράγματι,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\sqrt{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Αντικαθιστώντας το x με το y βρίσκουμε $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \arg}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right) \quad (1)$$

Έπεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right) =$$

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2 + y^2} \cdot \left(-y \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2} \right) = -y \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2 + y^2}.$$

Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Επομένως,

$$\frac{\partial}{\partial x}\arg = -y \cdot \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2 + y^2} = -y \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2} \right)^2 + y^2 \right)} \quad (2)$$

Κάνουμε τώρα πράξεις στον παρανομαστή αυτής της συνάρτησης:
$\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)=\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}+y^2\right)=$
$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(2x^2+2y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}\right)=2\left[\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}+x\left(x^2+y^2\right)\right]=$
$2\left(x^2+y^2\right)\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (3)

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) (και εν συνεχεία στην (1)) βρίσκουμε $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \arg}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Αναλόγως, υπολογίζουμε $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \arg}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. Έπεται ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ισχύουν και η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον τόπο D.

9) Έστω $f:R^2\to R^2: f\left(x,y\right)=e^x\left(\cos y,\sin y\right),\quad \left(x,y\right)\in R^2$. Τότε η f είναι ολόμορφη στο R^2 και συνεπώς τα διανυσματικά πεδία $g\left(x,y\right)=e^x\left(\sin y,\cos y\right)$ και $\overline{f}\left(x,y\right)=e^x\left(\cos y,-\sin y\right)$ είναι συντηρητικά στο R^2 (πρβλ. και εφαρμογή 4 σελίδα 244).

Λύση Οι συνιστώσες $u\left(x,y\right)=e^x\cos y$ και $v\left(x,y\right)=e^x\sin y$ είναι προφανώς C^1 στο R^2. Αρκεί να εξακριβώσουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο R^2 για τις u και v.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y=\frac{\partial\left(e^x\sin y\right)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y\right)=-e^x\sin y=-\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\sin y\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Επομένως οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ισχύουν και η f είναι ολόμορφη στο R^2.

10) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F=\left(20x^3z+2y^2,4xy,5x^4+3z^2\right)$ είναι συντηρητικό στο R^3 και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το F.

Λύση Το F είναι C^1 διανυσματικό πεδίο στο R^3 αφού οι συνιστώσες του είναι C^1 στο R. Σύμφωνα με την παρατήρηση 25.5.1- και εφόσον το R^3 είναι απλά συνεκτικό σύνολο- για να αποδείξουμε ότι το F είναι συντηρητικό (πρέπει και) αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι αστρόβιλο. Έτσι έχουμε

$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 20x^3z+2y^2 & 4xy & 5x^4+3z^2 \end{vmatrix}=\left(0-0\right)i-\left(20x^3-20x^3\right)j+\left(4y-4y\right)k=0$$

Επομένως το F είναι αστρόβιλο και άρα συντηρητικό. Έστω $f:R^3\to R$ μια συνάρτηση δυναμικού για το πεδίο F, άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}=20x^3z+2y^2,\frac{\partial f}{\partial y}=4xy,\frac{\partial f}{\partial z}=5x^4+3z^2$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x (και κρατώντας τα y και z σταθερά) βρίσκουμε

$f(x,y,z)=\int(20x^3z+2y^2)dx=5x^4z+2xy^2+g(z,y)$ (1) όπου η $g(y,z)$ είναι σταθερή ως προς την ολοκλήρωση ως προς x.

Επειδή $\frac{\partial f}{\partial y}=4xy$ διαφορίζοντας την παραπάνω έκφραση της f ως προς y βρίσκουμε $4xy+\frac{\partial g}{\partial y}=4xy$. Επομένως, $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ και $g(y,z)=h(z)$ (2) όπου η $h(z)$ είναι σταθερή ως προς την ολοκλήρωση ως προς x και y.

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι, $f(x,y,z)=5x^4z+2xy^2+h(z)$ (3)

Διαφορίζοντας την (3) ως προς z και εξισώνοντας με την $\frac{\partial f}{\partial z}=5x^4+3z^2$ βρίσκουμε ότι $5x^4+h'(z)=5x^4+3z^2$ ή $h'(z)=3z^2$ ή $h(z)=3\int z^2dz=z^3+c$.

Έπεται ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x,y,z)=5x^4z+2xy^2+z^3+c$ όπου c πραγματική σταθερά είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την F.

Ασκήσεις

(1)Υπολογίστε το $divF$ και το $curlF$ για κάθε διανυσματικό πεδίο στο δοσμένο σημείο.
(α) $F(x,y,z)=i+j+k$ στο $(2,-1,3)$, (β) $F(x,y,z)=(e^{-x}\sin y)i+(e^{-x}\cos y)j+k$ στο $(1,3,-2)$, (γ) $F(x,y,z)=e^{-xy}i+e^{xz}j+e^{yz}k$ στο $(3,2,0)$.

2)Βρείτε το $divF$ και το $curlF$ για το καθένα από τα διανυσματικά πεδία:
(α) $F=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j$, (β) $F=(e^x\sin y)i+(e^x\cos y)j+k$,
(γ) $F=xyzi+x^2y^2z^2j+y^2z^3k$, (δ) $F=\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3)Ελέγξτε ποια από τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και οποτεδήποτε είναι βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού: (α) $F=(y^2,2xy)$,
(β) $F=(2xy^3,3x^2y^2)$, (γ) $F=(-y+e^x\sin y,(x+2)e^x\cos y)$,
(δ) $F=(y-x^2,2x+y^2)$, (ε) $F=(e^{2x}\sin y,e^{2x}\cos y)$.

4)Ένα πεδίο δυνάμεων $F(x,y)=(3x^2+6xy^2)i+(6x^2y+4y^2)k$ μετακινεί ένα αντικείμενο στο xy επίπεδο. Δείξτε ότι το F είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το F. Υπολογίστε το έργο που παράγεται όταν το αντικείμενο μετακινείται από το $(1,0)$ στο $(0,1)$ πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει αυτά τα σημεία.

5) Υπολογίστε με την βοήθεια του θεωρήματος του Green τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα και εν συνεχεία ελέγξτε τα αποτελέσματα με απ' ευθείας υπολογισμό αυτών των ολοκληρωμάτων αφού παραμετρικοποιήσετε τις καμπύλες

(α) $\int_c y^2dx + x^2dy$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα $(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)$

(β) $\int_c y^3dx - x^3dy$, όπου $c = \{(x,y): x^2+y^2=1\}$

(γ) $\int_c 4ydx - 3xdy$, όπου c είναι η έλλειψη $\{(x,y): 2x^2+y^2=4\}$

(δ) $\int_c x\sin xdx - e^{y^2}dy$, όπου c είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,-1),(2,5),(-1,-1)$

(ε) $\int_c 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi ydx - \frac{x^2y^2}{1+y^2}dy$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα $(0,0),(2,0),(2,2)$ και $(0,2)$.

6)Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας έναν από τους τύπους για τον υπολογισμό εμβαδού που προκύπτουν από το θεώρημα του Green, τα εμβαδά των ακόλουθων χωρίων:

(α) Του δίσκου $\mathrm{B}(a,r)$, όπου $a \in R^2$ και $r>0$

(β) Του τριγώνου με κορυφές τα $(0,0),(1,1)$ και $(0,2)$.

(γ) Του τραπεζίου με κορυφές $(0,0),(4,0),(1,3)$ και $(0,3)$.

(δ) Του ημιδίσκου που περιβάλλει το ημικύκλιο $y=\sqrt{4-x^2}$.

7)Αν c είναι καμπύλη Jordan, αποδείξτε ότι , $\int_c (x-3y)dx + (2x-y^2)dy = 5\mathrm{A}$ όπου Α είναι το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλει η c.

8) Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

(α) $\int_c \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, όταν η c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν περιέχεται το σημείο $(0,0)$ και κατόπιν όταν το $(0,0)$ περιέχεται στο εσωτερικό της.

(β) $\int_c \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$, όπου c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν ανήκει το σημείο $(1,0)$.

(γ) $\int_c \frac{-(y+2)dx+(x-1)dy}{(x-1)^2+(y+2)^2}$, όπου c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν ανήκει το σημείο $(1,-2)$.

9) Για ποια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη c το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c y^3dx + (3x-x^3)dy$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή του;

10) Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και $f:(u,v): D \to R^2$ C^1 συνάρτηση, αποδείξτε ότι:

(ι) η f είναι ολόμορφη (δηλαδή ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$) αν και μόνο αν τα διανυσματικά πεδία $g = (v,u)$ και $\widetilde{f} = (u,-v)$ είναι αστρόβιλα. Αν επί πλέον το D είναι απλά συνεκτικό τότε η f είναι ολόμορφη αν και μόνο αν τα g και $\widetilde{f}$ είναι συντηρητικά.

(ιι) Συμπεράνατε από το (ι) ότι τα διανυσματικά πεδία $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ και $G(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ είναι αστρόβιλα στο $D = R^2 - \{(0,0)\}$.

(ιιι) Αν η f είναι ολόμορφη τότε οι u και v είναι αρμονικές στο D.

11) Έστω D απλό πολύγωνο του επιπέδου, δηλαδή το εσωτερικό μιας απλής κλειστής πολυγωνικής γραμμής. Αποδείξτε ότι το D μπορεί να χωρισθεί σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας τις διαγωνίους του.

[Υπόδειξη Έστω ότι το D έχει n κορυφές $(n \geq 4)$. Αν το D είναι κυρτό θεωρούμε μια κορυφή P του D και φέρουμε $n-3$ διαγωνίους από το P, μια σε κάθε κορυφή η οποία είναι διαφορετική και μη διαδοχική με την P. Αν το D είναι μη κυρτό, προχωρούμε με επαγωγή στο n. Θεωρούμε μια κορυφή P του D ώστε η γωνία του D με κορυφή το P να είναι μη κυρτή (δηλαδή μεγαλύτερη του π). Δείξτε ότι υπάρχει κορυφή Q του D ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[P,Q]$ (εκτός των άκρων P,Q) να περιέχεται στο D. Έτσι το D χωρίζεται με την διαγώνιο $[P,Q]$ σε δύο απλά πολύγωνα D_1, D_2 με λιγότερες κορυφές από το D. Τα πολύγωνα D_1, D_2 μπορούν να χωρισθούν σε τρίγωνα από την επαγωγική υπόθεση.]