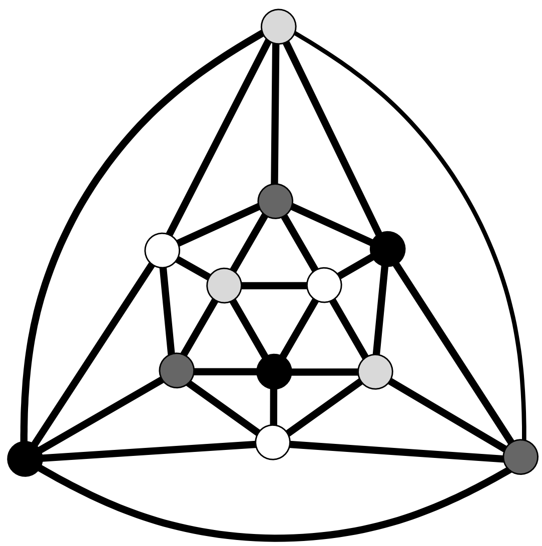
Σημειώσεις στη ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

28/3/2023

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

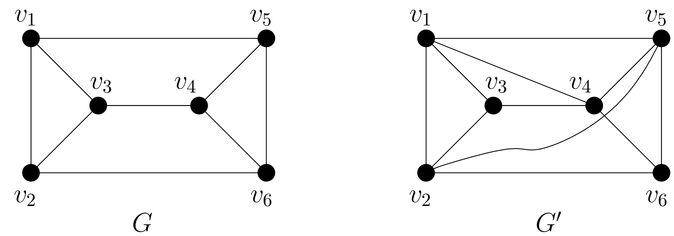
1.1 Γραφήματα και ισομορφισμοί

Ορισμός 1.1. Καλούμε *γράφημα* κάθε διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του V το καθένα εκ των οποίων έχει δύο στοιχεία του. Καλούμε τα στοιχεία του V *κορυφές* του G και τα στοιχεία του E *ακμές* του G. Για κάθε ακμή $e = \{v, u\} \in E$, καλούμε τις κορυφές v και u *άκρα* της e και λέμε ότι οι κορυφές v και u είναι *συνδεδεμένες* στο G.

Δεδομένου ενός γραφήματος G, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $V(G)$ και $E(G)$ για το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών του αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε $n(G) = |V(G)|$ και $m(G) = |E(G)|$. Καλούμε το $n(G)$ *μέγεθος* του γραφήματος G.

Ορισμός 1.2. Έστω G γράφημα και έστω $S \subseteq V(G)$. Καλούμε *γειτονιά του S στο G* το σύνολο $N_G(S) = \{u \in V(G)\backslash S \mid \exists v \in S : \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλ. το σύνολο όλων των κορυφών του G που είναι συνδεδεμένες με την v και δεν ανήκουν στο S. Αν $v \in V(G)$, ορίζουμε $N_G(v) = N_G(\{v\})$. Αν για μια κορυφή $x \in V(G)$ ισχύει ότι $N_G(x) = \emptyset$ τότε λέμε ότι η x είναι *απομονωμένη* κορυφή.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να *αναπαραστήσουμε* ένα γράφημα. Ο πιο πρακτικός είναι να ζωγραφίσουμε ένα διάγραμμα στο οποίο αναπαριστούμε τις κορυφές με επιλεγμένα σημεία του επίπεδου και τις ακμές με γραμμές οι οποίες συνδέουν τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα τους. Για παράδειγμα, το Σχήμα 1.1 περιέχει



Σχήμα 1.1: Διαγράμματα των γραφημάτων G και G' με $V(G) = V(G') = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$ και $E(G') = E(G) \cup \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}\}$.

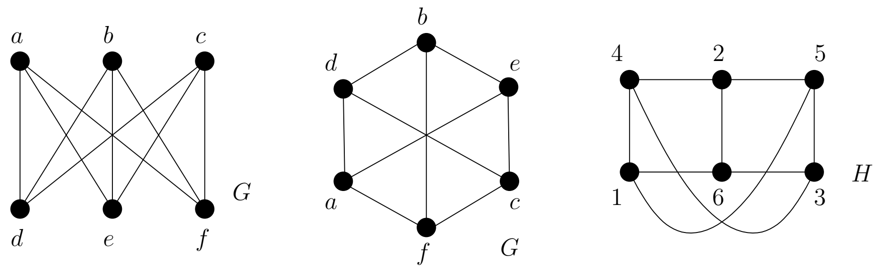
ένα διάγραμμα του γραφήματος $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ και $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$. Στο ίδιο σχήμα υπάρχει ένα διάγραμμα του γραφήματος G' το οποίο έχει τις ίδιες κορυφές με το G αλλά και δύο πρόσθετες ακμές. Ο τρόπος αυτός να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα είναι ο πιο παραστατικός αλλά όταν χρησιμοποιείται πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη ότι υπάρχουν πολλά, συχνά αρκετά, διαφορετικά μεταξύ τους, διαγράμματα για το ίδιο γράφημα (βλ. Σχήμα 1.2). Παρατηρούμε ότι συχνά σε διαγράμματα γραφημάτων δύο γραμμές μπορεί να τέμνονται. Στην περίπτωση αυτή φροντίζουμε ώστε να υπάρχει *μόνο* ένα σημείο τομής ανα ζεύγος τεμνόμενων γραμμών και το σημείο αυτό να μην είναι κορυφή του γραφήματος. Επίσης, για να βελτιστοποιήσουμε αισθητικά την αναπαράσταση του γραφήματος προσπαθούμε να ελαχιστοποιούμε τον αριθμό των τεμνόμενων γραμμών και προσπαθούμε, αν είναι δυνατόν, οι ακμές αυτές να είναι ευθύγραμμα τμήματα. (π.χ. το γράφημα G' του Σχήματος 1.1 μπορεί να αναπαρασταθεί με διάγραμμα που δεν περιέχει τεμνόμενες κορυφές και όπου όλες οι ακμές αναπαρίστανται με ευθύγραμμα τμήματα, βλ. Άσκηση 1.2).

Ορισμός 1.3. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα με την βοήθεια ενός πίνακα. Συγκεκριμένα, το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια ενός $n \times n$-πίνακα $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ όπου

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

Καλούμε κάθε τέτοιο πίνακα *πίνακα αναπαράστασης* του G.

Παρατήρηση 1.4. *Κάθε πίνακας αναπαράστασης ενός γραφήματος είναι συμμετρικός και έχει όλες τις διαγώνιες τιμές του ίσες με το* 0. *Επίσης, σε κάθε γράφημα με* n



Σχήμα 1.2: Οι δύο πρώτες εικόνες είναι δύο διαφορετικά διαγράμματα του γραφήματος $G = (\{a,b,c,d,e,f\}, \{\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,d\},\{b,e\},\{b,f\}, \{c,d\},\{c,e\},\{c,f\}\})$. Η τρίτη εικόνα είναι ένα διάγραμμα του, ισόμορφου με το G, γραφήματος $H = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\}, \{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}\})$.

κορυφές αντιστοιχούν $n!$ πίνακες αναπαράστασης.

Παρατήρηση 1.5. *Οι πίνακες*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

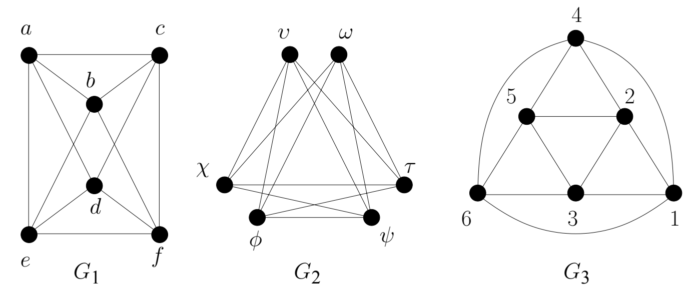
είναι πίνακες αναπαράστασης των γραφημάτων G και G' του Σχήματος 1.1.

Ορισμός 1.6. Δύο γραφήματα G, H, καλούνται *ισόμορφα* αν υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\sigma : V(G) \to V(H)$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in V(G)$ με $x \neq y$, ισχύει ότι $\{x,y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y)\} \in E(H)$. Αν δύο γραφήματα G και H είναι ισόμορφα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $G \simeq H$ και θα λέμε εναλλακτικά ότι το *G είνα το ίδιο γράφημα με το H* ή, ακόμη απλούστερα, ότι το G είναι το H.

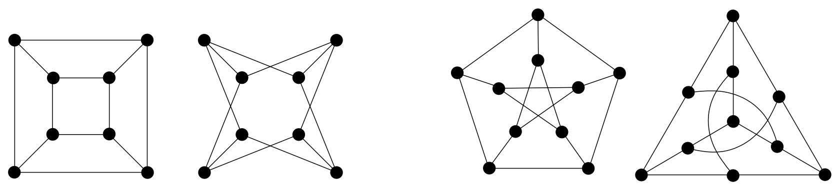
Παρατήρηση 1.7. *Η σχέση $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

1.2 Ειδικά γραφήματα

Λόγω της Παρατήρησης 1.7, ένα γράφημα μπορεί να είναι ισόμορφο με άπειρα στο πλήθος γραφήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Για τον λόγο



Σχήμα 1.3: Τρεις τρόποι να ζωγραφίσουμε το οκτάεδρο.

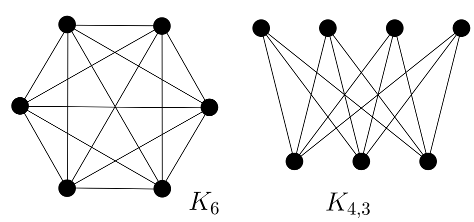


Ο τρισδιάστατος κύβος Q_3.

Το γράφημα του Petersen.

Σχήμα 1.4: Το πρώτο ζεύγος γραφημάτων αντιστοιχεί στον *τρισδιάστατο κύβο* και το συμβολίζουμε ως Q_3. Το γράφημα που αντιστοιχεί στο δεύτερο ζεύγος καλείται *γράφημα του Petersen*.

αυτό, σε πολλές περιπτώσεις θα συμβολίζουμε με κάποιο «γράφημα αντιπρόσωπο» όλη την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει. Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τα κυριότερα γραφήματα «αντιπροσώπους» τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.



Σχήμα 1.5: Τα γραφήματα K_6 και $K_{4,3}$.

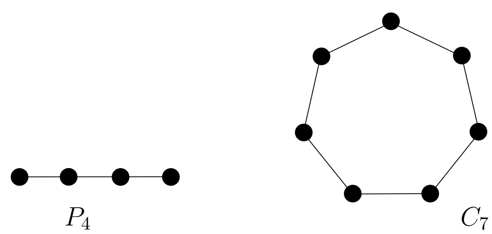
Ορισμός 1.8. Για κάθε $r \geq 0$ ορίζουμε το γράφημα

$$K_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i < j \leq r\})$$

και θα το ονομάζουμε *κλίκα με r κορυφές*, *r-κλίκα* ή απλά *κλίκα*. Ένα γράφημα G με r κορυφές καλείται *πλήρες* αν $G \simeq K_r$ (βλ. Σχήμα 1.5).

Ορισμός 1.9. Για κάθε ζεύγος $p, q \geq 0$, ορίζουμε το γράφημα $K_{p,q} = (A \cup B, E)$ έτσι ώστε $A = \{v_1, \ldots, v_p\}, B = \{u_1, \ldots, u_q\}$, και $E = \{\{v_i, u_j\} \mid 1 \leq i \leq p$ και $1 \leq j \leq q\}$ (βλ. Σχήμα 1.5). Καλούμε το γράφημα $K_{1,r}$ (για $r \geq 0$), *r-άστρο*.

Παρατήρηση 1.10. *Το γράφημα του Σχήματος 1.2 είναι το ίδιο με το $K_{3,3}$.*



Σχήμα 1.6: Τα γραφήματα P_4 και C_7.

Ορισμός 1.11. : Για κάθε $r \geq 1$, το γράφημα

$$P_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}\})$$

καλείται *μονοπάτι* και οι κορυφές v_1 και v_r καλούνται *άκρα* του ενώ οι υπόλοιπες κορυφές καλούνται *εσωτερικές* κορυφές του. Επίσης καλούμε ένα μονοπάτι με άκρα x και y *(x, y)-μονοπάτι*. Το *μήκος* ενός μονοπατιού είναι το πλήθος των ακμών του. Επίσης για κάθε $r \geq 3$, το γράφημα

$$C_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}, \{v_r, v_1\}\})$$

καλείται *κύκλος*. Το *μήκος* ενός κύκλου είναι το πλήθος των ακμών του. Για παραδείγματα μονοπατιού και κύκλου βλ. Σχήμα 1.6. Το γράφημα C_3 καλείται *τρίγωνο*.

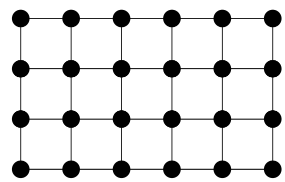
Ορισμός 1.12. Καλούμε *(p, q)-σχάρα* ή απλά *σχάρα* το γράφημα

$$([p] \times [q], \{\{(x, y), (x', y')\} \in \binom{[p] \times [q]}{2} \mid |x - x'| + |y - y'| = 1\}).$$

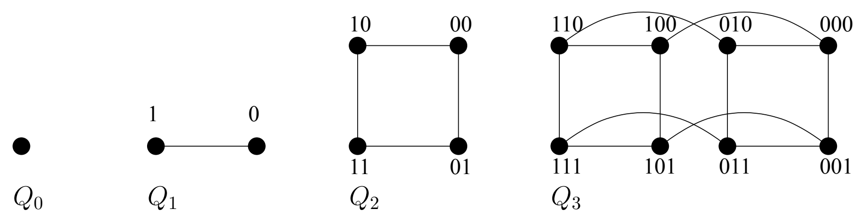
Για ένα παράδειγμα σχάρας, βλ Σχήμα 1.8.

Ορισμός 1.13. Έστω ακέραιος $r \geq 0$ και έστω V_r το σύνολο όλων τον δυαδικών συμβολοσειρών μήκους r. Ορίζουμε τον *r-διάστατο κύβο* ως εξής:

$$Q_r = (V_r, \{\{x, y\} \mid x, y \in V_r \text{ και τα } x \text{ και } y \text{ διαφέρουν σε ένα μόνο σύμβολο}\})$$



Σχήμα 1.7: Η $(6, 4)$-σχάρα.



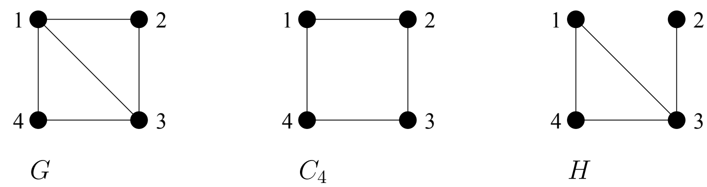
Σχήμα 1.8: Το γράφημα Q_i για $i = 0, 1, 2, 3$.

1.3 Αυτομορφισμοί γραφημάτων

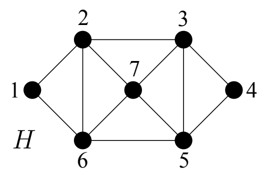
Ορισμός 1.14. Έστω γράφημα G. Καλούμε *αυτομορφισμό του* G κάθε ισομορφισμό του G στον εαυτό του. Συνεπώς κάθε αυτομορφισμός ενός γραφήματος είναι μια μετάθεση των κορυφών του (βλ. Σχήμα 1.9). Είναι εύκολο να δούμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο $V(G)$ είναι αυτομορφισμός. Επίσης η σύνθεση δύο αυτομορφισμών είναι αυτομορφισμός και η αντίστροφη συνάρτηση ενός αυτομορφισμού είναι επίσης αυτομορφισμός. Όλα αυτά συνηγορούν στο ότι το σύνολο των αυτομορφισμών ενός γραφήματος είναι ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων. Καλούμε την ομάδα αυτή *ομάδα αυτομορφισμών του* G και την συμβολίζουμε ως $\mathrm{Aut}(G)$.

Οι αυτομορφισμοί του γραφήματος G (βλ. Σχήμα 1.9) περιγράφονται από τις εξής μεταθέσεις: $\langle 1, 2, 3, 4\rangle$, $\langle 1, 4, 3, 2\rangle$, $\langle 3, 2, 1, 4\rangle$, $\langle 3, 2, 1, 2\rangle$. Ισχύει επίσης ότι $\mathrm{Aut}(C_4) = \{\langle 1, 2, 3, 4\rangle, \langle 1, 4, 3, 2\rangle, \langle 3, 2, 1, 4\rangle, \langle 2, 3, 4, 1\rangle, \langle 3, 4, 1, 2\rangle, \langle 4, 3, 1, 2\rangle, \langle 4, 1, 2, 3\rangle, \langle 2, 1, 4, 3\rangle\}$. Τέλος, για το τρίτο γράφημα του Σχήματος 1.9 ισχύει ότι $\mathrm{Aut}(H) = \{\langle 1, 2, 3, 4\rangle, \langle 4, 2, 3, 1\rangle\}$

Παρατήρηση 1.15. *Κάθε μετάθεση του $V(K_n)$ είναι αυτομορφισμός. Κατά συνέπεια, η ομάδα Aut(K_n) είναι ισόμορφη με την συμμετρική ομάδα S_n τάξης $n!$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\cong$ για τον ισομορφισμό ομάδων μπορούμε να πούμε ότι Aut$(K_n) \cong S_n$.*



Σχήμα 1.9: Τα γραφήματα G, C_4, και H.



Σχήμα 1.10: Το γραφήμα H.

Παρατηρούμε ότι για κάθε γράφημα G το $\mathrm{Aut}(G)$ είναι ισόμορφο με κάποια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n. Το παρακάτω θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Langrage σχετικά με την τάξη των υποομάδων μιας πεπερασμένης ομάδας.

Θεώρημα 1.16. Για κάθε γράφημα G, η τάξη $|\mathrm{Aut}(G)|$ της ομάδας των αυτομορφισμών του G είναι διαιρέτης του $n!$.

Ορισμός 1.17. Έστω G γράφημα. Ορίζουμε την σχέση ομοιότητας μεταξύ των κορυφών του ως εξής: Έστω $x, y \in V(G)$. Λέμε ότι οι κορυφές x και y είναι *όμοιες* αν $\sigma(x) = y$ για κάποιον αυτομορφισμό $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x \sim y$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ καλούνται *τροχιές* του G.

Για τα γραφήματα του Σχήματος 1.9, έχουμε ότι οι τροχιές του G είναι οι $\{1, 3\}$ και $\{2, 4\}$, το γράφημα C_4 έχει μόνο μια τροχιά, την $\{1, 2, 3, 4\}$ και το γράφημα G έχει τρείς τροχιές, τις $\{2\}$, $\{3\}$ και $\{1, 4\}$. Τέλος, οι τροχιές του γραφήματος H στο Σχήμα 1.10 είναι οι $\{1, 4\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$ και $\{7\}$.

Ορισμός 1.18. Καλούμε ένα γράφημα G *μεταβατικό ως προς τις κορυφές του* (ή απλά *μεταβατικό*) αν έχει μία μόνο τροχιά, δηλαδή, για κάθε ζεύγος κορυφών του x και y υπάρχει αυτομορφισμός $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ τέτοιος ώστε $\sigma(x) = y$.

Παρατήρηση 1.19. *Τα γραφήματα C_r ($r \geq 3$), K_r ($r \geq 1$) και $K_{r,r}$ ($r \geq 1$) είναι όλα μεταβατικά.*

1.4 Γενικεύσεις του ορισμού του γραφήματος

Ο ορισμός του γραφήματος που δώσαμε παραπάνω δεν είναι ο μοναδικός. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές και επεκτάσεις του και στην ενότητα αυτή θα δώσουμε τις κυριότερες από αυτές.

Ορισμός 1.20. Αν στον ορισμό του γραφήματος απαιτήσουμε οι ακμές να είναι *διατεταγμένα ζεύγη* κορυφών, τότε τα γραφήματα που ορίζουμε καλούνται *διατεταγμένα*. Αν αναθέσουμε σε κάθε ακμή ενός γραφήματος έναν αριθμό (*βάρος*) τότε καλούμε το γράφημα αυτό *βεβαρημένο*. Μπορούμε να επιτρέψουμε το σύνολο ακμών να περιέχει και μονοσύνολα τα οποία ορίζουν ακμές με ένα μόνο άκρο τις οποίες καλούμε *θηλιές*. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε το σύνολο ακμών ως πολυσύνολο όπου το ίδιο στοιχείο μπορεί να παρουσιαστεί περισσότερες από μια φορά. Στην περίπτωση που επιτρέπουμε θηλιές ή πολλαπλές ακμές καλούμε το G *πολυγράφημα* και οι ακμές που επαναλαμβάνονται καλούνται *πολυακμές*. Αν επιπλέον επιτρέψουμε στο σύνολο ακμών να περιέχει μη-κενά υποσύνολα του συνόλου των κορυφών του χωρίς περιορισμό στον πληθάριθμό τους, τότε καλούμε το G *υπεργράφημα* (για παραδείγματα βλ. Σχήμα 1.11). Τέλος, όλες οι παραπάνω παραλλαγές μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση όπου το V δεν είναι κατ' ανάγκη ένα πεπερασμένο σύνολο. Τα γραφήματα που ορίζονται με αυτό τον τρόπο καλούνται *άπειρα*.

Παρατήρηση 1.21. *Το γράφημα* $G = (\mathbb{N}, E)$ *όπου* $E = \{\{x, y\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} \mid y^2 = x^3\}$ *είναι ένα άπειρο γράφημα με άπειρες απομονωμένες κορυφές.*

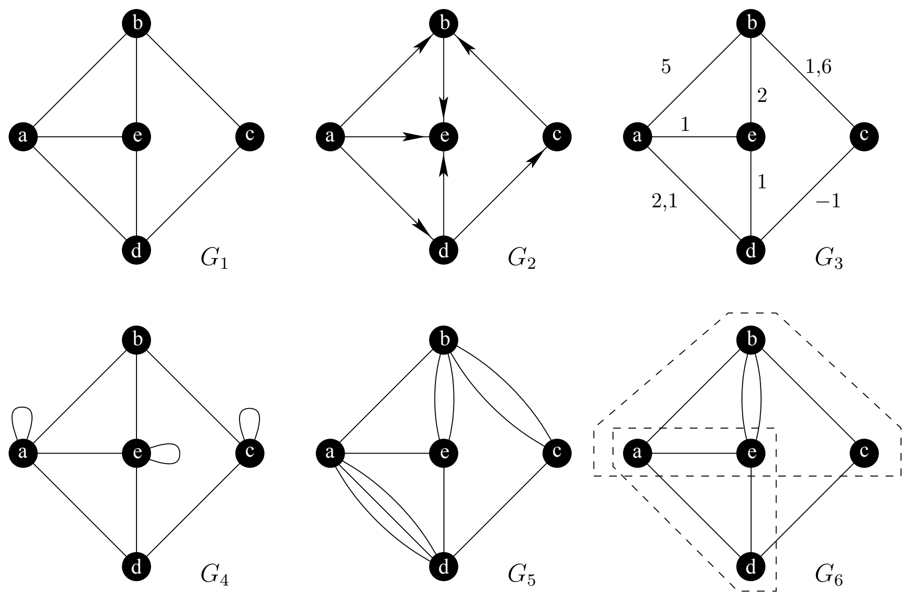
Παρατήρηση 1.22. *Το γράφημα* $G = (\mathbb{R}, E)$ *όπου* $E = \{\{x, y\} \in \binom{\mathbb{R}}{2} \mid y^2 + x^2 = 1\}$ *είναι ένα άπειρο γράφημα με μη-αριθμήσιμα άπειρες απομονωμένες κορυφές.*

Ασκήσεις Κεφαλαίου

1.1 (☆☆☆). Δείξτε ότι υπάρχουν 8 διαφορετικά (δηλ. μη-ισομορφικά μεταξύ τους) γραφήματα με ≤ 3 κορυφές.

1.2 (☆☆☆). Βρέστε ένα διάγραμμα για το γράφημα G' του Σχήματος 1.1 του οποίου οι γραμμές δεν τέμνονται μεταξύ τους και είναι όλες ευθύγραμμα τμήματα.

1.3 (☆☆☆). Αποδείξτε λεπτομερώς ότι η σχέση $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας (Παρατήρηση 1.7).



Σχήμα 1.11: Το γράφημα G_1, το διατεταγμένο γράφημα G_2, το βεβαρημένο γράφημα G_3, το γράφημα με θηλιές G_4, το πολυγράφημα G_5, καθώς και το υπεργράφημα G_6 έχουν ως σύνολο κορυφών το {a,b,c,d,e}. Το σύνολο των ακμών του G_1 είναι το $E(G_1) = \{\{\text{a,b}\}, \{\text{a,e}\}, \{\text{a,d}\}, \{\text{b,e}\}, \{\text{e,d}\}, \{\text{b,c}\}, \{\text{c,d}\}\}$. Το σύνολο ακμών του G_2 είναι το $E(G_2) = \{(\text{a,b}), (\text{a,e}), (\text{a,d}), (\text{b,e}), (\text{d,e}), (\text{c,b}), (\text{d,c})\}$, το σύνολο ακμών του G_3 είναι το $E(G_1)$ με βάρη 5, 1, 2,1, 2, 1, 1,6 και -1 αντίστοιχα, το σύνολο ακμών του G_4 είναι το $E(G_1) = E(G_1) \cup \{\{\text{a}\}, \{\text{e}\}, \{\text{c}\}\}$. Το πολυσύνολο ακμών του G_5 είναι το $E(G_1)$ όπου η ακμή {a,d} εμφανίζεται τρεις φορές και οι ακμές {b,e} και {b,c} εμφανίζονται δύο φορές. Τέλος το σύνολο των υπερακμών του υπεργραφήματος G_6 είναι το $E(G_1) \cup \{\{\text{a,e,d}\}, \{\text{a,b,c,e}\}\}$.

1.4 (☆☆☆). Βρέστε έναν πίνακα αναπαράστασης για το γράφημα Q_3 του Σχήματος 1.4.

1.5 (★☆☆). Δείξετε ότι το γράφημα που έχει ως πίνακα αναπαράστασης τον $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq r}$ με $a_{i,j} = (i+j) \pmod 2$ είναι ισόμορφο με το $K_{\lfloor r/2 \rfloor, \lceil r/2 \rceil}$.

1.6 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι τα γραφήματα, G_1, G_2, και G_3 του Σχήματος 1.3 είναι ισόμορφα.

1.7 (★☆☆). Ορίστε μια σχέση ισομορφισμού πινάκων έτσι ώστε δύο γραφήματα να είναι ισόμορφα αν και μόνο αν δύο οποιοιδήποτε πίνακες αναπαράστασής τους είναι ισόμορφοι.

1.8 (☆☆☆). Δώστε ένα διάγραμμα του γραφήματος το οποίο ως πίνακα απεικόνισης έχει τον $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 8}$ με $a_{i,j} = (i+j) \bmod 2$.

1.9 (☆☆☆). Έστω $\sigma : V(G) \to V(H)$ ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο γραφημάτων G και H. Τότε για κάθε $S \subseteq V(G)$, ισχύει ότι $\sigma(N_G(S)) = N_H(\sigma(S))$. (Για κάθε $S \subseteq V(G)$, ορίζουμε $\sigma(S) = \{\sigma(v) \mid v \in S\}$.)

1.10 (☆☆☆). Δείξτε ότι τα ζεύγη γραφημάτων του Σχήματος 1.4 είναι ισόμορφα.

1.11 (☆☆☆). Ένα γράφημα G είναι πλήρες αν και μόνο αν $m(G) = \binom{n(G)}{2}$.

1.12 (★☆☆). Κάθε (p,q)-*σχάρα* έχει ακριβώς $2\,p\,q - p - q$ ακμές.

1.13 (★☆☆). Για ποιες τιμές των a, b, r τα γραφήματα C_a και Q_b είναι τα ίδια με μια (r,r)-σχάρα;

1.14 (☆☆☆). Υπολογίστε τον αριθμό των ακμών του Q_r ως συνάρτηση του r.

1.15 (☆☆☆). Το γράφημα Q_r είναι μεταβατικό για κάθε $r \geq 0$.

1.16 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι το γράφημα του Petersen είναι μεταβατικό.

1.17 (☆☆☆). Βρείτε την ομάδα αυτομορφισμών για το γράφημα G του Σχήματος 1.1. Βρείτε επίσης όλες τις τροχιές του $\mathrm{Aut}(G)$.

1.18 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι για κάθε γράφημα G, $|\mathrm{Aut}(G)| = 1$ αν και μόνο αν το G περιέχει $n(G)$ τροχιές.

1.19 (☆☆☆). Δείξτε ότι το γράφημα που ορίζεται στην Άσκηση 1.8 είναι μεταβατικό.

1.20 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι αν A είναι ένας πίνακας αναπαράστασης ενός μεταβατικού γραφήματος, τότε όλες οι στήλες και όλες οι γραμμές του περιέχουν τον ίδιο αριθμό μηδενικών.

1.21 (☆☆☆)**.** Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει ένα πολυγράφημα n κορυφών με θηλιές αλλά χωρίς πολλαπλές ακμές;

1.22 (☆☆☆)**.** Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει ένα υπεργράφημα n κορυφών;

1.23 (☆☆☆)**.** Προσαρμόστε τον ορισμό του ισομορφισμού γραφημάτων σε όλες τις γενικεύσεις (πεπερασμένων) γραφημάτων που ορίστηκαν σε αυτήν την ενότητα.

1.24 (☆☆☆)**.** Επεκτείνετε την έννοια του πίνακα αναπαράστασης γραφήματος για όλες τις γενικεύσεις (πεπερασμένων) γραφημάτων που ορίστηκαν σε αυτήν την ενότητα. Υπάρχει κάποια περίπτωση για την οποία μια τέτοια επέκταση δεν είναι δυνατή;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

2.1 Πράξεις σε γραφήματα

Ορισμός 2.1. Έστω G γράφημα. Ορίζουμε ως *συμπλήρωμα* του G το γράφημα

$$\overline{G} = (V(G), \{\{x, y\} \mid x, y \in V(G) \text{ με } x \neq y\} \setminus E(G))$$

(το $\overline{G}$ έχει τις ίδιες κορυφές με το G αλλά έχει ακριβώς τις ακμές που δεν έχει το G). Δύο γραφήματα καλούνται *συμπληρωματικά* όταν το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.

Ορισμός 2.2. Έστω G γράφημα. Το *γραμμικό γράφημα του* G είναι το γράφημα

$$L(G) = (E(G), \{\{e_1, e_2\} \mid e_1, e_2 \in E(G) \text{ με } e_1 \neq e_2 \text{ και } e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}).$$

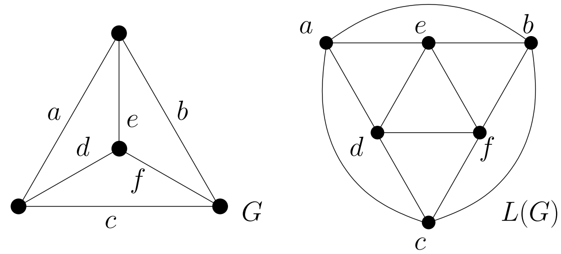
Ορισμός 2.3. Έστω G και H γραφήματα. Ορίζουμε το *γινόμενο των* G *και* H ως

$$G \times H = (V(G) \times V(H), \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \mid$$

$$(\{x_1, x_2\} \in E(G) \text{ και } y_1 = y_2) \text{ ή } (\{y_1, y_2\} \in E(H) \text{ και } x_1 = x_2)\}).$$

Ορίζουμε επίσης την *ένωση* και την *τομή* των G και H ως εξής:

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)) \text{ και } G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H)).$$

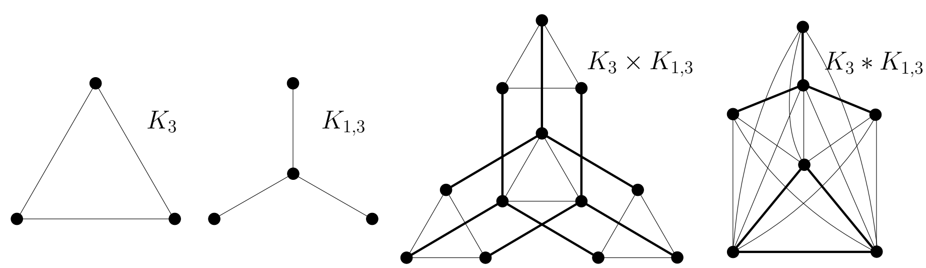


Σχήμα 2.1: Το γράφημα K_4 (τετράεδρο) και το γραμμικό του γράφημα $L(K_4)$ (οκτάεδρο).

Αν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ τότε τα γραφήματα G και H καλούνται *διακεκριμένα*. Επίσης, αν τα G και H είναι διακεκριμένα το γράφημα $G \cup H$ καλείται *διακεκριμένη ένωση των* G *και* H και συμβολίζεται ως $G + H$. Επίσης για διακεκριμένα γραφήματα G και H, ορίζουμε την *διακεκριμένη σύνδεσή τους* ως

$$G * H = \{V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{x, y\} \mid x \in V(G) \text{ και } y \in V(H)\}\}.$$

δηλαδή, το $G * H$ κατασκευάζεται από την διακεκριμένη ένωση των G και H αν επιπλέον συνδέσουμε όλες τις κορυφές του G με όλες τις κορυφές του H (οι συμβολισμοί $G+H$, $G \times H$ και $G*H$ προϋποθέτουν ότι τα G και H είναι διακεκριμένα).



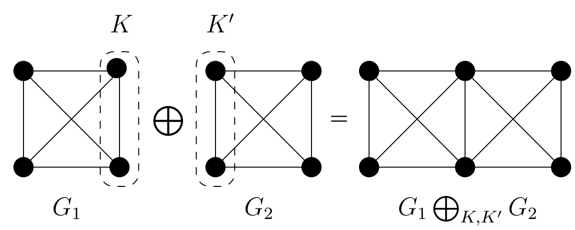
Σχήμα 2.2: Τα γράφηματα K_3, $K_{1,3}$, $K_3 \times K_{1,3}$ και $K_3 * K_{1,3}$.

Παρατήρηση 2.4. *Οι πράξεις* $\cup, \cap, +, \times$ *και* $*$ *μεταξύ γραφημάτων είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές.*

Ορισμός 2.5. Για κάθε ακέραιο $k \geq 0$ και κάθε γράφημα G, ορίζουμε

$$k \cdot G = \underbrace{G + \cdots + G}_{k \text{ φορές}},\ G^{[k]} = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k \text{ φορές}} \text{ και } G^{\langle k \rangle} = \underbrace{G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}.$$

Παρατήρηση 2.6. *Για κάθε γράφημα G, $0 \cdot G \simeq G^{\langle 0 \rangle} \simeq K_0$ (κενό γράφημα) και $G^{[0]} \simeq K_1$ (γράφημα με μία μόνο κορυφή).*



Σχήμα 2.3: Η πράξη του αθροίσματος κλικών.

Ορισμός 2.7. Έστω G_1 και G_2 γραφήματα και έστω K και K' κλίκες του G_1 και του G_2 ίσου μεγέθους. Καλούμε *άθροισμα κλικών των G_1 και G_2 σε σχέση με τις κλίκες K και K'*, το γράφημα που προκύπτει αν ταυτίσουμε μια προς μία τις κορυφές των K και K' και το συμβολίζουμε με $G \oplus_{K,K'} H$ ή απλά $G \oplus H$.

Παρατήρηση 2.8. *Το γράφημα που προκύπτει από το άθροισμα δύο κλικών δεν είναι μοναδικό. Ανάλογα με την επιλογή των κορυφών που θα ταυτίσουμε από τις δύο κλίκες μπορεί να προκύψουν διαφορετικά μη ισόμορφα γραφήματα.*

2.2 Τοπικοί μετασχηματισμοί

Συχνά παρουσιάζεται η ανάγκη να κάνουμε κάποια μετατροπή σε ένα γράφημα. Για τον λόγο αυτό θα ορίσουμε μια σειρά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, η διαδοχική εφαρμογή των οποίων θα μας επιτρέψει να περιγράφουμε τέτοιες μετατροπές. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι τοπικοί και αφορούν κορυφές ή ακμές.

Ορισμός 2.9. Έστω γράφημα G. Λέμε ότι μια ακμή $e \in E(G)$ *πρόσκειται* σε μια κορυφή v αν $v \in e$, δηλαδή αν η v είναι άκρο της e. Αν $v \in V(G)$ τότε θα συμβολίζουμε με $E_G(v)$ το σύνολο τον ακμών του $E(G)$ που πρόσκεινται στην v. Επίσης για $F \subseteq E(G)$, ορίζουμε $V(F) = \cup_{e \in F}\, e$ (το σύνολο των κορυφών που είναι άκρα ακμών στο E).

Ορισμός 2.10. Έστω G γράφημα και έστω $S \subseteq V(G)$, $v \in V(G)$, $F \subseteq E(G)$ και $e = \{x, y\} \in E(G)$. Ορίζουμε

1. $G \backslash S = (V(G) \backslash S, \{\{x, y\} \in E(G) \mid \{x, y\} \cap S = \emptyset\})$,

2. $G\backslash v = G\backslash\{v\}$,
3. $G\backslash F = (V(G), E(G)\backslash F)$ και
4. $G\backslash e = G\backslash\{e\}$.

(Οι ορισμοί των $G\backslash\{x,y\}$ και $G\backslash e$ εμπεριέχουν κάποια ασάφεια για το πότε τα $\{x,y\}$ και e θα είναι μια ακμή και πότε ένα σύνολο με δύο κορυφές. Για τον λόγο αυτό, επιμένουμε ότι στην περίπτωση του $G\backslash\{x,y\}$, το $\{x,y\}$ θα είναι το σύνολο των δύο κορυφών x και y και στην περίπτωση του $G\backslash e$ το e θα είναι η ακμή και όχι το σύνολο που περιέχει τα άκρα της.)

Ορισμός 2.11. Έστω G γράφημα και έστω κορυφή $v \in V(G)$, στην οποία πρόσκεινται ακριβώς δύο ακμές $\{x,v\}$ και $\{v,y\}$ $(x \neq y)$. Λέμε τότε ότι το γράφημα

$$G/v = (V(G)\backslash\{v\}, E(G)\backslash\{\{x,v\},\{v,y\}\} \cup \{\{x,y\}\})$$

προκύπτει από τη *διάλυση* της κορυφής v στο G, δηλαδή βγάζουμε την κορυφή v και ενώνουμε τις γειτονικές της κορυφές με μία ακμή (αν η ακμή αυτή δεν υπάρχει ήδη στο γράφημα).

Ορισμός 2.12. Η αντίστροφη πράξη της διάλυσης, δηλαδή η αντικατάσταση μιας ακμής e από ένα μονοπάτι μήκους 2 καλείται *υποδιαίρεση της* e. Αν ένα γράφημα G προκύπτει μετά από διαδοχικές υποδιαιρέσεις ακμών σε ένα γράφημα H, τότε το G καλείται *υποδιαίρεση του* H (για πληρότητα θεωρούμε ότι κάθε γράφημα είναι υποδιαίρεση του εαυτού του).

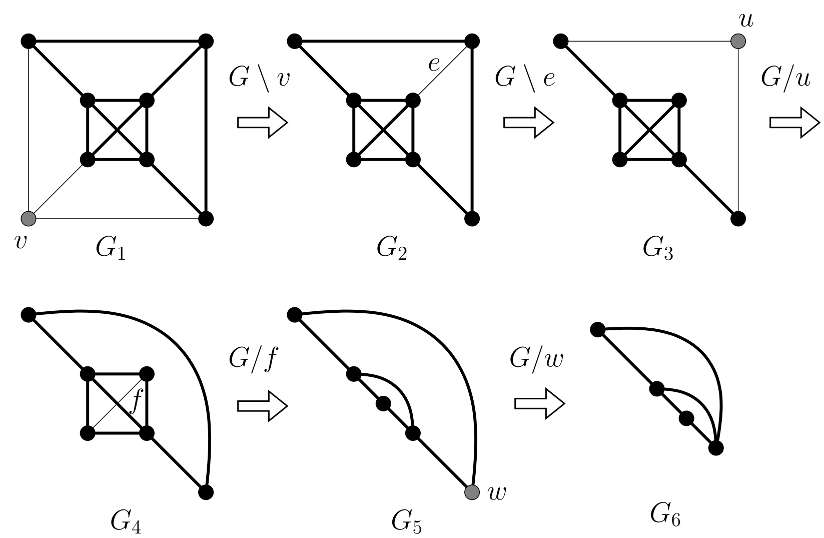
Ορισμός 2.13. Έστω G γράφημα και έστω $e = \{x,y\} \in E(G)$. Έστω επίσης μια κορυφή $v_{\text{νέα}}$ που δεν ανήκει στο $V(G)$. Τότε λέμε τότε ότι το γράφημα $G/e = (V', E')$ όπου

$$\begin{aligned} V' &= V(G)\backslash\{x,y\} \cup \{v_{\text{νέα}}\} \text{ και} \\ E' &= E(G)\backslash E_G(x)\backslash E_G(y) \cup \{\{v_{\text{νέα}}, u\} \mid u \in N_G(\{x,y\})\}, \end{aligned}$$

προκύπτει από τη *σύνθλιψη* της ακμής $e = \{x,y\}$ στο G (δηλαδή αφαιρούμε τις κορυφές x και y, καθώς και τις προσκείμενες σε αυτές ακμές και προσθέτουμε μια νέα κορυφή $v_{\text{νέα}}$ την οποία συνδέουμε με τη γειτονιά του $\{x,y\}$ στο G).

Παρατήρηση 2.14. *Η διάλυση μιας κορυφής μπορεί να εξομοιωθεί από τη σύνθλιψη μιας από τις προσκείμενες ακμές της.*

Μόλις ορίσαμε τέσσερις μετασχηματισμούς σε γραφήματα που αφορούν κορυφές ή ακμές. Τους συνοψίζουμε στον πίνακα του Σχήματος 2.5 και τους ομαδοποιούμε στο σύνολο $\mathcal{T} = \{\backslash v, /v, \backslash e, /e\}$.



Σχήμα 2.4: Διαδοχικές εφαρμογές των μετασχηματισμών του συνόλου $\mathcal{T} = \{\backslash v, /v, \backslash e, /e\}$.

Μετασχηματισμοί με κορυφές		Μετασχηματισμοί με ακμές	
$\backslash v$:	αφαίρεση κορυφής	$\backslash e$:	αφαίρεση ακμής
$/v$:	διάλυση κορυφής	$/e$:	σύνθλιψη ακμής.

Σχήμα 2.5: Οι μετασχηματισμοί του συνόλου $\mathcal{T} = \{\backslash v, /v, \backslash e, /e\}$.

2.3 Σχέσεις μεταξύ γραφημάτων

Ορισμός 2.15. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ με $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Έστω επίσης G και H γραφήματα. Λέμε ότι $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ αν είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε το γράφημα H, ξεκινώντας από το γράφημα G εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς από το σύνολο $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.16. *Για κάθε μη κενό υποσύνολο $\mathcal{A}$ του $\mathcal{T}$, η σχέση $\subseteq_{\mathcal{A}}$ είναι σχέση διάταξης.*

Ορισμός 2.17. Ορίζουμε τις εξής σχέσεις μερικής διάταξης σε γραφήματα:

1. Αν $\mathcal{A} = \{\backslash e, \backslash v\}$, τότε αντί για $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε εναλλακτικά $\subseteq_{\upsilon\pi} G$, ή πιο απλά $H \subseteq G$, και λέμε ότι το H είναι *υπογράφημα* του G.

2. Αν $\mathcal{A} = \{\backslash v\}$, τότε αντί για $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε εναλλακτικά $\subseteq_{\epsilon\nu} G$ και

λέμε ότι το H είναι *εναγόμενο υπογράφημα* του G.

3. Αν $\mathcal{A} = \{\backslash e\}$, τότε αντί για $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε εναλλακτικά $\subseteq_{\pi\alpha} G$ και λέμε ότι το H είναι *παραγόμενο υπογράφημα* του G.

4. Αν $\mathcal{A} = \{\backslash e, \backslash v, /v\}$, τότε αντί για $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε εναλλακτικά $\leq_{\tau\pi} G$ και λέμε ότι το H είναι *τοπολογικό έλασσον του* G.

5. Αν $\mathcal{A} = \{\backslash e, \backslash v, /e\}$, τότε αντί για $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε εναλλακτικά $\leq_{\epsilon\lambda} G$ και λέμε ότι το H είναι *έλασσον* του G.

Για όλες τις παραπάνω σχέσεις ορίζουμε την γνήσιά τους μορφή $\subset$ και $<$ όταν τα συγκρινόμενα γραφήματα δεν είναι ισόμορφα.

Παρατήρηση 2.18. *Ο τρισδιάστατος κύβος περιέχει το $C_4 \cup C_4$ ως παραγόμενο γράφημα. Επίσης το γράφημα του Petersen περιέχει το $C_5 \cup C_5$ ως παραγόμενο γράφημα.*

Ορισμός 2.19. Έστω G γράφημα και έστω $S \subseteq V(G)$. Τότε ορίζουμε ως $G[S] = G\backslash(V(G)\backslash S)$. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε

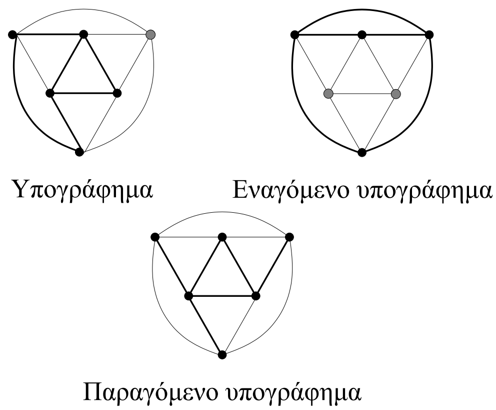
$$G[S] = (S, \{\{v,u\} \mid \{v,u\} \subseteq S \text{ και } \{v,u\} \in E(G)\}).$$

Παρατηρούμε ότι $G[S] \subseteq_{\epsilon\nu} G$ και λέμε ότι το $G[S]$ είναι το υπογράφημα του G που *ενάγεται* από το σύνολο κορυφών S. Αν $F \subseteq E(G)$, τότε ορίζουμε $G[F] = (V(F), F)$ και λέμε ότι το $G[F]$ είναι το υπογράφημα του G που *ενάγεται* από το σύνολο ακμών F.

Παρατήρηση 2.20. *Αν G και H είναι γραφήματα τότε $H \subseteq_{\epsilon\nu} G \Leftrightarrow \overline{H} \subseteq_{\epsilon\nu} \overline{G}$.*

Παρατήρηση 2.21. *Αν το γράφημα H είναι εναγόμενο ή παραγόμενο υπογράφημα του γραφήματος G, τότε είναι και υπογράφημά του (δηλαδή: $H \subseteq_{\pi\alpha} G \Rightarrow H \subseteq G$ και $H \subseteq_{\epsilon\nu} G \Rightarrow H \subseteq G$). Επίσης, αν $H \subseteq G$ τότε $H \leq_{\tau\pi} G$ και $H \leq_{\epsilon\lambda} G$. Η παρατήρηση αυτή δεν ισχύει για τη σχέση τοπολογικού ελάσσονος ή ελάσσονος. Παρ' όλα αυτά, ισχύει ότι $H \leq_{\tau\pi} G \Rightarrow H \leq_{\epsilon\lambda} G$.*

Οι σχέσεις γραφημάτων που ορίσαμε χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Τις σχέσεις υπογραφήματος ($\subseteq$, $\subseteq_{\epsilon\nu}$, $\subseteq_{\pi\alpha}$) και τις τοπολογικές σχέσεις ($\leq_{\tau\pi}$, $\leq_{\epsilon\lambda}$). Οι σχέσεις αυτές δεν είναι οι μόνες που έχουν μελετηθεί. Θεωρώντας διαφορετικά υποσύνολα του $\mathcal{T} = \{\backslash v, /v, \backslash e, /e\}$ μπορούμε να ορίσουμε κι άλλες. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε εμπλουτίζοντας το σύνολο $\mathcal{T}$ με περισσότερους μετασχηματισμούς.



Σχήμα 2.6: Σχέσεις υπογραφήματος.

Ορισμός 2.22. Έστω $\mathcal{G}$ μια κλάση γραφημάτων και έστω μια μερική διάταξη $\sqsubseteq \in \{\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \leq_{\tau\pi}, \leq_{\epsilon\lambda}\}$. Λέμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι *κλειστή ως προς την* ”$\sqsubseteq$” αν $G \in \mathcal{G}$ και $G' \sqsubseteq G$ συνεπάγεται ότι $G' \in \mathcal{G}$. Επιπλέον, αν η $\mathcal{G}$ είναι κλειστή ως προς την $\subseteq$ τότε αποκαλείται *μονότονη*, ενώ εάν είναι κλειστή ως προς την $\subseteq_{\epsilon\nu}$ αποκαλείται *κληρονομική*.

Ασκήσεις Κεφαλαίου

2.1 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G, $G \simeq \overline{G} \Rightarrow n(G) = 0$ ή $1 \pmod 4$.

2.2 (☆☆☆). Αποδείξτε (αυστηρά) ότι για $n \geq 3$, το γράφημα C_n είναι ισόμορφο με το γραμμικό του γράφημα $L(C_n)$.

2.3 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε γράφημα G, $m(L(G)) \leq \binom{m(G)}{2}$.

2.4 (★☆☆). Δείξτε ότι το $L(K_{3,3})$ είναι αυτοσυμπληρωματικό.

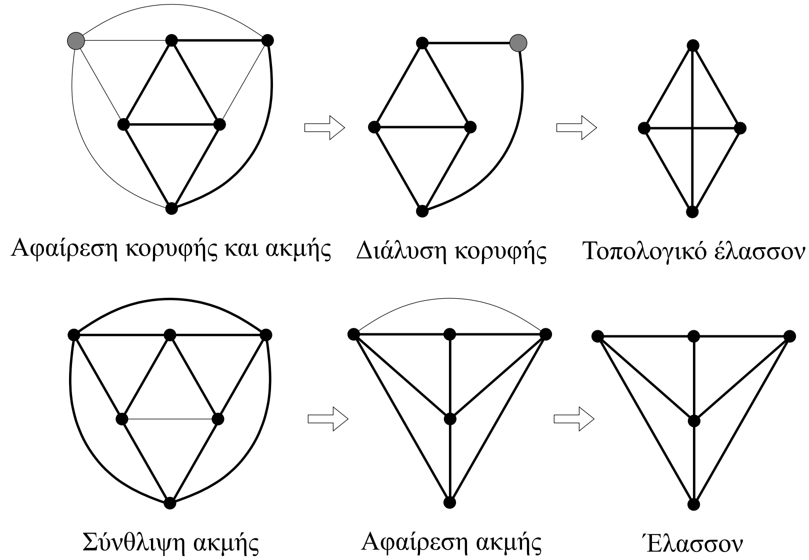
2.5 (☆☆☆). Δείξτε ότι $\overline{K_{p,q} + K_{r,s}} \simeq (K_p + K_q) * (K_r + K_s)$.

2.6 (☆☆☆). $\overline{K}_{p,q} \simeq K_p + K_q$, $K_r^{(m)} \simeq K_{m \cdot r}$.

2.7 (☆☆☆). Δείξτε ότι το γράφημα $P_p \times P_q$ είναι μια (p, q)-σχάρα.

2.8 (☆☆☆). Δείξτε ότι $L(K_4) \simeq (2 \cdot K_1)^{(3)}$.

2.9 (☆☆☆). Δείξτε ότι $Q_r \simeq K_2^{[r]}$.



Σχήμα 2.7: Τοπολογικές σχέσεις

2.10 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G, $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\overline{G})$.

2.11 (☆☆☆). Περιγράψτε πλήρως την κλάση γραφημάτων $\mathcal{G} = \{G \mid G \simeq L(G)\}$.

2.12 (☆☆☆). Δείξτε ότι αν το γράφημα G είναι μεταβατικό, τότε , για κάθε $k \geq 1$, τα γραφήματα $k \cdot G, G^{[k]}$ και $G^{(k)}$ είναι επίσης μεταβατικά.

2.13 (☆☆☆). Εξετάστε την ορθότητα της πρότασης: *«αν το γράφημα G είναι μεταβατικό, τότε και το γράφημα $L(G)$ θα είναι μεταβατικό».*

2.14 (☆☆☆). Έστω το γράφημα $G_{k,r}$ όπου το $V(G_{k,r})$ περιέχει όλες τις λέξεις μήκους r με σύμβολα από ένα αλφάβητο k συμβόλων και $\{v, u\} \in E(G_{k,r})$ αν οι λέξεις v και u διαφέρουνε σε μια μόνο θέση. Αποδείξτε ότι $G_{k,r} \simeq K_k^{[r]}$.

2.15 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι $G \simeq L(G)$ αν και μόνο αν $G = C_{i_1} + \cdots + C_{i_r}$ όπου $i_j \geq 3$ για $1 \leq j \leq r$.

2.16 (☆☆☆). Μετασχηματίστε το γράφημα G_1 του Σχήματος 2.4 στο γράφημα G_5 χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις από το σύνολο $\{\backslash e, /v\}$ και χρησιμοποιώντας μόνο δύο φορές διάλυση κορυφής.

2.17 (☆☆☆). Βρείτε ένα γράφημα G το οποίο να περιέχει μια ακμή e και μια κορυφή v τέτοιες ώστε $G\backslash v \simeq G/v$ και $G\backslash e \simeq G/e$.

2.18 (☆☆☆). Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός συνθλίψεων, ικανός να συρρικνώσει το γράφημα G του Σχήματος 1.1 στο K_1;

2.19 (☆☆☆). Έστω γράφημα G, n κορυφών, το οποίο περιέχει ως εναγόμενο υπογράφημα ένα δέντρο T με περισσότερες από $n-k$ κορυφές για $k \geq 1$. Δείξτε ότι το G δεν περιέχει ως τοπολογικό έλασσον την διακεκριμένη ένωση k τριγώνων.

2.20 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε $q \geq 2$, ο υπερκύβος Q_q περιέχει ως παραγόμενο υπογράφημα ένα κύκλο με 2^q κορυφές.

2.21 (☆☆☆). Δείξτε ότι το γράφημα G_1 του Σχήματος 2.4 περιέχει το K_5 ως έλασσον.

2.22 (☆☆☆). Ποιό είναι το μικρότερο k για το οποίο το $K_{2,4}$ είναι τοπολογικό έλασσον της $(k \times k)$-σχάρας;

2.23 (☆☆☆). Πόσες διαφορετικές σχέσεις διάταξης γραφημάτων μπορούμε να ορίσουμε από τα υποσύνολα του $\mathcal{T}$;

2.24 (☆☆☆). Δείξτε ότι ο τροχός $W_r = K_1 * C_r$ είναι έλασσον της $(n \times n)$-σχάρας για $r \geq 3(n-2) + 2\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor (n-3)$.

2.25 (☆☆☆). Δείξτε ότι $K_{1,3} + K_{1,3} \subseteq_{\pi\alpha} Q_3$ (για το γράφημα Q_3, βλ. Σχήμα 1.4).

2.26 (☆☆☆). Δείξτε ότι $K_{1,4} \leq_{\epsilon\lambda} Q_3$ αλλά $K_{1,4} \not\leq_{\tau\pi} Q_3$.

2.27 (☆☆☆). Δείξτε ότι το γράφημα του Petersen (βλ. Σχήμα 1.4) περιέχει ως τοπολογικό έλασσον το $K_{3,3}$ αλλά όχι το K_5. Επίσης δείξτε ότι το ίδιο γράφημα περιέχει ως έλασσον το K_5.

2.28 (☆☆☆). Ποιό είναι το μικρότερο r για το οποίο η (r, r)-σχάρα περιέχει το Q_3 ως τοπολογικό έλασσον;

2.29 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $K_{1,r} \leq_{\upsilon\pi} G \Leftrightarrow K_{1,r} \leq_{\tau\pi} G$.

2.30 (☆☆☆). Ποιό είναι το μικρότερο r για το οποίο η (r, r)-σχάρα περιέχει το $L(K_4)$ ως έλασσον;

2.31 (☆☆☆). Η (r, r)-σχάρα περιέχει τα $K_{1,1+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-1)}$ και $K_{2,1+\lfloor \frac{r}{3} \rfloor (r-1)}$ ως ελάσσονα, αλλά δεν περιέχει το $K_{3,r}$ ως έλασσον για $r \geq 3$.

2.32 (☆☆☆). Δείξτε ότι οι κλάσεις $\mathcal{G}_1 = \{C_r \mid r \geq 3\}$, $\mathcal{G}_2 = \{P_i \mid i \geq 0\}$ και $\mathcal{G}_3 = \{Q_r \mid r \geq 0\}$ είναι κλειστές ως προς τις "$\leq_{\epsilon\lambda}$" και "$\leq_{\tau\pi}$" αλλά όχι ως προς τις "$\subseteq_{\upsilon\pi}$", "$\subseteq_{\pi\alpha}$" και "$\subseteq_{\epsilon\nu}$".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΘΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ

3.1 Ελάχιστος, μέσος και μέγιστος Βαθμός

Ορισμός 3.1. Ορίζουμε ως *βαθμό* μιας κορυφής v ενός γραφήματος G την ποσότητα

$$\deg_G(v) = |N_G(v)|.$$

Ο *ελάχιστος και ο μέγιστος βαθμός* ενός γραφήματος G ορίζονται ως

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V(G)\} \quad \text{και} \quad \Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

αντίστοιχα. Η ποσότητα

$$d(G) = \frac{1}{n(G)} \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$$

καλείται *μέσος βαθμός* του G και η ποσότητα $\epsilon(G) = \frac{m(G)}{n(G)}$ καλείται *πυκνότητα* του G. Αν σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές έχουν βαθμό r τότε καλούμε το γράφημα αυτό r-*κανονικό* ή απλά *κανονικό*.

Παρατήρηση 3.2. *Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε*

$$\Delta(G) = \max\{k \mid K_{1,k} \subseteq_{\upsilon\pi} G\}.$$

Θεώρημα 3.3. Έστω G γράφημα. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \cdot m(G)$.
2. $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.
3. $\epsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$.

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε ακμή αντιστοιχούν δύο κορυφές και σε κάθε κορυφή v αντιστοιχούν $\deg_G(v)$ ακμές. Οι υπόλοιπες δύο σχέσεις προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς. □

Λήμμα 3.4. Κάθε γράφημα περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.

Απόδειξη. Έστω V_1 (V_2) οι κορυφές του $V(G)$ με περιττό (άρτιο) βαθμό. Από το Θεώρημα 3.3, έχουμε ότι

$$2 \cdot m(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) + \sum_{v \in V_2} \deg_G(v),$$

πράγμα που σημαίνει ότι το $\sum_{v \in V_1} \deg_G(v)$ είναι άρτιος αριθμός και άρα το $|V_1|$ είναι αναγκαστικά άρτιος. □

Θεώρημα 3.5 (Kőnig, 1916)**.** Κάθε γράφημα G είναι εναγόμενο υπογράφημα κάποιου $\Delta(G)$-κανονικού γραφήματος.

Απόδειξη. Για κάθε γράφημα G ορίζουμε την ποσότητα

$$z(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - \deg_G(v))}{n(G)}.$$

(Η ποσότητα $z(G)$ αποτελεί μέτρο του πόσο απέχει το G από το να είναι $\Delta(G)$-κανονικό.) Έστω $r = \Delta(G)$ και έστω ότι το G δεν είναι r-κανονικό. Θεωρούμε το γράφημα $G_1 = G + G'$, όπου G' ένα ξένο και ισόμορφο αντίγραφο του G, και προσθέτουμε για κάθε κορυφή $u \in V(G)$ την ακμή $\{u, \sigma(u)\}$ αν $\deg_G(u) < r$ (σ ο ισομορφισμός των G, G'). Παρατηρούμε ότι $G \subseteq_{\epsilon\nu} G_1$ και $z(G_1) < z(G)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ίδιο μετασχηματισμό καταλήγουμε σε ένα γράφημα G_m όπου $G \subseteq_{\epsilon\nu} G_m$ και $z(G_m) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το G_m είναι r-κανονικό και άρα είναι το γράφημα που ζητάμε. □

Παρατήρηση 3.6. *Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι: $\epsilon(G) \geq \frac{\delta(G)}{2}$. Παρ' όλα αυτά, το παρακάτω λήμμα δείχνει ότι η διαφορά μεταξύ πυκνότητας και ελάχιστου βαθμού μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη.*

Λήμμα 3.7. Για κάθε $\delta, \epsilon \geq 0$, υπάρχουν άπειρα γραφήματα για τα οποία ο ελάχιστος βαθμός είναι το πολύ δ και η πυκνότητα είναι το λιγότερο ϵ.

Απόδειξη. Έστω το γράφημα $G_n = K_{\delta+1} + K_{n-\delta-1}$. Παρατηρούμε ότι $\delta(G) \leq \delta$ και ότι $\epsilon(G_n) = \frac{\binom{\delta+1}{2}+\binom{n-\delta-1}{2}}{n}$. Αφού, $\lim_{n\to\infty} \epsilon(G_n) = \infty$ θα υπάρχουν άπειρες τιμές του n για τις οποίες $\epsilon(G_n) \geq \epsilon$. □

3.2 Εκφυλισμός και πυκνότητα

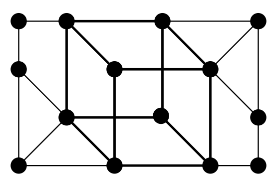
Παρά το Λήμμα 3.7, η πυκνότητα ενός γραφήματος μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη υπογραφημάτων με μεγάλο ελάχιστο βαθμό. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.8. Ο *εκφυλισμός* ενός γραφήματος G ορίζεται ως εξής:

$$\delta^*(G) = \max\{k \mid \ G \text{ περιέχει ένα υπογράφημα } H \text{ με } \delta(H) = k\ \}.$$

Η έννοια του εκφυλισμού εμφανίστηκε για πρώτη φορά στις [20] και [27]. Ο όρος εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην [16].

Παρατήρηση 3.9. *Έστω G και H γράφηματα. Τότε $H \subseteq_{\upsilon\pi} G \Rightarrow \delta^*(H) \leq \delta^*(G)$.*



Σχήμα 3.1: Ένα γράφημα G με $\delta^*(G) = 3$.

Λήμμα 3.10. Για κάθε γράφημα G, $\delta^*(\overline{G}) \leq n - 1 - \delta^*(G)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η υπόθεση $\delta^*(\overline{G}) \geq n - \delta^*(G)$ οδηγεί σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, το G περιέχει ένα υπογράφημα H, τέτοιο ώστε $\delta(\overline{H}) \geq n - \delta^*(G)$ πράγμα που σημαίνει ότι όλες οι κορυφές του H έχουν βαθμό το πολύ $n-1-(n-\delta^*(G)) = \delta^*(G)-1$ στο G. Επίσης, η σχέση $\delta(\overline{H}) \geq n-\delta^*(G)$ συνεπάγεται ότι $n(\overline{H}) = n(H) \geq n-\delta^*(G)+1$. Έστω τώρα H' ένα υπογράφημα του G τετοιο ώστε $\delta(H') \geq \delta^*(G)$. Παρατηρούμε ότι $n(H') \geq \delta^*(G)+1$. Αφού $n(H) + n(H') > n$, έχουμε ότι τα H και H' έχουνε κάποια κοινή κορυφή v. Αφού $v \in H'$, $\deg_G(v) \geq \deg_{H'}(v) \geq \delta(H') \geq \delta^*(G)$. Αυτό όμως αντιφάσκει με το γεγονός ότι $v \in H$ αφού τότε $\deg_G(v) \leq \delta^*(G) - 1$. □

Θεώρημα 3.11. Κάθε γράφημα G περιέχει κάποιο υπογράφημα H όπου $\delta(H) \geq \epsilon(G)$.

Απόδειξη. Ουσιαστικά πρέπει να αποδείξουμε ότι $\delta^*(G) \geq \epsilon(G)$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του G. Προφανώς, το θεώρημα ισχύει αν $n(G) = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε γράφημα με $< n$ κορυφές. Έστω γράφημα G με $n(G) = n$. Από τον ορισμό του $\delta(G)$ έχουμε ότι $\delta(G) \leq \delta^*(G)$. Έστω v κορυφή του G με βαθμό $\deg_G(v) \leq \delta^*(G)$ και έστω $G' = G \backslash v$. Παρατηρούμε ότι $|E(G')| \geq m(G) - \delta^*(G)$ και $|V(G')| = n(G) - 1$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\delta^*(G') \geq \epsilon(G') = \frac{|E(G')|}{|V(G')|} \geq \frac{m(G) - \delta^*(G)}{n(G) - 1}.$$

Παρατηρούμε ότι $G' \subseteq_{\upsilon\pi} G$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.9, καταλήγουμε ότι

$$\delta^*(G) \geq \frac{m(G) - \delta^*(G)}{n(G) - 1}.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο. □

Η παραπάνω εξάρτηση του εκφυλισμού από την πυκνότητα παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Erdős στην [7].

Πόρισμα 3.12. Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι: $\delta^*(G) \geq \max\{\epsilon(G), \delta(G)\}$.

Στην [8] δόθηκε ένας εναλλακτικός ορισμός του εκφυλισμού, παίρνοντας το ελάχιστο κάποιας μεγιστικής παραμέτρου (σε αντίθεση με τον Ορισμό 3.8 που παίρνουμε το μέγιστο μίας ελαχιστικής παραμέτρου). Ο ορισμός αυτός δόθηκε στα πλαίσια του *χρωματισμού* των κορυφών του γραφήματος που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 8. Στο Θεώρημα 3.15 διατυπώνεται ο ορισμός και αποδεικνύεται η ισοδυναμία του με τον Ορισμό 3.8. Ξεκινάμε με τις ακόλουθες έννοιες.

Ορισμός 3.13. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. *Γραμμική διάταξη* των κορυφών του G καλείται κάθε διάταξη του συνόλου V μεγέθους $|V|$. Το σύνολο των γραμμικών διατάξεων του G το συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(G)$.

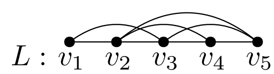
Ορισμός 3.14. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $L = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ γραμμική διάταξη των κορυφών του, όπου $n = |V(G)|$. Ο *οπισθόβαθμος* της κορυφής $v_i \in V$ ως προς την L ισούται με:

$$\overleftarrow{\delta}_L(v_i) = \deg_{G[\{v_1,\ldots,v_i\}]}(v_i)$$

είναι δηλαδή το πλήθος των κορυφών με τις οποίες η v_i συνδέεται με ακμή και βρίσκονται πριν από τη v_i στην L. Θεωρούμε επίσης την ποσότητα:

$$\overleftarrow{\delta}(L) = \max\{\overleftarrow{\delta}_L(v) \mid v \in V\}$$

την οποία καλούμε *πλάτος* της γραμμικής διάταξης L.



Σχήμα 3.2: Μία γραμμική διάταξη των κορυφών ενός γραφήματος. Ο οπισθόβαθμος της v_3 είναι 2 ενώ το πλάτος της L είναι 3.

Το παρακάτω θεώρημα εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην [21].

Θεώρημα 3.15. Έστω γράφημα G με n κορυφές. Ισχύει ότι:

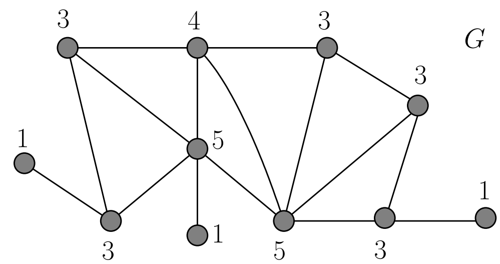
$$\delta^*(G) = \min\{k \mid \text{ Υπάρχει } L \in \mathcal{L}(G) \text{ με } \overleftarrow{\delta}(L) = k\ \}.$$

Απόδειξη. Έστω $L = (v_1, \ldots, v_n)$ διάταξη των κορυφών του G τέτοια ώστε $\overleftarrow{\delta}(L) \leq k$ και έστω $H \subseteq_{\upsilon\pi} G$ τέτοιο ώστε $\delta(H) > k$. Αν v_i είναι η τελευταία κορυφή του H στη διάταξη L τότε $H \subseteq_{\upsilon\pi} G_i$, όπου $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ και $\deg_{G_i}(v_i) \geq \deg_H(v_i) \geq \delta(H) > k$, άτοπο. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε διάταξη L των κορυφών του G υπάρχει μια κορυφή v_i για την οποία $\overleftarrow{\delta}_L(v_i) > k$. Καλούμε κάθε τέτοια κορυφή *πλούσια*. Από όλες τις διατάξεις των κορυφών του G έστω $L_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ αυτή για την οποία η τελευταία πλούσια κορυφή v_i εμφανίζεται το νωρίτερο δυνατόν. Ισχυριζόμαστε ότι τότε όλες οι κορυφές που εμφανίζονται πριν την v_i στην L_0 έχουν βαθμό αυστηρά μεγαλύτερο του k στο γράφημα G_i. Πράγματι αν μια κορυφή $v_j, j < i$, έχει βαθμό το πολύ k στο G_i, τότε μπορούμε να την επανατοποθετήσουμε ανάμεσα στην v_i και στην v_{i+1} και να φτιάξουμε μια νέα διάταξη στην οποία η τελευταία πλούσια κορυφή να εμφανίζεται νωρίτερα, άτοπο. Καταλήγουμε ότι $\delta(G_i) > k$ και άρα $\delta^*(G) > k$. □

3.3 Γραφικές ακολουθίες

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την αλληλεξάρτηση των βαθμών ενός γραφήματος. Για τον λόγο αυτό θα θεωρήσουμε διατάξεις βαθμών σε φθίνουσες ακολουθίες. Όλες οι ακολουθίες σε αυτή την ενότητα είναι ακολουθίες μη αρνητικών ακέραιων.

Ορισμός 3.16. Καλούμε μια ακολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ *γραφική* αν υπάρχει γράφημα G και μια 1–1 και επί απεικόνιση $\sigma : V(G) \to \{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε $\deg_G(v) = d_{\sigma(v)}$. Λέμε επίσης ότι ένα τέτοιο γράφημα *πραγματοποιεί* την ακολουθία α.



Σχήμα 3.3: Η γραφική ακολουθία που αντιστοιχεί στο γράφημα G είναι η $[5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]$.

Θεώρημα 3.17. Μια φθίνουσα ακολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ με $n \geq 2$ και $d_1 \geq 1$ είναι *γραφική* αν και μόνο αν η ακολουθία

$$\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$$

είναι γραφική.

Απόδειξη. Έστω ότι η $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ είναι γραφική ακολουθία. Μεταξύ όλων των γραφημάτων που την πραγματοποιούν, έστω G με $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\delta_G(v_i) = d_i, 1 \leq i \leq n$ ένα γράφημα για το οποίο η τιμή της συνάρτησης $f(G) = \sum_{v \in N_G(v_1)} \deg(v)$sedΚάτι λείπει στον ορισμό! είναι η μέγιστη δυνατή. Ισχυριζόμαστε ότι αν διατάξουμε κατά φθίνουσα σειρά τους βαθμούς των κορυφών στην γειτονιά του v_1, έχουμε την ακολουθία $(d_2, \ldots, d_{d_1+1})$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν είναι σωστό και άρα υπάρχουν κορυφές $v_i, v_j \in N_G(v_1)$ με $d_i > d_j$ τέτοιες ώστε $\{v_1\, v_i\} \notin E(G)$ και $\{v_1, v_j\} \in E(G)$. Μια και $d_i > d_j$, υπάρχει μια κορυφή $v_h \neq v_1$ τέτοια ώστε $\{v_h, v_i\} \in E(G)$ και $\{v_h, v_j\} \notin E(G)$. Κατασκευάζουμε τώρα το γράφημα G' από το G αφαιρώντας τις ακμές $\{v_1, v_j\}$ και $\{v_h, v_i\}$ και προσθέτοντας τις ακμές $\{v_1, v_i\}$ και $\{v_h, v_j\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε κορυφή $v \in V(G)$, $\deg_G(v) = \deg_{G'}(v)$ και άρα το G' είναι ένα γράφημα που πραγματοποιεί τη γραφική ακολουθία α και $f(G') > f(G)$ αφού $N_{G'}(v_1) = (N_G(v_1) \setminus v_j) \cup \{v_i\})$. Αφού λοιπόν οι βαθμοί της γειτονιάς του v_1, διατεταγμένοι κατά φθίνουσα σειρά, σχηματίζουν την ακολουθία $(d_2, \ldots, d_{d_1+1})$, οι βαθμοί του $G \backslash v_1$ διατεταγμένοι κατά φθίνουσα σειρά δίνονται από την ακολουθία

$\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$ ενώ οι βαθμοί των υπόλοιπων κορυφών παραμένουν αναλλοίωτοι. Άρα η ακολουθία α' πραγματοποιείται από το γράφημα $G \setminus v_1$ και άρα είναι γραφική.

Έστω τώρα G' γράφημα για το οποίο οι βαθμοί των κορυφών του, διατεταγμένοι κατά φθίνουσα σειρά, δίνουν την ακολουθία $\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$. Έστω S το σύνολο κορυφών του G' στις οποίες αντιστοιχούν οι πρώτοι d_1 βαθμοί αυτής της ακολουθίας. Κατασκευάζουμε το γράφημα G προσθέτοντας μια καινούρια κορυφή και συνδέοντάς την με τις κορυφές του S. Είναι φανερό ότι το νέο γράφημα G πραγματοποιεί την ακολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$. $\square$

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πότε μια ακολουθία είναι γραφική αποδείχθηκε το 1960 από τους Erdős και Gallai στην [5]. Παραθέτουμε, χωρίς απόδειξη, το αντίστοιχο θεώρημα.

Θεώρημα 3.18 (Erdős και Gallai, 1960)**.** Μια ακολουθία αριθμών $(d_1, \ldots, d_n)$ είναι γραφική αν

$$\sum_{i \in [n]} d_i = 0 \pmod 2 \text{ και } \forall r \in [n] \sum_{i=1,\ldots,r} d_i \le r(r-1) + \sum_{i=r+1,\ldots,n} \min(r, d_i).$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου

3.1 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι σε κάθε ομάδα με το λιγότερο 2 άτομα, τουλάχιστον δύο από αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων μέσα στην ομάδα (θεωρούμε ότι η σχέση φιλίας είναι συμμετρική).

3.2 (★☆☆)**.** Αποδείξτε ότι σε κάθε ομάδα με το λιγότερο 2 άτομα, υπάρχουν δύο άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων μέσα στην ομάδα και επιπλέον είναι φίλοι ή έχουν κοινό φίλο.

3.3 (☆☆☆)**.** Ένα γράφημα είναι κανονικό αν και μόνο αν $\epsilon(G) = \frac{\delta(G)}{2}$.

3.4 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι αν το γράφημα G είναι κανονικό τότε και το γράφημα $L(G)$ θα είναι κανονικό.

3.5 (☆☆☆)**.** Έστω n θετικό ακέραιος και έστω r, s μη αρνητικοί ακέραιοι για τους οποίους $r + s = n$ και $s = 0 \pmod 2$. Τότε υπάρχει γράφημα G με r κορυφές άρτιου βαθμού και s κορυφές περιττού βαθμού.

3.6 (☆☆☆)**.** Κάθε 2-κανονικό γράφημα περιέχει κάποιο κύκλο (με άλλα λόγια, αν το G είναι 2-κανονικό, τότε $K_3 \le_{\epsilon\lambda} G$).

3.7 (☆☆☆)**.** Κάθε γράφημα G είναι έλασσον ενός 3-κανονικού γραφήματος.

3.8 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι για κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές, ισχύει ότι

$$\delta(G) \geq m - \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2).$$

Επίσης δείξτε ότι η παραπάνω ανισότητα είναι βέλτιστη (δηλ. υπάρχουν γραφήματα για τα οποία ισχύει η ισότητα).

3.9 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι η αφαίρεση μιας ακμής δεν μπορεί να μειώσει τον εκφυλισμό ενός γραφήματος πάνω από μια μονάδα.

3.10 (☆☆☆)**.** Για $q, r \geq 1$, υπολογίστε την τιμή του $\delta^*(\overline{K}_{1,q} * \overline{K}_{1,r})$.

3.11 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι

$$\delta^*(G) \geq \frac{1}{2}\left(2 \cdot n(G) - 1 - \sqrt{(2 \cdot n(G) - 1)^2 - 8 \cdot m(G)}\right).$$

Επίσης αποδείξτε ότι η παραπάνω ανισότητα είναι σφιχτή.

3.12 (☆☆☆)**.** Αν τα G και H είναι γραφήματα με $\delta^*(G), \delta^*(H) \geq k$ τότε $\delta^*(G * H) \geq 2k + 1$.

3.13 (☆☆☆)**.** Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\delta^*(\overline{G}) \geq \frac{1}{2}(n - 1 - \Delta(G))$.

3.14 (☆☆☆)**.** Βρείτε για ποιες τιμές του k τα παρακάτω σύνολα είναι φραγμένα και για ποιες όχι. Στις περιπτώσεις που είναι, βρέστε τα καλύτερα δυνατά άνω φράγματα.

$$A = \{\delta^*(G) \mid \text{ το } G \text{ είναι έλασσον του } P_n^{[k]} \text{ για κάποιο } n \geq 1\}$$

$$B = \{\delta^*(G) \mid \text{ το } G \text{ είναι τοπολογικό έλασσον του } P_n^{[k]} \text{ για κάποιο } n \geq 1\}$$

3.15 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha = (d_1, \ldots, d_n)$ είναι γραφική αν και μόνο αν η ακολουθία $(n - d_1 - 1, n - d_2 - 1, \ldots, n - d_n - 1)$ είναι γραφική.

3.16 (☆☆☆)**.** Αν η ακολουθία $\alpha = (d_1, \ldots, d_n)$ πραγματοποιείται από το γράφημα G, περιγράψτε την γραφικές ακολουθίες που πραγματοποιούν τα γραφήματα $k \cdot G$, $G^{[k]}$ και $G^{(k)}$ για κάθε $k \geq 0$.

3.17 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G, με τουλάχιστον μία ακμή, αν ο μέσος βαθμός είναι d τότε υπάρχει μια κορυφή τέτοια ώστε ο μέσος βαθμός των γειτόνων της να είναι τουλάχιστον d.

3.18 (☆☆☆). Έστω G γράφημα και v κορυφή του G με βαθμό $\leq d(G)/2$. Δείξτε ότι $d(G \setminus v) \geq d(G)$.

3.19 (☆☆☆). Δείξτε ότι αν το γράφημα G δεν περιέχει υποδιαίρεση κύκλου με 4 κορυφές ως υπογράφημα, τότε κάθε υπογράφημα του περιέχει κορυφή βαθμού ≤ 2.

3.20 (☆☆☆). Έστω r φυσικός αριθμός και G γράφημα τέτοιο ώστε το G να είναι r-κανονικό και το συμπλήρωμά του να είναι και αυτό r-κανονικό. Δείξτε ότι $n(G) = 2r + 1$. Μπορείτε να βρείτε ένα τέτοιο γράφημα για κάποια τιμή του $r > 0$;

3.21 (☆☆☆). Δείξτε ότι αν $n(G) \geq 3$, τότε $m(G) = \dfrac{\sum_{v \in V(G)} m(G \setminus v)}{n(G) - 2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΙ

Ορισμός 4.1. Έστω G γράφημα. Καλούμε *περίπατο* του G κάθε ακολουθία (ενδεχομένως επαναλαμβανόμενων) κορυφών $W = [v_1, \ldots, v_r]$ όπου $\forall_{i,1 \leq i < r} \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$. Καλούμε επίσης την ακολουθία W (v_1, v_r)-*περίπατο* του G. Το μήκος ενός περιπάτου $W = [v_1, \ldots, v_r]$ είναι $r - 1$. Οι κορυφές v_1 και v_r καλούνται *άκρα* του περιπάτου W και ορίζουμε

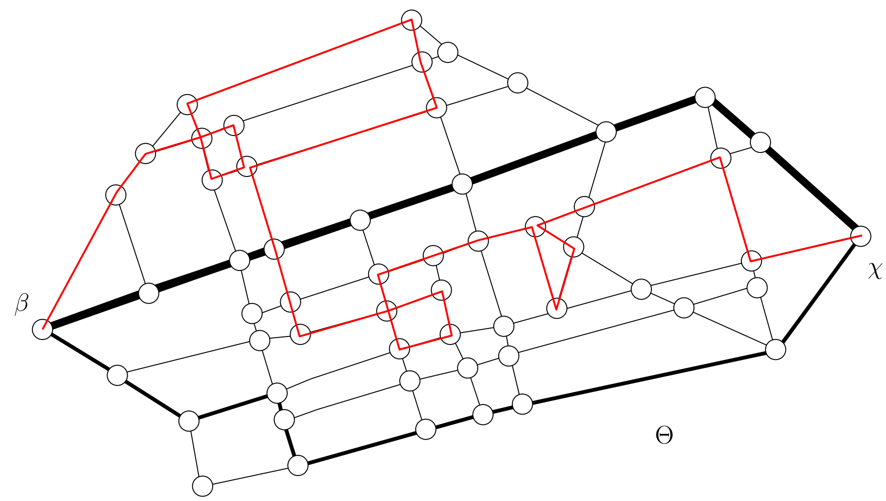
$$G[W] = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}\}).$$

Αν ένας περίπατος αρχίζει και τελειώνει με την ίδια κορυφή τότε καλείται *περιήγηση* και συμβολίζεται ως μια κυκλική διάταξη $W = [v_1, \ldots, v_r, v_1]$ των κορυφών του G.

Παρατήρηση 4.2. *Οι κορυφές κάθε μονοπατιού ορίζουν έναν περίπατο χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές. Επίσης οι κορυφές κάθε περιπάτου χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές είναι οι κορυφές ενός μονοπατιού. Ένας κύκλος μήκους n ορίζει n περιηγήσεις (με ταυτιζόμενα άκρα) και χωρίς άλλες επαναλήψεις κορυφών.*

Λήμμα 4.3. Το γράφημα G περιέχει έναν (x, y)-περίπατο αν και μόνο αν περιέχει ως υπογράφημα ένα (x, y)-μονοπάτι.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση ($\Leftarrow$) είναι προφανής. Για να αποδείξουμε την κατεύθυνση ($\Rightarrow$) θα αποδείξουμε την εξής ισχυρότερη πρόταση: *Για κάθε $x, y \in V(G)$ αν το γράφημα G περιέχει έναν (x, y)-περίπατο W τότε θα περιέχει ένα (x, y)-μονοπάτι*



Σχήμα 4.1: Ένας (β, χ)-περίπατος ένα (β, χ)-μονοπάτι και ένα συντομότερο (β, χ)-μονοπάτι στο γράφημα Θ.

με κορυφές του W. Έστω $W = [v_1, \ldots, v_r]$ ένας περίπατος ελαχίστου μήκους σε κάποιο γράφημα G με $v_1 = x$ και $v_r = y$ για τον οποίο το λήμμα δεν ισχύει. Παρατηρούμε πρώτα ότι η κορυφή y εμφανίζεται μόνο μια φορά στο W. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει, από τις κορυφές του W που είναι ίδιες με την y επιλέγουμε αυτή με τον μικρότερο δείκτη i και θεωρούμε τον περίπατο $W' = [v_1, \ldots, v_i]$ ο οποίος είναι μικρότερος σε μήκος από τον W και άρα περιέχει ένα (x, y)-μονοπάτι με κορυφές του W, άτοπο. Θεωρούμε στη συνέχεια τον περίπατο $W^* = [v_1, \ldots, v_{r-1}]$. Αφού το μήκος του W^* είναι μικρότερο του r, θα υπάρχει στο G ένα (v_1, v_{r-1})-μονοπάτι P με κορυφές από το W. Αφού οι κορυφές αυτές είναι διαφορετικές από την v_r μπορούμε να προσθέσουμε στο μονοπάτι P την ακμή $\{v_{r-1}, v_r\}$ και να κατασκευάσουμε ένα (x, y)-μονοπάτι με κορυφές του W, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 4.4. Έστω G γράφημα όπου $V(G) = [n]$ και έστω $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ ο πίνακας αναπαράστασης του G όπου η κορυφή i αντιστοιχεί στην στήλη i και στην γραμμή i, $i \in [n]$. Τότε για κάθε $r \in [n]$ η τιμή $a^r_{i,j}$ του πίνακα $A^r = [a^r_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών περιπάτων μήκους r που συνδέουν τις κορυφές i και j στο G.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς r. Το θεώρημα προκύπτει άμεσα αν $r = 1$ γιατί υπάρχει ένας περίπατος μήκους 1 (ακμή) με άκρα δύο κορυφές v_i, v_j αν και μόνο αν η αντίστοιχη τιμή του πίνακα $A^1 = A$ είναι 1. Έστω $A^{r-1} =$

$[a_{i,j}^{r-1}]_{(i,j)\in[n]^2}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $a_{i,j}^{r-1}$ διαφορετικοί περίπατοι μήκους $r-1$ μεταξύ του v_i και του v_j. Αφού $A^r = A^{r-1}A$, έχουμε ότι

$$a_{i,j}^r = \sum_{h\in[n]} a_{i,h}^{r-1} a_{h,j}$$

Κάθε περίπατος μήκους r μεταξύ των v_i και v_j αποτελείται από έναν περίπατο μεταξύ των v_i και v_h μήκους $r-1$ και καταλήγει στην κορυφή v_j η οποία είναι προφανώς συνδεδεμένη με την v_h. Άρα το ζητούμενο προκύπτει από την παραπάνω σχέση και την επαγωγική υπόθεση. $\square$

Ως παράδειγμα του Θεωρήματος 4.4, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας αναπαράστασης του C_5. Κατά συνέπεια οι πίνακες

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } A^4 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

αναπαριστούν τους αριθμούς των περιπάτων μήκους 2, 3 και 4 στο C_5.

4.1 Διάμετρος και ακτίνα

Ορισμός 4.5. Έστω x, y δύο κορυφές ενός γραφήματος G. Η *απόσταση* $\textbf{απόσταση}_G(x,y)$ *μεταξύ του x και του y* στο G ορίζεται ως το μήκος του μικρότερου (συντομότερου) (x,y)-μονοπατιού στο G. Αν τέτοιο μονοπάτι δεν υπάρχει, λέμε ότι $\textbf{απόσταση}_G(x,y) = \infty$. Η *εκκεντρότητα* μιας κορυφής στο γράφημα G ορίζεται ως

$$\textbf{εκκεντρότητα}_G(x) = \max_{y\in V(G)} \textbf{απόσταση}_G(x,y).$$

Η *διάμετρος* ενός γραφήματος ορίζεται ως

$$\textbf{διάμετρος}(G) = \max_{x\in V(G)} \textbf{εκκεντρότητα}_G(x).$$

Καλούμε δύο κορυφές x, y *αντιδιαμετρικές* αν $\textbf{απόσταση}_G(x, y) = \textbf{διάμετρος}(G)$. Η *ακτίνα* ενός γραφήματος ορίζεται ως

$$\textbf{ακτίνα}(G) = \min_{x \in V(G)} \textbf{εκκεντρότητα}_G(x).$$

Αν για κάποια κορυφή $x \in V(G)$, $\textbf{εκκεντρότητα}_G(x) = \textbf{ακτίνα}(G)$ τότε καλούμε την κορυφή x *κεντρική κορυφή* του G και συμβολίζουμε το σύνολο των κεντρικών κορυφών του G με $\textbf{κέντρο}(G)$. Αν για κάποια κορυφή $x \in V(G)$, $\textbf{εκκεντρότητα}_G(x) = \textbf{διάμετρος}(G)$ τότε καλούμε την κορυφή x *απόκεντρη κορυφή*. Συμβολίζουμε το σύνολο των απόκεντρων κορυφών του G με $\textbf{απόκεντρο}(G)$.

Η επόμενη παρατήρηση προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Παρατήρηση 4.6. *Κάθε μη-κενό γράφημα G έχει τουλάχιστον μια κεντρική κορυφή. Αν $n(G) \geq 2$ τότε το G περιέχει τουλάχιστον ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών κορυφών. Επίσης αν οι κορυφές x και y ενός γραφήματος είναι αντιδιαμετρικές, τότε θα είναι και απόκεντρες.*

Παρατήρηση 4.7. *Κάθε κορυφή του $K_k, k \geq 1$ είναι κεντρική αλλά και απόκεντρη. Το ίδιο ισχύει για το γράφημα $K_{p,q}, p, q \geq 2$ (αλλά όχι αν το p ή το q είναι ίσο με 1). Ομοίως, για το γράφημα Q_3 και το γράφημα του Petersen.*

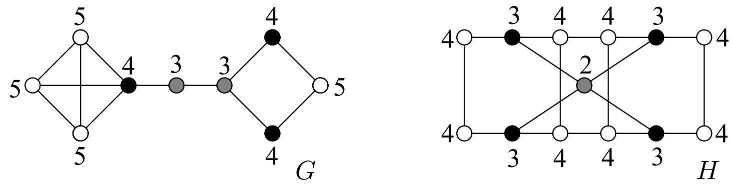
Παρατήρηση 4.8. *Για κάθε γράφημα G, το σύνολο $V(G)$, εφοδιασμένο με την συνάρτηση $\textbf{απόσταση}_G$ είναι μετρικός χώρος. Πράγματι οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν:*

- $\forall_{x,y \in V(G)} \textbf{απόσταση}_G(x, y) \geq 0$ *και* $\textbf{απόσταση}_G(x, y) = 0$ *αν* $x = y$.
- $\forall_{x,y \in V(G)} \textbf{απόσταση}_G(x, y) = \textbf{απόσταση}_G(y, x)$, *(συμμετρική ιδιότητα).*
- $\forall_{x,y,z \in V(G)} \textbf{απόσταση}_G(x, y) + \textbf{απόσταση}_G(y, z) \geq \textbf{απόσταση}_G(x, z)$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Θεώρημα 4.9. Για κάθε γράφημα G που δεν περιέχει κορυφές με απόσταση ∞ ισχύει ότι $\textbf{ακτίνα}(G) \leq \textbf{διάμετρος}(G) \leq 2 \cdot \textbf{ακτίνα}(G)$.

Απόδειξη. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς. Για την δεύτερη ανισότητα, έστω x, y αντιδιαμετρικές κορυφές του G και έστω v κεντρική κορυφή του G. Ισχύει ότι

$$\textbf{απόσταση}_G(x, v) \leq \textbf{εκκεντρότητα}_G(v)$$



Σχήμα 4.2: Δύο γραφήματα G και . Ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή είναι η εκκεντρότητα της. Οι κεντρικές κορυφές είναι οι γκρι κορυφές και οι απόκεντρες είναι οι άσπρες κορυφές.

$$\textbf{απόσταση}_G(v, y) \leq \textbf{εκκεντρότητα}_G(v)$$

και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\textbf{διάμετρος}(G) &= \textbf{απόσταση}_G(x, y)\\ &\leq \textbf{απόσταση}_G(x, v) + \textbf{απόσταση}_G(v, y)\\ &\leq 2 \cdot \textbf{εκκεντρότητα}_G(v)\\ &= 2 \cdot \textbf{ακτίνα}(G).\end{aligned}$$

$\square$

Παρατήρηση 4.10. *Οι ανισότητες του Θεωρήματος 4.9 είναι βέλτιστες για άπειρο πλήθος γραφημάτων. Πράγματι,* **ακτίνα**$(C_r) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor =$ **διάμετρος**(C_r) *για* $r \geq 3$ *και* $2\cdot$**ακτίνα**$(P_{2r+1}) = 2r =$ **διάμετρος**(P_{2r+1}) *για* $r \geq 1$. *Επίσης,* **απόκεντρο**(C_r) $=$ **κέντρο**$(C_r) = V(C_r)$ *για* $r \geq 3$ *ενώ* $P_{r+1}[$**απόκεντρο**$(P_{r+1})] \simeq 2 \cdot K_1$ *για* $r \geq 2$, $P_{2r+2}[$**κέντρο**$(P_{2r+2})] \simeq K_2$ *και* $|$**κέντρο**$(P_{2r+1})| = 1$ *για* $r \geq 1$.

Το παρακάτω θεώρημα ξεκαθαρίζει την σχέση κέντρου και απόκεντρου για τα γραφήματα.

Θεώρημα 4.11. Για κάθε γράφημα G, είτε **κέντρο**$(G) =$ **απόκεντρο**$(G) = V(G)$ είτε τα σύνολα των κεντρικών και απόκεντρων κορυφών δεν περιέχουν κοινά στοιχεία.

Απόδειξη. Έστω ότι το G περιέχει μια κορυφή x η οποία είναι και απόκεντρη και κεντρική. Αυτό σημαίνει ότι **ακτίνα**$(G) =$ **εκκεντρότητα**$_G(x) =$ **διάμετρος**(G). Από τους ορισμούς έχουμε ότι για κάθε κορυφή $v \in V(G)$

$$\textbf{ακτίνα}(G) \leq \textbf{εκκεντρότητα}_G(v) \leq \textbf{διάμετρος}(G)$$

και άρα **εκκεντρότητα**$_G(v)$ = **ακτίνα**(G) = **διάμετρος**(G), συνεπώς **κέντρο**(G) = **απόκεντρο**$(G) = V(G)$. □

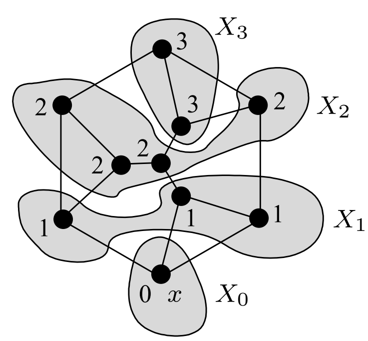
Το παρακάτω λήμμα θα μας είναι χρήσιμο στην επόμενη ενότητα.

Λήμμα 4.12. Έστω G γράφημα με $\Delta(G) \leq d$. Τότε για κάθε κορυφή $v \in V(G)$ με βαθμό q υπάρχουν το πολύ $q \cdot (d-1)^{l-1}$ μονοπάτια μήκους $l \geq 1$ με ένα άκρο την v.

Απόδειξη. Για $i = 1, \ldots, l$, έστω $\mathcal{P}_v^i$ το σύνολο των μονοπατιών μήκους l με το ένα άκρο στην v. Σε κάθε μονοπάτι P στο οποίο θα αναφερόμαστε θα ονομάζουμε το άκρο του που είναι διαφορετικό της v *τέλος* του και θα το συμβολίζουμε με $\tau(P)$. Προφανώς $|P_v^1| = q$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $i, 1 \leq i \leq l-1$, κάθε τέλος ενός μονοπατιού του $\mathcal{P}_v^{i+1}$ έχει στην γειτονιά του το τέλος κάποιου μονοπατιού στο $\mathcal{P}_v^i$. Επίσης το τέλος ενός μονοπατιού στο $\mathcal{P}_v^i$ έχει στην γειτονιά του τα τέλη το πολύ $\deg_G(u)-1$ μονοπατιών του $\mathcal{P}_v^{i+1}$. Αυτό σημαίνει ότι $|\mathcal{P}_v^{i+1}| \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_v^i}(\deg_G(\tau(P))-1) \leq |\mathcal{P}_v^i| \cdot (d-1)$, για κάθε $i, 1 \leq i \leq r-1$. Η τελευταία σχέση μας δίνει ότι $|\mathcal{P}_v^i| = |\mathcal{P}_v^1| \cdot (d-1)^{l-1}$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

4.2 Αποσυνθέσεις απόστασης

Ορισμός 4.13. Έστω γράφημα G και έστω κορυφή του $v \in V(G)$. Καλούμε *αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την v* την ακολουθία ανά δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ όπου r = **εκκεντρότητα**$_v(G)$, $X_0 = \{v\}$, και $X_{i+1} = N_G(X_i) \setminus \bigcup_{j=0,\ldots,i-1} X_j$ για κάθε $i = 1, \ldots, r$.



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα αποσύνθεσης απόστασης ως προς την κορυφή x.

Παρατήρηση 4.14. *Αν $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ είναι η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς μια κορυφή του v, τότε $\bigcup_{i=0,\ldots,r} X_i = V(G)$.*

Λήμμα 4.15. Έστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς κάποια κορυφή του v. Τότε για κάθε $i, j, 0 \leq i \leq j \leq r$ και κάθε ζεύγος κορυφών x, y με $x \in X_i$ και $y \in X_j$, κάθε μονοπάτι P που συνδέει τις x και y θα τέμνει όλα τα σύνολα $X_i, \ldots, X_j$.

Απόδειξη. Αφού κάθε κορυφή του P ανήκει σε ένα και μόνο σύνολο X_i, το μονοπάτι P αντιστοιχεί σε μια ακολουθία $[a_1, \ldots, a_q]$ αριθμών στο $\{0, \ldots, r\}$ όπου $a_1 = i$ και $a_q = j$. Παρατηρούμε ότι αν $a_h, a_{h+1}, 1 \leq j < q$ είναι δύο διαδοχικοί όροι αυτής της ακολουθίας, τότε $|a_h - a_{h+1}| \leq 1$, και αυτό γιατί, από την κατασκευή της $\mathcal{A}$, μια κορυφή που ανήκει σε κάποιο σύνολο X_i έχει όλες τις γειτονικές της κορυφές στο $X_{i-1} \cup X_i \cup X_{i+1}$. Το λήμμα προκύπτει από το γεγονός ότι μια τέτοια ακολουθία θα περιέχει όλους τους αριθμούς στο σύνολο $\{i, \ldots, j\}$. $\square$

Θεώρημα 4.16. Έστω γράφημα G και έστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς κάποια κορυφή του v. Τότε για κάθε $i = 0, \ldots, r$, το σύνολο X_i περιέχει ακριβώς τις κορυφές του G που βρίσκονται σε απόσταση i από το v.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε i, $u \in X_i \Leftrightarrow \textbf{απόσταση}_G(v, u) = i$. Θα δείξουμε πρώτα την κατεύθυνση ($\Rightarrow$) χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς i. Προφανώς ο ισχυρισμός είναι σωστός όταν $i = 0$. Υποθέτουμε ότι είναι σωστός για κάθε $i \leq j$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $i = j + 1$. Έστω $u \in X_{j+1}$. Από την κατασκευή του X_{j+1} η κορυφή u έχει κάποια γειτονική κορυφή u' στο X_j. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μονοπάτι μήκους j που να συνδέει τις v και u', άρα υπάρχει και μονοπάτι P στο G που να συνδέει την v με την u και με μήκος $j + 1$. Θα αποδείξουμε ότι το μονοπάτι αυτό είναι μικρότερου μήκους. Έστω P' μονοπάτι του G με άκρα τις v και u με μήκος $\leq j$. Από το Λήμμα 4.15, το P' τέμνει όλα τα σύνολα $X_0, \ldots, X_{j+1}$ και αφού το μονοπάτι P' έχει μήκος j, κάποια από τις κορυφές του θα βρίσκεται σε δύο σύνολα της $\mathcal{A}$, άτοπο γιατί τα σύνολα της $\mathcal{A}$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Για να αποδείξουμε την κατεύθυνση ($\Leftarrow$) παρατηρούμε ότι αν $\textbf{απόσταση}_G(v, u) = i$, τότε από την κατεύθυνση ($\Rightarrow$) έχουμε ότι $u \notin X_h, h \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r\}$. Αφού όμως η $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ είναι μια διαμέριση του συνόλου $V(G)$, έχουμε ότι $u \in V(G) \setminus \bigcup_{h \in \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,r\}} X_h = X_i$. $\square$

Λήμμα 4.17. Έστω G γράφημα με $\Delta(G) \leq d$. Τότε για κάθε κορυφή $v \in V(G)$ υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^{\ell} - 1)$ κορυφές του G σε απόσταση $\leq l$ από την v.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την v. Από το Θεώρημα 4.16, έχουμε ότι το πλήθος των κορυφών του G σε απόσταση i από την v είναι ακριβώς $|X_i|$ και άρα υπάρχουν τουλάχιστον $|X_i|$ μονοπάτια στο G με το ένα άκρο στην v και το άλλο άκρο στο X_i. Άρα το Λήμμα 4.12 μας δίνει ότι $|X_i| \leq d \cdot (d-1)^{i-1}$, για $i \geq 1$. Από το Θεώρημα 4.16, έχουμε ότι, για $i = 1, \ldots, l$, το πλήθος των κορυφών του G σε απόσταση $\leq i$ από την v είναι ακριβώς $\sum_{i=0,\ldots,l} |X_i|$. Από το Λήμμα 4.12, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,\ldots,l} |X_i| &\leq 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{l-1} \\ &= 1 + d(\sum_{i=0,\ldots,l-1} (d-1)^i) \\ &= 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^{\ell} - 1) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.18. Για κάθε γράφημα G με **ακτίνα**$(G) \leq \alpha$ και $\Delta(G) \leq d$ ισχύει ότι

$$n(G) \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^{\alpha} - 1).$$

Απόδειξη. Το θεώρημα προκύπτει εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.17 με v μια οποιαδήποτε κεντρική κορυφή και θέτοντας $l =$ **ακτίνα**(G) και παρατηρώντας ότι όλες οι κορυφές του G βρίσκονται σε απόσταση $\leq$ **ακτίνα**(G) από την v. □

Πόρισμα 4.19. Για κάθε γράφημα G με **διάμετρος**$(G) \leq \beta$ και $\Delta(G) \leq d$ ισχύει ότι

$$n(G) \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^{\beta} - 1).$$

Ορισμός 4.20. Αν $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ είναι η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς μια κορυφή του v, τότε καλούμε την ποσότητα $\max\{|X_i| \mid 0 \leq i \leq r\}$ *πλάτος απόστασης του G ως προς την κορυφή v (ή v-πλάτος απόστασης)*. Το ελάχιστο v-πλάτος απόστασης ως προς όλες τις κορυφές του G καλείται *πλάτος απόστασης* του G και το συμβολίζουμε με **πα**(G).

Το παρακάτω λήμμα μας λέει ότι σε γραφήματα με μικρή διάμετρο, κάθε αποσύνθεση απόστασης θα περιέχει κάποιο μεγάλο σε πλήθος σύνολο.

Θεώρημα 4.21. Για κάθε γράφημα G, ισχύει ότι $\textbf{πα}(G) \geq \frac{n(G)-1}{\textbf{διάμετρος}(G)}$

Απόδειξη. Έστω v μια κορυφή του G για την οποία το πλάτος απόστασης του G είναι ίσο με το πλάτος απόστασης του G ως προς την v και έστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ είναι η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την v. Ισχύει ότι $n(G) \leq 1 + r \cdot |X_i| \leq 1 + r \cdot \textbf{πα}(G)$. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $r = \textbf{εκκεντρότητα}_G(v) \leq \textbf{διάμετρος}(G)$, καταλήγουμε ότι $n(G) \leq 1 + \textbf{διάμετρος}(G) \cdot \textbf{πα}(G)$. □

4.3 Γραφήματα με μικρό μέγιστο βαθμό και διάμετρο

Ένα γράφημα G με n κορυφές όπου $\Delta(G) \leq d$ δεν μπορεί να έχει πάνω από $d \cdot n/2$ ακμές. Παρ'όλα αυτά μπορεί να έχει οσοδήποτε μικρό αριθμό ακμών. Το παρακάτω Θεώρημα μας λέει ότι αυτό δεν ισχύει αν επιπλέον φράξουμε άνω και την διάμετρο. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε δόθηκε από τους Erdős και Rényi το 1962.

Θεώρημα 4.22. Έστω G γράφημα με n κορυφές, όπου $\Delta(G) \leq d$ και $\textbf{διάμετρος}(G) \leq \beta$. Τότε

$$m(G) \geq \frac{n(n-1)(d-2)}{2((d-1)^{\beta}-1)}.$$

Απόδειξη. Ένα μονοπάτι θα λέγεται διατεταγμένο όταν προσδιορίζουμε σε αυτό ποιό άκρο του είναι η αρχή του και ποιό το τέλος του. Παρατηρούμε ότι σε κάθε μονοπάτι αντιστοιχούν δύο διατεταγμένα μονοπάτια. Θα αποδείξουμε πρώτα τον παρακάτω ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: κάθε ακμή e του G περιέχεται σε το πολύ $2 \cdot l \cdot (d-1)^{l-1}$ διατεταγμένα μονοπάτια μήκους $l \geq 1$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $\mathcal{P}_i^r, i = 1, \ldots, r$ το σύνολο των διατεταγμένων μονοπατιών μήκους r στα οποία η ακμή $e = (x, y)$ είναι η i-οστή ακμή τους. Από το Λήμμα 4.12, υπάρχουν το πολύ $(d-1)(d-1)^{r-i-1} = (d-1)^{r-i}$ μονοπάτια μήκους $r - i$ με το ένα άκρο στο y στο γράφημα $G \backslash e$. Παρομοίως έχουμε ότι υπάρχουν το πολύ $(d-1)(d-1)^{i-2} = (d-1)^{i-1}$ μονοπάτια μήκους $i - 1$ με το ένα άκρο στο x στο γράφημα $G \backslash e$. Άρα τα μονοπάτια του $\mathcal{P}_i^r$ στα οποία η e εμφανίζεται με κατεύθυνση από το x στο y είναι το πολύ $(d-1)^{r-i}(d-1)^{i-1} = (d-1)^{r-1}$. Μετρώντας αναλόγως τα μονοπάτια στα οποία η e εμφανίζεται με την αντίθετη κατεύθυνση καταλήγουμε ότι $|\mathcal{P}_i^r| \leq 2 \cdot (d-1)^{r-1}$. Μια και η ακμή e μπορεί να εμφανιστεί σε l διαφορετικές θέσεις σε ένα μονοπάτι έχουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ισχυρισμού είναι ότι το πλήθος των διατεταγμένων μονοπατιών μήκους r στο G δεν υπερβαίνει το $2 \cdot m(G) \cdot (d-1)^{r-1}$. Παρατηρούμε ότι στο γράφημα G υπάρχουν $2 \cdot \binom{n}{2}$ διατεταγμένα ζεύγη κορυφών το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο μονοπάτι του G μήκους το πολύ β. Αυτό σημαίνει ότι

$$2 \cdot \binom{n}{2} \leq 2 \cdot m(G) \cdot \sum_{i=1,\ldots,\beta} (d-1)^{i-1}$$

Λύνοντας την παραπάνω ανισότητα ως προς $m(G)$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 4.23. *Όπως αναφέραμε πριν, για κάθε γράφημα G με n κορυφές όπου $\Delta(G) \leq d$ και* **διάμετρος**$(G) \leq \beta$ *ισχύει ότι $m(G) \leq d \cdot n/2$. Συνδιάζοντας την ανισότητα αυτή με αυτήν του Θεωρήματος 4.22, έχουμε ότι*

$$\frac{d \cdot n}{2} \geq \frac{n(n-1)(d-2)}{2((d-1)^{\beta}-1)}.$$

Λύνοντας ως προς το n καταλήγουμε, με διαφορετικό τρόπο, στο Πόρισμα 4.19.

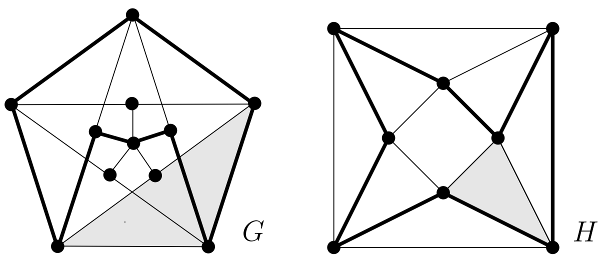
4.4 Περίμετρος και Περιφέρεια

Ορισμός 4.24. Το μέγιστο μήκος ενός κύκλου στο G (ως υπογράφημα) καλείται *περίμετρος* του G και το συμβολίζουμε με **περίμετρος**(G). Το ελάχιστο μήκος ενός κύκλου στο G καλείται *περιφέρεια* του G και το συμβολίζουμε με **περιφέρεια**(G). Αν το γράφημα G δεν περιέχει κύκλους, τότε ορίζουμε **περίμετρος**$(G) = \infty$ και **περιφέρεια**$(G) = 0$.

Ορισμός 4.25. Ένας κύκλος C περιέχει ως *χορδή* την ακμή $\{z, y\}$ αν z και y είναι μη διαδοχικές κορυφές του. Αν ο κύκλος C δεν περιέχει καμιά χορδή, τότε καλείται *άχορδος*.

Ορισμός 4.26. Ένα εναγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος το οποίο είναι κύκλος καλείται *τρύπα*.

Παρατήρηση 4.27. *Το μέγεθος της μικρότερης τρύπας ενός γραφήματος είναι ίσο με την περιφέρειά του.*



Σχήμα 4.4: Το γράφημα G έχει περίμετρο 8 και περιφέρεια 4 και το γράφημα H έχει περίμετρο 8 και περιφέρεια 3. Οι σκιασμένες περιοχές υποδεικνύουν κύκλο ελάχιστου μήκους.

Ορισμός 4.28. Το μέγεθος της μεγαλύτερης τρύπας ενός γραφήματος G καλείται *χορδικότητα* και συμβολίζεται ως $\textbf{χορδικότητα}(G)$.

Λήμμα 4.29. Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\delta(G) \leq \textbf{περίμετρος}(G) - 1$.

Απόδειξη. Αν $\delta(G) \leq 2$ τότε το Λήμμα ισχύει τετριμμένα καθώς για κάθε γράφημα G έχουμε $\textbf{περίμετρος}(G) \geq 3$. Αν $\delta(G) > 2$, θεωρούμε μονοπάτι P του G μεγαλύτερου μήκους, με άκρα v_1, v_t. Παρατηρήστε ότι όλοι οι γείτονες της κορυφής v_1 πρέπει να είναι κορυφές του μονοπατιού και άρα η κορυφή v_1 θα πρέπει σίγουρα να έχει στην γειτονιά της την κορυφή v_i για κάποιο $i \geq \deg_G(v_1) + 1 \geq \delta(G) + 1$ πράγμα που πιστοποιεί την ύπαρξη κύκλου μήκους τουλάχιστον $\delta(G) + 1$ στο G. $\square$

Λήμμα 4.30. Κάθε γράφημα G με $\epsilon(G) \geq 1$ περιέχει κύκλο.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το λήμμα ισχύει όταν $|V(G)| \leq 3$ και υποθέτουμε επίσης ότι το λήμμα ισχύει για κάθε γράφημα με $< n$ κορυφές. Έστω $n = n(G)$. Αν $\delta(G) \geq 2$, τότε το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 4.29. Άρα μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το G περιέχει κορυφή v με βαθμό ≤ 1. Τότε όμως $\epsilon(G \backslash v) \geq 1$ και το αποτέλεσμα προκύπτει εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για το γράφημα $G \backslash v$. $\square$

Μια πιο συμπαγής επαναδιατύπωση του Λήμματος 4.30, είναι η εξής: *Για κάθε γράφημα G, $\epsilon(G) \geq 1 \Rightarrow K_3 \leq_{\tau\pi} G$.* Με άλλα λόγια, η πυκνότητα του γραφήματος μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη του K_3 ως τοπολογικό έλασσον στο G.

Θεώρημα 4.31. Για κάθε γράφημα G με **περιφέρεια**$(G) \geq g$ και $\delta(G) \geq d$ ισχύει ότι

$$n(G) \geq \begin{cases} 1 + d \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i & \text{αν } g = 2r+1 \ (g \text{ περιττός}) \\ 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i & \text{αν } g = 2r \ (g \text{ άρτιος}) \end{cases}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου το $g \bmod 2 = 1$. Έστω $S_i, 0 \leq i \leq r$ τα πρώτα $r+1$ σύνολα της αποσύνθεσης απόστασης του G ως προς μια οποιαδήποτε κορυφή v_0 του G. Παρατηρούμε ότι για $i = 1, \ldots, r$, κάθε κορυφή v του S_i έχει ακριβώς μία γειτονική της κορυφή στο S_{i-1} διαφορετικά, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.16 μπορεί να αποδειχτεί ότι το G θα περιέχει δύο διαφορετικά μονοπάτια με άκρα τις v και v_0 μήκους i και με όλες τις κορυφές σε απόσταση $\leq i$ από το v_0, κατά συνέπεια ένα κύκλο μήκους $\leq 2r < g$, άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι $|S_i| \geq (d-1)|S_{i-1}|$ για $2 \leq i \leq r$ και αφού $|S_0| = 1$ και $|S_1| \geq d$ καταλήγουμε ότι

$$n(G) \geq \sum_{i=0,\ldots,r} |S_i| \geq 1 + d + d(d-1) + \ldots, d(d-1)^{r-1}$$

Έστω τώρα $g \bmod 2 = 0$. Υποδιαιρούμε μια οποιαδήποτε ακμή προσθέτοντας μια νέα κορυφή v_0 και εφαρμόζουμε ακριβώς την ίδια μέτρηση όπως κάναμε παραπάνω. Έχουμε ότι για το νέο γράφημα G' ισχύει ότι

$$n(G') \geq \sum_{i=0,\ldots,r} |S_i| \geq 1+2+2(d-1)+\ldots, 2(d-1)^{r-1} = 1+2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι $n(G) = n(G') - 1$. □

Θεώρημα 4.32. Έστω G γράφημα με n κορυφές και τουλάχιστον $n + n^{1+\frac{1}{k}}$ ακμές. Τότε **περιφέρεια**$(G) \leq 2k$.

Απόδειξη. Έστω $\sqrt[k]{n} + 1 = d$. Αφού $\delta^*(G) \geq \epsilon(G) \geq d$ (Θεώρημα 3.11), το G περιέχει ένα υπογράφημα G' όπου $\delta(G') \geq d$. Με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι **περιφέρεια**$(G) \geq 2k+1$ και άρα **περιφέρεια**$(G') \geq 2k+1$ (αφού $d \geq 1$, το G θα περιέχει κύκλο). Από το Θεώρημα 4.31, έχουμε ότι

$$n \geq n(G') \geq 1 + d \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i = 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^k - 1) > (d-1)^k = n,$$

άτοπο (η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $d > 2$). □

Ασκήσεις Κεφαλαίου

4.1 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 1$, ισχύει ότι

$$\max(\{\textbf{διάμετρος}(H) \mid H \subseteq_{\upsilon\pi} P_k \times P_k\} \cap \mathbb{N}) = k^2 - 1.$$

4.2 (☆☆☆). Έστω γράφημα G που περιέχει μια κορυφή η οποία δεν είναι ούτε κεντρική ούτε απόκεντρή του. Δείξτε ότι το G δεν είναι μεταβατικό.

4.3 (☆☆☆). Δείξτε ότι οι ανισότητες των Θεωρημάτων 4.18 και 4.21 είναι βέλτιστες για άπειρο πλήθος γραφημάτων.

4.4 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι υπάρχουν γραφήματα τέτοια ώστε η διαφορά των πλατών απόστασης ως προς δύο διαφορετικές κορυφές να είναι αυθαίρετα μεγάλη.

4.5 (☆☆☆). Βρείτε τις κεντρικές και απόκεντρες κορυφές της (p, q)-σχάρας για κάθε $p, q \geq 1$.

4.6 (☆☆☆). Πόσα ζεύγη αντιδιαμετρικών κορυφών περιέχει ο r-διάστατος κύβος για $r \geq 1$; Σε ποιες δυαδικές συμβολοσειρές αντιστοιχούν;

4.7 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G υπάρχει κάποιο γράφημα H του οποίου οι κεντρικές κορυφές ενάγουν γράφημα ισόμορφο με το G.

4.8 (☆☆☆). Ποιες είναι οι τιμές του **διάμετρος**$(G * H)$ και για ποιες επιλογές των G και H;

4.9 (☆☆☆). Για κάθε μεταβατικό γράφημα G, **κέντρο**$(G) =$ **απόκεντρο**$(G) = V(G)$.

4.10 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων x, y τέτοιων ώστε $x \leq y \leq 2x$, υπάρχουν άπειρα γραφήματα με ακτίνα x και διάμετρο y.

4.11 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G, όλες οι κορυφές του είναι κεντρικές αν και μόνο αν **ακτίνα**$(G) =$ **διάμετρος**(G).

4.12 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι **διάμετρος**$(G) < 3 \Leftarrow$ **διάμετρος**$(\overline{G}) > 3$.

4.13 (☆☆☆). Έστω x, y θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $x \leq y \leq 2x$. Αποδείξτε ότι υπάρχει γράφημα G όπου **ακτίνα**$(G) = x$ και **διάμετρος**$(G) = y$.

4.14 (☆☆☆). Κάθε γράφημα G περιέχει μονοπάτι μήκους $\delta(G)$.

4.15 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι αν **διάμετρος**$(G) \geq 2$, τότε οι απόκεντρες κορυφές του G δεν μπορεί να ενάγουν κλίκα στο G.

4.16 (☆☆☆). Αν ένα γράφημα G n κορυφών έχει **πα**$(G) \leq x$ τότε βρείτε το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα για την διάμετρό του ως συνάρτηση του n και του x.

4.17 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι **περιφέρεια**$(G) \leq 2\cdot$**διάμετρος**$(G)+1$.

4.18 (☆☆☆). Δείξτε ότι κάθε γράφημα G όπου $\Delta(G) + \delta(G) \geq n - 1$, έχει διάμετρο το πολύ 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ορισμός 5.1. Ένα γράφημα G καλείται *συνεκτικό* (ή *απλά συνεκτικό*) όταν για κάθε ζεύγος κορυφών του $x, y \in V(G)$ υπάρχει (x, y)-μονοπάτι.

Σύμβαση. *Το γράφημα K_1 θεωρείται συνεκτικό.*

Παρατήρηση 5.2. *Σε ένα συνεκτικό γράφημα η διάμετρος είναι πεπερασμένη.*

Λήμμα 5.3. Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο εάν περιέχει περίπατο που να περνάει από όλες τις κορυφές του.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση ($\Leftarrow$) είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.3. Για την κατεύθυνση ($\Rightarrow$), παίρνουμε μια οποιαδήποτε διάταξη $[v_1, \ldots, v_n]$ των κορυφών του G και για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ παίρνουμε ένα (v_i, v_{i+1})-μονοπάτι $P^{(i)}$ στο G (κάθε τέτοιο μονοπάτι υπάρχει λόγω της συνεκτικότητας του G). Αν το μονοπάτι $P^{(i)}$ αντιστοιχεί στον (v_i, v_{i+1})-περίπατο W_i, τότε η επικόλληση των περιπάτων $W_1, \ldots, W_{n-1}$ μας δίνει τον ζητούμενο περίπατο. $\square$

Θεώρημα 5.4. Για κάθε γράφημα G, είτε το G είτε το συμπλήρωμά του $\overline{G}$ θα είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $n(G)$. Το θεώρημα είναι προφανές στην περίπτωση όπου $n(G) = 1$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα είναι σωστό για κάθε γράφημα με $< n$ κορυφές. Έστω G όπου $n(G) = n$ και έστω κορυφή $v \in V(G)$. Αν $N_G(v) = V(G) \setminus \{v\}$ ή $N_G(v) = \emptyset$, τότε το θεώρημα προκύπτει άμεσα.

Θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν κορυφές $x, y \in V(G)\backslash\{v\}$ έτσι ώστε $\{v, x\} \in E(G)$ και $\{v, y\} \in E(\overline{G})$. Επειδή το $H = G[V(G)\backslash\{v\}]$ έχει $< n$ κορυφές, είτε το H, είτε το $\overline{H}$ είναι συνεκτικό. Στην πρώτη περίπτωση, η ύπαρξη της ακμής $\{v, x\}$ στο G συνεπάγεται την συνεκτικότητα του G και στην δεύτερη περίπτωση, η ύπαρξη της ακμής $\{v, y\}$ στο $\overline{G}$ συνεπάγεται την συνεκτικότητα του $\overline{G}$. □

Ορισμός 5.5. Έστω γράφημα G και έστω $\mathcal{I}(G)$ το σύνολο όλων των συνεκτικών υπογραφημάτων του G. Καλούμε ένα μέλος H του $\mathcal{I}(G)$ *συνεκτική συνιστώσα του* G (ή απλά *συνιστώσα*) αν είναι ένα μεγιστικό (maximal) στοιχείο του $\mathcal{I}(G)$ ως προς την σχέση μερική διάταξη του υπογραφήματος.

Σύμβαση. *Οι απομονωμένες κορυφές ενός γραφήματος θεωρούνται συνεκτικές συνιστώσες του.*

Παρατήρηση 5.6. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα H ενός γραφήματος G είναι εναγόμενο υπογράφημα του G.*

Παρατήρηση 5.7. *Κάθε κορυφή ενός γραφήματος G ανήκει σε μια ακριβώς από τις συνεκτικές του συνιστώσες.*

Παρατήρηση 5.8. *Αν H είναι μια συνεκτική συνιστώσα του G, τότε $\delta(H) \geq \delta(G)$ και $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.*

Θεώρημα 5.9. Αν το G είναι γράφημα όπου $\delta(G) \geq \frac{n(G)}{2}$, τότε το G είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω μη-συνεκτικό γράφημα G και έστω H η μικρότερη (σε αριθμό κορυφών) από τις συνεκτικές του συνιστώσες. Παρατηρούμε ότι $n(H) \leq \frac{n(G)}{2}$ και άρα $\delta(H) \leq n(H) - 1 < \frac{n(G)}{2}$. Το θεώρημα τώρα προκύπτει λαμβάνοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 5.8. □

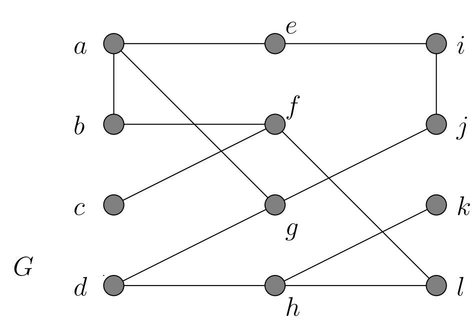
Θεώρημα 5.10. Αν το G είναι συνεκτικό γράφημα, τότε $m(G) \geq n(G) - 1$.

Απόδειξη. Έστω G υποτιθέμενο αντιπαράδειγμα με ελάχιστο αριθμό κορυφών (δηλ. υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό, $m(G) < n(G) - 1$ και για κάθε συνεκτικό γράφημα H με $n(H) < n(G)$ ισχύει ότι $m(H) \geq n(H) - 1$). Παρατηρούμε ότι $\delta(G) \leq 1$ γιατί, διαφορετικά, από την Παρατήρηση 3.6, έχουμε $m(G) \geq n(G) \cdot \frac{\delta(G)}{2} \geq n(G)$. Έστω v κορυφή του G βαθμού 1 (αν το G είναι συνεκτικό, δεν θα περιέχει κορυφή βαθμού 0). Το γράφημα $H = G\backslash v$ είναι συνεκτικό (παρατηρούμε ότι η αφαίρεση κορυφής βαθμού 1 δεν πλήττει την συνεκτικότητα ενός γραφήματος) και περιέχει λιγότερες κορυφές από το G. Άρα $m(H) \geq n(H) - 1$. Επίσης έχουμε $m(G) = m(H)+1$, $n(G) = n(H)+1$ και άρα $m(G) \geq n(G)-1$, άτοπο. $\square$

Ορισμός 5.11. Έστω γράφημα G και έστω μη-κενό σύνολο $S \subseteq V(G)$. Λέμε ότι το S είναι *διαχωριστής* του G αν το γράφημα $G \backslash S$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G. Ένας διαχωριστής S καλείται *ελαχιστικός* (minimal) αν κανένα από τα υποσύνολά του δεν είναι διαχωριστής. Ένας διαχωριστής S καλείται *ελάχιστος* (minimum) αν κανένας άλλος διαχωριστής του G δεν έχει μικρότερο μέγεθος από τον S.

Ένας διαχωριστής S καλείται (a,b)-*διαχωριστής* αν οι κορυφές $a, b \in V(G)$ βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$. Ένας (a,b)-διαχωριστής S καλείται *ελαχιστικός* (minimal) αν κανένα από τα υποσύνολά του δεν είναι (a,b)-διαχωριστής. Ένας (a,b)-διαχωριστής S καλείται *ελάχιστος* (minimum) αν κανένας άλλος (a,b)-διαχωριστής του G δεν έχει μικρότερο μέγεθος από τον S.

Τέλος, μια κορυφή v του G λέγεται *αρθρική* όταν το σύνολο $\{v\}$ είναι διαχωριστής του G.



Σχήμα 5.1: Το σύνολο $\{e, f, g, h\}$ είναι διαχωριστής του G αλλά δεν είναι ούτε ελαχιστικός ούτε ελάχιστος. Το ίδιο ισχύει και για το $\{e, f, h\}$. Το σύνολο $\{e, g\}$ είναι ελαχιστικός διαχωριστής του G και τα μονοσύνολα $\{f\}$ και $\{h\}$ είναι ελάχιστοι διαχωριστές του G και επιπλέον αρθρικές κορυφές του. Το $\{f, g\}$ είναι ελαχιστικός (a,k)-διαχωριστής και το μονοσύνολο $\{h\}$ είναι ελάχιστος (a,k)-διαχωριστής του G.

Ορισμός 5.12. Καλούμε μια ακμή e ενός γραφήματος G *γέφυρα* όταν το γράφημα $G \setminus e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G.

Παρατήρηση 5.13. *Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει γέφυρα $e \in E$ της οποίας κάποιο άκρο, έστω $v \in V$, έχει βαθμό τουλάχιστον 2 στο G τότε η v είναι αρθρική κορυφή του G.*

5.1 Δισυνεκτικότητα

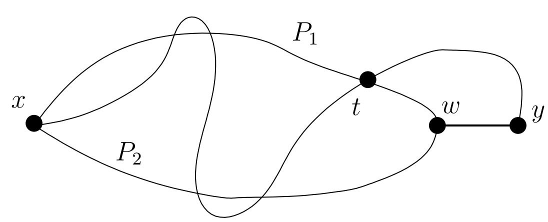
Ορισμός 5.14. Λέμε ότι ένα γράφημα είναι *2-συνεκτικό* (ή απλά *δισυνεκτικό*) αν είναι συνεκτικό, έχει περισσότερες από 3 κορυφές και όλοι οι διαχωριστές του έχουν τουλάχιστον 2 κορυφές.

Παρατήρηση 5.15. *Ένα συνεκτικό γράφημα είναι δισυνεκτικό αν και μόνο αν δεν περιέχει αρθρική κορυφή.*

Ορισμός 5.16. Καλούμε $k \geq 2$ μονοπάτια ενός γραφήματος G *εσωτερικώς διακεκριμένα* όταν τα σύνολα των εσωτερικών κορυφών τους είναι διακεκριμένα (δηλ. ανά δύο ξένα μεταξύ τους).

Θεώρημα 5.17. Έστω G γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές. Το G είναι δισυνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό και ότι περιέχει αρθρική κορυφή v. Έστω x, y δύο κορυφές σε δύο από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash v$. Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι που συνδέει την x και την y θα περνάει από την v άρα οι x και y δεν μπορούν να συνδεθούν με δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια. Αυτό αποδεικνύει την κατεύθυνση «αν».



Σχήμα 5.2: Τα μονοπάτια P_1, P_2 στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.17.

Έστω G δισυνεκτικό γράφημα και έστω $x, y \in V(G)$. Θα αποδείξουμε την κατεύθυνση «μόνο αν» με επαγωγή ως προς την απόσταση $\textbf{απόσταση}_G(x, y)$ των x και y στο G. Αν $\textbf{απόσταση}_G(x, y) = 1$, τότε η $e = \{x, y\}$ είναι ακμή του G.

Κανένα από τα άκρα της e δεν μπορεί να έχει βαθμό 1 γιατί τότε το άλλο άκρο θα ήταν αρθρική κορυφή δισυνεκτικού γραφήματος G. Αυτό συμαίνει ότι το γράφημα $G \setminus e$ είναι συνεκτικό, διαφορετικά η ακμή e θα αποτελούσε γέφυρα του G κάθε άκρο της οποίας θα έπρεπε να είναι αρθρική κορυφή του G, σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.13. Από την συνεκτικότητα του $G\setminus e$ συνάγουμε την ύπαρξη ενός μονοπατιού στο $G\setminus e$ με άκρα τα x και y το οποίο, μαζί με την $\{x, y\}$ αποτελούν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια στο G.

Υποθέτουμε τώρα ότι η κατεύθυνση «μόνο αν» ισχύει για κάθε ζεύγος κορυφών x, y για τις οποίες $\textbf{απόσταση}(x, y) < k$. Έστω x, y κορυφές του G με $\textbf{απόσταση}(x, y) = k \geq 2$. Έστω w η προτελευταία κορυφή ενός μονοπατιού μήκους k στο G που ξεκινάει από το x και τελειώνει στο y. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια P_1 και P_2 στο G που συνδέουν την x με την w. Αν κάποιο, έστω το P_1, από τα P_1, P_2 περιέχει το y τότε ορίζουμε P_1^* το μέρος του P_1 από τη x μέχρι τη y και κατασκευάζουμε το μονοπάτι P_2^* από την ένωση του P_2 με την ακμή $\{w, y\}$ και παρατηρούμε ότι τα P_1^*, P_2^* είναι δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια στο G. Έστω τώρα ότι κανένα από τα P_1, P_2 δεν συναντά το y και έστω R ένα μονοπάτι του G που ενώνει τις κορυφές x και y αποφεύγοντας την w (τέτοιο μονοπάτι υπάρχει γιατί το G είναι δισυνεκτικό και άρα το $G\setminus w$ συνεκτικό). Αν το R αποφεύγει όλες τις εσωτερικές κορυφές των P_1 και P_2, τότε το R μαζί με την ένωση του P_1 και την ακμής $\{w, y\}$ είναι δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια στο G. Έστω τώρα t η τελευταία από τις εσωτερικές κορυφές των P_1 και P_2 που συναντάει το R. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t \in P_1$ και κατασκευάζουμε το μονοπάτι P_1^* από το τμήμα του P_1 από το x στο t και το τμήμα του R από το t στο y. Επίσης ορίζουμε το μονοπάτι P_2^* προσθέτοντας στο τέλος του P_2 την ακμή $\{w, y\}$. Τα μονοπάτια P_1^* και P_2^* είναι δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια στο G (βλ. Σχήμα 5.2). $\square$

Το Θεώρημα 5.17 γενικεύεται για γραφήματα μεγαλύτερης συνεκτικότητας στο Θεώρημα 5.29.

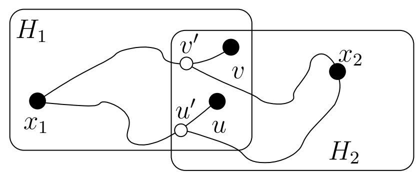
Πόρισμα 5.18. Η υποδιαίρεση, η πρόσθεση μιας ακμής ή η διάλυση μιας κορυφής σε ένα δισυνεκτικό γράφημα δεν πλήττει την δισυνεκτικότητά του (στην περίπτωση της διάλυσης υποθέτουμε ότι έχουμε γράφημα με τουλάχιστον 4 κορυφές).

Πόρισμα 5.19. Αν το G είναι ένα δισυνεκτικό γράφημα τότε για κάθε $x, y, z \in V(G)$, υπάρχει μονοπάτι στο G που να περνάει από την κορυφή y και να έχει άκρα τις x και z.

 Τελευταία ενημέρωση 28/3/2023, στις 18:53.

Απόδειξη. Έστω το γράφημα G^+ που προκύπτει αν προσθέσουμε στο G μια νέα κορυφή w και την συνδέσουμε με τις κορυφές x και z. Από το Πόρισμα 5.18, έχουμε ότι το G^+ είναι επίσης δισυνεκτικό. Από το Θεώρημα 5.17, υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια P_1, P_2 που να συνδέουν τα w και y και άρα το γράφημα $(P_1 \cup P_2)\backslash w$ είναι το ζητούμενο μονοπάτι. □

Πόρισμα 5.20. Αν τα H_1 και H_2 είναι δισυνεκτικά γραφήματα όπου $|V(H_1) \cap V(H_2)| \geq 2$, τότε το γράφημα $H_1 \cup H_2$ είναι επίσης δισυνεκτικό.



Σχήμα 5.3: Η απόδειξη του Πορίσματος 5.20.

Απόδειξη. Έστω $\{v, u\} \subseteq S = V(H_1) \cap V(H_2)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.17, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ζεύγος κορυφών x_1, x_2 στο γράφημα $H = H_1 \cup H_2$ συνδέεται με δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια. Ο ισχυρισμός αυτός είναι προφανής αν τα x_1 και x_2 ανήκουν στο ίδιο γράφημα H_1 ή H_2. Έστω λοιπόν $x_1 \in V(H_1)\backslash S$ και $x_2 \in V(H_2)\backslash S$. Συμφωνα με το Πόρισμα 5.19, υπάρχει μονοπάτι P_1 στο H_1 που να συνδέει τα v και u και να περνάει από το x_1. Έστω P_1' το υπομονοπάτι του P_1 που περιέχει μόνο δύο κορυφές v', u' του S. Πάλι από το Πόρισμα 5.19, υπάρχει μονοπάτι P_2' στο H_2 που να συνδέει τα v' και u' και να περνάει από το x_2. Τότε το γράφημα $P_1' \cup P_2'$ είναι η ένωση των δύο ζητούμενων μονοπατιών. □

Ο παρακάτω ορισμός ακολουθεί τη λογική του Ορισμού 5.5.

Ορισμός 5.21. Έστω γράφημα G και έστω $\mathcal{I}_2(G)$ το σύνολο όλων των 2-συνεκτικών υπογραφημάτων του G. Καλούμε ένα μέλος H του $\mathcal{I}_2(G)$ *δισυνεκτική συνιστώσα του* G αν είναι ένα μεγιστικό (maximal) στοιχείο του $\mathcal{I}_2(G)$ ως προς την μερική διάταξη $\subseteq$.

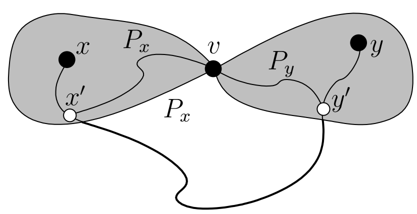
Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τις συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος, δεν ισχύει ότι μία κορυφή ανήκει απαραίτητα σε μία δισυνεκτική συνιστώσα. Για τον λόγο αυτόν θα προσθέσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.22. *Τεμάχιο του* G καλείται μία δισυνεκτική συνιστώσα του ή μία γέφυρά του. Επίσης τεμάχιο θα θεωρείται και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό κάθε ακμή που δεν ανήκει σε δισυνεκτική συνιστώσα αποτελεί ξεχωριστό τεμάχιο του γραφήματος (ως γέφυρα), και φυσικά κάθε κορυφή ανήκει σε κάποιο τεμάχιο.

Λήμμα 5.23. Δύο τεμάχια H_1 και H_2 ενός γραφήματος G μπορούν να έχουν το πολύ μια κοινή κορυφή η οποία πρέπει να είναι αρθρική.

Απόδειξη. Το Λήμμα είναι προφανές αν τα H_1, H_2 έχουν το πολύ δύο κορυφές το κάθε ένα. Έστω δισυνεκτικές συνιστωσες H_1, H_2 του G. Έστω επίσης $\{x, y\} \subseteq S = V(H_1) \cap V(H_2)$. Από το Πόρισμα 5.20 το γράφημα $H_1 \cup H_2$ είναι δισυνεκτικό, πράγμα που αντιβαίνει στο γεγονός ότι η $_1$ είναι μεγιστικό δισυνεκτικό γράφημα στο G.



Σχήμα 5.4: Η απόδειξη του Λήμματος 5.23.

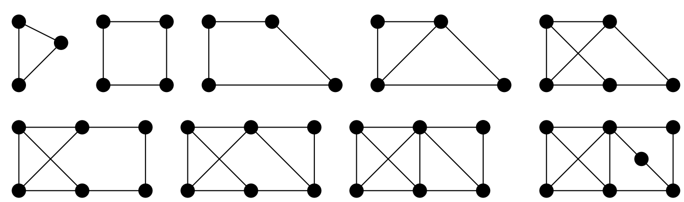
Έστω τώρα $V(H_1) \cap V(H_2) = \{v\}$. Υποθέτουμε, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το $G \backslash v$ είναι συνεκτικό γράφημα. Έστω x και y κορυφές των H_1 και H_2 αντίστοιχα, διαφορετικές της v. Έστω P μονοπάτι που συνδέει τις x και y στο $G \backslash v$. Θέτουμε $H = H_1 \cup H_2$ και παρατηρούμε ότι το $H \backslash v$ είναι η διακεκριμένη ένωση δυο γραφημάτων εκ των οποίων το ένα περιέχει το x και το άλλο περιέχει το y. Άρα, το P δεν μπορεί να ανήκει εξ' ολοκλήρου στο $H \backslash v$ και άρα περιέχει ακμές του $E(G) \backslash E(H)$. Θεωρούμε το γράφημα $H^+ = H \cup P$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι το H^+ είναι δισυνεκτικό πράγμα που αντιφάσκει στο ότι το H_1 είναι τεμάχιο ενώ $H \subset H^+$. Πράγματι, έστω P' ένα μεγαλύτερο σε μήκος υπομονοπάτι του P με ακμές που να μην ανήκουν στα H_1 και H_2 και έστω x' και y' τα άκρα του. Παρατηρούμε ότι τα x' και y' είναι διαφορετικά του v. Έστω P_x (P_y) το μονοπάτι που συνδέει το x' (y') με το v στο γράφημα H_1 (H_2). Το γράφημα $C = P' \cup P_x \cup P_y$ είναι κύκλος και άρα δισυνεκτικό γράφημα. Άρα, από το Πόρισμα 5.20, έχουμε ότι το γράφημα $H^+ = H_1 \cup C$ είναι επίσης δισυνεκτικό. $\square$

Το παρακάτω Θεώρημα δίνει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των δισυνεκτικών γραφημάτων.

Θεώρημα 5.24. Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό αν και μόνο αν μπορεί να κατασκευαστεί αρχίζοντας από το K_3 και εφαρμόζοντας μια ακολουθία μετασχηματισμών που μπορεί να είναι:

- Υποδιαίρεση ακμής.
- Πρόσθεση ακμής.

Απόδειξη. Το γράφημα K_3 είναι δισυνεκτικό και οι παραπάνω μετασχηματισμοί διατηρούν την δισυνεκτικότητα λόγω της Παρατήρησης 5.18. Θα αναβάλουμε την απόδειξη της κατεύθυνσης «μόνο αν» μια κι αυτή θα προκύψει εύκολα από τα πολύ γενικότερα αποτελέσματα του επόμενου κεφαλαίου (Λήμμα 5.40). $\square$



Σχήμα 5.5: Παράδειγμα της κατασκευής του Θεωρήματος 5.24.

5.2 Συνεκτικότητα και εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια

Ορισμός 5.25. Ένα συνεκτικό γράφημα G καλείται k-*συνεκτικό* αν έχει $> k$ κορυφές και όλοι οι διαχωριστές του έχουν τουλάχιστον k κορυφές. Ορίζουμε τη *συνεκτικότητα* ενός γραφήματος G ως εξής:

$$\kappa(G) = \max\{k \mid G \text{ είναι } k\text{-συνεκτικό } \}$$

Αν το G δεν είναι συνεκτικό τότε $\kappa(G) = 0$.

Παρατήρηση 5.26. *Για κάθε γράφημα G, $\kappa(G) \leq \delta(G)$.*

Σύμβαση. *Θεωρούμε ότι $\kappa(K_n) = n - 1$, παρόλο που αν αφαιρέσουμε $n - 1$ κορυφές από το K_n θα πάρουμε το K_1 που είναι συνεκτικό.*

Ο λόγος που κάνουμε την παραπάνω σύμβαση είναι για να μην υπάρχει αναντιστοιχία του Ορισμού 5.25 με το Θεώρημα 5.32.

Παρατήρηση 5.27. *Για κάθε γράφημα G και κάθε ακμή $e \in E(G)$ ισχύει ότι, $\kappa(G \backslash e) \geq \kappa(G) - 1$. Επίσης, για κάθε κορυφή $v \in V(G)$ ισχύει ότι, $\kappa(G \backslash v) \geq \kappa(G) - 1$.*

Ορισμός 5.28. Έστω G γράφημα, $S \subset V(G)$, και $x \in V(G) \backslash S$. Καλούμε (x, S)-*βεντάλια* κάθε σύνολο $|S|$ εσωτερικώς διακεκριμένων μονοπατιών που αρχίζουν από το x και τελειώνουν στις κορυφές του S.

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχτηκε από τον Menger το 1927 στην [22]. Παρουσιάζουμε μια απόδειξη που προτάθηκε από τον Dirac το 1966 στην [4].

Θεώρημα 5.29 (Menger, 1927)**.** Για κάθε γράφημα G και για κάθε ζεύγος s, t μη συνδεδεμένων κορυφών του G ισχύει ότι το μέγεθος του ελάχιστου (s, t)-διαχωριστή του G είναι ίσο με το μέγιστο αριθμό εσωτερικώς διακεκριμένων (s, t)-μονοπατιών στο G.

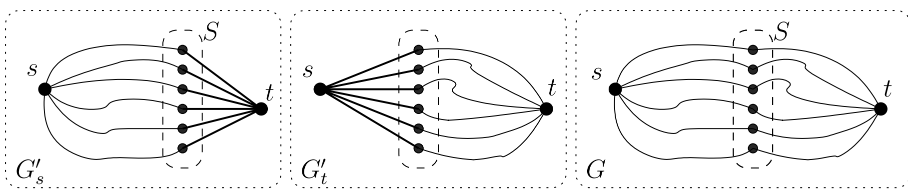
Απόδειξη. Είναι φανερό ότι αν το G περιέχει έναν (s, t)-διαχωριστή S μεγέθους k, τότε δεν μπορεί να υπάρχουν πάνω από k εσωτερικώς διακεκριμένα (s, t)-μονοπάτια στο G γιατί κάθε μονοπάτι πρέπει να συναντά κάποιο μέλος του S.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν κάθε (s, t)-διαχωριστής S του G έχει μέγεθος τουλάχιστον k, τότε θα υπάρχουν το λιγότερο k εσωτερικώς διακεκριμένα (s, t)-μονοπάτια στο G. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Προφανώς η πρόταση αυτή είναι σωστή για $k = 1$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι δεν είναι σωστή για κάποιο $k > 1$ και υποθέτουμε ότι το k αυτό είναι το μικρότερο δυνατό για το οποίο η πρόταση δεν ισχύει. Μεταξύ των γραφημάτων για τα οποία η πρόταση είναι λάθος για k, έστω H κάποιο με τον μικρότερο δυνατό αριθμό κορυφών. Στην συνέχεια αφαιρούμε ακμές από το H εφόσον στο προκύπτων γράφημα συνεχίζουν όλοι οι (s, t)-διαχωριστές να είναι μεγέθους $\geq k$. Όταν αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί άλλο, προκύπτει το γράφημα G. Παρατηρούμε ότι το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του H και άρα το G επίσης δεν περιέχει k εσωτερικώς διακεκριμένα (s, t)-μονοπάτια.

Από τον ορισμό του G, έχουμε ότι για κάθε ακμή $e \in E(G)$ θα υπάρχει ένας (s, t)-διαχωριστής S_e μεγέθους $k - 1$ στο $G \backslash e$.
Ισχυρισμός α. $\forall_{e \in E(G)}\ e \cap S_e = \emptyset$ και $\forall_{w \in e \backslash \{s,t\}}$ το $S_e \cup \{w\}$ είναι ένας (s, t)-διαχωριστής του G μεγέθους k.

Παρατηρούμε ότι το γράφημα $G\backslash S_e$ περιέχει ένα (s,t)-μονοπάτι γιατί $|S_e| = k-1$ και χρειάζονται k κορυφές για να διαχωριστούν τα s και t. Ένα τέτοιο μονοπάτι θα πρέπει να περιέχει την ακμή e γιατί δεν είναι μονοπάτι του $G\backslash e$. Άρα κανένα από τα άκρα της e δεν ανήκει στο S_e και η πρόσθεση στο S_e οποιουδήποτε από τα άκρα της e (δεδομένου ότι το άκρο αυτό είναι διαφορετικό των s και t) σχηματίζει έναν (s,t)-διαχωριστή του G.
Ισχυρισμός β. $N_G(s) \cap N_G(t) = \emptyset$.

Έστω κάποια κορυφή x είναι γειτονική στην t και στην s και έστω $G^- = G\setminus x$. Παρατηρούμε ότι κάθε (s,t)-διαχωριστής του G^- πρέπει να έχει τουλάχιστον $k-1$ κορυφές, διαφορετικά το G θα περιέχει έναν (s,t)-διαχωριστή (που προκύπτει μετά την πρόσθεση του x) με τουλάχιστον $k-1$ κορυφές. Λόγῳ της ελάχιστης επιλογής του k, υπάρχουν $k-1$ εσωτερικώς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στο $G\backslash x$. Αν σε αυτά προσθέσουμε και το μονοπάτι που ενάγουν οι κορυφές s,x,t, τότε έχουμε k εσωτερικώς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στο G, άτοπο.



Σχήμα 5.6: Παράδειγμα της κατασκευής της απόδειξης του Ισχυρισμού γ. στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.24.

Ισχυρισμός γ. Για κάθε (s,t)-διαχωριστή S μεγέθους k του G ισχύει ότι $N_G(s) = S$ ή $N_G(t) = S$.

Έστω S (s,t)-διαχωριστής μεγέθους $\leq k$ του G. Καλούμε $\mathcal{P}_s$ την συλλογή όλων των μονοπατιών στο G που συνδέουν την s με κάποια κορυφή του S χωρίς όμως να περνούν από κάποια άλλη κορυφή του S. Ομοίως ορίζουμε την $\mathcal{P}_t$. Τότε κάθε (s,t)-μονοπάτι του G, από την στιγμή που θα περιέχει κάποια κορυφή του S, αρχίζει με ένα μονοπάτι της $\mathcal{P}_s$ και τελειώνει με ένα μονοπάτι της $\mathcal{P}_t$. Επίσης αν $P \in \mathcal{P}_s$ και $P' \in \mathcal{P}_t$, τότε είτε $V(P) \cap V(P') = \emptyset$, είτε $V(P) \cap V(P') = \{q\}$ για κάποια κορυφή $q \in S$, διαφορετικά θα υπήρχε ένα (s,t)-μονοπάτι που θα απέφευγε τις κορυφές του S. Έστω $G_s = \bigcup_{P\in\mathcal{P}_s} P$ και $G_t = \bigcup_{P\in\mathcal{P}_t} P$. Υποθέτουμε με σκοπό το άτοπο ότι $S \subsetneq V(G_s)\backslash\{s\}$ και $S \subsetneq V(G_t)\backslash\{t\}$. Θεωρούμε τα γραφήματα $G'_s = G_s \cup \{S\cup\{t\}, \{\{x,t\} \mid s \in S\}\}$ και $G'_t = G_s \cup \{S\cup\{t\}, \{\{s,x\} \mid x \in S\}\}$ και παρατηρούμε ότι $n(G_t), n(G_s) < n(G)$, άρα υπάρχουν k εσωτερικώς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια $P_s^1, \ldots, P_s^k$ και $P_t^1, \ldots, P_t^k$ στα G_s και G_t αντίστοιχα. Ορίζουμε την (s,S)-βεντάλια $\{Q_s^i \mid i = 1, \ldots, k\} = \{P_s^i \backslash t, i = 1, \ldots, k\}$ και την (t,S)-βεντάλια $\{Q_t^i \mid i = 1, \ldots, k\} = \{P_t^i \backslash s \mid i = 1, \ldots, k\}$ και παρατηρούμε ότι τα $Q_s^1 \cup Q_t^1, \ldots, Q_s^k \cup Q_t^k$ είναι k εσωτερικώς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στο G, άτοπο (βλ. Σχήμα 5.6).

Έστω τώρα P συντομότερο (s,t)-μονοπάτι στο G με διάταξη κορυφών $[s, v_1, v_2, \ldots, t]$. Θέτουμε $e = \{v_1, v_2\}$ και από τον Ισχυρισμό β), έχουμε ότι $v_2 \neq t$, $\{v_1, t\} \notin E(G)$ και $|P| \geq 3$. Από τον Ισχυρισμό α) το $\{v_1\} \cup S_e$ είναι (s,t)-διαχωριστής S μεγέθους k του G και αφού $\{v_1, t\} \notin E(G)$, ο Ισχυρισμός γ) μας δίνει ότι $N_G(s) = \{v_1\} \cup S_e$. Αφού το P είναι συντομότερο μονοπάτι, ισχύει ότι $\{s, v_2\} \notin E(G)$. Ξανά από τον Ισχυρισμό α) το $\{v_2\} \cup S_e$ είναι (s,t)-διαχωριστής S μεγέθους k του G και αφού $\{s, v_2\} \notin E(G)$, ο Ισχυρισμός γ) μας δίνει ότι $N_G(t) = \{v_2\} \cup S_e$. Αφού $k \geq 2$, καταλήγουμε ότι υπάρχει κορυφή του S_e που είναι γειτονική των s και t, πράγμα που αντιφάσκει στον Ισχυρισμό β). □

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα του Menger είναι ένα *μεγιστοελάχιστο* θεώρημα: συνδέει μια μέγιστη ποσότητα (εσωτερικώς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια) με μια ελάχιστη ποσότητα (μέγεθος (s,t)-διαχωριστή).

Ορισμός 5.30. Ορίζουμε την *τοπική συνεκτικότητα δύο μη-συνδεδεμένων κορυφών* x και y ως το μέγεθος ενός ελάχιστου (x,y)-διαχωριστή του G και την συμβολίζουμε με $\kappa_G(x,y)$

Παρατήρηση 5.31. $\kappa(G) = \min\{\kappa_G(x,y) \mid x, y \in V(G), \{x,y\} \notin E(G)\}$.

Συνδιάζοντας το Θεώρημα 5.29 και τις παρατηρήσεις 5.27 και 5.31, έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό της συνεκτικότητας ενός γραφήματος.

Θεώρημα 5.32. Ένα γράφημα είναι k-συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται από k εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

Παρατήρηση 5.33. *Αν S είναι ένας ελάχιστος (x,y)-διαχωριστής του G, τότε το G θα περιέχει μια (x,S)-βεντάλια $\mathcal{W}_x$ και μια (y,S)-βεντάλια $\mathcal{W}_y$. Επίσης οι κορυφές των μονοπατιών της $\mathcal{W}_x$ θα είναι ξένες με τις κορυφές της συνιστώσας του $G \backslash S$ που περιέχει το x.*

Ορισμός 5.34. Καλούμε μια ακμή e του ενός k-συνεκτικού γραφήματος G *κρίσιμη* αν $\kappa(G \backslash e) = k - 1$.

Λήμμα 5.35. Έστω G γράφημα όπου $\kappa(G) = k$ και έστω $e = \{x, y\} \in E(G)$. Τότε η e είναι μια κρίσιμη ακμή του G αν και μόνο αν $\kappa_{G \backslash e}(x,y) = k - 1$.

Απόδειξη. Θέτουμε $G^- = G\backslash e$. Αν η e είναι μια κρίσιμη ακμή στο G τότε στο γράφημα G^- θα υπάρχει κάποιο σύνολο $R \subseteq V(G^-)$ με $k-1$ κορυφές τέτοιο ώστε το $G^-\backslash R$ να μην είναι συνεκτικό. Παρατηρούμε ότι τα x και y θα πρέπει να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G^-\backslash R$ διαφορετικά το R θα είναι διαχωριστής και του G, άτοπο γιατί $\kappa(G) = k$. Άρα το R είναι ένας (x,y)-διαχωριστής του G^- μεγέθους $k-1$ και αυτό σημαίνει ότι $\kappa_{G^-}(x,y) \le k-1$. Από την Παρατήρηση 5.27, έχουμε ότι $\kappa(G') \ge k-1$ και άρα $\kappa_{G^-}(x,y) \ge k-1$. Καταλήγουμε ότι , $\kappa_{G^-}(x,y) = k-1$.

Έστω τώρα e μια μη-κρίσιμη ακμή. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα G^- είναι k-συνεκτικό και άρα, από το Θεώρημα 5.32, υπάρχουν k εσωτερικώς διατεταγμένα (x,y)-μονοπάτια στο G^- τα οποία προφανώς υπάρχουν και στο G. Συνέπεια αυτού είναι ότι κάθε (x,y)-διαχωριστής του G^- θα έχει τουλάχιστον k κορυφές, και άρα $\kappa(G\backslash e)(x,y) \neq k-1$. □

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος 5.29, είναι το παρακάτω αποτέλεσμα του Halin που εμφανίστηκε στην [12].

Θεώρημα 5.36. Για κάθε γράφημα G με $\delta(G) > \kappa(G)$ υπάρχει ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε $\kappa(G\backslash e) = \kappa(G)$.

Απόδειξη. Λόγω των Παρατηρήσεων 5.26 και 5.27, είναι αρκετό να δείξουμε ότι αν όλες οι ακμές του G είναι κρίσιμες, τότε το G περιέχει κορυφή βαθμού k.

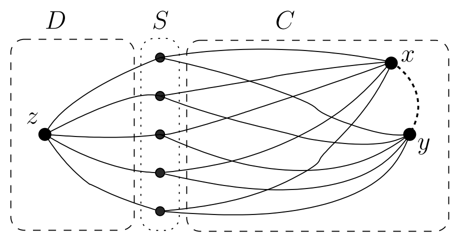
Αφού $\kappa(G) = k$, το G περιέχει τουλάχιστον έναν διαχωριστή μεγέθους k. Έστω S ένας τέτοιος διαχωριστής για τον οποίο η μικρότερη από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G\backslash S$ είναι η μικρότερη δυνατή. Θα δείξουμε ότι η συνιστώσα αυτή έχει μόνο μια κορυφή v, άρα $N_G(v) = S$, συνεπώς $\deg_G(v) = k$. Καλούμε την συνιστώσα αυτή C και θέτουμε $D = G\backslash S\backslash V(C)$ (δηλ. το D είναι η ένωση όλων των άλλων συνιστωσών του $G\backslash S$). Παρατηρούμε ότι $n(D) \ge n(C)$ και υποθέτουμε, με σκοπό το άτοπο, ότι υπάρχει μια ακμή $e = \{x,y\}$ με $x,y \in V(C)$.

Θέτουμε $G^- = G\backslash e$ και από το Λήμμα 5.35 έχουμε ότι το G' θα περιέχει έναν (x,y)-διαχωριστή R μεγέθους $k-1$.

Έστω v^* μια νέα κορυφή που δεν ανήκει στο G. Ορίζουμε

$$G^* = G^-[S \cup C] \cup (\{v^*\} \cup S, \{\{v^*, w\} \mid w \in S\})$$

και ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν k εσωτερικώς διακεκριμένα (v^*,x)-μονοπάτια στο G^*. Πράγματι, αν δεν είναι έτσι, θα υπάρχει (Θεώρημα 5.29) ένας (v^*,x)-διαχωριστής S^* στο G^* μεγέθους $\le k-1$. Αφού $S^* \subseteq S \cup V(C)$, το S^* είναι και (z, x)-διαχωριστής του G^- όπου z οποιαδήποτε κορυφή του D. Αυτό όμως σημαίνει ότι το $S^+ = S^* \cup \{y\}$ είναι (z, x)-διαχωριστής του G. Όμως το ότι $S^+ \subseteq S \cup V(C)$ και $S^+ \neq S$ σημαίνει ότι η συνεκτική συνιστώσα C^+ του $G \backslash S^+$ που περιέχει το x έχει λιγότερες κορυφές από την C, πράγμα που αντιφάσκει στην επιλογή του S. Καταλήγουμε ότι υπάρχει μια (x, S)-βεντάλια $\mathcal{W}_x$ στο G^* η οποία περιέχει μονοπάτια του G^-. Άρα η $\mathcal{W}_x$ είναι μια (x, S)-βεντάλια και στο G^-. Ομοίως έχουμε την ύπαρξη μιας (y, S)-βεντάλιας $\mathcal{W}_y$ στο G^-.



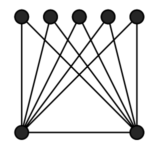
Σχήμα 5.7: Παράδειγμα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.36.

Προφανώς το S είναι ελάχιστος διαχωριστής του G. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κορυφή $z \in V(D)$ υπάρχουν k εσωτερικώς διακεκριμένα (z, x)-μονοπάτια στο G (Θεώρημα 5.29) πράγμα που πιστοποιεί την ύπαρξη μιας (z, S)-βεντάλιας $\mathcal{W}_z$ στο G και άρα και στο G^- (βλ. Παρατήρηση 5.33).

Θα δείξουμε τώρα ότι $V(D) \subseteq R$. Έστω, αντί για αυτό, υπάρχει κορυφή $z \in V(D) \backslash R$. Η ύπαρξη στο G^- των $\mathcal{W}_z$ και $\mathcal{W}_x$ συνεπάγεται την ύπαρξη, στο G^-, k εσωτερικώς διακεκριμένων (x, z)-μονοπατιών. Ομοίως η ύπαρξη στο G^- των $\mathcal{W}_z$ και $\mathcal{W}_y$ συνεπάγεται την ύπαρξη, στο G^-, στο k εσωτερικώς διακεκριμένων (z, y)-μονοπατιών. Άρα το R, από την στιγμή που δεν περιέχει το z, δεν μπορεί να διαχωρίσει το x από το z και το z από το y που σημαίνει ότι το R δεν μπορεί να διαχωρίσει το x από το y, άτοπο (βλ. Σχήμα 5.7).

Το γεγονός ότι $V(D) \subseteq R$ ήδη μας υποδεικνύει ότι το μέγεθος του $V(D)$ είναι αρκετά μικρό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι $|V(D)| < |V(C)|$. Για το σκοπό αυτό, διαμερίζουμε το R σε τρία σύνολα, το $R_1 = R \cap V(D) = V(D)$, το $R_2 = R \cap S$ και το $R_3 = R \cap V(C)$. Μια και το R είναι ένας (x, y)-διαχωριστής του G^-, θα ισχύει ότι για κάθε κορυφή w του $S \backslash R$ θα υπάρχει μια κορυφή του R στις κορυφές των μονοπατιών του $\mathcal{W}_x$ και $\mathcal{W}_y$ που συνδέουν το x με το w και το w με το y αντίστοιχα. Από την άλλη μεριά, μια κορυφή του R μπορεί να ανήκει σε το πολύ δύο τέτοια μονοπάτια. Άρα $|R_3| \geq \frac{1}{2}|S \backslash R|$. Παρατηρούμε ότι $|R_2| = |S| - |S \backslash R|$, άρα $|R_3| \geq \frac{1}{2}(|S| - |R_2|) = \frac{1}{2}(k - |R_2|)$. Συμπεραίνουμε ότι $|V(D)| = |R_1| =$

$|R| - |R_3| - |R_2| = k - 1 - |R_3| - |R_2| \leq k - |R_2| - \frac{1}{2}(k - |R_2|) - 1 = \frac{1}{2}(k - |R_2|) - 1 < \frac{1}{2}(k - |R_2|) \leq |R_3| \leq |V(C)|$. □



Σχήμα 5.8: Το γράφημα $K^+_{2,5}$.

Ορισμός 5.37. Για $r \geq 0$, ορίζουμε $K^+_{2,r} = K_2 * (r \cdot K_1)$ και καλούμε την ακμή του K_2 στο $K^+_{2,r}$ *κέντρο* του $K_{2,r}$.

Λήμμα 5.38. Έστω G k-συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον $k+2$ κορυφές ($k \geq 2$). Έστω επίσης κορυφή $v \in V(G)$ βαθμού k τετοια ώστε $K^+_{2,k-2} \subseteq_{\pi\alpha} G[N_G(v)]$. Τότε το G περιέχει ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε $\kappa(G \backslash e) = k$.

Απόδειξη. Έστω $e = \{x, y\}$ η ακμή του $G[N_G(v)]$ που αντιστοιχεί στο κέντρο του $K^+_{2,k-2}$. Έστω $S = v \cup N_G(v) \backslash \{x, y\}$. Προφανώς, $|S| = k - 1$ και από την Παρατηρήση 5.27, το γράφημα $G^- = G \backslash S$ είναι συνεκτικό. Παρατηρούμε ότι αν το $G \setminus S \setminus e$ είναι συνεκτικό, διαφορετικά το σύνολο $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{y\}$ είναι επίσης διαχωριστής του G, πράγμα αδύνατον γιατί $|S'| = k-1$. Άρα υπάρχει ένα μονοπάτι P στο G του οποίου οι εσωτερικές κορυφές είναι ξένες με το S. Θεωρούμε τώρα το γράφημα $G \backslash e$ που περιέχει $k - 1$ εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια μήκους 2 με εσωτερικές κορυφές αυτές του S. Τα μονοπάτια αυτά, μαζί με το P και με την χρήση του Θεωρήματος 5.29 πιστοποιούν ότι $\kappa_{G^-}(x, y) = k$. Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 5.35 έχουμε ότι η e δεν είναι κρίσιμη ακμή του G και άρα μπορεί να αφαιρεθεί από το G χωρίς να μειώσει την συνεκτικότητά του. □

Ορισμός 5.39. Μια κορυφή v ενός γραφήματος G καλείται *απλοειδής* (simplicial) αν η γειτονιά της στο G ενάγει πλήρες γράφημα.

Μια άμεση εφαρμογή του Λήμματος 5.38 είναι ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των δισυνεκτικών γραφημάτων.

Λήμμα 5.40. Αν ένα γράφημα G είναι δισυνεκτικό τότε είτε θα είναι ισόμορφο με το το K_3 είτε θα περιέχει μια μη-απλοειδή κορυφή βαθμού 2 της οποίας η διάλυση μας δίνει ένα δισυνεκτικό γράφημα ή περιέχει μια ακμή της οποίας η αφαίρεση μας δίνει ένα δισυνεκτικό γράφημα.

Απόδειξη. Το Λήμμα είναι προφανές αν το G περιέχει μη-κρίσιμες ακμές. Αν τώρα όλες οι ακμές του G είναι κρίσιμες τότε από το Θεώρημα 5.36, το G θα περιέχει κάποια κορυφή v βαθμού 2. Παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 5.38, η v δεν είναι απλοειδές. Αν τώρα το G δεν είναι ισόμορφο με το K_3 τότε $n(G) \geq 4$ και από την Παρατήρηση 5.18 το G/v είναι επίσης 2-συνεκτικό. $\square$

5.3 3-συνεκτικότητα

Λήμμα 5.41. Κάθε 3-συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές περιέχει ακμή e τέτοια ώστε το γράφημα G/e να είναι 3-συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω G ένα 3-συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές. Για κάθε ακμή e του G καλούμε v_e την κορυφή που προκύπτει μετά την σύνθλιψή της και G_e το γράφημα G/e. Υποθέτουμε, προς άτομο, ότι για κάθε ακμή e το γράφημα G_e δεν είναι 3-συνεκτικό και άρα περιέχει έναν 2-διαχωριστή S. Συνεπάγεται τότε ότι η κορυφή v_e ανήκει στο S καθώς μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε διαχωριστής του G_e που δεν περιέχει την v_e είναι και διαχωριστής του G.

Για κάθε $e \in E(G)$ θέτουμε $X_e = \{x \in V(G_e) \mid \{v_e, x\}$ διαχωριστής του $G_e\}$. Παρατηρούμε τότε ότι για κάθε $e = \{a, b\}$ και $x \in X_e$ το $\{a, b, x\}$ αποτελεί 3-διαχωριστή του G. Καλούμε x_e το στοιχείο του X_e για το οποίο η συνιστώσα του $G \setminus \{a, b, x_e\}$ με το μέγιστο πλήθος κορυφών, έστω C_{e,x_e}, έχει το μεγαλύτερο δυνατό μέγεθος. Τέλος, έστω $e = \{a, b\}$ η ακμή για την οποία το C_{e,x_e} έχει το μέγιστο δυνατό μέγεθος, έστω $S_e = \{a, b, x\}$ και έστω H κάποια άλλη συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S_e$.

Αφού το G είναι 3-συνεκτικό το S_e είναι ένας ελάχιστος και άρα και ελαχιστικός διαχωριστής του. Παρατηρούμε τότε ότι κάθε κορυφή του S_e έχει τουλάχιστον έναν γείτονα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S_e$. Έστω z ο γείτονας της x_e στο H. Τότε, για την ακμή $f = \{x_e, z\}$ υπάρχει κορυφή $x_f \in X_f$ για την οποία το $S_f = \{x_e, z, x_f\}$ είναι διαχωριστής του G. Παρατηρούμε επίσης ότι το γράφημα $J = G[V(C_{e,x_e}) \cup \{a, b\}]$ είναι συνεκτικό υπογράφημα του $G \setminus \{x_e, z\}$.

Αν η x_f δεν είναι κορυφή του J τότε το J είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα του $G \setminus \{x_e, z, x_f\}$ με $|V(J)| = V(C_{e,x_e}) + 2$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της επιλογής της ακμής e. Συνεπώς $x_f \in V(J)$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x_f \in \{a, b\}$ τότε το γράφημα $J - x_f$ παραμένει συνεκτικό υπογράφημα του $G - S_j$ με γνήσια περισσότερες κορυφές από την C_{e,x_e}, το οποίο όπως πριν αντιφάσκει στην επιλογή της e. Άρα $x_f \in V(C_{e,x_e})$.

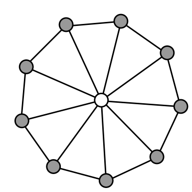
Θα αποδείξουμε τώρα ότι το γράφημα $J \backslash x_f$ είναι συνεκτικό. Έστω προς άτοπο ότι η κορυφή x_f είναι διαχωριστής του J και D μία συνιστώσα του που δεν περιέχει καμμία από τις a, b (οι a, b είναι συνδεδεμένες στο $J \setminus x_f$). Παρατηρούμε τότε ότι το σύνολο $\{x_e, x_f\}$ διαχωρίζει τις κορυφές του D από τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος (αφού τις διαχωρίζει από τον διαχωριστή S_e), το οποίο είναι άτοπο λόγω της 3-συνεκτικότητας του G. Συνεπώς, ισχύει ότι το $J \backslash \{x_f\}$ είναι συνεκτικό. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το $J \setminus x_f$ είναι συνεκτικό υπογράφημα του $G \setminus S_f$ και $|J| = V(C_{e,x_e}) + 1$ αφού επιπλέον των κορυφών του $C_{e,x_e} - x_f$ περιέχει τις κορυφές a, b. Καταλήγουμε πάλι σε άτοπο, στην επιλογή της ακμής e και αρα το G περιέχει μία ακμή e τέτοια ώστε το γράφημα G/e να είναι 3-συνεκτικό. □

Το Λήμμα 5.41 μας δίνει τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 5.42. Για κάθε 3-συνεκτικό γράφημα G υπάρχει μια ακολουθία $m \geq 1$ 3-συνεκτικών γραφημάτων $G_1, \ldots, G_m$ τέτοια ώστε $G_1 = G$, $G_m = K_4$ και για κάθε $i = 1, \ldots, m-1$, το G_{i+1} είναι το αποτέλεσμα της σύνθλιψης μιας ακμής του G_i.

Πόρισμα 5.43. Για κάθε γράφημα G με $n(G) \geq 4$, αν το G είναι 3-συνεκτικό τότε $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$.

Ορισμός 5.44. Καλούμε *τροχό με r ακτίνες* το γράφημα $W_r = C_r * K_1$. Ένα γράφημα καλείται *τροχός* αν είναι ισόμορφο με το W_r για κάποιο $r \geq 3$.



Σχήμα 5.9: Ο τροχός W_9.

Λήμμα 5.45. Αν ένα γράφημα είναι 3-συνεκτικό, και δεν είναι τροχός, τότε ή υπάρχει μια ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε το $G \backslash e$ να είναι 3-συνεκτικό ή υπάρχει μια ακμή $e \in E(G)$, που δεν περιέχεται σε κανένα τρίγωνο του G, τέτοια ώστε το G/e να είναι 3-συνεκτικό.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο αριθμό των κορυφών του G. Προφανώς αν $G = K_4$ τότε το λήμμα ισχύει γιατί $K_4 \simeq W_3$. Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάθε γράφημα με λιγότερο από n κορυφές. Έστω λοιπόν $n(G) = n$. Για ευκολία θα καλούμε *απλές* τις ακμές του G που δεν περιέχονται σε κανένα τρίγωνο του G. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η αφαίρεση μιας οποιασδήποτε ακμής από το G το κάνει δισυνεκτικό, δηλαδή ότι όλες οι ακμές του G είναι κρίσιμες. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η σύνθλιψη κάθε απλής ακμής στο G δημιουργεί ένα δισυνεκτικό γράφημα. Αυτό σημαίνει ότι:

> (*) *Για κάθε απλή ακμή $e = \{a, b\}$ του G υπάρχει μια κορυφή v_e η οποία είναι αρθρική κορυφή του $G_e = (G \backslash a) \backslash b$.*

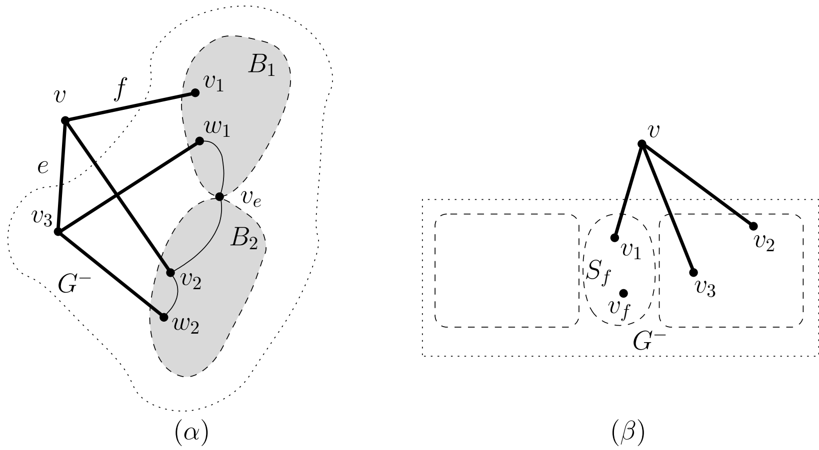
Με βάση τις υποθέσεις που κάναμε πριν αρκεί να αποδείξουμε ότι το γράφημα G είναι ισόμορφο με κάποιον τροχό W_r.

Από το Θεώρημα 5.36, υπάρχει κορυφή $v \in V(G)$ που να έχει ακριβώς τρεις γειτονικές κορυφές, έστω τις v_1, v_2, v_3. Από το Λήμμα 5.38 και αφού $K_3 \simeq K_{2,1}^{+}$, το πολύ δύο ζεύγη από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 είναι ακμές του G. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι ακριβώς δύο ζεύγη από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 είναι κορυφές του G. Θα αποκλείσουμε λοιπόν τις δύο άλλες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: κανένα ζεύγος από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 δεν είναι ακμή του G.

Έστω $e = \{v, v_3\}$ και έστω v_e μια αρθρική κορυφή του G_e (λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι η e είναι απλή). Παρατηρούμε ότι οι κορυφές v_1 και v_2 είναι διαφορετικές από την v_e και επίσης βρίσκονται σε διαφορετικά τεμάχια B_1, B_2 αντίστοιχα του G_e, διαφορετικά το σύνολο $\{v_3, v_e\}$ είναι διαχωριστής του G. Διαπιστώνουμε επίσης ότι δεν υπάρχει άλλο τεμάχιο B στο G_e γιατί αλλιώς το σύνολο $\{v, v_3\}$ είναι διαχωριστής του G. Η κορυφή v_3 πρέπει να έχει γειτονικές κορυφές και στο $B_1 \backslash v_e$ και στο $B_2 \backslash v_e$. Πράγματι, αν η v_3 έχει την γειτονιά της μόνο στο B_1 (B_2) τότε το $\{v, v_2\}$ ($\{v, v_1\}$) είναι διαχωριστής του G. Επίσης η v_3 πρέπει να έχει κάποια γειτονική κορυφή w_i στο $B_i \backslash v \backslash v_i$, $i = 1, 2$, διαφορετικά το $\{v_i, v\}$ θα είναι διαχωριστής του G για κάποιο $i = 1$ ή 2.

Παρατηρούμε ότι η ακμή $f = \{v, v_1\}$ είναι απλή. Συνέπεια αυτού είναι ότι το $S_f = \{v_1, v_f\}$ είναι διαχωριστής του δισυνεκτικού γραφήματος $G^- = G \backslash v$ (βλ. Σχήμα 2.3.(α)). Μια και τα $\{v, v_1, v_i\}, i = 2, 3$ δεν είναι διαχωριστές του G, έχουμε ότι $v_f \notin \{v_2, v_3\}$. Παρατηρούμε (βλ. Σχήμα 2.3.(β)) ότι αν τα v_2, v_3 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G^- \backslash S_f$ τότε τότε το S_f θα είναι διαχωριστής του G πράγμα αδύνατον. Άρα κάθε μονοπάτι του G^- που συνδέει τις v_2 και v_3, θα περιέχει κάποια κορυφή του S_f άτοπο γιατί υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα (v_2, v_3)-μονοπάτια στο G^- που αποφεύγουν το v_1 (βλ. Σχήμα 2.3.(α)).



Σχήμα 5.10: (α) Μια αναπαράσταση του γραφήματος G και των συνεκτικών συνιστωσών του G_e στην πρώτη περίπτωση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.45. (β) το σύνολο S_f ως διαχωριστής του G.

Περίπτωση 2: μόνο ένα, έστω $\{v_1, v_2\}$, ζεύγος από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 είναι ακμή του G.

Παρατηρούμε ότι η $e = \{v, v_3\}$ είναι απλή ακμή του G. Θέτουμε $S = \{v, v_3, v_e\}$ και έστω C και D διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι $\{v_1, v_2\} - \{v_e\} \in C$. Τότε οι τρεις γειτονικές κορυφές του v στο G βρίσκονται είτε στο S είτε στην C και άρα το v δεν έχει γειτονική κορυφή στην D, άρα το $\{v_3, v_e\}$ είναι διαχωριστής του G, άτοπο.

Καταλήγουμε ότι δύο ζεύγη, έστω οι $\{v_1, v_2\}$ και $\{v_1, v_3\}$ από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 είναι ακμές του G.

Ορίζουμε ως G' το γράφημα που προκύπτει από το $G \backslash v$ αν του προσθέσουμε την ακμή $\{v_2, v_3\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το G' είναι 3-συνεκτικό. Πράγματι, αν αυτό δεν είναι σωστό, θα υπάρχει ένας διαχωριστής S του G όπου $|S| \leq 2$. Αφού οι κορυφές v_1, v_2, v_3 ενάγουν κλίκα στο G' θα ανήκουν και οι τρεις στην ένωση του S με κάποια από τις συνεκτικές συνιστώσες, έστω την C, του $G \backslash S$. Τότε όμως το S θα είναι διαχωριστής του G, άτοπο.

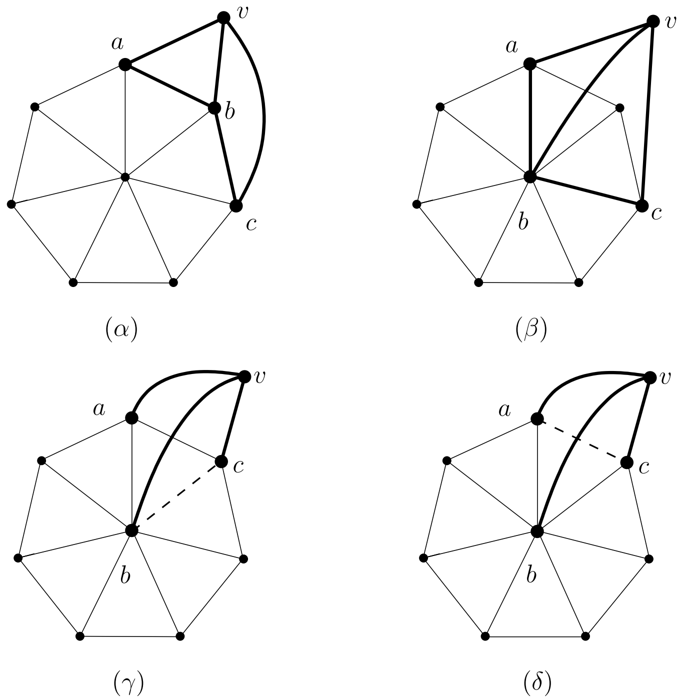
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι όλες οι ακμές του G' εκτός πιθανά από την $e = \{v_2, v_3\}$ είναι κρίσιμες ακμές του G'. Από το Λήμμα 5.35 και το Θεώρημα 5.29, για κάθε μη-κρίσιμη ακμή $f = \{x, y\}$ του G θα υπάρχουν 3 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια στο $G' \backslash f$. Παρατηρούμε ότι τα ίδια (x, y)-μονοπάτια θα υπάρχουν και στο G με την διαφορά ότι αν κάποιο μονοπάτι χρησιμοποιεί την ακμή $\{v_2, v_3\}$ στην θέση του θα χρησιμοποιεί τις ακμές $\{v_2, v\}$ και $\{v, v_3\}$. Πάλι από το Λήμμα 5.35 και το Θεώρημα 5.29 έχουμε ότι η f είναι μη κρίσιμη ακμή στο G, άτοπο.

Αν η $e = \{v_2, v_3\}$ είναι κρίσιμη στο G', θέτουμε $H = G'$, διαφορετικά το γράφημα $G' \backslash e$ είναι 3-συνεκτικό και θέτουμε $H = G' \backslash e$. Σε κάθε περίπτωση, το H είναι 3-συνεκτικό γράφημα όπου όλες οι ακμές είναι κρίσιμες και $n(G) < n(H)$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση που μας δίνει ότι το H είναι είτε τροχός είτε περιέχει μια απλή ακμή f τέτοια ώστε το H/f να είναι 3-συνεκτικό. Θα αποκλείσουμε πρώτα την δεύτερη περίπτωση. Έχουμε ότι $f \neq e$ γιατί είτε $e \notin E(H)$ (αν $= G' \backslash e$) είτε η e δεν είναι απλή ακμή του H (αν $H = G'$). Σε κάθε περίπτωση η f είναι και ακμή του G όπου επίσης είναι απλή άτοπο γιατί το G δεν περιέχει απλές ακμές. Έστω τώρα $H \simeq W_r$ για κάποιο $r \geq 3$. Θα αποκλείσουμε τώρα την περίπτωση όπου $= G' \backslash e$. Παρατηρούμε ότι τότε γράφημα ισόμορφο με το G κατασκευάζεται αν σε κάποιο W_r προσθέσουμε την μια νέα κορυφή v και την συνδέσουμε με τρεις κορυφές a, b, c του W_r που ενάγουν το $K_{1,2}$ στο W_r (υποθέτουμε ότι $\{a, b\}, \{b, c\} \in E(W_r)$ και $\{a, c\} \notin E(W_r)$). Υπάρχουν δύο τρόποι να ενάγουν τρεις κορυφές το $K_{1,2}$: είτε να είναι και οι τρείς στην «περιφέρεια» (βλ. Σχήμα 5.11.(α)) είτε μια από αυτές να είναι στο κέντρο και οι υπόλοιπες να είναι μη-γειτονικές κορυφές της περιφέρειας (βλ. Σχήμα 5.11.(β)). Σε κάθε περίπτωση, η ακμές $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ είναι μη-κρίσιμες ακμές, άτοπο. Η μόνη περίπτωση που μένει είναι όταν $H = G'$ και άρα γράφημα ισόμορφο του G μπορεί να κατασκευαστεί αν σε κάποιο W_r προσθέσουμε μια νέα κορυφή v την συνδέσουμε με τις κορυφές κάποιου τριγώνου του W_r και στην συνέχεια αφαιρέσουμε κάποια από τις ακμές αυτού του τριγώνου. Αν η ακμή του τριγώνου που αφαιρούμε έχει το «κέντρο» του W_r ως άκρο (βλ. Σχήμα 5.11.(γ)) τότε η άλλη ακμή του τριγώνου με άκρο το κέντρο του W_r είναι μη-κρίσιμη. Καταλήγουμε ότι η ακμή που αφαιρούμε είναι «περιφερειακή» του W_r (βλ. Σχήμα 5.11.(δ)) και η αφαίρεσή της δίνει ένα γράφημα ισόμορφο με το W_{r+1} και το λήμμα αποδείχθηκε. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.45 είναι το παρακάτω, γνωστό ως θεώρημα που αποδείχθηκε από τον Tutte το 1961 (βλ. [29]).

Θεώρημα 5.46 (Tutte, 1961)**.** Ένα γράφημα είναι 3-συνεκτικό αν και μόνο αν είναι τροχός ή μπορεί να κατασκευαστεί από έναν τροχό μετά από μια ακολουθία μετασχηματισμών οι οποίοι μπορεί να είναι

- η σύνδεση δύο μη-γειτονικών κορυφών,
- η αντικατάσταση μιας κορυφή v βαθμού ≥ 4 από δύο συνδεδεμένες κορυφές



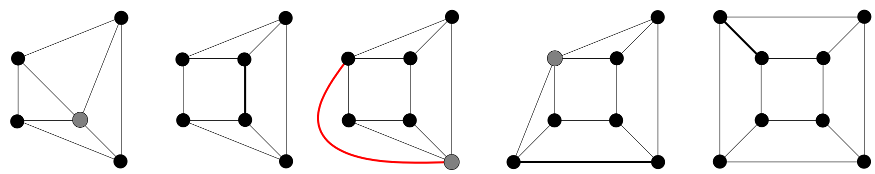
Σχήμα 5.11: Η κατασκευή του W_{r+1} στο τέλος της απόδειξης του Θεωρήματος 5.45.

v_1 και v_2 έτσι ώστε κάθε κορυφή που πριν συνδεόταν με την v να συνδέεται τώρα με ακριβώς μία από τις v_1 και v_2 με τέτοιο τρόπο ώστε, στο προκύπτον γράφημα, οι βαθμοί των νέων κορυφών v_1 και v_2 να είναι τουλάχιστον 3.

Η διατύπωση του παρακάτω λήμματος δεν αναφέρεται στην συνεκτικότητα. Αντίθετα η απόδειξη του την χρησιμοποιεί ισχυρά και με τρόπο παρόμοιο με αυτήν του Θεωρήματος 5.36.

Λήμμα 5.47. Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι αν $\delta(G) \geq 3$, τότε το G περιέχει ένα 3-συνεκτικό γράφημα ως έλασσον.

Απόδειξη. Έστω G αντιπαράδειγμα με ελάχιστο αριθμό κορυφών. Προφανώς το G είναι συνεκτικό και $|V(G)| \geq 5$ γιατί το μοναδικό γράφημα με ελάχιστο βαθμό 3 και < 5 κορυφές είναι το K_4 για το οποίο ισχύει ότι $\kappa(K_4) = 3$. Από το Πόρισμα 5.43, έχουμε ότι $\kappa(G) \leq 2$. Έστω S ελαχιστικός διαχωριστής του G (κανένα υποσύνολό του δεν είναι διαχωριστής) για τον οποίο η μικρότερη, την συμβολίζουμε



Σχήμα 5.12: Ο μετασχηματισμός του K_4 στο Q_8 σύμφωνα με την κατασκευή του Θεωρήματος 5.46.

με C, από τις συνιστώσες του $G\backslash S$ είναι η μικρότερη δυνατή. Επίσης θέτουμε $C^+ = G[S \cup V(C)]$. Παρατηρούμε ότι αν $S = \{x\}$, τότε ο βαθμός της x στην C^+ είναι τουλάχιστον 3, διαφορετικά το $N_{C^+}(x)$ θα περιέχει ως υποσύνολο κάποιον ελαχιστικό διαχωριστή S' του G και άρα η μικρότερη συνιστώσα του $G\backslash S$ έχει λιγότερες κορυφές από το C πράγμα που αντιφάσκει στον τρόπο που ορίσαμε το C. Αφού τώρα $\delta(C^+) \geq 3$, και $n(C^+) < n(G)$, το C^+ περιέχει ένα 3 συνεκτικό γράφημα ως έλασσον το οποίο θα είναι και έλασσον του G, άτοπο. Έστω τώρα $S = \{x, y\}$ και παρατηρούμε ότι υπάρχει (x, y)-μονοπάτι P στο $G\backslash V(C)$ (βλ. Λήμμα 5.33). Συμβολίζουμε με C' το γράφημα που προκύπτει από το C^+ αν προσθέσουμε σε αυτό την ακμή $\{x, y\}$ (αν η ακμή αυτή υπάρχει τότε δεν προσθέτουμε τίποτε). Η ύπαρξη του (x, y)-μονοπατιού P στο $G\backslash V(C)$ συνεπάγεται ότι $C' \leq_{\epsilon\lambda} G$. Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε κορυφή του S έχει βαθμό τουλάχιστον 3 στο C', διαφορετικά είτε το $N_{C'}(x)$ είτε το $N_{C'}(y)$ θα περιέχει ως υποσύνολο κάποιον ελαχιστικό διαχωριστή του G. Ομοίως με πριν, αυτό όμως αντιφάσκει τρόπο που ορίσαμε το C. Αφού λοιπόν $\delta(C') \geq 3$ και $n(C') < n(G)$ το C', άρα και το G θα περιέχει ένα 3-συνεκτικό γράφημα ως έλασσον, άτοπο. $\square$

Το Πόρισμα 5.43 και το Λήμμα 5.47 μας δίνουν το επόμενο θεώρημα το οποίο αποδείχθηκε για πρώτη φορά στην [3].

Θεώρημα 5.48 (Dirac). Για κάθε γράφημα G, $\delta(G) \geq 3 \Rightarrow K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$.

5.4 k-συνεκτικά υπογραφήματα

Έστω $\kappa^*(G) = \max\{k \mid G \text{ περιέχει ένα } k\text{-συνεκτικό υπογράφημα }\}$.

Θεώρημα 5.49. Κάθε γράφημα G με $m(G) \geq (2k-1)(n(G)-k)$ περιέχει ένα k-συνεκτικό υπογράφημα.

Απόδειξη. Το θεώρημα ισχύει αν $n(G) = 1$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε γράφημα με $< n$ κορυφές. Έστω τώρα γράφημα G όπου $n(G) = n$, $m(G) \geq (2k-1)(n(G)-k)$ και έστω S ένας ελάχιστος διαχωριστής του G. Αν $|S| \geq k$ τότε το G είναι k-συνεκτικό και το θεώρημα ισχύει. Έστω τώρα $|S| < k$ και έστω C_1 κάποια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$. Έστω επίσης $G_1 = G[V(C_1) \cup S]$ και $G_2 = G \backslash V(C_1)$ (είναι φανερό ότι $S = V(G_1) \cap V(G_2)$). Από την κατασκευή των G_1, G_2, έχουμε ότι

$$m(G) \leq m(G_1) + m(G_2) \quad \text{και} \quad n(G_1) + n(G_2) = n(G) + |S|.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει $h \in \{1, 2\}$ ώστε $m(G_h) \geq (2k-1)(n(G_h)-k)$, διαφορετικά,

$$\begin{aligned}
(2-1)(n(G) - k) &\leq m(G) \\
&\leq m(G_1) + m(G_2) \\
&< (2k-1)(n(G_1) + n(G_2) - 2k)) \\
&= (2k-1)(n(G) + |S| - 2k) \\
&< (2k-1)(n(G) - k)),
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Αφού $n(G_i) < n, i = 1, 2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στο G_h από την οποία προκύπτει ότι το G_h περιέχει ένα k-συνεκτικό υπογράφημα. Τότε το θεώρημα ισχύει αφού το G_h είναι υπογράφημα του G. □

Η ιδέα της παραπάνω απόδειξης εμφανίστηκε στην [14].

Πόρισμα 5.50. Κάθε γράφημα G περιέχει υπογράφημα H για το οποίο $\kappa(H) \geq \frac{\epsilon(G)}{2}$ (ή αλλιώς, $\kappa^*(G) \geq \frac{\epsilon(G)}{2}$).

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\frac{\epsilon(G)}{2} \geq k$, τότε $\kappa^*(G) \geq k$. Πράγματι, $\frac{\epsilon(G)}{2} \geq k$ αν και μόνο αν $m(G) \geq 2k \cdot n(G) \geq (2-1)(n(G)-k)$ το οποίο, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.49, συνεπάγεται ότι το G περιέχει k-συνεκτικό υπογράφημα, δηλαδή $\kappa^*(G) \geq k$. □

Ασκήσεις Κεφαλαίου

5.1 (☆☆☆). Αν το γράφημα G έχει k συνεκτικές συνιστώσες, τότε $K_k \subseteq \overline{G}$.

5.2 (☆☆☆). Για κάθε συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές υπάρχει μια απαρίθμηση $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ των ακμών του τέτοια ώστε το γράφημα $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ να είναι συνεκτικό για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

5.3 (☆☆☆). Κάθε δύο μέγιστα μονοπάτια σε ένα συνεκτικό γράφημα έχουν κάποια κοινή κορυφή.

5.4 (☆☆☆). Ένα γράφημα είναι μονοπάτι αν και μόνο αν περιέχει *ακριβώς* δύο μη-αρθρικές κορυφές.

5.5 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι αν αφαιρέσουμε μία ακμή κύκλου σε ένα συνεκτικό γράφημα G, το G θα παραμείνει συνεκτικό.

5.6 (☆☆☆). Έστω δισυνεκτικό γράφημα G όπου $K_{2,3} \nleq_{\epsilon\lambda} G$. Να αποδείξετε ότι για κάθε τρείς κορυφές του G, υπάρχει κύκλος που να περνάει και από τις τρεις.

5.7 (☆☆☆). Κάθε γράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές που δεν είναι αρθρικές.

5.8 (☆☆☆). Δείξτε ότι ένα γράφημα δεν περιέχει κύκλους άρτιου μήκους αν και μόνο αν κάθε τεμάχιό του είναι είτε το K_1, είτε το K_2, είτε κύκλος περιττού μήκους.

5.9 (☆☆☆). Αποδείξτε άμεσα το Θεώρημα 5.24 χωρίς την χρήση του Λήμματος 5.38 .

5.10 (☆☆☆). Κάθε μη δισυνεκτικό γράφημα περιέχει δύο τεμάχια το καθένα από τα οποία περιέχει ακριβώς μια αρθρική κορυφή.

5.11 (☆☆☆). Έστω G γράφημα με a συνεκτικές συνιστώσες και b τεμάχια. Τότε,

$$b - a = \sum_{v \in V(G)} (t(v) - 1)$$

όπου $t(v)$ είναι το πλήθος των τεμαχίων που περιέχουν την κορυφή v.

5.12 (☆☆☆). Αν τα άκρα μιας ακμής ενός δισυνεκτικού γραφήματος είναι διαχωριστής του τότε η αφαίρεση αυτής της ακμής δεν πλήττει την δισυνεκτικότητά του.

5.13 (☆☆☆). Ένα συνεκτικό 4-κανονικό γράφημα με n τεμάχια έχει $n-1$ αρθρικές κορυφές.

5.14 (☆☆☆). Ένα δισυνεκτικό γράφημα περιέχει τουλάχιστον τρεις ακμές των οποίων τα άκρα δεν είναι διαχωριστές του.

5.15 (☆☆☆). Βρείτε μια ακολουθία γραφημάτων σύμφωνη με το Λήμμα 5.41 η οποία να μετασχηματίζει το Q_8 στο K_4 (η αντίστροφη ακολουθία του Σχήματος 5.12 δεν είναι η απάντηση αφού περιλαμβάνει αφαίρεση μια ακμής).

5.16 (☆☆☆). Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι: $2\kappa^*(G) \geq \epsilon(G) \geq \frac{\kappa(G)}{2}$.

5.17 (☆☆☆). Αν $\delta(G) \geq (n(G) + k - 2)/2$, τότε $\kappa(G) \geq k$.

5.18 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρα γραφήματα για τα οποία το Θεώρημα 5.49 ισχύει με ισότητα.

5.19 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τετοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάθε γράφημα G όπου $\delta(G) \geq f(k)$ είναι k συνεκτικό.

5.20 (☆☆☆). Έστω $\epsilon^*(G) = \max\{k \mid \exists H \subseteq_{\upsilon\pi} G : \epsilon(H) \geq k\}$. Αποδείξτε τις τρεις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{array}{rcccl}
\epsilon^*(G) & \leq & \delta^*(G) & \leq & 2 \cdot \epsilon^*(G) \\
\kappa^*(G) & \leq & \delta^*(G) & \leq & 4 \cdot \kappa^*(G) \\
\epsilon^*(G) & \leq & 2 \cdot \kappa^*(G) & \leq & 4 \cdot \epsilon^*(G)
\end{array}$$

5.21 (☆☆☆). Έστω γράφημα G χωρίς απομονωμένες κορυφές του οποίου κάθε εναγόμενο υπογράφημα έχει πλήθος ακμών διαφορετικό του 2. Δείξτε ότι το G είναι πλήρες.

5.22 (☆☆☆). Ένα δισυνεκτικό γράφημα έχει ίσο αριθμό κορυφών και ακμών αν και μόνο αν είναι κύκλος.

5.23 (☆☆☆). Δείξτε ότι κάθε δισυνεκτικό γράφημα έχει τουλάχιστον τόσες ακμές όσο και κορυφές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΕΝΤΡΑ

6.1 Δάση και δέντρα

Ορισμός 6.1. Αν ένα γράφημα δεν περιέχει κύκλους, τότε καλείται *άκυκλο* ή αλλιώς *δάσος*. Αν ένα γράφημα είναι άκυκλο και συνεκτικό τότε καλείται *δέντρο*. Μια κορυφή βαθμού το πολύ 1 σε ένα δέντρο (ή δάσος) καλείται *φύλλο* του δέντρου (ή του δάσους).

Θεώρημα 6.2. Ένα γράφημα G είναι δέντρο αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με ένα μοναδικό μονοπάτι.

Απόδειξη. Αν δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ συνδέονται με διαφορετικά μονοπάτια P_1 και P_2 τότε κάποια ακμή $e = \{x, y\}$ του P_1 δεν θα είναι ακμή του P_2. Παρατηρούμε ότι το $H = (P_1 \cup P_2)\backslash e$ είναι συνεκτικό υπογράφημα του G και άρα το H περιέχει μονοπάτι P που συνδέει τις (μη συνδεδεμένες) κορυφές x και y στο H. Παρατηρούμε ότι $P \subseteq G\backslash e$ και ότι $P \cup (\{x, y\}, \{\{x, y\}\})$ είναι ένας κύκλος στο G.

Έστω τώρα γράφημα G όπου κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με ένα μοναδικό μονοπάτι. Προφανώς το γράφημα είναι συνεκτικό. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, υποθέτουμε ότι τότε το G είναι δέντρο αν έχει $< n$ κορυφές. Θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και αν το G έχει n κορυφές. Έστω x και y τα άκρα ενός μεγαλύτερου μονοπατιού στο G. Αφού το μονοπάτι αυτό είναι μοναδικό, $\deg_G(x) = 1$. Από την επαγωγική υπόθεση, το $G\backslash x$ είναι δέντρο που παραμένει δέντρο μετά την προσθήκη της κορυφής x. $\square$

Παρατήρηση 6.3. *Το δεύτερο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2 μπορεί επίσης να αποδειχτεί παρατηρώντας ότι αν το G δεν είναι δέντρο, θα πρέπει να περιέχει κύκλο πράγμα που σημαίνει ότι θα υπάρχουν δύο κορυφές που να συνδέονται με διαφορετικά μονοπάτια.*

Θεώρημα 6.4. Αν ένα γράφημα G είναι δέντρο, τότε $m(G) = n(G) - 1$.

Απόδειξη. Αν το γράφημα G είναι δέντρο, τότε είναι συνεκτικό και από το Θεώρημα 5.10, έχουμε ότι $m(G) \geq n(G) - 1$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι $m(G) \leq n(G) - 1$. Πράγματι αν $m(G) \geq n(G)$, τότε $\epsilon(G) \geq 1$ και από το Λήμμα 4.30 το G περιέχει κύκλο, άτοπο. □

Πόρισμα 6.5. Κάθε δέντρο T με $n(T) \geq 2$ περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

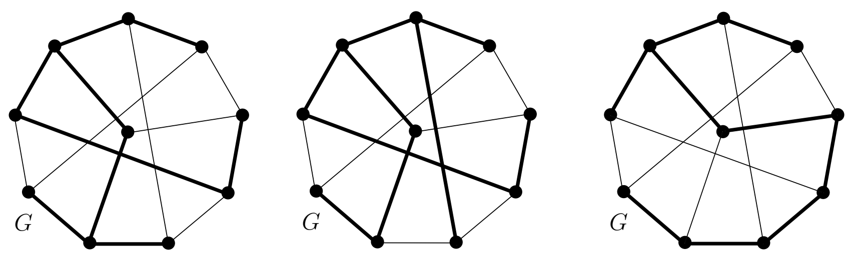
Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι διαφορετικά, από το Θεώρημα 3.3.(1), $2 \cdot m(T) \geq 1 + 2(n(T) - 1) \Rightarrow m(T) \geq n(T) - \frac{1}{2}$ και άρα, $m(T) \geq n(T)$, πράγμα που αντιβαίνει στο Θεώρημα 6.4. □

Λήμμα 6.6. Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον μια κορυφή περιέχει ως υπογράφημα κάθε δέντρο με το πολύ $\delta(G) + 1$ κορυφές.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $\delta(G)$. Το λήμμα είναι προφανές για κάθε γράφημα με $\delta(G) = 1$ ή 2. Υποθέτουμε ότι είναι σωστό για γραφήματα όπου $\delta(G) = k - 1$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γράφημα με ελάχιστο βαθμό $k - 1$ περιέχει κάθε δέντρο με k κορυφές ως υπογράφημα. Έστω τώρα G γράφημα με ελάχιστο βαθμό k και έστω T οποιοδήποτε δέντρο με $k + 1$ κορυφές. Θα δείξουμε ότι το T είναι υπογράφημα του G. Έστω $T^- = T \backslash v$ όπου v οποιοδήποτε φύλλο του T και έστω $G^- = G \backslash y$, όπου y μια οποιαδήποτε κορυφή του G. Έχουμε $\delta(G^-) \geq k - 1$ και $n(T^-) = k$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, το T^- είναι υπογράφημα του G^- και άρα υπάρχει ένας ενδομορφισμός $\sigma : V(T^-) \rightarrow V(G^-)$ που να απεικονίζει ακμές του T σε ακμές του G. Έστω u η μοναδική κορυφή του T που συνδέεται με την v. Αφού η u είναι κορυφή του T^-, αυτή θα αντιστοιχεί σε κάποια κορυφή $u' = \sigma(u)$ του G^-. Για να εντοπίσουμε το T ως υπογράφημα του G πρέπει να «επιστρέψουμε» στο T^- την «χαμένη» κορυφή του κορυφή εμπλουτίζοντας τον ενδομορφισμό σ με την εικόνα του v. Παρατηρούμε ότι στο G^-, η u' θα έχει βαθμό το λιγότερο $k - 1$. Αν, παρόλα αυτά, $\deg_{G^-}(u') \geq k$, τότε η u' θα είναι συνδεδεμένη με κάποια κορυφή x του G^- που δεν είναι η εικόνα μιας κορυφής του T^- και αυτό γιατί $|V(T^-) \backslash \{u'\}| = k - 1$. Τότε όμως μπορούμε να επεκτείνουμε την σ θέτοντας $\sigma(v) = x$ και έχουμε ότι το T είναι υπογράφημα του G' και άρα και του G. Στην περίπτωση τώρα που $\deg(u') = k - 1$, η κορυφή u' θα πρέπει αναγκαστικά να συνδέεται στο G με την κορυφή y, διαφορετικά ο βαθμός της u' στο G θα παραμείνει $k - 1$, άτοπο. Τότε όμως μπορούμε να επεκτείνουμε την σ θέτοντας $\sigma(v) = y$ και έχουμε ότι το T είναι υπογράφημα του G. □

6.2 Παραγόμενα υποδέντρα

Ορισμός 6.7. Έστω γράφημα G. Κάθε παραγόμενο υπογράφημα του G που είναι δέντρο καλείται *παραγόμενο δέντρο του* G.



Σχήμα 6.1: Το γράφημα G και ένα από τα παραγόμενα δέντρα του.

Θεώρημα 6.8. Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν περιέχει κάποιο παραγόμενο δέντρο.

Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα. Μεταξύ των υπογραφημάτων του G που είναι δέντρα έστω T ένα με τον μεγαλύτερο αριθμό κορυφών. Υποθέτουμε, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $V(T) \subsetneq V(G)$ και έστω $v \in V(G) \setminus V(T)$. Ισχύει ότι $|V(T)| \geq 1$ (κάθε κορυφή του G είναι από μόνη της δέντρο), συνεπώς υπάρχει $u \in V(T)$. Έστω P (v, u)-μονοπάτι στο G με ακολουθία κορυφών $x_0 = v, x_1, \ldots, x_r = u$ (το μονοπάτι υπάρχει επειδή το G είναι συνεκτικό). Αφού $v \notin V(T)$, έχουμε ότι η ακμή $\{x_0, x_1\}$ δεν είναι ακμή του T. Μεταξύ των ακμών του P έστω $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}, i \geq 1$ η τελευταία ακμή του P που δεν ανήκει στο T. Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε την e στο T, παίρνουμε ένα νέο δέντρο, που είναι υπογράφημα του G και έχει περισσότερες ακμές από το T (άρα και περισσότερες κορυφές), άτοπο. Συνεπώς το G περιέχει ως υπογράφημα δέντρο T με $V(T) = V(G)$. Έπεται ότι $T \subseteq_{\pi\alpha} G$.

Αν τώρα το G έχει κάποιο παραγόμενο δέντρο, τότε κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται, μέσω του T με κάποιο μονοπάτι που είναι και μονοπάτι του G. Άρα το G είναι συνεκτικό. □

Λήμμα 6.9. Κάθε συνεκτικό γράφημα G όπου $n(G) = m(G) + 1$ είναι δέντρο.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.8, το G περιέχει κάποιο παραγόμενο δέντρο T, το οποίο πρέπει να περιέχει $n(T) - 1$ ακμές (Θεώρημα 6.4). Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακμή του G είναι ακμή του T, άρα $G = T$. □

6.3 Δέντρα με ετικέτες

Είναι ενδιαφέρον να μετρήσει κανείς το πλήθος των διαφορετικών (ως προς τους ισομορφισμούς τους) δέντρα με n κορυφές. Το πρόβλημα αυτό είναι δύσκολο. Μπορούμε όμως να βρούμε ένα άνω φράγμα σε αυτόν τον αριθμό μετρώντας όλα τα διαφορετικά δέντρα με n κορυφές τα οποία φέρουν ετικέτες από το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Ορισμός 6.10. Ένα *δέντρο με ετικέτες* είναι ένα ζεύγος (T, τ) όπου T δέντρο και $\tau : V(T) \to \{1, \ldots, n(T)\}$ μια 1-1 και επί αντιστοιχία του $V(T)$ με τους φυσικούς αριθμούς από 1 μέχρι $n(G)$ (με άλλα λόγια κάθε κορυφή λαμβάνει μια από $n(T)$ διαθέσιμες ετικέτες). Επεκτείνοντας την έννοια του ισομορφισμού θα λέμε ότι δύο δέντρα με ετικέτες (T, τ) και (T', τ') είναι *ισόμορφα* αν υπάρχει ισομορφισμός $\sigma : V(T) \to V(T')$ από το T στο T' τέτοιος ώστε $\forall v \in V(T), \tau(v) = \tau'(\sigma(v))$.

Ορισμός 6.11. Καλούμε ακολουθία *Prüfer τάξης* n κάθε ακολουθία $n - 2$ όρων με φυσικούς αριθμούς από το 1 έως το n (επιτρέπεται η επανάληψη όρων).

Οι ακολουθίες Prüfer προτάθηκαν για πρώτη φορά από τον Prüfer στην [23].

Παρατήρηση 6.12. *Για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν συνολικά n^{n-2} ακολουθίες* Prüfer *τάξης n.*

Θεώρημα 6.13 (Τύπος του Cayley)**.** Το πλήθος των διαφορετικών δέντρων με ετικέτες με n κορυφές είναι ακριβώς n^{n-2}.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{P}_n$ το σύνολο των ακολουθιών Prüfer τάξης n και $\mathcal{T}_n$ το σύνολο των μη-ισόμορφων δέντρων με ετικέτες και n κορυφές. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{T}_n|$.

Έστω $A = (a_1, \ldots, a_{n-2})$ μια ακολουθία Prüfer τάξης n. Θα κατασκευάσουμε από αυτήν ένα δέντρο με ετικέτες χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία:

1. Έστω $S = \{1, \ldots, n\}$.
2. Έστω $T = (V, E)$ όπου V είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο n κορυφών και $E = \emptyset$
3. Έστω $\tau : V \to S$ μια οποιαδήποτε 1–1 και επί αντιστοιχία από το V στο S.
4. Ενώ $\|S\| > 2$,
Έστω x ο μικρότερος όρος στο σύνολο S ο οποίος δεν υπάρχει στην A.
Αφαίρεσε το x από το S,
Έστω y ο πρώτος όρος της ακολουθίας A,
Πρόσθεσε στο E την ακμή $\{\tau^{-1}(x), \tau^{-1}(y)\}$,
Αφαίρεσε από την A τον πρώτο όρο.
5. Πρόσθεσε στο E την ακμή με άκρα τα στοιχεία του S.
6. Επίστρεψε το δέντρο με ετικέτες (T, τ).

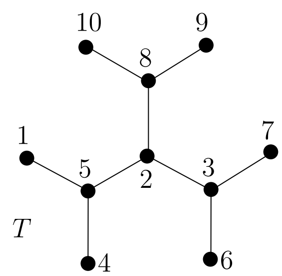
Το γράφημα T προφανώς περιέχει $n - 1$ ακμές. Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι θα είναι και συνεκτικό, συνεπώς από το Λήμμα 6.9 το είναι δέντρο.

Προκειμένου να δείξουμε ότι $|\mathcal{P}_n| \leq |\mathcal{T}_n|$ πρέπει να δείξουμε ότι η παραπάνω διαδικασία αντιστοιχεί διαφορετικές ακολουθίες Prüfer σε διαφορετικά δέντρα με ετικέτες. Για να το αποδείξουμε αυτό θα ορίσουμε την αντίστροφή διαδικασία (δείχνοντας έτσι ότι από ένα δέντρο με ετικέτες μπορεί να προκύψει μία μόνο ακολουθία Prüfer).

Έστω (T, τ) δέντρο με ετικέτες. Θα κατασκευάσουμε από αυτό ακολουθία Prüfer τάξης $n(T)$ χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία:

1. Έστω A η κενή ακολουθία.
2. Ενώ $\|V(T)\| > 2$,
Έστω v το φύλο του T με την μικρότερη ετικέτα,
Έστω w η (μοναδική) γειτονική κορυφή του v στο T,
Πρόσθεσε στην αρχή της A τον αριθμό $\tau(w)$,
Έστω T το δέντρο με ετικέτες που προκύπτει
αν αφαιρέσουμε την κορυφή v από το T.
3. Επίστρεψε την ακολουθία A.

Παρατηρούμε ότι οι δύο παραπάνω διαδικασίες είναι η μία αντίστροφη της άλλης, δηλ. αν η πρώτη μετασχηματίζει την ακολουθία A στο δέντρο με ετικέτες (T, τ) τότε η δεύτερη μετασχηματίζει το (T, τ) στην ακολουθία A. Αυτό σημαίνει



Σχήμα 6.2: Η ακολουθία $[5, 5, 2, 3, 3, 2, 8, 8]$ και το δέντρο με ετικέτες που της αντιστοιχεί.

ότι, όχι μόνο $|\mathcal{P}_n| \leq |\mathcal{T}_n|$, αλλά και $|\mathcal{P}_n| \geq |\mathcal{T}_n|$. Συνεπώς $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{T}_n|$ και το θεώρημα έπεται από την Παρατήρηση 6.12. $\square$

Παρατήρηση 6.14. *Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι υπάρχουν το πολύ n^{n-2} διαφορετικά δέντρα με n κορυφές.*

Ασκήσεις Κεφαλαίου

6.1 (☆☆☆)**.** Κάθε δέντρο με τουλάχιστον 3 φύλλα περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 3.

6.2 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε, με δύο τρόπους, ότι οι κορυφές ενός δέντρου που είναι φύλλα είναι περισσότερες από αυτές που έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 2 (ο πρώτος τρόπος χρησιμοποιεί επαγωγή και ο δεύτερος χρησιμοποιεί το μέσο βαθμό του δέντρου).

6.3 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι αν τα T_1 και T_2 είναι δέντρα, τότε $\delta^*(T_1 \cup T_2) \leq 3$.

6.4 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς 3 δέντρα με διάμετρο 3 και 2007 διαφορετικά ζεύγη αντιδιαμετρικών κορυφών.

6.5 (☆☆☆)**.** Κάθε δέντρο έχει τουλάχιστον $\Delta(T)$ φύλλα.

6.6 (☆☆☆)**.** Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός δάσους είναι δέντρο.

6.7 (☆☆☆)**.** Ένα γράφημα G είναι δάσος αν και μόνο αν έχει $n(G) - m(G)$ συνεκτικές συνιστώσες.

6.8 (☆☆☆)**.** Αν το γράφημα T είναι δέντρο και το G είναι γράφημα τέτοιο ώστε $\delta(G) \geq |n(T)| - 1$, τότε $T \subseteq G$.

6.9 (☆☆☆)**.** Αποδείξτε ότι κάθε δέντρο έχει το πολύ 2 κεντρικές κορυφές.

6.10 (☆☆☆)**.** Ένα γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν περιέχει μόνο ένα παραγόμενο δέντρο.

6.11 (☆☆☆)**.** Πόσες κορυφές έχει ένα πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους k;

6.12 (☆☆☆)**.** Έστω γράφημα G, n κορυφών, το οποίο περιέχει ως εναγόμενο υπογράφημα ένα δέντρο T με περισσότερες από $n-k$ κορυφές για $k \geq 1$. Δείξτε ότι το G δεν περιέχει ως τοπολογικό έλασσον τη διακεκριμένη ένωση k τριγώνων.

6.13 (☆☆☆)**.** Καλούμε *κύρος* κορυφής v σε ένα γράφημα G το άθροισμα των αποστάσεων όλων των κορυφών του G από την G το συμβολίζουμε με $\textbf{κύρος}(G, v)$. Αν το T είναι δέντρο και $e = \{x, y\}$ είναι ακμή του T, τότε καλούμε $T(e, x)$ και $T(e, y)$ τις δύο συνεκτικές συνιστώσες που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε από το T την ακμή $\{x, y\}$. Ορίζουμε ως ισοζύγιο μιας ακμής $e = \{x, y\}$ του T την ποσότητα $\textbf{ισοζύγιο}(G) = |n(T(e, x)) - n(T(e, y))|$ όπου $n(T(e, x))$ και $n(T(e, y))$ είναι το πλήθος των κορυφών των δέντρων (e, x) και $T(e, y)$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι για κάθε δέντρο T και για κάθε ακμή $e = \{x, y\}$ του T, ισχύει ότι $\textbf{ισοζύγιο}(e) = |\textbf{κύρος}(T, x) - \textbf{κύρος}(T, y)|$.

6.14 (☆☆☆)**.** Κάθε συνεκτικό γράφημα περιέχει μονοπάτι μήκους $\min\{2\delta(G), n(G) - 1\}$.

6.15 (☆☆☆)**.** Έστω $G = P_1 \cup \cdots \cup P_r$ όπου $P_1, \ldots, P_r$ μονοπάτια με ανά δύο ξένα σύνολα ακμών (δηλ. $\forall_{i,j,i \neq j} E(P_i) \cap E(P_j) = \emptyset$). Δείξτε ότι το G έχει το πολύ $2r$ κορυφές περιττού βαθμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

7.1 Ενεπίπεδα γραφήματα

Στην ενότητα αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε βασικές έννοιες από την τοπολογία και συγκεκριμένα από την τοπολογία του $\mathbb{R}^2$. Δεδομένου ενός συνόλου σημείων $S \subseteq \mathbb{R}^2$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό ∂S για το σύνορο του S (δηλ. το σύνολο που προκύπτει αν από το κάλυμμα του S αφαιρέσουμε το σύνολο των εσωτερικών του σημείων). Οι περισσότερες παρατηρήσεις της ενότητας αυτής αποδεικνύονται με χρήση εννοιών και θεωρημάτων της τοπολογίας. Επειδή σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τα γραφήματα από τη συνδυαστική τους πλευρά, θα παραλείψουμε τις αποδείξεις που χρησιμοποιούν στοιχεία τοπολογίας και θα περιορίσουμε τη χρήση τοπολογικών εννοιών στους ορισμούς. Επίσης, σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε πολυγραφήματα (δηλ. γραφήματα με πολλαπλές ακμές και θηλιές – βλ. Ορισμό 1.20). Επειδή όλες οι έννοιες που ορίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια μεταφέρονται με φυσικό τρόπο στην ευρύτερη αυτή οικογένεια γραφημάτων θα δίνουμε διευκρινίσεις σχετικά με τη γενίκευση των ορισμών μόνο όταν αυτό είναι απολύτως απαραίτητο.

Ορισμός 7.1. Ένα *ενεπίπεδο πολυγράφημα* είναι ένα ζεύγος $\Gamma = (V, A)$ από πεπερασμένα σύνολα που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

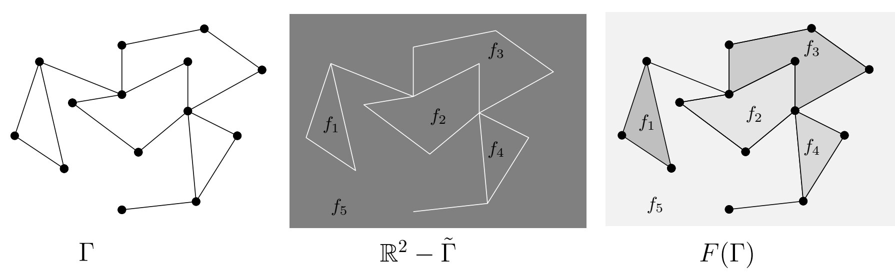
1. Κάθε στοιχείο v του V είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ και το καλούμε *κορυφή* του Γ.

2. Κάθε στοιχείο e του A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, ομοιομορφικό με το ανοικτό διάστημα $(0,1)$. Τα σημεία που αποτελούν το σύνορο ∂e μιας ακμής e καλούνται *άκρα* της e και είναι στοιχεία του V.

3. Διαφορετικές ακμές έχουν κενή τομή.

4. $V \cap (\bigcup_{e\in E} e) = \emptyset$.

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\tilde{\Gamma} = V \cup (\bigcup_{e\in E} e)$ για το σύνολο των σημείων που είναι κορυφές ή ανήκουν σε ακμές του E. Τέλος, σε αντιστοιχία με τους αντίστοιχους ορισμούς για γραφήματα, ορίζουμε $V(\Gamma) = V$ και $E(\Gamma) = A$. Καλούμε ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα *ενεπίπεδο γράφημα* όταν όλες οι ακμές του έχουν δύο ακριβώς άκρα (δεν έχει θηλιές) και δεν υπάρχει ζεύγος ακμών με τα ίδια άκρα (δεν έχει πολλαπλές ακμές).



Σχήμα 7.1: Το ενεπίπεδο γράφημα Γ και οι όψεις του.

Ορισμός 7.2. Έστω ενεπίπεδο πολυγράφημα $\Gamma = (V, E)$. Καλούμε το ζεύγος $\Gamma' = (V', E')$ *ενεπίπεδο υπογράφημα* του Γ αν $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ και το (V', E') είναι ενεπίπεδο πολυγράφημα.

Παρατήρηση 7.3. *Το σύνολο* $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}$ *είναι ανοικτό.*

Ορισμός 7.4. Αν το $\Gamma = (V, E)$ είναι ενεπίπεδο πολυγράφημα τότε καλούμε τις συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}$ *όψεις* του Γ. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $F(\Gamma)$ για το σύνολο των όψεων του Γ. Καλούμε δύο ακμές *ομοτοπικές* όταν ανήκουν στο σύνορο της ίδιας όψης του G.

Παρατήρηση 7.5. *Αν το* $\Gamma = (V, E)$ *είναι ενεπίπεδο πολυγράφημα, τότε θα υπάρχει κάποιος δίσκος* $D \subset \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε* $\tilde{\Gamma} \subseteq D$ *(ορίζουμε ως* δίσκο *του* $\mathbb{R}^2$ *κάθε σύνολο ομοιομορφικό του* $\{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$*). Επίσης υπάρχει ακριβώς μια όψη του* Γ *η οποία να είναι υπερσύνολο του συμπληρώματος κάθε τέτοιου δίσκου* D.

Ορισμός 7.6. Αν το $\Gamma = (V, E)$ είναι ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα, η (μοναδική) όψη $f \in F(\Gamma)$ του Γ η οποία περιέχει ως υποσύνολο το συμπλήρωμα κάθε δίσκου σαν κι αυτόν της Παρατήρησης 7.5 καλείται *εξωτερική όψη* του Γ. Όλες οι άλλες όψεις του Γ καλούνται *εσωτερικές*.

Ορισμός 7.7. Κάθε ενεπίπεδο (πολυ)γράφημα $\Gamma = (V, E)$ *αντιστοιχεί στο* (πολυ) γράφημα

$$G_\Gamma = (V, \{\partial e \mid e \in E(\Gamma)\}).$$

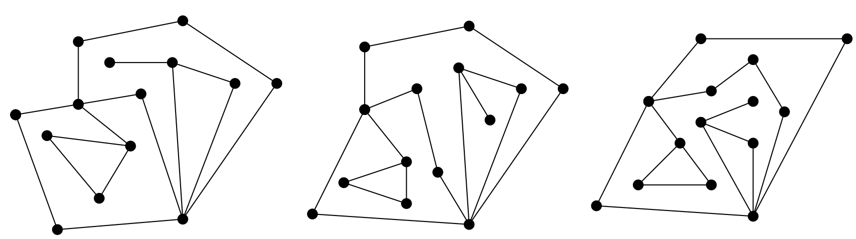
(σε συμφωνία με τον Ορισμό 1.20, αν το Γ έχει πολλαπλές ακμές τότε αντιμετωπίζουμε το σύνολο των ακμών του G_Γ ως πολυσύνολο).

Παρατήρηση 7.8. *Υπάρχουν γραφήματα τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ενεπίπεδα γραφήματα. Από αυτά, το K_5 είναι αυτό που έχει τον μικρότερο αριθμό κορυφών και το $K_{3,3}$ αυτό που έχει τον μικρότερο αριθμό ακμών.*

Ορισμός 7.9. Έστω Γ ενεπίπεδο πολυγράφημα και έστω $f \in F(\Gamma)$. Ορίζουμε ως $\Gamma[f]$ το ενεπίπεδο υπογράφημα του Γ που περιέχει ως σύνολο κορυφών το $V(\Gamma) \cap \partial f$ και ως σύνολο ακμών τις συνεκτικές συνιστώσες του $\partial f \setminus V(\Gamma)$. Μια όψη $f \in F(G)$ καλείται *τριγωνική* αν $G_{\Gamma[f]} \simeq K_3$.

Παρατήρηση 7.10. *Το ενεπίπεδο γράφημα Γ του σχήματος 7.1 έχει δύο τριγωνικές όψεις, τις f_1 και f_4.*

Ορισμός 7.11. Καλούμε ένα πολυγράφημα G *επίπεδο* αν υπάρχει ενεπίπεδο πολυγράφημα Γ που να αντιστοιχεί σε πολυγράφημα ισόμορφο του G (δηλ. $G_\Gamma \simeq G$). Αν το G είναι ένα επίπεδο πολυγράφημα και Γ ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα τέτοιο ώστε $G_\Gamma \simeq G$, τότε λέμε ότι το Γ είναι μια *επίπεδη εμβάπτιση του G*.



Σχήμα 7.2: Διαφορετικές εμβαπτίσεις του ενεπίπεδου γραφήματος G_Γ όπου Γ το ενεπίπεδο γράφημα του Σχήματος 7.1.

Παρατήρηση 7.12. *Ένα επίπεδο πολυγράφημα μπορεί να έχει αρκετά διαφορετικές επίπεδες εμβαπτίσεις (βλ. Σχήμα 7.2).*

Παρατήρηση 7.13. *Η κλάση των επίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς τις σχέσεις* $\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \subseteq_{\tau\pi}$ *και* $\subseteq_{\epsilon\lambda}$.

Ορισμός 7.14 (Σύμβαση). Ο ορισμός του G_Γ μας δίνει το δικαίωμα να χρησιμοποιούμε σε ενεπίπεδα γραφήματα, οποιαδήποτε ιδιότητα που ορίσαμε ως τώρα σε γραφήματα. Αν λοιπόν η Π είναι μια ιδιότητα γραφημάτων, τότε λέμε ότι ένα ενεπίπεδο γράφημα Γ *έχει την ιδιότητα* Π αν το G_Γ έχει την ιδιότητα Π.

Επίσης, μια και υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ακμών ενός απλού ενεπίπεδου πολυγραφήματος Γ και των ακμών του G_Γ, θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό και για τους δύο τύπους ακμών.

Παρατήρηση 7.15. *Έστω* G *και* H *επίπεδα γραφήματα όπου* $G \cap H \simeq K_r, r \leq 2$. *Τότε το γράφημα* $G \cup H$ *είναι επίσης επίπεδο.*

Παρατήρηση 7.16. *Έστω ενεπίπεδο πολυγράφημα* Γ *και έστω* e *ακμή κύκλου*[1] *του* Γ. *Τότε υπάρχουν όψεις* $f_1, f_2 \in F(\Gamma)$ *τέτοιες ώστε* $e \in \partial f_1 \cap \partial f_2$.

Παρατήρηση 7.17. *Κάθε επίπεδη εμβάπτιση ενός δέντρου έχει μόνο μια όψη η οποία είναι εξωτερική.*

Παρατήρηση 7.18. *Ένα ενεπίπεδο γράφημα* Γ *είναι δισυνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε* $f \in F(G)$, *το* $\Gamma[f]$ *είναι κύκλος.*

Παρατήρηση 7.19. *Έστω* Γ *ενεπίπεδο πολυγράφημα και έστω* Λ *κύκλος του* Γ *(δηλ. υπογράφημα του* Γ *που είναι κύκλος). Τότε κάθε μονοπάτι του* Γ *(δηλ. υπογράφημα του* Γ *που είναι μονοπάτι) που ενώνει κορυφές που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του* $\mathbb{R}^2 \backslash \tilde{\Lambda}$, *θα περιέχει κάποια κορυφή του* Λ.

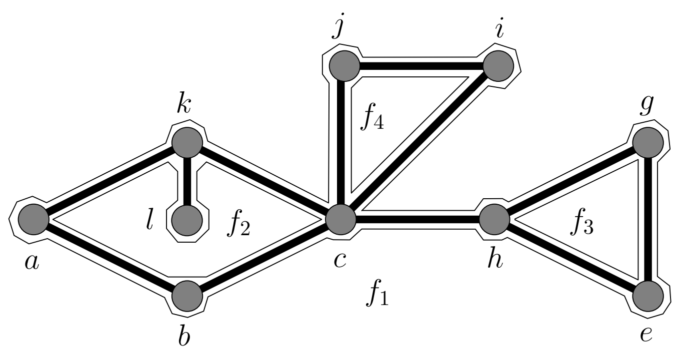
Σχόλιο 7.20. Η παρατήρηση 7.19 βασίζεται σε ένα σημαντικό Θεώρημα της τοπολογίας γνωστό και ως θεώρημα του Jordan.

[1] Σε πολυγραφήματα επεκτείνουμε τον ορισμό του κύκλου ώστε να περιλαμβάνει κύκλους μεγέθους 1 και 2 (θηλιές και ομοτοπικά ζεύγη πολλαπλών ακμών αντίστοιχα – καλούμε δύο ακμές του Γ *ομοτοπικές* όταν είναι υποσύνολα του συνόρου της ίδιας όψης).

7.2 Τοπολογικώς ισόμορφα ενεπίπεδα πολυγραφήματα

Ορισμός 7.21. Έστω W_1 και W_2 περιηγήσεις ενός πολυγραφήματος G. Θα λέμε ότι οι W_1 και W_2 είναι *συμμετρικές* αν η μια μπορεί να προκύψει από την άλλη μετά από ολίσθηση ή/και αντιστροφή. Η σχέση συμμετρίας μεταξύ περιηγήσεων είναι σχέση ισοδυναμίας. Καλούμε κάθε κλάση της *κυκλική παράθεση* και την συμβολίζουμε επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε μέλος της κλάσης. Για παράδειγμα στο ενεπίπεδο γράφημα του Σχήματος 7.3, οι κυκλικές διατάξεις $[e, h, c, b, a, k, c, j, i, c, h, g, e]$ και $[g, h, c, i, j, c, k, a, b, c, h, e, g]$ είναι ισοδύναμες, ενώ η κυκλική διάταξη $[c, i, j, c, b, a, k, c, h, g, e, h, c]$ είναι διαφορετική από τις δύο προηγούμενες.

Παρατήρηση 7.22. *Έστω $\Gamma = (V, A)$ συνεκτικό ενεπίπεδο πολυγράφημα και έστω όψη του $f \in F(\Gamma)$. Παρατηρούμε ότι το σύνορο της f ορίζει μια περιήγηση του Γ η οποία έχει ως κορυφές το σύνολο $V \cap \partial f$ και ως ακμές τις συνεκτικές συνιστώσες του $\partial f \backslash V$. Θα αντιμετωπίσουμε τις περιηγήσεις αυτές ως κυκλικές παραθέσεις αγνοώντας την διεύθυνσή ή το ποια είναι η πρώτη κορυφή στον τρόπο που τις συμβολίζουμε.*

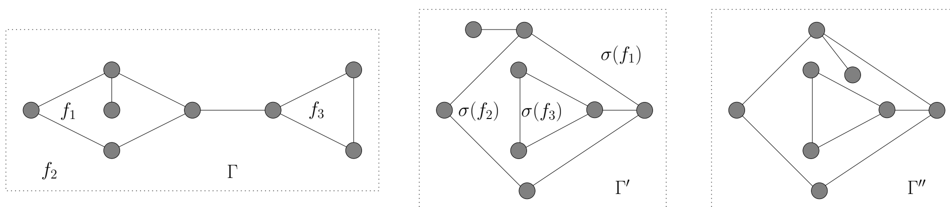


Σχήμα 7.3: Οι κυκλικές παραθέσεις που αντιστοιχούν στις όψεις του συνεκτικού γραφήματος G είναι $\pi(f_1) = [e, h, c, b, a, k, c, j, i, c, h, g, e], \pi(f_2) = [b, a, k, l, k, c, b], \pi(f_3) = [g, e, h, g]$, και $\pi(f_4) = [i, c, j, i]$.

Ορισμός 7.23. Έστω $\Gamma = (V, E)$ συνεκτικό ενεπίπεδο πολυγράφημα. Για κάθε όψη $f \in F(\Gamma)$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\pi(f)$ για την κυκλική παράθεση που αντιστοιχεί στην f σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.22.

Ορισμός 7.24. Έστω Γ, Γ' συνεκτικά ενεπίπεδα πολυγραφήματα. Λέμε ότι τα Γ και Γ' είναι *τοπολογικώς ισόμορφα* αν τα G_Γ και $G_{\Gamma'}$ είναι ισόμορφα μέσω μια συνάρτησης $\rho : V(\Gamma) \to V(\Gamma')$ και επιπλέον υπάρχει συνάρτηση $\sigma : F(\Gamma) \to F(\Gamma')$, έτσι ώστε ώστε για κάθε $f \in F(\Gamma)$, $\rho(\pi(f)) = \pi(\sigma(f))$. Δύο μη-συνεκτικά ενεπίπεδα πολυγραφήματα είναι *τοπολογικώς ισόμορφα* αν οι συνεκτικές τους συνιστώσες μπορούν να σχηματίσουν μεταξύ τους τοπολογικώς ισόμορφα ζευγάρια.

Παρατήρηση 7.25. *Παρατηρούμε ότι αν δύο ενεπίπεδα πολυγραφήματα Γ και Γ' είναι τοπολογικώς ισόμορφα, τότε τα G_Γ και $G_{\Gamma'}$ είναι ισόμορφα. Το αντίθετο δεν ισχύει γενικά. Παρόλα αυτά ισχύει για μια αρκετά ευρεία κλάση πολυγραφημάτων όπως καταδεικνύει το παρακάτω θεώρημα.*



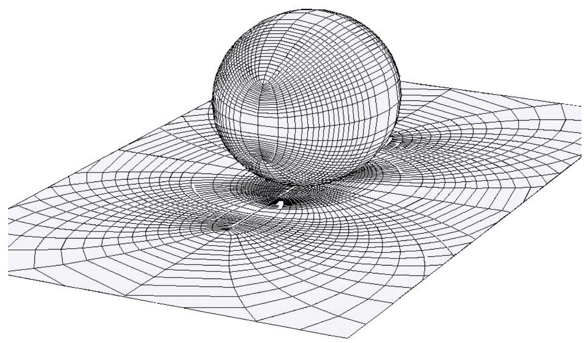
Σχήμα 7.4: Τα ενεπίπεδα γραφήματα Γ και Γ' είναι τοπολογικώς ισόμορφα. Αν και τα G_Γ και $G_{\Gamma''}$ είναι ισόμορφα, τα Γ και Γ'' δεν είναι τοπολογικώς ισόμορφα.

Θεώρημα 7.26 (Whitney, 1932)**.** Έστω G και G' είναι ισόμορφα επίπεδα 3-συνεκτικά πολυγραφήματα και έστω Γ, Γ' εμβαπτίσεις των G και G'. Τότε τα ενεπίπεδα πολυγραφήματα Γ και Γ' είναι τοπολογικώς ισόμορφα.

Παρατήρηση 7.27. *Παρατηρούμε ότι σε δύο τοπολογικώς ισόμορφα ενεπίπεδα πολυγραφήματα η εξωτερική όψη του ενός μπορεί να αντιστοιχεί σε μια εσωτερική όψη του άλλου (βλ. Σχήμα 7.4). Ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσουμε τα επίπεδα πολυγραφήματα είναι να τα εμβαπτίσουμε, αντί για το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}_0 = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$. Με αυτόν τον τρόπο, αποφεύγουμε την διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικής όψης. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια εμβάπτιση στην μοναδιαία σφαίρα σε μια εμβάπτιση στο επίπεδο χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό γνωστό ως στερεογραφική προβολή, δεδομένου ότι το σημείο* $(0, 0, 2)$ *(ο «βόρειος πόλος») δεν είναι σημείο του πολυγραφήματος.*

Ορισμός 7.28. Η *στερεογραφική προβολή* ενός σημείου (x, y, z) της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ σε ένα σημείο (χ, ψ) του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ δίνεται από τον τύπο:

$$(x, y) \;\; \leftarrow \;\; (\frac{x}{2-z}, \frac{y}{2-z}) \tag{7.1}$$



Σχήμα 7.5: Παράδειγμα στερεογραφικής προβολής.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από τον τύπο:

$$(x, y, z) \quad \leftarrow \quad (\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 1}) \tag{7.2}$$

Παρατήρηση 7.29. *Έστω f μια οποιαδήποτε όψη ενός ενεπίπεδου πολυγραφήματος Γ και έστω $s = (x_0, y_0)$ οποιοδήποτε σημείο της f. Εφαρμόζουμε τους εξής μετασχηματισμούς στο Γ:*

1) *Τον μετασχηματισμό $(x, y) \leftarrow (x - x_0, y - y_0)$. Έτσι μετατοπίζουμε το σημείο $s = (x_0, y_0)$) στην αρχή των αξόνων).*

2) *Τον αντίστροφο στερεογραφικό μετασχηματισμό. Έτσι εμβαπτίζουμε το πολυγράφημα G_Γ στην σφαίρα $\mathbb{S}_0$ με τρόπο που η εικόνα του s είναι στην αρχή των αξόνων.*

3) *Τον μετασχηματισμό $(x, y, z) \leftarrow (2 - x, 2 - y, z)$. Έτσι παίρνουμε την συμμετρική εμβάπτιση ως προς το επίπεδο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ (το επίπεδο του ισημερινού). Η εικόνα του s είναι τώρα στο σημείο $(0, 0, 2)$, δηλ. στο βόρειο πόλο.*

4) *Το στερεογραφικό μετασχηματισμό. Η εικόνα του s δεν αντιστοιχεί τώρα σε κανένα σημείο του επιπέδου.*

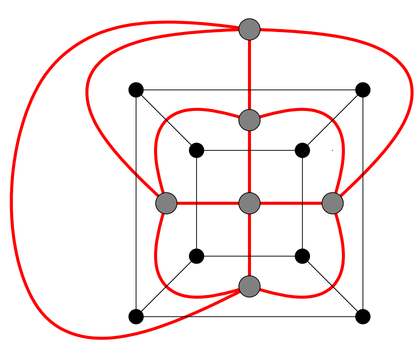
Παρατηρούμε ότι η νέα εμβάπτιση του G_Γ στο επίπεδο είναι ενεπίπεδο πολυγράφημα Γ' τοπολογικά ισόμορφο με το Γ και τέτοιο ώστε η αντίστοιχη στην f όψη να είναι τώρα η εξωτερική όψη του Γ. Συνοψίζουμε τις παρατηρήσεις μας στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 7.30. Για κάθε ενεπίπεδο πολυγράφημα Γ και για κάθε όψη f του Γ υπάρχει τοπολογικώς ισόμορφο πολυγράφημα Γ' (μέσω συναρτήσεων ρ και π) στο οποίο η όψη που αντιστοιχεί στην f (δηλ. η όψη $\pi(f)$) να είναι η εξωτερική όψη του Γ'.

7.3 Δυϊκά γραφήματα

Ορισμός 7.31. Έστω $\Gamma = (V, A)$ ενεπίπεδο πολυγράφημα με σύνολο όψεων το $F = F(\Gamma)$. Λέμε ότι ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα $\Gamma^* = (V^*, A^*)$ είναι *δυϊκό* του Γ αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

- Κάθε κορυφή του Γ^* είναι σημείο κάποιας όψης του Γ.
- Για κάθε όψη του Γ, υπάρχει μια και μοναδική κορυφή του Γ^* που να περιέχεται σε αυτή την όψη.
- Κάθε ακμή του Γ^* έχει ένα και μόνο σημείο κοινό με το Γ και το σημείο αυτό ανήκει σε μια ακμή του Γ.
- Κάθε ακμή του Γ έχει ένα και μόνο σημείο κοινό με το Γ^* και το σημείο αυτό ανήκει σε μια ακμή του Γ^*.



Σχήμα 7.6: Μια ενεπίπεδη εμβάπτιση του τρισδιάστατου κύβου Q_3 και η δυϊκή της που αντιστοιχεί στο οκτάεδρο $K_{2,2,2}$.

Παρατήρηση 7.32. *Για κάθε ενεπίπεδο πολυγράφημα ισχύει ότι όλα τα δυϊκά του είναι μεταξύ τους τοπολογικώς ισόμορφα.*

Λήμμα 7.33. Όλα τα δυϊκά γραφήματα ενός 3-συνεκτικού επίπεδου πολυγραφήματος είναι μεταξύ τους τοπολογικώς ισόμορφα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν ένα επίπεδο πολυγράφημα είναι 3-συνεκτικό, τότε και το δυϊκό του θα είναι 3-συνεκτικό και το λήμμα προκύπτει από το Θεώρημα 7.26. □

Παρατήρηση 7.34. *Αν η* Γ^* *είναι μια δυϊκή ενεπίπεδη εμβάπτιση του ενεπίπεδου πολυγραφήματος* Γ*, τότε και η* Γ *είναι μια δυϊκή ενεπίπεδη εμβάπτιση του ενεπίπεδου πολυγραφήματος* Γ^*.

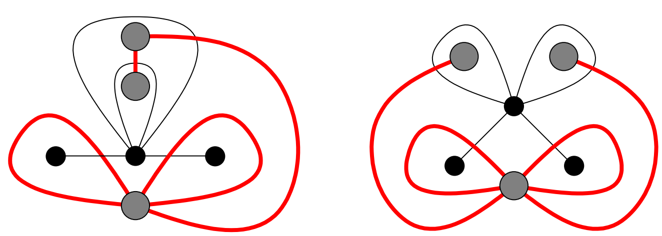
Ορισμός 7.35. Λέμε ότι ένα επίπεδο πολυγράφημα G είναι *δυϊκό* ενός επίπεδου γραφήματος H όταν υπάρχει ενεπίπεδη εμβάπτιση του H της οποίας η δυϊκή είναι τοπολογικά ισόμορφη με κάποια επίπεδη εμβάπτιση του G.

Παράδειγμα 7.36. *Τα γραφήματα* $K_{2,2,2}$ *και* $K_2^{[3]}$ *είναι μεταξύ τους δυϊκά (βλ. Σχήμα 7.6).*

Το παρακάτω θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.33 και του Ορισμού 7.35.

Θεώρημα 7.37. Κάθε 3-συνεκτικό πολυγράφημα έχει ένα και μοναδικό δυϊκό.

Παρατήρηση 7.38. *Το Θεώρημα 7.37 δεν ισχύει για όλα τα πολυγραφήματα (βλ. Σχήμα 7.7).*



Σχήμα 7.7: Δύο διαφορετικές (μη τοπολογικά ισόμορφες) εμβαπτίσεις του ιδίου γραφήματος με θηλιές. Η δεύτερη πιστοποιεί την αυτοδυϊκότητά του.

Ορισμός 7.39. Καλούμε ένα πολυγράφημα G *αυτοδυϊκό* όταν είναι ισόμορφο με κάποιο δυϊκό του.

Παράδειγμα 7.40. *Το γράφημα* K_4 *είναι αυτοδυϊκό.*

7.4 Πυκνότητα και επιπεδότητα

Θεώρημα 7.41 (Τύπος του Euler)**.** Έστω Γ συνεκτικό ενεπίπεδο πολυγράφημα με n κορυφές, m ακμές και r όψεις. Τότε $m+2=r+n$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα κάνοντας επαγωγή στον αριθμό των ακμών του Γ. Μια και το πολυγράφημα είναι συνεκτικό, από το Θεώρημα 5.10 έχουμε ότι $m \geq n-1$. Άρα η βάση της επαγωγής είναι $m=n-1$ όπου το θεώρημα ισχύει γιατί τότε από το Θεώρημα 6.9 το G_Γ θα είναι δέντρο και άρα, από την Παρατήρηση 7.17, $r=1$. Έστω τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε συνεκτικό ενεπίπεδο πολυγράφημα με $< m$ ακμές (όπου $m \geq n$) και έστω Γ συνεκτικό ενεπίπεδο πολυγράφημα με n κορυφές, m ακμές και r όψεις. Αφού $m \geq n$, από το Λήμμα 4.30, το G_Γ περιέχει κάποιο κύκλο. Έστω e μια ακμή του κύκλου αυτού. Από την Παρατήρηση 7.16, στο Γ, η ακμή e είναι η τομή των σύνορων δύο όψεων f, f' του Γ. Η αφαίρεση της ακμής e από το Γ δημιουργεί ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα (το πολυγράφημα $\Gamma' = (V(\Gamma), E(\Gamma)\setminus\{e\})$) με μια ακμή λιγότερη και με μια όψη λιγότερη (οι όψεις f και f' αντικαθίστανται από την νέα όψη $f \cup f' \cup e$). Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στο Γ' έχουμε $(m-1)+2=(r-1)+n$ από όπου προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. □

Ορισμός 7.42. Καλούμε ένα ενεπίπεδο γράφημα Γ *επίπεδη τριγωνοποίηση* αν $|V(G)| \geq 3$ και το Γ έχει μεγιστικό αριθμό ακμών, δηλαδή αν η πρόσθεση μιας οποιασδήποτε επιπλέον ακμής στο $E(\Gamma)$ παραβιάζει κάποια από τις ιδιότητες του Ορισμού 7.1 (και συγκεκριμένα κάποια από τις ιδιότητες 2,3 ή 4).

Παρατήρηση 7.43. *Για κάθε επίπεδη τριγωνοποίηση ενός γραφήματος Γ, όλες οι όψεις του Γ είναι τριγωνικές.*

Παρατήρηση 7.44. *Κάθε ενεπίπεδο γράφημα Γ με $|V(\Gamma)| \geq 3$ είναι παραγόμενο υπογράφημα κάποιας επίπεδης τριγωνοποίησης Γ'.*

Λήμμα 7.45. Κάθε επίπεδη τριγωνοποίηση Γ με ≥ 3 κορυφές έχει ακριβώς $3n-6$ ακμές.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σε κάθε ακμή αντιστοιχούν ακριβώς 2 όψεις και ότι σε κάθε όψη αντιστοιχούν 3 ακμές. Άρα το Γ έχει ακριβώς $\frac{2}{3}|E(\Gamma)|$ όψεις. Θέτοντας $r=\frac{2}{3}m$ τύπο του Euler (Θεώρημα 7.41), παίρνουμε το ζητούμενο. □

Από την Παρατήρηση 7.44 και το Λήμμα 7.45 έχουμε το παρακάτω άνω φράγμα.

Πόρισμα 7.46. Κάθε επίπεδο γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές έχει το πολύ $3n - 6$ ακμές.

Λήμμα 7.47. Για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\delta(G) \leq 5$.

Απόδειξη. Έστω $m = m(G)$ και $n = n(G)$. Αν όλες οι κορυφές του Γ έχουν βαθμό ≥ 6, τότε $m \geq \frac{6}{2} \cdot n = 3 \cdot n$. Αυτό όμως αντιβαίνει στο Πόρισμα 7.46. □

Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 7.13, έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 7.48. Για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\delta^*(G) \leq 5$.

7.5 Πλατωνικά γραφήματα

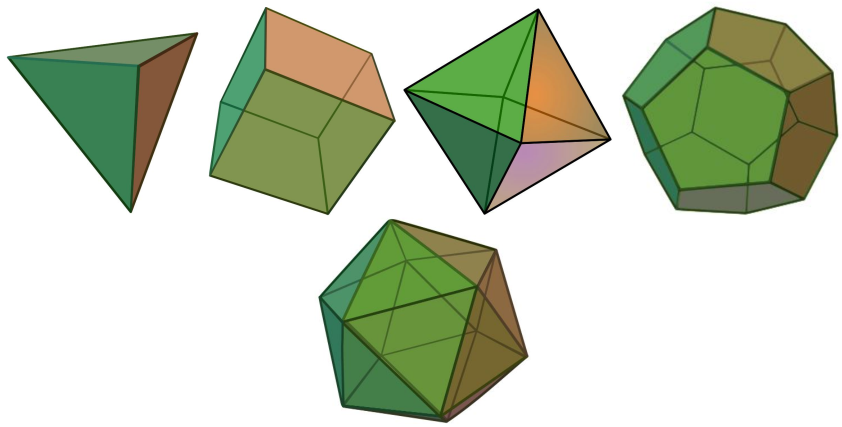
Παρατήρηση 7.49. *Κάθε κυρτό πολύεδρο τριών διαστάσεων*[2] *αντιστοιχεί σε ένα 3-συνεκτικό επίπεδο γράφημα του οποίου οι κορυφές και οι ακμές είναι ακριβώς οι ακμές και οι κορυφές του πολυέδρου. Αντιστρόφως, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε 3-συνεκτικό επίπεδο γράφημα αντιστοιχεί σε ένα κυρτό πολύεδρο τριών διαστάσεων (βλ. [10]).*

Ορισμός 7.50. Ένα τρισδιάστατο πολύεδρο είναι *κανονικό* όταν όλες οι όψεις του είναι ισομετρικά κανονικά πολύγωνα. Ένα πολύεδρο καλείται *Πλατωνικό* όταν είναι τρισδιάστατο και κυρτό. Καλούμε ένα γράφημα *Πλατωνικό* όταν αντιστοιχεί σε ένα Πλατωνικό πολύεδρο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ενεπίπεδο γράφημα που αντιστοιχεί σε ένα Πλατωνικό πολύεδρο είναι κανονικό (δηλ. όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό). Προφανώς ισχύει επίσης ότι και όλες οι όψεις του έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών στο σύνορό τους.

Παρατήρηση 7.51. *Αν ένα επίπεδο γράφημα είναι Πλατωνικό τότε αυτό και το δυϊκό του είναι κανονικά γραφήματα. Επίσης, το δυϊκό ενός Πλατωνικού γραφήματος είναι Πλατωνικό.*

Θεώρημα 7.52. Υπάρχουν ακριβώς πέντε Πλατωνικά γραφήματα: το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο (βλ. Σχήμα 12.2).

[2]Ένα κυρτό πολύεδρο τριών διαστάσεων ορίζεται αυστηρά ως το σύνολο των λύσεων του συστήματος ανισοτήτων $\mathbf{Mx} \leq \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{b}$ είναι ένας πραγματικός $n \times 3$ πίνακας και το $\mathbf{b}$ είναι πραγματικό διάνυσμα με n στοιχεία.



Σχήμα 7.8: Τα πέντε Πλατωνικά γραφήματα: το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλα τα πολύεδρα του Σχήματος 12.2 είναι Πλατωνικά. Από την Παρατήρηση 7.51, αν ένα γράφημα G είναι Πλατωνικό, τότε το G θα είναι x-κανονικό και το G^* θα είναι y-κανονικό για κάποιους φυσικούς αριθμούς $x, y \geq 3$. Έστω $n = n(G)$ και $r = n(G^*)$. Από τα Θεωρήματα 3.3 και 7.41 και το , τα n, r, x και y είναι ακέραιοι που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
n + r &= \frac{xn}{2} + 2, && \text{(Θεωρήματα 3.3 και 7.41)}\\
n + r &= \frac{yr}{2} + 2, && \text{(Θεωρήματα 3.3 και 7.41)}\\
x, y &\geq 3, && \text{(Παρατήρηση 5.26)}\\
x, y &\leq 5, && \text{(Λήμμα 7.47)}
\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν:

$$n = \frac{4y}{2(x+y) - xy}$$

- Αν $x = 3$ και $y = 3$, έχουμε ότι $n = 4$, άρα $r = 4$ και το G είναι το τετράεδρο.
- Αν $x = 3$ και $y = 4$, έχουμε ότι $n = 8$, άρα $r = 6$ και το G είναι ο κύβος.
- Αν $x = 4$ και $y = 3$, έχουμε ότι $n = 6$, άρα $r = 8$ και το G είναι το οκτάεδρο.

- Αν $x = 3$ και $y = 5$, έχουμε ότι $n = 12$, άρα $r = 20$ και το G είναι το δωδεκάεδρο.
- Αν $x = 5$ και $y = 3$, έχουμε ότι $n = 20$, άρα $r = 12$ και το G είναι το εικοσάεδρο.

Παρατηρούμε ότι για $x, y \geq 4$ ισχύει ότι $(x-4)(y-4) \geq 0 \Rightarrow xy-4x-4y-16 \geq 0 \Rightarrow xy - 2(x+y) \geq 2(x-4) + 2(y-4) \geq 0$ και άρα δεν υπάρχουν άλλα Πλατωνικά πολύεδρα. □

7.6 Πλήρεις χαρακτηρισμοί για επίπεδα γραφήματα

Λήμμα 7.53. Κάθε μη επίπεδο 3-συνεκτικό γράφημα περιέχει είτε το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως έλασσον.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των ακμών του G. Για την επαγωγική βάση παρατηρούμε ότι το μικρότερο σε ακμές μη-επίπεδο γράφημα είναι το $K_{3,3}$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε μή-επίπεδο γράφημα με $< m$ ακμές και έστω G μη-επίπεδο γράφημα με m ακμές.

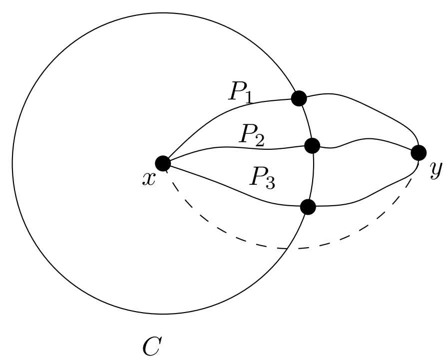
Από το Λήμμα 5.45, και επειδή κάθε τροχός είναι επίπεδος, θα ισχύει μια από τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις: 1) είτε το G θα περιέχει μια ακμή $e = \{x, y\} \in E(G)$ τέτοια ώστε το γράφημα $G' = G \backslash e$ να είναι 3-συνεκτικό ή 2) το G θα περιέχει μια ακμή $e = \{x, y\} \in E(G)$ που να μην ανήκει σε τρίγωνο του G τέτοια ώστε το γράφημα $G' = G/e$ να είναι 3-συνεκτικό (συμβολίζουμε με v_e την κορυφή που προκύπτει από την σύνθλιψη της e). Ανάλογα με την περίπτωση θέτουμε $G' = G \backslash e$ ή $G' = G/e$ και αφού $m(G') < m(G)$, είτε το G' περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον οπότε τελειώσαμε λόγω της Παρατήρησης 7.13, είτε υπάρχει μια επίπεδη εμβάπτιση Γ του G'.

Στην περίπτωση 1) Παρατηρούμε ότι οι κορυφές x και y θα είναι σημεία διαφορετικών όψεων του Γ γιατί διαφορετικά μπορούμε να προσθέσουμε την ακμή e στο Γ και να πάρουμε μια επίπεδη εμβάπτιση του G. Άρα στο Γ υπάρχει ένας κύκλος C τέτοιος ώστε τα x και y να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R} \backslash \tilde{C}$ και άρα το σύνολο $S = V(C)$ είναι διαχωριστής του G'. Αφού το G' είναι 3-συνεκτικό θα υπάρχουν 3 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια $P_i, i = 1, 2, 3$ στο G' (Θεώρημα 5.32) και επειδή $\{x, y\} \notin E(G')$, το σύνολο S θα περιέχει εσωτερικές κορυφές από το καθένα από αυτά. Παρατηρούμε τώρα ότι το γράφημα $F = C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$ είναι μια υποδιαίρεση του $K_5^- = (2 \cdot K_1) * K_3$.

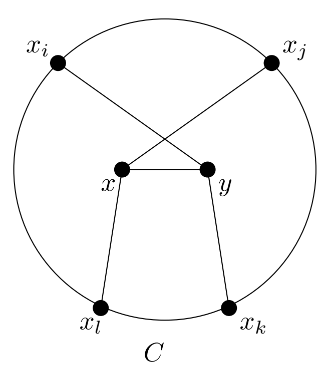
Τελευταία ενημέρωση 28/3/2023, στις 18:53.

Προφανώς η πρόσθεση της ακμής $\{x, y\}$ στο F δίνει μια υποδιαίρεση του K_5, άρα $K_5 \leq_{\tau\pi} G$ (βλ. Σχήμα 7.9).

Στην περίπτωση 2) Αφού το Γ είναι 3-συνεκτικό, το $\Gamma^- = \Gamma \backslash v_e$ θα είναι δισυνεκτικό. Έστω $f \in F(\Gamma)$ η μοναδική όψη του Γ^- της οποίας σημείο είναι το v_e. Από την δισυνεκτικότητα του Γ^- και την Παρατήρηση 7.18, το $\Gamma^-[f]$ είναι είναι κύκλος C και έστω $M = [x_1, \ldots, x_r, x_1]$ η κυκλική διάταξη των κορυφών του $V(C)$ πάνω σε αυτόν τον κύκλο. Αφού η $e = \{x, y\}$ δεν ανήκει σε κανένα τρίγωνο του G έχουμε ότι το σύνολο $X = N_G(x) \backslash y$ και το σύνολο $Y = N_G(y) \backslash x$ ορίζουν μια διαμέριση του $V(C)$. Αν οι κορυφές του X είναι διαδοχικές στην M τότε το ίδιο θα ισχύει για τις κορυφές του Y και είναι δυνατόν να εμβαπτίσουμε το G στο επίπεδο, άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει τότε $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$ (βλ. Σχήμα 7.10). $\square$



Σχήμα 7.9: Το γράφημα $F = C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$.



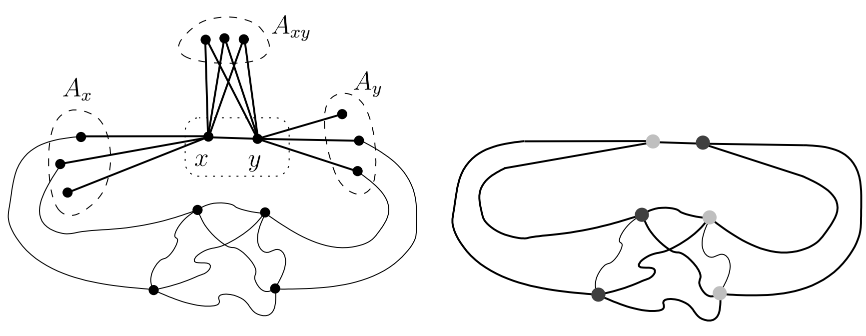
Σχήμα 7.10: Οι κορυφές x_j και x_l ανήκουν στο X και οι κορυφές x_i και x_k στο Y, με $1 \leq i < j < k < l \leq r$.

Το παρακάτω είναι γνωστό ως θεώρημα του Wagner (βλ. [30]).

Θεώρημα 7.54. Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_5, $K_{3,3}$ ως έλασσον.

Απόδειξη. Από τις Παρατηρήσεις 7.8 και 7.13, ένα γράφημα που περιέχει κάποιο από τα K_5, $K_{3,3}$ δεν μπορεί να είναι επίπεδο. Έστω τώρα G μη-επίπεδο γράφημα ελαχίστου αριθμού κορυφών που να μην περιέχει ένα από τα K_5 και $K_{3,3}$ ως ελάσσονα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.53, έχουμε ότι το G περιέχει έναν διαχωριστή S όπου $|S| = 1$ ή 2. Έστω $C_i, i = 1, \ldots, r$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$. Για $i = 1, \ldots, r$, ορίζουμε το G_i ως το γράφημα που προκύπτει αν συνθλίψουμε στο G όλες τις ακμές που δεν είναι υποσύνολα του $V(C_i) \cup S$. Σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι για $i = 1, \ldots, r$, $G_i \subseteq_{\epsilon\lambda} G$ και $n(G_i) < n(G)$. Από τον ορισμό του G, το G_i είτε θα περιέχει το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως έλασσον είτε θα είναι επίπεδο. Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε και το G θα περιέχει είτε το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως έλασσον. Άρα όλα τα γραφήματα $G_i, i = 1, \ldots, r$ είναι επίπεδα. Επίσης, για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq r$ ισχύει ότι $G_i \cap G_j = K_{|S|}$. Άρα από την Παρατήρηση 7.15, το γράφημα $\bigcup_{i=1,\ldots,r} G_i = G$ θα είναι επίσης επίπεδο, άτοπο. □

Λήμμα 7.55. Έστω γράφημα G και ακμή $e \in E(G)$. Αν $K_5 \subseteq_{\epsilon\lambda} G/e$, τότε είτε $K_5 \subseteq_{\tau\pi} G$ ή $K_{3,3} \subseteq_{\tau\pi} G$.



Σχήμα 7.11: Το γράφημα $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον στην ειδική περίπτωση της απόδειξης του Λήμματος 7.55.

Απόδειξη. Έστω $e = \{x, y\}$ και έστω v_e η κορυφή του $G' = G/e$ που προκύπτει μετά από την σύνθλιψη της e. Ορίζουμε $A_{xy} = N_G(x) \cap N_G(y)$, $A_x = N_G(x) \backslash \{y\} \backslash A_{xy}$, $A_y = N_G(y) \backslash \{x\} \backslash A_{xy}$. Έστω υπάρχει υπογράφημα H του G'

το οποίο περιέχει υποσύνολο $D \subseteq V(G')$ κορυφών οι οποίες αν διαλυθούν θα προκύψει κλίκα 5 κορυφών. Αν $v_e \in D$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $K_5 \subseteq_{\tau\pi} G$. Έστω $v_e \in V(H)\backslash D$ και έστω $N = N_H(v_e)$. Παρατηρούμε ότι $|N| = 4$ και ξεχωρίζουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πως κατανέμονται οι κορυφές του N στα A_x, A_y, και A_{xy}. Στην ειδική περίπτωση που δύο μέλη του N ανήκουν στο A_x και τα υπόλοιπα δυο ανήκουν στο A_y τότε $K_{3,3} \subseteq_{\tau\pi} G$ (βλ. Σχήμα 7.11). Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι εύκολο να δούμε ότι $K_5 \subseteq_{\tau\pi} G$. □

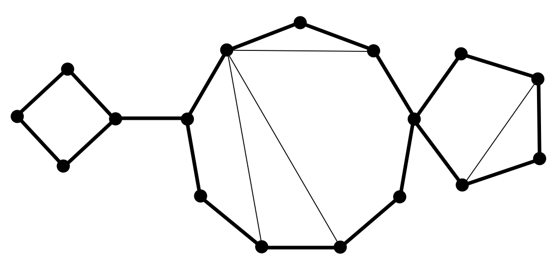
Πόρισμα 7.56. Αν ένα γράφημα G περιέχει είτε το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως έλασσον, τότε θα περιέχει είτε το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.57 και το Πόρισμα 7.56 έχουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο αποδείχτηκε από τον Kazimierz Kuratowski το 1930 στην [15] αφού προηγουμένως αποδείχθηκε (χωρίς να δημοσιευτεί) από τον Лев Семёнович Понтрягин.

Θεώρημα 7.57 (Kuratowski-Понтрягин, 1930)**.** Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_5, $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον.

7.7 Εξωεπίπεδα γραφήματα

Ορισμός 7.58. Καλούμε ένα γράφημα *εξωεπίπεδο* αν έχει επίπεδη εμβάπτιση Γ τέτοια ώστε όλες οι κορυφές της να ανήκουν στο σύνορο της εξωτερικής της όψης (καλούμε μια τέτοια εμβάπτιση ενός γραφήματος *εξωεπίπεδη εμβάπτιση*).



Σχήμα 7.12: Παράδειγμα εξωεπίπεδου γραφήματος.

Παρατήρηση 7.59. *Η κλάση των εξωεπίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς τις σχέσεις* $\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \subseteq_{\tau\pi}$ *και* $\subseteq_{\epsilon\lambda}$.

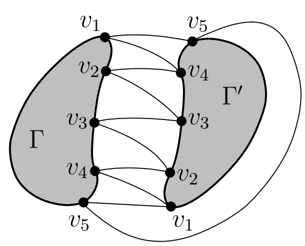
Θεώρημα 7.60. Ένα γράφημα είναι εξωεπίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_4, $K_{2,3}$ ως τοπολογικό έλασσον.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κανένα από τα K_4, $K_{2,3}$ δεν είναι εξωεπίπεδο, διαφορετικά, το K_5 ή το $K_{3,3}$ θα ήταν επίπεδο. Από την Παρατήρηση 7.59, ένα γράφημα που περιέχει ως ελάσσονα κάποιο από τα K_4, $K_{2,3}$ δεν μπορεί να είναι εξωεπίπεδο.

Έστω τώρα μη-εξωεπίπεδο γράφημα G και έστω $G^+ = G * K_1$ (προσθέτουμε μια νέα κορυφή στο G και την συνδέουμε με όλες τις κορυφές του G). Ισχυριζόμαστε ότι το G^+ είναι μη-επίπεδο. Πράγματι, Αν το G^+ είναι επίπεδο και Γ μια εξωεπίπεδη εμβάπτισή του, τότε η πρόσθετη κορυφή πρέπει να ανήκει σε μια περιοχή του Γ της οποίας το σύνορο περιέχει όλες τις κορυφές του Γ και άρα το G είναι εξωεπίπεδο, άτοπο. Αφού λοιπόν το G^+ είναι μη-επίπεδο, από το Θεώρημα 7.57, το G^+ θα περιέχει είτε το K_5 είτε το $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον. Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση μιας κορυφής μπορεί να πλήξει είτε μια κορυφή είτε μιαν ακμή μιας υποδιαίρεσης ενός γραφήματος. Σε κάθε περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι το G θα περιέχει είτε το K_4 είτε το $K_{2,3}$ ως τοπολογικό έλασσον. □

Παρατήρηση 7.61. *Όλα τα εξωεπίπεδα γραφήματα, εκτός από το K_1 και το K_2, είναι παραγόμενα υπογραφήματα ενός δισυνεκτικού γραφήματος.*

Λήμμα 7.62. Κάθε εξωεπίπεδο γράφημα G με n κορυφές έχει το πολύ $2n - 3$ ακμές.



Σχήμα 7.13: Η κατασκευή της απόδειξης του Λήμματος 7.62.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 7.61, μπορούμε υποθέσουμε ότι το G είναι δισυνεκτικό. Έστω Γ μια εξωεπίπεδη εμβάπτιση του G και έστω f η εξωτερική της όψη. Από την Παρατήρηση 7.18, αφού το Γ είναι δισυνεκτικό, το γράφημα $\Gamma[f]$ είναι κύκλος. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[v_1, \ldots, v_n, v_1]$ για την κυκλική διάταξη που ορίζει αυτός ο κύκλος. Έστω τώρα Γ^+ η εξωεπίπεδη εμβάπτιση που προκύπτει αν εμβαπτίσουμε μέσα στην f ένα αντίγραφο Γ' του Γ και έστω $[v'_1, \ldots, v'_n, v'_1]$ η αντίστοιχη κυκλική διάταξη των κορυφών του Γ'. Προσθέτουμε στο Γ^+ τις ακμές $\{v_i, v'_{n-i+1}\}$ για $i = 1, \ldots, r$, τις ακμές $\{v_i, v'_{n-i}\}$ για $i = 1, \ldots, r-1$ καθώς και την ακμή $\{v_n, v'_n\}$ και παρατηρούμε ότι αυτό μπορεί να γίνει έτσι ώστε το γράφημα που προκύπτει να είναι μια επίπεδη εμβάπτιση ενός γραφήματος G^* (βλ. Σχήμα 7.13). Από την κατασκευή, $n(G^*) = 2{\cdot}n(G)$ και $m(G^*) = 2{\cdot}n(G){+}2{\cdot}m(G)$. Από το Πόρισμα 7.46, $m(G^*) \leq 3 \cdot n(G^*) - 6 \Rightarrow 2 \cdot n(G) + 2 \cdot m(G) \leq 6 \cdot n(G) - 6 \Rightarrow m(G) \leq 2 \cdot n(G) - 3$. □

Ασκήσεις Κεφαλαίου

7.1 (☆☆☆)**.** Αν ένα γράφημα G δεν είναι επίπεδο, τότε $\Delta(G) \geq 3$. Δείξτε επίσης ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

7.2 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι αν τα γραφήματα G και H έχουν διάμετρο μεγαλύτερη του 1, τότε το γράφημα $G * H$ δεν είναι επίπεδο. Δείξτε επίσης ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

7.3 (☆☆☆)**.** Αν το G είναι μη-επίπεδο, τότε $\boldsymbol{\pi\alpha}(G) \geq 3$

7.4 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι η Παρατήρηση 7.15 δεν ισχύει γενικά για $r \geq 3$. Ποια πρόσθετη ιδιότητα πρέπει να ικανοποιείται ώστε να ισχύει για $r = 3$; Υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες να ισχύει και για $r = 4$;

7.5 (☆☆☆)**.** Κάθε επίπεδο γράφημα προκύπτει από την ένωση το πολύ 5 δασών.

7.6 (☆☆☆)**.** Γενικεύστε τον ορισμό της περιήγησης ενός γραφήματος σε πολυγραφήματα (βλ. Ορισμό 4.1) ώστε να εξασφαλιστεί η πληρότητα του Ορισμού 7.21 .

7.7 (☆☆☆)**.** Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.30 στηρίζεται στην διαδοχική εφαρμογή των μετασχηματισμών 1-4 της Παρατήρησης 7.29. Βρέστε μετασχηματισμό εναλλακτικό του 3του (συμμετρία ως προς τον ισημερινό) που να μην πλήτει την ορθότητα της απόδειξης.

7.8 (☆☆☆)**.** Έστω ξ ο μετασχηματισμός ενός πολυγραφήματος εμβαπτισμένου στο επίπεδο $P_{X,Y} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ που ορίζεται από την περιστροφή, στο $\mathbb{R}^3$, κατα 180 μοίρες ως προς μια οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου $P_{X,Y}$. Σε ποιο μετασχηματισμό της αντίστοιχης εμβάπτισης την σφαίρα $\mathbb{S}_0$ αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός ξ;

7.9 (☆☆☆)**.** Υπάρχει κάποιο ζεύγος ενεπίπεδων γραφημάτων του Σχήματος 7.2 που να είναι τοπολογικά ισόμορφα; Για κάθε ένα από 3 υποψήφια ζεύγη, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7.10 (☆☆☆)**.** Αν ένα ενεπίπεδο πολυγράφημα είναι 2-συνεκτικό, τότε και το δυικό του G^* είναι 2-συνεκτικό.

7.11 (☆☆☆)**.** Αν τα επίπεδα γραφήματα G και H είναι μεταξύ τους δυικά, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά είναι συνεκτικό.

7.12 (☆☆☆)**.** Χαρακτηρίστε το σύνολο όλων των δυικών γραφημάτων του μοναδικού πολυγραφήματος με μια κορυφή και m ακμές.

7.13 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι κάθε αυτοδυικό πολυγράφημα με n κορυφές έχει $2(n-1)$ ακμές.

7.14 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει επίπεδο γράφημα που να είναι 6-συνεκτικό.

7.15 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει διμερές επίπεδο γράφημα που να είναι 4-συνεκτικό.

7.16 (☆☆☆)**.** Αν ένα γράφημα G είναι επίπεδο και $K_3 \not\subseteq_{\upsilon\pi} G$, τότε $\delta^*(G) \leq 3$.

7.17 (☆☆☆)**.** $C_4 \not\subseteq_{\tau\pi} G \Rightarrow m(G) \leq \frac{3}{2}(n-1)$.

7.18 (☆☆☆)**.** Για κάθε ενεπίπεδο πολυγράφημα Γ με κ συνεκτικές συνιστώσες, r όψεις, n κορυφές και m ακμές ισχύει ότι $m + \kappa + 1 = n + r$.

7.19 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι για κάθε επίπεδο γράφημα, το ποσοστό των κορυφών με βαθμό το πολύ 6 υπερβαίνει το 14%. Βρείτε μια γενική φόρμουλα για το ποσοστό αυτό αν το 6 αντικατασταθεί με x.

7.20 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι κάθε Πλατωνικό γράφημα είναι μεταβατικό.

7.21 (☆☆☆)**.** Βρείτε επίπεδες εμβαπτίσεις για το καθένα από τα πέντε πλατωνικά πολύεδρα.

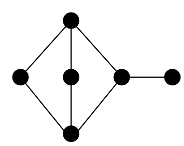
7.22 (☆☆☆)**.** Διατυπώστε και αποδείξτε τα Θεωρήματα 7.57 και 7.54 για πολυγραφήματα.

7.23 (☆☆☆). Αν $\delta(G) \geq 2$ και $\delta(H) \geq 2$, τότε το γράφημα $G * H$ δεν είναι επίπεδο. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

7.24 (☆☆☆). Ἐστω H το γράφημα του Σχήματος 7.14. Δείξτε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα G με τουλάχιστον 6 κορυφές που δεν περιέχει το H ως τοπολογικό έλασσον είναι επίπεδο.

7.25 (☆☆☆). Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Kuratowski για να δείξετε ότι για κάθε γράφημα G, $\delta^*(G) \geq 6 \Rightarrow K_4 \leq_{\tau\pi} G$.

7.26 (☆☆☆). Κάθε γράφημα με τουλάχιστον $\frac{1}{2}(3n-1)$ κορυφές περιέχει ένα κύκλο μήκους τουλάχιστον 4 (ή ισοδύναμα: $C_4 \not\leq_{\tau\pi} G \Rightarrow m(G) \leq \frac{3}{2}(n-1)$).



Σχήμα 7.14: Το γράφημα H της Ἀσκησης 7.24.

7.27 (☆☆☆). Πως μπορούμε να συνάγουμε, άμεσα, το Θεώρημα 7.57 από το Θεώρημα 7.54 ;

7.28 (☆☆☆). Για κάθε $n \geq 6$ υπάρχει ένα μη-επίπεδο γράφημα με n κορυφές που να είναι η ένωση δύο δέντρων.

7.29 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι αν ένα γράφημα είναι επίπεδο και έχει μέγιστο βαθμό 3, τότε και το γραμμικό του γράφημα θα είναι επίπεδο.

7.30 (☆☆☆). Δείξτε ότι δεν υπάρχει εξωπίπεδο γράφημα που να είναι 3-συνεκτικό.

7.31 (☆☆☆). Ἐνα ενεπίπεδο γράφημα έχει διάσταση δίσκου 2 αν περιέχει το πολύ δύο όψεις τα σύνορα των οποίων να περιέχουν όλες τις κορυφές του. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει ένα γράφημα με διάσταση δίσκου 2 και n κορυφές;

7.32 (☆☆☆). Ἐστω K_4^- το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε μια ακμή από το K_4. Βρείτε τό καλύτερο δυνατό άνω φράγμα για την πυκνότητα των γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{G} = \{G \mid K_4^- \not\leq_{\epsilon\lambda} G\}$.

7.33 (☆☆☆)**.** Για κάθε επίπεδο γράφημα υπάρχει μια διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ του $V(G)$ τέτοια ώστε τα γραφήματα $G[V_1], G[V_2]$ να είναι εξωεπίπεδα.

7.34 (☆☆☆)**.** Ζωγραφίστε ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα για το οποίο η διάμετρος είναι ίση με την ακτίνα. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρα γραφήματα με αυτή τη ιδιότητα.

7.35 (☆☆☆)**.** Αν το G είναι επίπεδο γράφημα με περιφέρεια $k \geq 3$, τότε $m(G) \leq \frac{k(n(G)-2)}{k-2}$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να αποδείξετε ότι το γράφημα του Petersen δεν είναι επίπεδο.

7.36 (☆☆☆)**.** Έστω G το γράφημα που προκύπτει αν σε ένα (4×4)-πλέγμα ενώσουμε με ακμές κάθε ένα από τα δύο ζεύγη μη συνδεδεμένων κορυφών βαθμού 4. Δείξτε ότι το G δεν είναι επίπεδο.

7.37 (☆☆☆)**.** Αν ένα γράφημα G έχει περισσότερες από 10 κορυφές, τότε κάποιο από τα G, $\overline{G}$ είναι μη-επίπεδο.

7.38 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του εικοσαέδρου δεν είναι επίπεδο γράφημα. Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το δωδεκάεδρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ

8.1 k-μερή γραφήματα και χρωματικοί αριθμοί

Ορισμός 8.1. Καλούμε *k-χρωματισμό κορυφών* (ή απλά *k-χρωματισμό* αν δεν γίνεται σαφές ότι πρόκειται για άλλου είδους χρωματισμό) ενός γραφήματος G κάθε συνάρτηση $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ για την οποία για κάθε $u, v \in V(G)$ με $\{u, v\} \in E(G)$ ισχύει ότι $\chi(u) \neq \chi(v)$. Με άλλα λόγια ένας k-χρωματισμός είναι η ανάθεση ενός «χρώματος» σε κάθε κορυφή του G έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να μη φέρουν το ίδιο χρώμα. Λέμε ότι ένα γραφήμα G είναι *k-χρωματίσιμο* αν υπάρχει ένας k-χρωματισμός του. Τα σύνολα $\chi^{-1}(i)$, για $i = 1, \ldots, k$, καλούνται *χρωματικές κλάσεις* του χ. Αν $S \subseteq V(G)$, τότε ορίζουμε $\chi(S) = \{\chi(v) \mid v \in S\}$ και αν $X \subseteq \{1, \ldots, k\}$, ορίζουμε $\chi^{-1}(X) = \{\chi^{-1}(i) \mid i \in X\}$.

Παρατήρηση 8.2. *Αν η συνάρτηση χ είναι ένας k-χρωματισμός ενός γραφήματος τότε το ίδιο ισχύει και για όλα τα παραγόμενα υπογραφήματά του.*

Ορισμός 8.3. Ο *χρωματικός αριθμός* ενός γραφήματος G είναι ο μικρότερος μη-αρνητικός ακέραιος k για τον οποίο το G είναι k-χρωματίσιμο και τον συμβολίζουμε με $\chi(G)$.

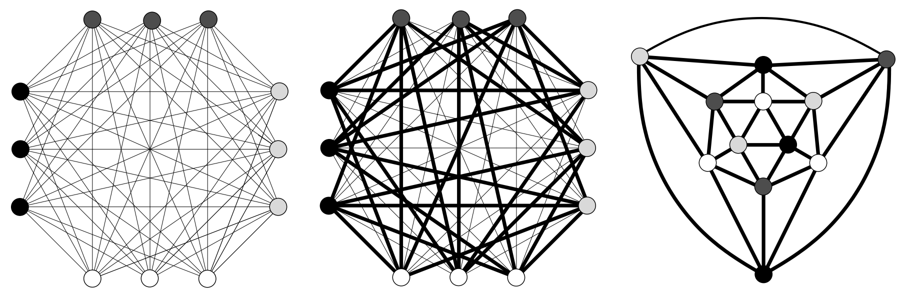
Παρατήρηση 8.4. *Για κάθε $k \geq 2$, ισχύει ότι $\chi(C_{2k-1}) = 3$ και $\chi(C_{2k}) = 2$.*

Ορισμός 8.5. Έστω $l_1, \ldots, l_k$ μη αρνητικοί ακέραιοι. Ορίζουμε το γράφημα

$$K_{l_1,\ldots,l_k} = \overline{K_{l_1} + \cdots + K_{l_k}}$$

και καλούμε *μέρη του* τα σύνολα $V_i(K_{l_1,\dots,l_k}) = V(K_{l_i}), i = 1, \dots, k$. Επίσης καλούμε κάθε γράφημα ισόμορφο με το $K_{l_1,\dots,l_k}$ *πλήρως* k*-μερές* ή απλά *πλήρως πολυμερές*.

Ορισμός 8.6. Καλούμε k*-μερές* κάθε γράφημα που είναι ισόμορφο με κάποιο παραγόμενο υπογράφημα του $K_{l_1,\dots,l_k}$ για κάποιο σύνολο μη αρνητικών ακεράιων $l_1, \dots, l_k$. Τα *μέρη* $V_i(G), i = 1, \dots, k$ ενός k-μερούς γραφήματος G είναι τα σύνολα κορυφών του που αντιστοιχούν στα μέρη του πλήρως k-μερούς γραφήματος που το παράγει.



Σχήμα 8.1: το γράφημα $K_{3,3,3,3}$ και το *εικοσάεδρο* ως παραγόμενο υπογράφημά του.

Παρατήρηση 8.7. *Αν ένα γράφημα είναι* k*-μερές τότε είναι και* k'*-μερές για κάθε* $k' \geq k$.

Παρατήρηση 8.8. *Ένα γράφημα είναι* k*-χρωματίσιμο αν και μόνο αν είναι* k*-μερές.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $\chi : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ είναι ένας k-χρωματισμός του G τότε το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του $K_{|\chi^{-1}(1)|,\dots,|\chi^{-1}(k)|}$. Από την άλλη μεριά, αν ορίσουμε την $\chi : V(K_{l_1,\dots,l_k}) \to \{1, \dots, k\}$ έτσι ώστε $\chi(v)$ να είναι ο δείκτης του μέρους του $K_{l_1,\dots,l_k}$ στο οποίο ανήκει η v, τότε η χ είναι ένας χρωματισμός του $K_{l_1,\dots,l_k}$ και άρα και κάθε υπογραφήματός του (Παρατήρηση 8.2). $\square$

Λήμμα 8.9. Ένα γράφημα G είναι k-χρωματίσιμο αν και μόνο αν οι κορυφές του συμπληρωματικού του $\overline{G}$ μπορούν να διαμεριστούν σε k σύνολα το καθένα από τα οποία ενάγει κλίκα στο $\overline{G}$.

Λήμμα 8.10. Κάθε k-χρωματίσιμο γράφημα G με n κορυφές έχει το πολύ $n^2(\frac{k-1}{2k})$ ακμές.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 8.8, το G είναι ισόμορφο με κάποιο παραγόμενο υπογράφημα του $K_{l_1,\ldots,l_k}$ για κάποιο σύνολο μη αρνητικών ακεραίων $l_1,\ldots,l_k$ όπου $\sum_{i=1,\ldots,k} l_i = n$. Άρα, $m(G) \leq m(K_{l_1,\ldots,l_k})$. Από τον ορισμό του $K_{l_1,\ldots,l_k}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
m(K_{l_1,\ldots,l_k}) &\leq \binom{n}{2} - \sum_{i=1,\ldots,k} \binom{l_i}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - n - \sum_{i=1,\ldots,k} (l_i^2 - l_i)) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1,\ldots,k} l_i^2) \\
&\leq \frac{1}{2}(n^2 - \frac{n^2}{k}) \\
&= n^2(\frac{k-1}{2k})
\end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ανισότητα $\sum_{i=1,\ldots,k} l_i^2 \geq \frac{1}{k}(\sum_{i=1,\ldots,k} l_i)^2$.) □

Λύνοντας την ανίσωση του Λήμματος 8.10 ως προς k έχουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 8.11. Για κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές, $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$.

Ορισμός 8.12. Καλούμε ένα γράφημα G *διμερές* αν είναι 2-χρωματίσιμο. Καλούμε τις χρωματικές κλάσεις του G *μέρη* του G.

Παρατήρηση 8.13. *Αν το G είναι διμερές και κανονικό, τότε τα μέρη του έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.*

Λήμμα 8.14. Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Απόδειξη. Έστω G διμερές γράφημα. Προφανώς, κάθε υπογράφημα ενός διμερούς γραφήματος είναι επίσης διμερές. Άρα ένα υπογράφημα του G δεν μπορεί να είναι περιττός κύκλος του ο οποίου ο χρωματικός αριθμός είναι 3. Έστω τώρα γράφημα G χωρίς περιττούς κύκλους και έστω $\mathcal{A} = [X_0,\ldots,X_r]$ μια αποσύνθεση απόστασης του G ως προς μια οποιαδήποτε κορυφή v του G. Ισχυριζόμαστε ότι καμιά ακμή του G δεν μπορεί να έχει και τα δύο άκρα της στο ίδιο σύνολο X_i. Έστω ότι αν αυτό συμβαίνει για κάποια ακμή $\{x,y\} \subseteq X_i$. Χρησιμοποιώντας το το Θεώρημα 4.16, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μονοπάτι P_x που να συνδέει την

v με την x και ένα μονοπάτι P_x που να συνδέει την v με την y τέτοια ώστε όλες οι εσωτερικές τους κορυφές να βρίσκονται στα σύνολα $X_1, \ldots, X_{i-1}$. Έστω w η τελευταία κοινή κορυφή των P_x και P_y (η πρώτη τους κοινή κορυφή είναι η v) και έστω P'_x και P'_y τα μέρη των P_x και P_y από την w και μετά. Παρατηρούμε ότι το γράφημα του ενάγουν οι κορυφές των P'_x και P'_y είναι κύκλος περιττού μήκος, άτοπο.

Με βάση τον παραπάνω ισχυρισμό, αν χρωματίσουμε τις κορυφές των X_i με περιττό δείκτη με κάποιο χρώμα και τις κορυφές των X_i με άρτιο δείκτη με ένα άλλο, έχουμε έναν 2-χρωματισμό του G. $\square$

Σύμφωνα με το Λήμμα 8.10, ένα διμερές γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $\frac{n^2}{4}$ ακμές. Το 1907 ο Mantel απέδειξε ότι το ίδιο άνω φράγμα ισχύει ακόμη και αν αντί για όλους τους περιττούς κύκλους αποκλείσουμε μόνο τα τρίγωνα (βλ. άσκηση 9.4).

Ορισμός 8.15. Έστω G k-χρωματίσιμο γράφημα. Καλούμε ένα υποσύνολο k κορυφών $S \subseteq V(G)$, *πάνχρωμο* αν για κάθε χρωματισμό $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ του G, $\chi(S) = \{1, \ldots, k\}$ (δηλ. για κάθε k-χρωματισμό του G όλα τα διαθέσιμα χρώματα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον χρωματισμό των κορυφών του S).

Λήμμα 8.16. Έστω S πάνχρωμο σύνολο κορυφών ενός k-χρωματίσιμου γραφήματος G και έστω χ χρωματισμός του G με k χρώματα. Τότε οι δύο κορυφές $v, u \in S$ που είναι χρωματισμένες με τα χρώματα i και j (δηλαδή $\chi(v) = i$ και $\chi(u) = j$), ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$.

Απόδειξη. Έστω S ένα αντιπαράδειγμα του παραπάνω ισχυρισμού και $v, u \in V(G)$ τέτοιες ώστε, αν V_v είναι το σύνολο κορυφών της συνεκτικής συνιστώσας του $G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$ στην οποία ανήκει η v, να ισχύει ότι $u \notin V_v$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε έναν νέο χρωματισμό χ' για το G εναλλάσσοντας στον χ τα χρώματα i και j που έχουν ανατεθεί στις κορυφές του V_v. Πιο αυστηρά ορίζουμε,

$$\hat{\chi} = \chi \backslash \{(x, \chi(x)) \mid x \in V_v\} \cup \{(x, i + j - \chi(x)) \mid x \in V_v\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο $\hat{\chi}$ είναι ένας k-χρωματισμός του G με $\hat{\chi}(v) = \hat{\chi}(u) = j$. Συνεπάγεται ότι $\hat{\chi}^{-1}(S) = \{1, \ldots, k\} - i$ το οποίο είναι άτοπο καθώς το S είναι πάνχρωμο. $\square$

8.2 Χρωματικότητα και εκφυλισμός

Θεώρημα 8.17. Για κάθε γράφημα G, $\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το G μπορεί να χρωματιστεί με $\leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα χρησιμοποιώντας επαγωγή στο $n(G)$. Προφανώς το θεώρημα ισχύει αν $n(G) = 1$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε γράφημα G με $< n$ κορυφές μπορεί να χρωματιστεί με $\leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα. Έστω τώρα γράφημα G με $n(G) = n$. Έστω v μια κορυφή του G με βαθμό $\leq \delta^*(G)$ (την ύπαρξη αυτής της κορυφής την εγγυάται ο ορισμός της δ^*). Από την επαγωγική υπόθεση, το γράφημα $G \backslash v$ μπορεί να χρωματιστεί με $\leq \delta^*(G \backslash v) + 1 \leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα. Έστω $\chi : V(G \backslash v) \to \{1, \ldots, \delta^*(G) + 1\}$ ένας τέτοιος χρωματισμός και έστω $X = \chi^{-1}(N_G(v))$. Αφού $|X| \leq \delta^*(G)$, το σύνολο $R = \{1, \ldots, \delta^*(G) + 1\} \backslash X$ είναι μή κενό. Έστω $i \in R$. Θέτουμε $\chi' = \chi \cup \{(v, i)\}$ και παρατηρούμε ότι η χ' είναι ένας χρωματισμός του G με $\leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα. □

Το Θεώρημα 8.17 έχει πολλές εφαρμογές. Στην παρούσα ενότητα, θα δούμε μόνο μερικές από αυτές.

Θεώρημα 8.18. Αν ένα γράφημα G δεν περιέχει μονοπάτι μήκους μεγαλύτερου από l, τότε το γράφημα είναι $(l + 1)$-χρωματίσιμο.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.17 έχουμε ότι αν $\chi(G) \geq l + 2$, τότε $\delta^*(G) \geq l + 1$ και άρα το H περιέχει υπογράφημα H όπου $\delta(H) \geq l + 1$. Από το Θεώρημα 6.6, το H περιέχει κάθε δέντρο με $l + 2$ κορυφές άρα και ένα μονοπάτι μήκους $l + 1$. □

Θεώρημα 8.19. Για κάθε γράφημα G με n κορυφές ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες.

(1) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

(2) $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.17, $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \delta^*(G) + 1 + \delta^*(\overline{G}) + 1$. Από το Λήμμα 3.10 έχουμε ότι $\delta^*(\overline{G}) \leq n - \delta^*(G) - 1$. Αντικαθιστώντας, προκύπτει η σχέση (1). Για την σχέση (2) παρατηρούμε ότι το G είναι παραγόμενο υπογράφημα ενός $\chi(G)$-μερούς γραφήματος $K_{l_1, \ldots, l_{\chi(G)}}$. Έστω $l_i = \max\{l_1, \ldots, l_{\chi(G)}\}$. Προφανώς, $l_i \geq \frac{n}{\chi(G)}$. Παρατηρούμε επίσης ότι το μέρος $V_i(G)$ του G (όπως και κάθε άλλο μέρος) ενάγει κλίκα στο $\overline{G}$ και άρα το $\overline{G}$ χρειάζεται τουλάχιστον $\frac{n}{\chi(G)}$ χρώματα για να χρωματιστεί και η σχέση (2) ισχύει. □

8.3 Χρωματισμοί και επίπεδα γραφήματα

Από το Πόρισμα 7.48 και το Θεώρημα 8.17 έχουμε το εξής:

Πόρισμα 8.20. Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 6-χρωματίσιμο.

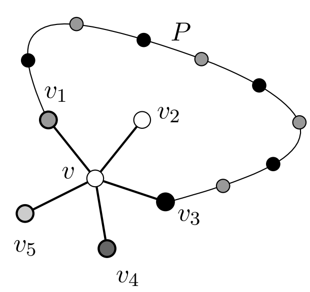
Το παρακάτω θεώρημα αποδείχθηκε από τον Percy John Heawood το 1890 (βλ. [13]) και υπήρξε ένα από τα πρώτα βήματα στην προσπάθεια της απόδειξης της *Εικασίας των τεσσάρων χρωμάτων* (Θεώρημα 8.22).

Θεώρημα 8.21 (Heawood, 1890)**.** Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 5-χρωματίσιμο.

Απόδειξη. Έστω επίπεδο γράφημα ελάχιστου αριθμού κορυφών το οποίο να μην είναι 5-χρωματίσιμο. Από το Λήμμα 7.47, το G έχει μια κορυφή v βαθμού ≤ 5. Από τον τρόπο που επιλέξαμε το G έχουμε ότι το $G' = G \backslash v$ είναι 5-χρωματίσιμο. Ισχυριζόμαστε επιπλέον ότι το σύνολο $S = N_v(G)$ είναι πανχρωμο. Πράγματι, αν όχι, τότε υπάρχει ένας 5-χρωματισμός χ του G' για τον οποίο το σύνολο $\{1,2,3,4,5\} \backslash \chi^{-1}(S)$ είναι μή-κενό και άρα περιέχει κάποιο χρώμα i. Τότε όμως, η συνάρτηση $\chi \cup \{(v,i)\}$ είναι ένας 5-χρωματισμός του G, άτοπο και ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Έστω τώρα Γ μια επίπεδη εμβάπτιση του G. Παρατηρούμε ότι στην Γ οι κορυφές του $N_G(v)$ διατάσονται κυκλικά γύρω από το v. Έστω λοιπόν $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1]$ η κυκλική αυτή διάταξη και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\chi(v_i) = i$ για $i = 1, \ldots, 5$. Για κάθε $i, j, 1 \leq i < j \leq 5$ ορίζουμε $G_{i,j} = G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$ (το $G_{i,j}$ ενάγεται από τις κορυφές του G που φέρουν τα χρώματα i και j). Από το Λήμμα 8.16, παρατηρούμε ότι:

> Οι κορυφές v_i και v_j ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G_{i,j}$ για κάθε επιλογή των $i, j, 1 \leq i < j \leq 5$.



Σχήμα 8.2: Η απόδειξη του Θεωρήματος 8.21.

Έχουμε λοιπόν οτι οι κορυφές v_1 και v_3 συνδέονται με ένα μονοπάτι P στο γράφημα G'. Βλέπουμε ότι οι κορυφές του μονοπατιού P μαζί με την κορυφή v ενάγουν έναν κύκλο L στο G ο οποίος αντιστοιχεί σε κάποιον κύκλο Λ του Γ (πιο αυστηρά, $G_\Lambda = L$). Ο κύκλος Λ χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο περιοχές R_1, R_2 (οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^2 \backslash \hat{\Lambda}$) κάθε μια εκ των οποίων περιέχει ακριβώς μια από τις κορυφές v_2, v_4 (βλ. Σχήμα 8.2). Από την Παρατήρηση 7.19, κάθε μονοπάτι του Γ που συνδέει τις κορυφές v_2 και v_4 θα συναντάει μια κορυφή του Λ, δηλαδή μια κορυφή που να μην ανήκει στο $G_{2,4}$. Άρα οι v_2 και v_4 δεν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G_{2,4}$, πράγμα που αντιβαίνει στην παραπάνω παρατήρηση για $i = 2$ και $j = 4$. □

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχθηκε το 1977 από τους Appel και Haken με την χρήση υπολογιστή (βλ. [1]). Πριν αποδειχθεί, αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της γραφοθεωρίας κατά τον προηγούμενο αιώνα.

Θεώρημα 8.22 (Τεσσάρων χρωμάτων)**.** Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 4-χρωματίσιμο.

Μια σχετικά πιο απλή απόδειξη (πάλι με χρήση υπολογιστή) του ίδιου θεωρήματος προτάθηκε το 1996 από τους Robertson, Sanders, Seymour και Thomas (βλ. [25]).

8.4 Χρωματισμοί και μέγιστος βαθμός

Το γεγονός ότι $\delta^*(G) \leq \Delta(G)$ και το Θεώρημα 8.17 στηρίζουν το παρακάτω.

Λήμμα 8.23. Κάθε γράφημα G είναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο.

Παρ' όλα αυτά, εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων, $\Delta(G)$ χρώματα αρκούν. Στο επόμενο θεώρημα αναπτύσουμε παραπέρα τις ιδέες της απόδειξης του Θεωρήματος 8.21.

Λήμμα 8.24. Έστω $d \geq 3$ και έστω G γράφημα τέτοιο ώστε $\Delta(G) \leq d$ και $K_{d+1} \not\subseteq_{\upsilon\pi} G$. Τότε το G είναι d-χρωματίσμο.

Απόδειξη. Έστω G αντιπαράδειγμα ελάχιστου αριθμού κορυφών. Άρα αν v είναι μια οποιαδήποτε κορυφή του G τότε το $G' = G \backslash v$ είναι d-χρωματίσιμο. Επίσης παρατηρούμε ότι το $S = N_v(G)$ είναι πάνχρωμο για κάθε d-χρωματισμό του G'. Πράγματι, αν δεν είναι έτσι, θα υπάρχει ένας d-χρωματισμός χ του G' για τον οποίο το σύνολο $\{1, \ldots, d\} \backslash \chi^{-1}(S)$ περιέχει κάποιο χρώμα i τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$\chi \cup \{(v,i)\}$ είναι ένας d-χρωματισμός του G (το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.21). Μια και το S είναι πάνχρωμο μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S = \{v_1, \ldots, v_d\}$ και ότι $\chi(v_i) = i$. Επίσης, μια και το G δεν είναι πλήρες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα v_1 και v_2 δεν είναι συνεδεδεμένες κορυφές στο G, και προφανώς ούτε και στο G'.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, d$, το σύνολο $S_i = \{v_i\} \cup N_{G'}(v_i)$ είναι επίσης πάνχρωμο για κάθε d-χρωματισμό του G', διαφορετικά επιλέγουμε κάποιο $h \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d\} \backslash \chi(S_i) \neq \emptyset$ και τότε η $\chi' = \chi \backslash \{(v_i, \chi(v_i))\} \cup \{(v_i, h)\}$ θα είναι ένας χρωματισμός του G' που πλήτει την πανχρωμία του S στο G, άτοπο.

Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 8.21, ορίζουμε $G_{i,j} = G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$. Από το Λήμμα 8.16, τα v_i και v_j ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G_{i,j}$, και άρα υπάρχει ένα $P_{i,j}$ (v_i, v_j)-μονοπάτι στο $G_{i,j}$ για κάθε i, j όπου $1 \leq i < j \leq d$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $P_{i,j}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $G_{i,j}$ για κάθε i, j όπου $1 \leq i < j \leq d$. Έστω $D = [v_i, a_1, \ldots, a_p, v_j]$ οι κορυφές του $P_{i,j}$ διατεταγμένες σύμφωνα με την σειρά που αυτές εμφανίζονται στο $P_{i,j}$. Πρώτα απ΄ όλα η v_i δεν μπορεί να έχει κάποια κορυφή b στην γειτονιά της διαφορετική από την a_1 όπου $\chi(b) = j$, διαφορετικά θα πλήτονταν η πανχρωμία του S_i. Άρα $\deg_{G_{i,j}}(v_i) = 1$ και συμμετρικά έχουμε ότι $\deg_{G_{i,j}}(v_j) = 1$. Έστω τώρα a_s η πρώτη κορυφή του D για την οποία $\deg_{G_{i,j}}(c) > 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\chi(a_s) = i$ και έστω d μια κορυφή γειτονική της a_s εκτός του $P_{i,j}$, για την οποία $\chi(d) = j$. Τότε όμως έχουμε τρείς κορυφές γειτονικές της a_s χρωματισμένες με j δηλαδή τις κορυφές πριν και μετά την a_s στο μονοπάτι $P_{i,j}$ και την κορυφή d. Συνεπώς, το $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d\} \backslash \chi(N_{G'}(a_s))$ περιέχει κάποιο χρώμα h τέτοιο ώστε η $\chi' = \chi \backslash \{(a_s, i)\} \cup \{(a_s, h)\}$ να είναι επίσης d-χρωματισμός του G'. Στον νέο αυτόν d-χρωματισμό, λόγω του τρόπου που επιλέχθηκε η a_s, το υπογράφημα $G'_{i,j} = G_{i,j} \backslash a_s$ που ενάγουν οι κορυφές που είναι χρωματισμένες με i και j είναι μη-συνεκτικό, άρα, από το Λήμμα 8.16, το S δεν είναι πάνχρωμο, άτοπο.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι για διαφορετικά $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$, ισχύει ότι $V(G_{i,k}) \cap V(G_{k,j}) = \{x_k\}$. Πράγματι, έστω $c \in V(G_{i,k}) \cap V(G_{k,j}) \backslash \{x_k\}$. Παρατηρούμε ότι $\chi(c) = k$ και ότι η κορυφή c έχει δύο γειτόνους χρωματισμένους με i και δύο γειτόνους χρωματισμένους με j. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, d\} \backslash \chi(N_G(c))$ περιέχει κάποιο χρώμα h τέτοιο ώστε το $\chi' = \chi \backslash \{(c, k)\} \cup \{(c, h)\}$ να είναι ένας d-χρωματισμός του G. Ξανά όμως παρατηρούμε ότι στον νέο αυτόν d-χρωματισμό, το υπογράφημα $G'_{i,k} = G_{i,k} \backslash c$ που ενάγουν οι κορυφές που είναι χρωματισμένες με i και k είναι μη-συνεκτικό, άρα, από το Λήμμα 8.16, το S δεν είναι πάνχρωμο, άτοπο.

Έστω z η κορυφή του μονοπατιού $P_{1,2}$ που είναι η γειτονική του v_1. Προφανώς, $\chi(z) = 2$ και $z \notin S$. Επίσης, $z \in G_{2,3}$. Αν η $z \in V(P_{2,3})$, επειδή $z \notin S$, η z οφείλει να είναι και εσωτερική κορυφή του $P_{2,3}$ άρα τα $P_{1,2}$ και $P_{2,3}$ τέμνονται σε μια εσωτερική τους κορυφή, άτοπο. Αν η z ανήκει σε κάποια άλλη συνιστώσα του $G_{2,3}$, τότε μπορούμε να εναλλάξουμε τα χρώματα 2 και 3 και να έχουμε χρωματισμό του G' όπου το z φέρει το χρώμα 3, άτοπο γιατί το S_1 είναι πάνχρωμο για κάθε d-χρωματισμό του G'. □

Το Λήμμα 8.24 μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής (βλ. [2]).

Θεώρημα 8.25 (Brooks, 1941)**.** Κάθε συνεκτικό γράφημα που δεν είναι πλήρες ούτε περιττός κύκλος είναι $\Delta(G)$-χρωματίσιμο.

8.5 Χρωματισμοί και περιφέρεια

Έστω γράφημα G με περιφέρεια μεγαλύτερη του $2l$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι σε αυτήν την περίπτωση κάθε υπογράφημα του G μεγέθους $\leq l$ είναι δάσος και άρα 2-χρωματίσιμο. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να πούμε ότι τα γραφήματα μεγάλης περιφέρειας είναι «τοπικώς 2-χρωματίσιμα». Παρόλλα αυτά η «τοπική» αυτή 2-χρωματισιμότητα δεν επεκτείνεται σε ολόκληρο το γράφημα όσο μεγάλη και να είναι η περιφέρεια. Το παρακάτω θεώρημα καταδεικνύει ότι υπάρχουν γραφήματα όπου ο χρωματικός αριθμός και η περιφέρεια είναι αυθαίρετα μεγάλα. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον Erdős το 1959 χρησιμοποιώντας την πιθανοτική μέθοδο (βλ. [6]). Από τότε έχουν εμφανιστεί πολλές αποδείξεις (κατασκευαστικές ή μη) αυτού του θεωρήματος. Παρακάτω δίνουμε μια πρόσφατη απόδειξη που χρησιμοποιεί απλά επιχειρήματα μέτρησης (η απόδειξη που δίνουμε είναι πρόσφατη και εμφανίστηκε στην [19]).

Θεώρημα 8.26. Για κάθε q, υπάρχει γράφημα του οποίου ο χρωματικός αριθμός και η περιφέρεια είναι τουλάχιστον q.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}_n$ η κλάση των γραφημάτων με σύνολο κορυφών το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ όπου ισόμορφα γραφήματα στην $\mathcal{U}_n$ αντιμετωπίζονται ως διαφορετικά. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{m,n,d,k} &= \{G \in \mathcal{U}_n \mid m(G) = m \leq nd, \Delta(G) \leq d^2, \chi(G) \leq k\} \text{ και} \\
\mathcal{G}_{m,n,d,l} &= \{G \in \mathcal{U}_n \mid m(G) = m \leq nd, \Delta(G) \leq d^2, \textbf{περιφέρεια}(G) \geq l\}.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $k \geq 2$ και $l \geq 3$, υπάρχουν τιμές των n, d για τις οποίες $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}| < |\mathcal{G}_{m,n,d,l}|$, άρα θα υπάρχει κάποιο γράφημα στην $\mathcal{U}_n$ με περιφέρεια $\geq l$ το οποίο να μην είναι k-χρωματίσιμο. Για τον λόγο αυτό θα βρούμε ένα άνω φράγμα για το $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}|$ και ένα κάτω φράγμα για το $|\mathcal{G}_{m,n,d,k}|$.

Για να φράξουμε άνω το $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}|$ θεωρούμε έναν οποιονδήποτε χρωματισμό $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ του $H = (V(G), \emptyset)$. Από το Λήμμα 8.10 υπάρχουν $\leq \binom{n}{2} - k\binom{n/k}{2} = \frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k})$ διαφορετικές ακμές που μπορεί να προστεθούν στο H έτσι ώστε το γράφημα που προκύπτει να παραμείνει χρωματίσιμο από την χ. Άρα υπάρχουν $\binom{\frac{1}{2}n^2(1-\frac{1}{k})}{m} \leq (\frac{1}{2}n^2(1-\frac{1}{k}))^m$ διαφορετικοί τρόποι να προσθέσουμε m ακμές στο H έτσι ώστε το γράφημα που προκύπτει να παραμείνει χρωματίσιμο από την χ. Μια και υπάρχουν k^n διαφορετικοί k-χρωματισμοί του H, καταλήγουμε ότι

$$|\mathcal{X}_{m,n,d,k}| \quad \leq \quad k^n(\frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k}))^m \tag{8.1}$$

Θα βρούμε τώρα ένα κάτω φράγμα για το $|\mathcal{G}_{m,n,d,l}|$ φράσοντας κάτω όλους τους τρόπους να φτιάξουμε ένα μέλος του $\mathcal{G}_{m,n,d,l}$ από ένα μέλος H του $\mathcal{G}_{m-1,n,d,l}$ προσθέτοντας μια νέα ακμή e. Αφού $\Delta(H) \leq d^2$ και $m(H) \leq nd$, έχουμε ότι το πολύ $2n/d$ κορυφές στο H θα έχουν βαθμό d^2 και άρα υπάρχουν τουλάχιστον $n(1 - \frac{2}{d})$ κορυφές οι οποίες μπορούν να είναι το άκρο της ακμής που θα προσθέσουμε. Έστω $S \subseteq V(H)$ το σύνολο αυτών των κορυφών. Παρατηρούμε ότι αν η e έχει την κορυφή $x \in S$ στο ένα άκρο της, τότε το άλλο άκρο της πρέπει να βρίσκεται μεν στο $S \backslash \{x\}$ αλλά πρέπει να αποκλείσουμε κάθε κορυφή με απόσταση l από το v γιατί τότε θα δημιουργούνταν στο νέο γράφημα κύκλος μήκους l. Από το Λήμμα 4.17, έχουμε ότι αποκλείονται το πολύ $\frac{d^2}{d^2-2}(d^2-1)^l \leq d^{2l}$ κορυφές (χρησιμοποιούμε το ότι $l \geq 3$) άρα έχουμε τουλάχιστον $n(1-\frac{2}{d}) - d^{2l}$ επιλογές για το άλλο άκρο της e. Άρα έχουμε τουλάχιστον $\frac{1}{2}n(1 - \frac{2}{d})(n(1 - \frac{2}{d}) - d^{2l})$ τρόπους να προσθέσουμε μια ακμή στο H έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα γράφημα του $\mathcal{G}_{m,n,d,l}$. Άρα συνολικά έχουμε ότι

$$|\mathcal{G}_{m,n,d,l}| \quad \geq \quad (\frac{1}{2}n(1 - \frac{2}{d})(n(1 - \frac{2}{d}) - d^{2l}))^m \tag{8.2}$$

Υποθέτουμε, με σκοπό το άτοπο, ότι για κάθε n και d ισχύει ότι $|\mathcal{X}_{dn,n,d,k}| \geq |\mathcal{G}_{dn,n,d,l}|$, πράγμα που σημαίνει ότι

$$k^n(\frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k}))^{dn} \geq (\frac{1}{2}n(1 - \frac{2}{d})(n(1 - \frac{2}{d}) - d^{2l}))^{nd}$$

ή αλλιώς ότι

$$n^2k^{1/d}(1-\frac{1}{k}) \geq n(n(1-\frac{2}{d})-d^{2l})(1-\frac{2}{d}). \tag{8.3}$$

Για να ισχύει το παραπάνω για κάθε n και d πρέπει ο συντελεστής του n^2 στο αριστερό μέρος της ανισότητας (8.3) να είναι *μεγαλύτερος ή ίσος* από τον συντελεστή του n^2 στο δεξί μέρος, δηλαδή για κάθε d ισχύει ότι,

$$k^{1/d}(1-\frac{1}{k}) \geq (1-\frac{2}{d})^2.$$

Στην παραπάνω ανισότητα παρατηρούμε ότι καθώς το d τείνει στο άπειρο, το δεξί μέρος τείνει στο 1 και το αριστερό τείνει στο $1-1/k$, άτοπο. □

Η παραπάνω απόδειξη δεν είναι κατασκευαστική, δηλ. δεν μας δίνει το γράφημα που αποδεικνύει ότι υπάρχει. Η πρώτη κατασκευαστικη απόδειξη του Θεωρήματος 8.26 προτάθηκε από το Lovász το 1968 (βλ. [17]). Ένα παράδειγμα γραφήματος με χρωματικό αριθμό 4 και περιφέρεια 4 είναι το γράφημα G στο Σχήμα 4.4.

8.6 Χρωματισμοί και αραιά γραφήματα

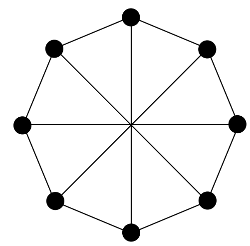
Το Θεώρημα 8.17 μας λέει ότι κάθε «εκφυλισμένο» γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με λίγα χρώματα.

Στην περίπτωση των επιπέδων γραφημάτων ο εκφυλισμός, καί άρα ο χρωματισμός με λίγα χρώματα, μπορεί να προκύψει από την απουσία των K_5 και $K_{3,3}$ ως ελασσόνων ή ως τοπολογικών ελασσόνων (Θεωρήματα 7.57 και 7.54). Πολύ περισσότερο, ο αποκλεισμός των K_5 και $K_{3,3}$ από ένα γράφημα μπορεί να εγγυηθεί τον χρωματισμό του με 4 χρώματα (λαμβάνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα 8.22). Προκύπτει ότι, στην περίπτωση που αποκλείουμε *μόνο* το K_5 ως έλασσον, 4 χρώματα είναι επίσης αρκετά. Το γεγονός αυτό προκύπτει εύκολα από το ακόλουθο θεώρημα που απόδειξε ο Wagner το 1937 (βλ. [30]).

Θεώρημα 8.27. Κάθε γραφήμα G όπου $K_5 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, μπορεί να προκύψει από μια ακολουθία αθροισμάτων κλικών μεγέθους το πολύ τρία, γραφημάτων που είναι είτε επίπεδα ή το γραφήμα V_8 του σχήματος 8.3

Από το οποίο εύκολα προκύπτει το παρακάτω.

Θεώρημα 8.28. Κάθε γραφήμα G όπου $K_5 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, είναι 4-χρωματίσιμο.



V_8

Σχήμα 8.3: Το γράφημα V_8.

Επίσης το παρακάτω Θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 5.48 και 8.17.

Θεώρημα 8.29. Κάθε γραφήμα G όπου $K_4 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, είναι 3-χρωματίσιμο.

Ένα από τα μεγαλύτερα ερωτήματα της συγχρονης γραφοθεωρίας είναι το αν τα Θεωρήματα 8.28 και 8.29 μπορούν να γενικευτούν για κάθε μέγεθος αποκλειόμενης κλίκας (βλ. [11]).

Εικασία 8.30 (Hadwiger)**.** Για κάθε $r > 0$, και για κάθε γραφήμα G: $\chi(G) \geq r \Rightarrow K_r \leq_{\text{ελ}} G$.

Η εικασία 8.30 αποδείχθηκε για $r = 6$ από τους Robertson και Seymour το 1993 και παραμένει ανοιχτή για $r \geq 7$.

Μια προσέγγιση για τον χρωματικό αριθμό των γραφημάτων χωρίς το K_r ως έλασσον μας δίνει το παρακάτω Λήμμα που αποδείχθηκε από τον Wolfgang K.W. Mader το 1967 (βλ. [18]).

Λήμμα 8.31. Για κάθε γράφημα G και κάθε $k \geq 2$, $K_r \not\leq_{\epsilon\lambda} G \Rightarrow \epsilon(G) < 2^{r-3}$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο r. Προφανώς το Θεώρημα ισχύει για $r = 2$ γιατί τότε $\epsilon(G) = 0 \leq 1/2$ και για $r = 3$ γιατί τότε το G είναι δέντρο, οπότε $\epsilon(G) < 1$. Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο ισχύει όταν αποκλείουμε ως ελάσσονα κλίκες με λιγότερες από r κορυφές.

Έστω $\ell = 2^{k-3}$ και έστω G' ένα μικρότερο, ως προς την σχέση ελασσόνων, γράφημα όπου $\epsilon(G) \geq \ell$. Αυτό σημαίνει ότι $\epsilon(G') \geq \ell$ και ότι για κάθε γνήσιο ελάσσον G'' του G', $\epsilon(G'') < \ell$. Παρατηρούμε ότι, το G' είναι συνεκτικό. (για αυτό χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\max\{\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_q}{b_q}\} \geq \frac{\sum_{i\in\{1,\ldots q\}} a_i}{\sum_{i\in\{1,\ldots q\}} b_i}$, όπου $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q \geq 0$).

Ισχυριζόμαστε ότι $\delta(G') \geq \ell$. Πράγματι, αν $v \in V(G)$ και $\deg_{G'}(v) < \ell$ τότε, αν $G'' = G'' \setminus v$, τότε $\epsilon(G'') = \frac{m(G')-\deg_{G'}(v)}{n(G')-1} > \frac{m(G')-\ell}{n(G')-1} \geq \frac{\ell \cdot n(G')-\ell}{n(G')-1} = \ell$, άτοπο γιατί το G'' είναι γνήσιο έλασσον του G.

Έστω v μια οποιαδήποτε κορυφή του G' και έστω u μια οποιαδήποτε κορυφή του $N_{G'}(v)$. Ορίζουμε $S_u = N_{G'}(v) \cap N_{G'}(u)$ και $G'' = G'/e$. Παρατηρούμε ότι $m(G'') = m(G') - |S_u| - 1$, άρα $\epsilon(G'') = \frac{m(G')-|S_u|-1}{n(G')-1}$ και η τιμή αυτή, αφού το G'' είναι γνήσιο υπογράφημα του G, πρέπει να είναι μικρότερη του ℓ. Άρα $m(G')-|S_u|-1 < \ell \cdot n(G')-\ell$ και αφού $n(G') \cdot \ell \leq m(G')$ έχουμε ότι $n(G') \cdot \ell - |S_u| - 1 < \ell \cdot n(G') - \ell \Rightarrow |S_u| \geq \ell$. Αυτό σημαίνει ότι, αν $H = G'[N_{G'}(v)]$, τότε $\delta(H) \geq \ell$, άρα $\epsilon(H) \geq \ell/2 = 2^{r-4}$. Από την επαγωγική υπόθεση, $K_{r-1} \leq_{\epsilon\lambda} H$, και αφού όλες οι κορυφές του H είναι συνδεδεμένες με την v στο G', ισχύει ότι $K_r \leq_{\epsilon\lambda} G'$ και επειδή $G' \leq_{\epsilon\lambda} G$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Η σχέση πυκνότητας και μεγέθους κλίκας στο Λήμμα 8.31 μπορεί να βελτιωθεί δραστικά χωρίς όμως να γίνει γραμμική, όπως υποδεικνύει το παρακάτω (σημαντικό) Θεώρημα που αποδείχθηκε απο τον Andrew Thomason το 2001 (βλ. [28]).

Θεώρημα 8.32 (Thomason, 2001). Έστω $c(r)$ ο μικρότερος αριθμός c για τον οποίο ισχύει ότι $\epsilon(G) \geq c \Rightarrow K_t \leq_{\epsilon\lambda} G$. Τότε $c(t) = (\alpha + o(1))t\sqrt{\log t}$ όπου $\alpha = 0.3190863...$ είναι μια συγκεκριμένη σταθερά.

Το παραπάνω αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι η απόδειξη της Εικασίας 8.30 δεν μπορεί να προκύψει μόνο με την χρήση του Θεωρήματος 8.17. Πράγματι, αν και αυτό είναι δυνατό για $r = 1, 2, 3$, ήδη για $r = 4$, η υπάρχουσα απόδειξη υποστηρίζει αυτή την διαπίστωση.

Ασκήσεις Κεφαλαίου

8.1 (☆☆☆). Έστω γράφημα G με 2007 κορυφές εκ των οποίων οι 3 έχουν βαθμό 2006. Δείξτε ότι το G δεν είναι 3-χρωματίσιμο.

8.2 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}$.

8.3 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι για κάθε γράφημα G υπάρχει διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ του $V(G)$ τέτοια ώστε $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) = \chi(G)$.

8.4 (☆☆☆). Αποδείξτε ότι για κάθε μη-πλήρες γράφημα G υπάρχει διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ του $V(G)$ τέτοια ώστε $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) > \chi(G)$.

8.5 (☆☆☆)**.** Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του οκταέδρου (βλ. σχήμα 1.3);

8.6 (☆☆☆)**.** Για κάθε δύο, όχι απαραίτητα διακεκριμένα, γραφήματα G και H ισχύει ότι $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2) \geq \chi(G_1 \cup G_2)$.

8.7 (☆☆☆)**.** Ποια είναι η σχέση μεταξύ του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος και του χρωματικού αριθμού των τεμαχίων του;

8.8 (☆☆☆)**.** Ἐστω γράφημα G με 89 κορυφές και 2007 ακμές. Δείξτε ότι το G περιέχει (ως υπογράφημα) κύκλο περιττού μήκους.

8.9 (☆☆☆)**.** Πώς προκύπτει το Θεώρημα 8.25 από το Λήμμα 8.24 ;

8.10 (☆☆☆)**.** Πως πρέπει να επαναδιατυπωθεί το Θεώρημα 8.25 για όχι απαραίτητα συνεκτικά γραφήματα;

8.11 (☆☆☆)**.** Πώς από τα Θεωρήματα 8.22 και 8.27 προκύπτει το Θεώρημα 8.28 ;

8.12 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι κάθε γράφημα με m ακμές περιέχει ως υπογράφημα ένα διμερές γράφημα με $m/2$ ακμές.

8.13 (☆☆☆)**.** Έστω παραγόμενο δέντρο T ενός διμερούς γραφήματος G με μέρη τα U και D. Δείξτε ότι αν όλα τα φύλλα του T είναι στο D τότε το T έχει άρτια διάμετρο.

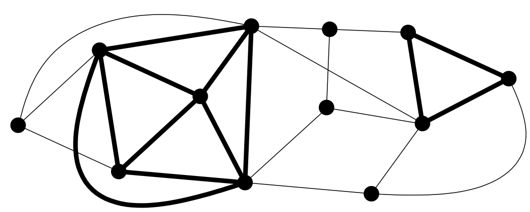
8.14 (☆☆☆)**.** Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν 15 γυναίκες και άγνωστος αριθμός ανδρών. Κάθε άντρας κάνει χειραψία με ακριβώς 6 γυναίκες και κάθε γυναίκα κάνει χειραψία με ακριβώς 8 άνδρες. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα αυτά για να βρείτε τον αριθμό των ανδρών που βρίσκονται στο δωμάτιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΚΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

9.1 Κλίκες

Ορισμός 9.1. Θα χρησιμποιούμε τον συμβολισμό $\omega(G)$ για τον μέγιστο αριθμό κορυφών σε μια κλίκα του G. Καλούμε την ποσότητα αυτή *αριθμό κλίκας* του G. Με άλλα λόγια, $\omega(G) = \max\{r \mid K_r \subseteq_{\upsilon\pi} G\}$.



Σχήμα 9.1: Ένα γράφημα G και δύο κλίκες σε αυτό μεγέθους 5 και 3 αντίστοιχα.

Παρατήρηση 9.2. *Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\omega(G) \leq \chi(G)$.*

Παρατήρηση 9.3. *Για κάθε επίπεδο γράφημα G ισχύει ότι $\omega(G) \leq 4$.*

Ορισμός 9.4. *Γράφημα Turán* καλείται ένα p-μερές γράφημα, χωρίς κενά μέρη, με n κορυφές και το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών, έστω $\tau(p,n)$.

Λήμμα 9.5. Για κάθε p, n ($p \geq 1, n \geq 0$), υπάρχει ένα και μοναδικό γράφημα Turán και είναι το πλήρες p-μερές γράφημα του οποίου τα μέρη έχουν πληθάριθμους που διαφέρουν το πολύ κατά 1.

Απόδειξη. Έστω $n_1, \ldots, n_p$ οι πληθάριθμοι των μελών του G. Το πλήθος των ακμών του είναι

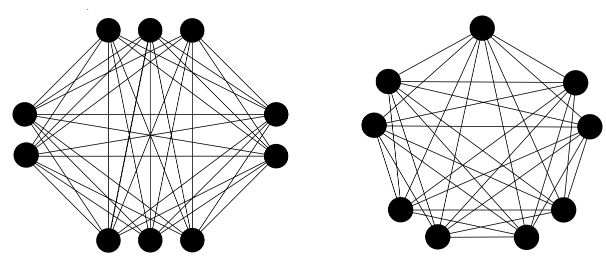
$$m(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i \cdot n_j$$

και η ποσότητα αυτή είναι η μέγιστη δυνατή όταν οι τιμές των $n_1, \ldots, n_p$ είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερες στην n/p. Άρα αν ένα πλήρες p-μερές γράφημα με το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών έχει ως μέρη σύνολα των οποίων οι πληθάριθμοι είναι

$$\underbrace{\lceil \frac{n}{p} \rceil, \ldots, \lceil \frac{n}{p} \rceil}_{n \text{ mod } p}, \underbrace{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}_{p-(n \text{ mod } p)}.$$

Προφανώς το γράφημα αυτό είναι μοναδικό και όλα τα μέρη του έχουν πληθάριθμους που διαφέρουν το πολύ κατά 1. □

Ορισμός 9.6. Για κάθε p, n ($p \geq 1, n \geq 0$), συμβολίζουμε με $T_p(n)$ το (μοναδικό, σύμφωνα με το Λήμμα 9.5) γράφημα Turán με $\tau(p, n)$ ακμές.



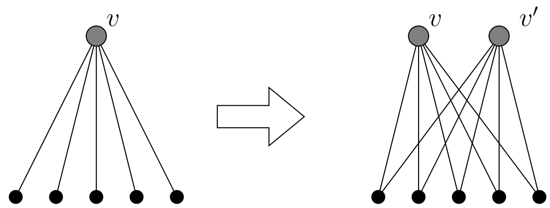
Σχήμα 9.2: Τα γραφήματα Turán $T_4(10)$ και $T_5(9)$.

Ορισμός 9.7. Καλούμε ένα γράφημα G (k)-*ω-ακραίο* αν $\omega(G) \leq k$ και δεν υπάρχει άλλο γράφημα G' για το οποίο $\omega(G') \leq k$, $n(G) = n(G')$ και $m(G) < m(G')$.

Ορισμός 9.8. Έστω G γράφημα και έστω $v \in V(G)$ καλούμε *διπλασιασμό της v στο G* τον μετασχηματισμό του G ο οποίος συνίσταται στην πρόσθεση μιας νέας κορυφής v' στο G και την σύνδεσή της με όλες τις κορυφές στο $N_G(v)$.

Λήμμα 9.9. Έστω G γράφημα και έστω G^+ το αποτέλεσμα του διπλασιασμού μιας κορυφής του G. Τότε $\omega(G) = \omega(G^+)$.

Λήμμα 9.10. Κάθε (k)-ω-ακραίο γράφημα είναι πλήρες πολυμερές.



Σχήμα 9.3: Μια κορυφή v και το αποτέλεσμα του διπλασιασμού της.

Απόδειξη. Αν ένα γράφημα G δεν είναι πλήρες πολυμερές, τότε περιέχει τρεις κορυφές x, y, a τέτοιες ώστε $\{x, y\} \in E(G)$ και $\{x, a\}, \{y, a\} \notin E(G)$. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί κοιτώντας το συμπλήρωμά του στο οποίο οι κορυφές x και y έχουν απόσταση 2 ενώ κάθε ζεύγος κορυφών στο συμπλήρωμα ενός πολυμερούς γραφήματος έχει απόσταση είτε άπειρη είτε 1. Αν $\deg_G(x) > \deg_G(a)$ τότε διπλασιάζοντας την κορυφή x έχουμε ένα γράφημα G^+ για το οποίο $\omega(G^+) \leq k$, $m(G^+) = m(G) + \deg_G(x)$. Αν τώρα αφαιρέσουμε από το G^+ την κορυφή a τότε έχουμε ένα γράφημα G^* για το οποίο $\omega(G^*) \leq k$, $m(G^*) = m(G) + \deg_G(x) - \deg_G(a) > m(G)$ άτοπο. Άρα $\deg_G(x) \leq \deg_G(a)$. Για τον ίδιο λόγο, $\deg_G(y) \leq \deg_G(a)$. Αν τώρα διπλασιάσουμε δύο φορές την κορυφή a έχουμε ένα γράφημα G^+ για το οποίο $\omega(G^+) \leq k$ και $m(G^+) = m(G) + 2 \cdot \deg_G(a)$. Αν τώρα αφαιρέσουμε από το G^+ την κορυφή x και μετά την κορυφή y, έχουμε ένα γράφημα G^* για το οποίο $\omega(G^*) \leq k$, $m(G^*) = m(G) + 2 \cdot \deg_G(a) - \deg_G(x) - (\deg_G(y) - 1) > m(G)$, άτοπο (παρατηρήστε ότι οι x και y είναι γειτονικές και άρα μετά την αφαίρεση της x ο βαθμός της y είναι ίσος με $\deg_G(y) - 1$). □

Λήμμα 9.11. Κάθε (k)-ω-ακραίο γράφημα G με n κορυφές είναι ισόμορφο με το γράφημα Turán $T_k(n)$.

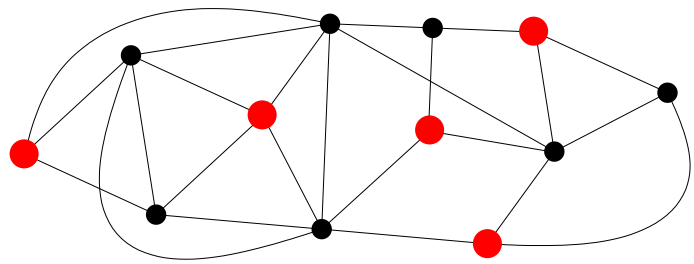
Απόδειξη. Από το Λήμμα 9.10, το G είναι πολυμερές. Επίσης έχει το πολύ k μη κενά μέρη, διαφορετικά $\omega(G) > k$. Άρα το G είναι γράφημα Turán, λόγω του Λήματος 9.5 το γράφημα αυτό είναι μοναδικό και άρα είναι ισόμορφο με το $T_k(n)$. □

Συνέπεια του Λήμματος 9.11 είναι το παρακάτω θεώρημα (για την απόδειξη, αρκεί να προσθέσουμε ακμές μέχρι το γράφημα να γίνει (k)-ω-ακραίο).

Θεώρημα 9.12 (Turán, 1941)**.** Για κάθε γράφημα G, $m(G) \leq \tau(\omega(G), n(G))$.

9.2 Ανεξάρτητα σύνολα

Ορισμός 9.13. Έστω γράφημα G. Λέμε ότι ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι *ανεξάρτητο σύνολο του* G αν κανένα ζεύγος κορυφών από το S δεν είναι ακμή του G. Ο *αριθμός ανεξαρτησίας* $\alpha(G)$ ενός γραφήματος G, είναι το μέγιστο πλήθος ενός ανεξάρτητου συνόλου του G.



Σχήμα 9.4: Ένα ανεξάρτητο σύνολο στο γράφημα του Σχήματος 9.1.

Παρατήρηση 9.14. *Για κάθε γράφημα G, ισχύει ότι $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.*

Παρατήρηση 9.15. *Για κάθε γράφημα G, ισχύει ότι $n(G) \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.*

Ορισμός 9.16. Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l ορίζουμε τον *αριθμό Ramsey $r(k,l)$ των k και l* ως το μικρότερο n για το οποίο για κάθε γράφημα G με n κορυφές, είτε $\omega(G) \geq k$ ή $\alpha(G) \geq l$.

Παρατήρηση 9.17. *Αν k και l είναι θετικοί ακέραιοι τότε $r(1,l) = r(k,1) = 1$, $r(2,l) = l$ και $r(k,2) = k$. Επίσης, ισχύει ότι $r(k,l) = r(l,k)$.*

Η πληρότητα του Ορισμού 9.16 (δηλαδή το γεγονός ότι ο αριθμός $r(k,l)$ πράγματι υπάρχει) στηρίζεται στο Θεώρημα 9.19 του οποίου η απόδειξη στηρίζεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 9.18. Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l ισχύει ότι

$$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1).$$

Απόδειξη. Έστω γράφημα G με $n(G) = r(k-1,l) + r(k,l-1)$ και έστω v οποιαδήποτε κορυφή του G. Εστω επίσης $k_1 = |N_G(v)|$ και $k_2 = |N_{\overline{G}}(v)|$ (δηλ.

το k_2 είναι το πλήθος των κορυφών του G με τις οποίες δεν συνδέται η v στο G). Παρατηρούμε ότι

$$k_1 + k_2 \;=\; n(G) - 1 = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1. \qquad (9.1)$$

Αν $k_1 \geq r(k-1,l)$, τότε για το γράφημα $G^- = G[N_G(v)]$ έχουμε ότι είτε $\omega(G^-) \geq k-1$ ή $\alpha(G^-) \geq l$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε ότι $\omega(G) \geq k$ (η v προστίθεται στην κλίκα του G^+) και στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $\alpha(G) \geq l$ και το λήμμα ισχύει.

Αν $k_1 < r(k-1,l)$, τότε, χρησιμοποιώντας την Σχέση 9.1, έχουμε ότι $k_1 \leq r(k-1,l) - 1 \Rightarrow -k_1 \geq -r(k-1,l) + 1 \Rightarrow k_2 \geq r(k,l-1)$. Ορίζουμε $G^- = G[N_{\overline{G}}(v)]$ και έχουμε ότι είτε $\omega(G^-) \geq k$ ή $\alpha(G^-) \geq l-1$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\omega(G) \geq k$ και στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $\alpha(G) \geq l$ (η v προστίθεται στο ανεξάρτητο σύνολο του G^-). Και στις δύο περιπτώσεις το λήμμα ισχύει. □

Θεώρημα 9.19. Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l ισχύει ότι

$$r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην ποσότητα $k+l$. Από την Παρατήρηση 9.17, το θεώρημα ισχύει για $k+l \leq 5$. Έστω p, q θετικοί ακέραιοι. Υποθέτουμε ότι ο θεώρημα ισχύει για κάθε ζεύγος k, l όπου $k+l < p+q$. Τότε ή επαγωγική υπόθεση μαζί με το Λήμμα 9.18 μας δίνουν:

$$\begin{aligned} r(p,q) &\leq r(p-1,q) + r(p,q-1) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-1} + \binom{p+q-3}{p-2} \\ &= \binom{p+q-2}{p-1}, \end{aligned}$$

άρα το θεώρημα ισχύει για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων. □

Παρατήρηση 9.20. *Από το Λήμμα 9.18 έχουμε ότι* $r(3,3) \leq r(2,3) + r(3,2) = 6$. *Μια και ο κύκλος* C_5 *έχει* $\omega(C_5) = \alpha(C_5) = 2$ *έχουμε ότι* $r(3,3) > 5$, *άρα* $r(3,3) = 6$.

Σχόλιο 9.21. Η εύρεση της ακριβούς τιμής του $r(k,l)$ είναι ένα πολύ δύσκολο[1] πρόβλημα ακόμη και για μικρές τιμές των k και l. Ως τώρα (σύμφωνα με την [24]) οι μόνες (μη τετριμμένες) τιμές που είναι γνωστές είναι οι $r(3,i)$ για $i \in \{3,\ldots,9\}$ και οι $r(4,i)$ για $i \in \{4,5\}$. Είναι επίσης γνωστό ότι $r(5,5) \in \{43,\ldots,48\}$.

Το παρακάτω θεώρημα ήτανε το πρώτο γενικό φράγμα για τους αριθμούς Ramsey.

Θεώρημα 9.22 (Erdős, 1947)**.** Για κάθε θετικό ακέραιο k, ισχύει ότι $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε την μη τετριμμένη περίπτωση όπου $k \geq 3$ Έστω $V_n = \{v_1,\ldots,v_n\}$. Ορίζουμε το $\mathcal{G}_n$ ως το σύνολο των γραφημάτων με σύνολο κορυφών το V_n και το $\mathcal{G}_n^k$ ως το υποσύνολο του $\mathcal{G}_n$ το οποίο περιέχει γραφήματα με κλίκα μεγέθους k. Από την στιγμή που κάθε ζεύγος $i,j, 1 \leq i < j \leq n$ αντιστοιχεί σε μια ακμή κάποιου από τα γραφήματα του $\mathcal{G}_n$, έχουμε ότι $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Παρομοίως για κάθε υποσύνολο $S \subseteq V_n$ μεγέθους k, υπάρχουν $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ γραφήματα στο $\mathcal{G}_n$ στα οποία το S ενάγει κλίκα. Αφού υπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικά τέτοια σύνολα S, έχουμε ότι

$$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \Rightarrow \frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}.$$

Αν $n < 2^{k/2}$, τότε

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Άρα λιγότερα από τα μισά γραφήματα στο $\mathcal{G}_n$ έχουν κλίκα μεγέθους k. Μια και $\mathcal{G}_n = \{G \mid \overline{G} \in \mathcal{G}_n\}$, επίσης λιγότερα από τα μισά γραφήματα στο $\mathcal{G}_n$ έχουν ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Αυτό όμως σημαίνει ότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα γράφημα $G \in \mathcal{G}_n$ το οποίο να μην έχει ούτε κλίκα ούτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Άρα $\omega(G) < k$ και $\alpha(G) < k$, συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει ότι $r(k,k) < 2^{k/2}$ και το θεώρημα αποδείχθηκε. □

[1] Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τα λεγόμενα του Paul Erdős σχετικά με τον υπολογισμό των $r(5,5)$ και $r(6,6)$:

> *"Imagine an alien force, vastly more powerful than us landing on Earth and demanding the value of $r(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they asked for $r(6,6)$, we should attempt to destroy the aliens."*

Σχόλιο 9.23. Η απόδειξη του Θεωρήματος 9.22 είναι μη κατασκευαστική με την έννοια ότι αποδεικνύει την ύπαρξη γραφήματος G με $\omega(G) < k$, $\alpha(G) < k$ και $n < 2^{k/2}$ κορυφές χωρίς να δίνει κάποιον τρόπο να κατασκευαστεί αυτό το γράφημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και υπάρχουν κάτω φράγματα που έχουν αποδειχθεί με κατασκευαστικό τρόπο, όλα είναι κατά πολύ χειρότερα από αυτό του Θεωρήματος 9.22.

Ασκήσεις Κεφαλαίου

9.1 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι για κάθε γράφημα $G, \omega(G) \leq \delta^*(G) + 1$.

9.2 (☆☆☆)**.** Χρησιμοποιήστε την απόδειξη του Λήμματος 9.5 για να βρείτε μια ακριβή φόρμουλα για το $\tau(p, n)$.

9.3 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι $\tau(p, n) \leq n^2 \cdot \frac{p-1}{2p}$. Σε ποιες περιπτώσεις ισχύει η ισότητα;

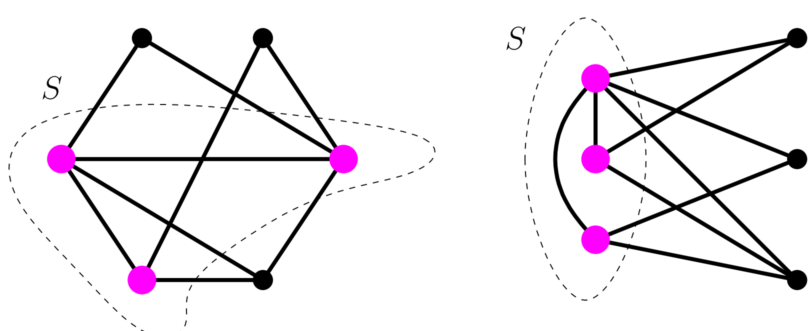
9.4 (☆☆☆)**.** Κάθε γράφημα με περισσότερες από $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{p} \rceil$ ακμές περιέχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο ως υπογράφημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΚΑΛΥΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΑ

10.1 Καλύμματα κορυφών

Ορισμός 10.1. Μια ακμή e ενός γραφήματος G *καλύπτεται* από ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ αν κάποιο από τα άκρα της βρίσκεται στο S. Λέμε ότι ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι *κάλυμμα κορυφών του* G αν το S καλύπτει όλες τις ακμές του G. Ο *αριθμός καλύμματος κορυφών* $\mathbf{vc}(G)$ ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο πλήθος κορυφών ενός καλύμματος κορυφών του G.



Σχήμα 10.1: Ένα κάλυμμα κορυφών και δύο τρόποι να το αναπαραστήσουμε.

Παρατήρηση 10.2. *Αν ένα γράφημα G έχει κάλυμμα κορυφών το πολύ k τότε το ίδιο θα ισχύει και για κάθε υπογράφημά του.*

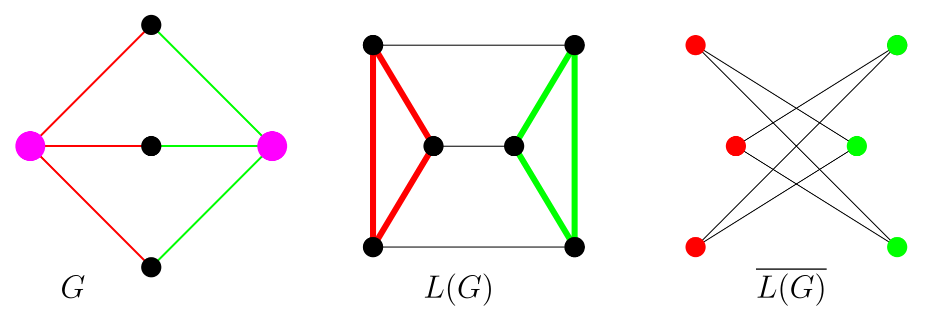
Παρατήρηση 10.3. *Αν το G είναι διμερές γράφημα με μέρη U και D, τότε* $\mathbf{vc}(G) \leq \min\{|U|, |D|\}$.

Λήμμα 10.4. Για κάθε γράφημα G, ισχύει ότι $\mathbf{vc}(G) = n(G) - \alpha(G)$.

Απόδειξη. Έστω S ένα ανεξάρτητο σύνολο του γραφήματος G. Αφού καμία από τις ακμές του G δεν έχει και τα δύο άκρα της στο S, έχουμε ότι κάθε ακμή του G θα έχει τουλάχιστον ένα άκρα εκτός του S, δηλαδή στο $V(G)\backslash S$. Αντιστρόφως, αν το σύνολο S είναι κάλυμμα κορυφών του γραφήματος G, τότε όλες οι ακμές του G θα έχουν τουλάχιστον ένα από τα άκρα τους στο S. Άρα καμία ακμή δεν θα έχει και τα δύο άκρα της στο $V(G)\backslash S$, άρα το $V(G)\backslash S$ είναι ανεξάρτητο σύνολο του G (βλ. Σχήμα 10.1). Καταλήγουμε ότι το G έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k αν και μόνο αν έχει και κάλυμμα κορυφών μεγέθους $\geq n(G) - k$ και άρα το λήμμα ισχύει. □

Παρατήρηση 10.5. *Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι* $\delta^*(G) \leq \mathbf{vc}(G)$.

Απόδειξη. Έστω $\delta^*(G) = k$ τότε θα υπάρχει υπογράφημα του G για το οποίο $\delta(H) = k$. Υποθέτουμε, με σκοπό το άτοπο, ότι το H έχει κάλυμμα κορυφών S με $|S| < k$. Αυτό όμως σημαίνει ότι οι κορυφές του $H\backslash S$ είναι ανεξάρτητο σύνολο I. Προφανώς, κάθε κορυφή v του I είναι συνδεδεμένη στο H μόνο με κορυφές του S, άρα $\deg_G(v) \leq |S| < k$, άτοπο. Άρα $\mathbf{vc}(H) \geq k$ και από την Παρατήρηση 10.2, $\mathbf{vc}(G) \geq \mathbf{vc}(H) \geq k$. □



Σχήμα 10.2: Διμερές γράφημα G και τα γραφήματα $L(G)$ και $\overline{L(G)}$.

Λήμμα 10.6. Για κάθε διμερές γράφημα G, ισχύει ότι $\mathbf{vc}(G) = \chi(\overline{L(G)})$.

Απόδειξη. Ένας r-χρωματισμός στο συμπλήρωμα του γραφήματος $L(G)$ του G αντιστοιχεί σε μια διαμέριση του $V(L(G))$ σε r σύνολα κορυφών (ένα για κάθε χρωματική κλάση) το καθένα από τα οποία ενάγει κλίκα στο $L(G)$ (βλ. Λήμμα 8.9). Επειδή το G είναι διμερές, κάθε τέτοια κλίκα θα αντιστοιχεί σε ένα σύνολο ακμών του G που έχουν κάποιο κοινό άκρο. Αυτά τα r σύνολα ακμών αποτελούν μια διαμέριση του $E(G)$ και το σύνολο των r κοινών άκρων για το καθένα από αυτά είναι ένα κάλυμμα κορυφών στο G μεγέθους r. Με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο συλλογισμό μπορεί να δειχτεί ότι κάθε κάλυμμα κορυφών μεγέθους r στο G αντιστοιχεί σε έναν r-χρωματισμό του $\overline{L(G)}$. □

10.2 Ταιριάσματα

Ορισμός 10.7. Καλούμε *ταίριασμα* ενός γραφήματος G κάθε σύνολο ακμών $M \subseteq E(G)$ για το οποίο $\forall_{e,e' \in M}\, e \cap e' = \emptyset$. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mu(G)$ για το μέγιστο πλήθος των ακμών σε ένα ταίριασμα του G. Θα λέμε ότι ένα ταίριασμα M *καλύπτει* μια κορυφή $v \in V(G)$ αν η v είναι άκρο κάποιας ακμής του M.

Παρατήρηση 10.8. *Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\mu(G) = \omega(\overline{L(G)})$*

Λήμμα 10.9. Για κάθε γράφημα G, ισχύει ότι $\chi(\overline{G}) \leq n(G) - \mu(G)$.

Απόδειξη. Έστω $n = n(G) = n(\overline{G})$. Χρησιμοποιούμε $\mu(G)$ χρώματα για να ζωγραφίσουμε, με το καθένα από αυτά, τις κορυφές του $\overline{G}$ που είναι άκρα της κάθε ακμής ενός μέγιστου ταιριάσματος του G. Για τις $n - 2 \cdot \mu(G)$ κορυφές του $\overline{G}$ που δεν καλύπτονται από το M στο G, χρησιμοποιούμε $n - 2 \cdot \mu(G)$ επιπλέον χρώματα, ένα για κάθε μια από αυτές. Συνολικά χρησιμοποιήσαμε $\mu(G) + n - 2 \cdot \mu(G) = n - \mu(G)$ χρώματα και άρα $\chi(\overline{G}) \leq n(G) - \mu(G)$. □

Λήμμα 10.10. Για κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές, ισχύει ότι

$$\mu(G) \leq \frac{2mn}{n + 2m}.$$

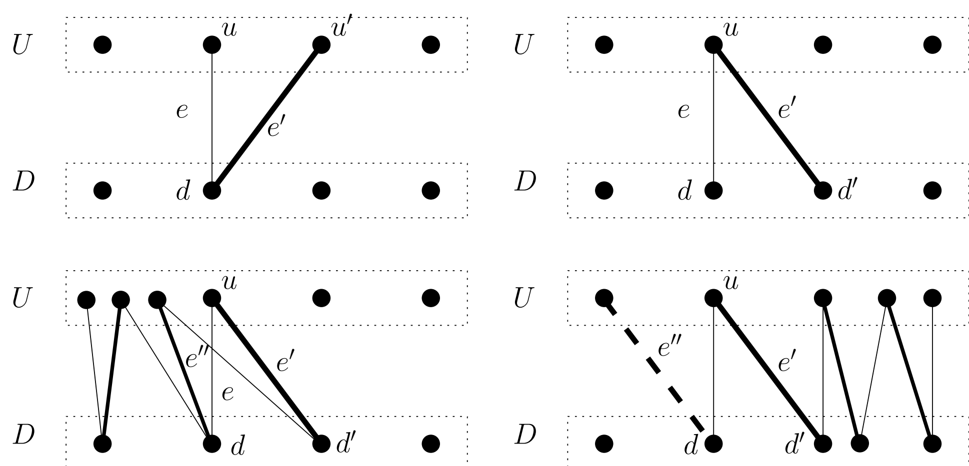
Απόδειξη. Από το Λήμμα 10.9, $\mu(G) \leq n - \chi(\overline{G})$ και από το Πόρισμα 8.11, $\chi(\overline{G}) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2(\binom{n}{2} - m)}$. Άρα $\mu(G) \leq n - \frac{n^2}{n^2 - n(n-1) + 2m} \leq \frac{2mn}{n+2m}$. □

Παρατήρηση 10.11. *Το γράφημα $3 \cdot K_2$ ικανοποιεί την ισότητα του άνω φράγματος του Λήμματος 10.10.*

Παρατήρηση 10.12. *Αφού κάθε ακμή σε ένα ταίριασμα πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα της σε ένα κάλυμμα κορυφών παρατηρούμε ότι για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\mu(G) \leq \mathbf{vc}(G)$.*

Θεώρημα 10.13 (Kőnig, 1931)**.** Για κάθε διμερές γράφημα G ισχύει ότι $\mathbf{vc}(G) = \mu(G)$.

Απόδειξη. Προφανώς μπορούμε μα υποθέσουμε ότι το G δεν περιέχει απομονωμένες κορυφές. Από την Παρατήρηση 10.12, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{vc}(G) \leq \mu(G)$. Έστω U και D τα μέρη του G και έστω M ένα μέγιστο ταίριασμα του G. Αν το M καλύπτει όλες τις κορυφές του U τότε το U είναι κάλυμμα κορυφών του G και το θεώρημα προκύπτει. Έστω S οι κορυφές του U που δεν καλύπτονται από το M. Καλούμε ένα μονοπάτι P περιττού μήκους, *S-εναλλασσόμενο* αν αρχίζει από μια κορυφή του S και περιέχει εναλλάξ ακμές εκτός και εντός του M (η πρώτη και η τελευταία ακμή του P είναι εκτός του M). Κατασκευάζουμε ένα κάλυμμα κορυφών R του G, τοποθετώντας σε αυτό, για κάθε ακμή $e \in M$ ακριβώς ένα από τα δύο άκρα της ως εξής: Αν $e = \{u, d\}$, όπου $u \in U$ και $d \in D$, βάζουμε την d στο R αν υπάρχει S-εναλλασσόμενο μονοπάτι που να τελειώνει στην d, διαφορετικά βάζουμε στο R την κορυφή u. Προφανώς $|R| = |M|$. Μένει να δείξουμε ότι το R είναι όντως κάλυμμα κορυφών στο G, δηλαδή ότι για κάθε ακμή $e \in E(G)$, κάποιο από τα άκρα της θα ανήκει στο R. Αυτό προκύπτει άμεσα αν $e \in M$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $e \notin M$.



Σχήμα 10.3: Οι περιπτώσεις της απόδειξης του Θεωρήματος 10.13.

Αφού το M είναι ταίριασμα μέγιστου μεγέθους, η $e = \{u, d\}$ θα έχει κάποιο άκρο κοινό με κάποια ακμή e' του M, διαφορετικά το $M \cup \{e\}$ είναι επίσης ταίριασμα με μεγαλύτερο αριθμό ακμών. Αν η d είναι άκρο της e', τότε $u \in S$ και το μονοπάτι που ενάγει η ακμή e είναι S-εναλλασσόμενο. Από τον ορισμό του R

ισχύει $d \in R$ και άρα η e καλύπτεται από το R. Έστω τώρα ότι η u είναι άκρο της $e' = \{u, d'\}$. Αν κανένα S-εναλλασσόμενο μονοπάτι δεν τελειώνει στην d' τότε από τον ορισμό του R, $u \in R$ και άρα η e καλύπτεται από το R. Έστω τώρα S-εναλλασσόμενο μονοπάτι P που να τελειώνει στην d'. Αν το d είναι εσωτερική κορυφή αυτού του μονοπατιού, τότε η d θα είναι το άκρο κάποιας ακμής e''του M, πράγμα που σημαίνει ότι $d \in R$, άρα η e καλύπτεται από το R. Έστω τώρα ότι η d δεν είναι κορυφή του P. Προφανώς η e' δεν είναι ακμή του P γιατί η τελευταία ακμή του P δεν ανήκει στο M. Επίσης η e δεν είναι ακμή του P γιατί τότε και η d θα ανήκε στο P. Άρα μπορούμε να επεκτείνουμε το μονοπάτι P στο μονοπάτι $P^+ = P \cup (\{d', u, d\}, \{e', e\})$ το οποίο είναι επίσης S-εναλλασσόμενο και καταλήγει στο d. Για να δείξουμε ότι $d \in R$ μένει να δείξουμε ότι η d είναι άκρο κάποιας ακμής e'' του M.

Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν είναι σωστό και άρα το P^+ αρχίζει και τελειώνει με κορυφές που δεν καλύπτονται από το M. Μένει να παρατηρήσουμε ότι αν βγάλουμε από το M τις ακμές που βρίσκονται στο P^+ και προσθέσουμε στο M τις υπόλοιπες ακμές του P^+, έχουμε και πάλι ένα ταίριασμα M^+ του G το οποίο έχει μέγεθος κατά ένα μεγαλύτερο από το M, άτοπο. □

Θεώρημα 10.14 (Hall, 1935)**.** Ένα διμερές γράφημα G με μέρη U και D περιέχει ένα ταίριασμα M που να καλύπτει όλες τις κορυφές του U αν και μόνο αν για κάθε $R \subseteq U$ ισχύει ότι $|N_G(R)| \geq |R|$.

Απόδειξη. Αν το M καλύπτει όλες τις κορυφές του U τότε το U δεν περιέχει απομονωμένες κορυφές. Έστω R υποσύνολο του U και έστω $M' \subseteq M$ οι ακμές του M που έχουν άκρα στο R. Τότε το $D \cap N_G(R)$ θα έχει $|M'| = |R|$ διαφορετικές κορυφές που είναι άκρα ακμών του $|M'|$, και άρα $|N_G(R)| \geq |R|$.

Έστω τώρα ότι κανένα ταίριασμα M δεν καλύπτει όλες τις κορυφές του U. Από το Θεώρημα 10.13, $\mathbf{vc}(G) = \mu(G) < |U|$. Έστω S ένα κάλυμμα κορυφών του G μεγέθους $< |U|$ και έστω $S_U = S \cap U$ και $S_D = S \cap D$. Αφού το S είναι κάλυμμα κορυφών του διμερούς γραφήματος G, το σύνολο $(U \backslash S_U) \cup (D \backslash S_D)$ είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G και άρα $N_G(U \backslash S_U) \subseteq S_D$. Αφού $|S| < |U|$ ισχύει επίσης ότι $|S \backslash S_U| < |U \backslash S_U|$. Καθώς $|N_G(U \backslash S_U)| \leq |S_D|$ και $|S_D| = |S \backslash S_U|$ έπεται ότι $|N_G(U \backslash S_U)| < |U \backslash S_U|$. Άρα υπάρχει $R = U \backslash S_U$ τέτοιο ώστε $|N_G(R)| < |R|$. □

Ασκήσεις Κεφαλαίου

10.1 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε γράφημα με n κορυφές και m ακμές, $\mathbf{vc}(G) \geq \frac{m}{n}$ και $\alpha(G) \leq \frac{n^2-m}{n}$.

10.2 (☆☆☆). Κάθε 3-κανονικό γράφημα G χωρίς γέφυρες περιέχει ταίριασμα μεγέθους $\frac{1}{3}m(G)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

11.1 Κλάσεις τέλειων γραφημάτων

Ορισμός 11.1. Ένα γράφημα G καλείται *τέλειο* αν για κάθε εναγόμενο υπόγράφημά του H, ισχύει ότι $\chi(H) = \omega(H)$.

Η μελέτη των τέλειων γραφημάτων ανάγεται σε μια εργασία του Tibor Gallai, το 1958, όπου απέδειξε ότι το συμπλήρωμα κάθε διμερούς γραφήματος είναι τέλειο. Ο όρος «τέλεια» για τα γραφήματα του Ορισμού 11.1 δόθηκε από τον Claude Berge το 1963. Ο ίδιος ο Berge διατύπωσε τις παρακάτω δύο εικασίες σχετικά με την δομή τους.

Εικασία των τέλειων γραφημάτων:

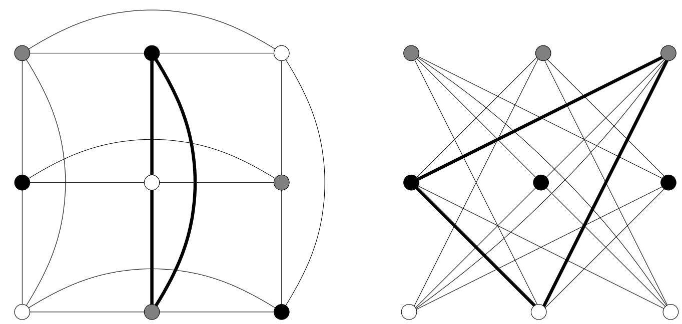
Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι τέλειο.

Ισχυρή εικασία των τέλειων γραφημάτων:

Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν ούτε το ίδιο ούτε το συμπλήρωμά του δεν περιέχει περιττή τρύπα[1] *μεγέθους μεγαλύτερο ή ίσο του 5.*

Παρατήρηση 11.2. *Η ισχυρή εικασία των τέλειων γραφημάτων συνεπάγεται την ασθενή.*

[1] Δηλ. εναγόμενο κύκλο, βλ. Ορισμό 4.26.



Σχήμα 11.1: Ένα τέλειο γράφημα, το συμπλήρωμά του και ένας 3-χρωματισμός του και μια κλίκα μεγέθους 3 σε καθένα από αυτά. Παρατηρήστε ότι ο αριθμός ανεξαρτησίας σε καθένα από αυτά είναι 3.

Σχόλιο 11.3. Ένα γράφημα καλείται *γράφημα Berge* αν ούτε το ίδιο ούτε το συμπλήρωμά του περιέχουν εναγόμενους περιττούς κύκλους μεγέθους τουλάχιστον 5. Συνεπώς η ισχυρή εικασία των τέλειων γραφημάτων λέει ότι η κλάση των τέλειων γραφημάτων συμπίπτει με την κλάση των γραφημάτων Berge.

Παρατήρηση 11.4. *Τα διμερή γραφήματα είναι τέλεια.*

Παρατήρηση 11.5. *Οι τροχοί $W_i, i \geq 4$ γιά άρτιες τιμές του i είναι τέλεια γραφήματα (βλ. Ορισμό 5.44).*

Παρατήρηση 11.6. *Τα επίπεδα γραφήματα δεν είναι τέλεια. Για παράδειγμα, το C_5 έχει χρωματικό αριθμό 3 και αριθμό κλίκας 2.*

Ορισμός 11.7. Καλούμε ένα γράφημα G *συνδιμερές* αν είναι το συμπληρωματικό ενός διμερούς γραφήματος.

Θεώρημα 11.8 (Gallai, 1958)**.** Τα συνδιμερή γραφήματα είναι τέλεια.

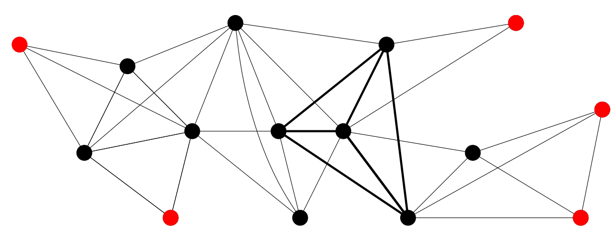
Απόδειξη. Έστω G συνδιμερές γράφημα με n κορυφές. Μια και κάθε εναγόμενο υπογράφημά του είναι συνδιμερές, μένει να αποδείξουμε ότι $\chi(G) \leq \omega(G)$. Από το Λήμμα 10.9 έχουμε $\chi(G) \leq n - \mu(\overline{G})$ και από το Θεώρημα 10.13, $\mu(\overline{G}) = \mathbf{vc}(\overline{G})$. Επίσης από την Παρατήρηση 9.14, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ και από την Λήμμα 10.4, $\alpha(\overline{G}) = n - \mathbf{vc}(\overline{G})$. Συνεπώς, $\chi(G) \leq n - \mu(\overline{G}) = n - \mathbf{vc}(\overline{G}) = \alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. □

Λήμμα 11.9. Κάθε γράφημα που είναι το συμπλήρωμα του γραμμικού γραφήματος ενός διμερούς γραφήματος είναι τέλειο.

Απόδειξη. Έστω H διμερές γράφημα. Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση κορυφών από το $\overline{L(H)}$ αντιστοιχεί σε αφαίρεση ακμών από το H. Αφού η αφαίρεση ακμών στο H δημιουργεί πάλι διμερές γράφημα, αρκεί να δείξουμε ότι $\chi(\overline{L(H)}) = \omega(\overline{L(H)})$. Από το Λήμμα 10.6, $\mathbf{vc}(H) = \chi(\overline{L(H)})$. Από την Παρατήρηση 10.8, $\mu(H) = \omega(\overline{L(H)})$. Συνεπώς το Λήμμα προκύπτει από το Θεώρημα 10.13. □

11.2 Χορδικά γραφήματα

Ορισμός 11.10. Ένα γράφημα G καλείται *χορδικό* αν **χορδικότητα**$(G) = 3$ (δηλ. δεν περιέχει εναγόμενους κύκλους μεγέθους μεγαλύτερου του 3).



Σχήμα 11.2: Ένα χορδικό γράφημα G όπου $\chi(G) = \omega(G) = \delta^*(G) + 1 = 4$. Διακρίνονται οι απλοϊκές του κορυφές και μια μέγιστη κλίκα του.

Παρατήρηση 11.11. *Η κλάση των χορδικών γραφημάτων είναι κλειστή ως προς εναγόμενα υπογραφήματα αλλά όχι ως προς υπογραφήματα.*

Λήμμα 11.12. Κάθε ελαχιστικός διαχωριστής S ενός χορδικού γραφήματος G ενάγει κλίκα στο G.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in S$ όπου $\{x, y\} \notin E(G)$. Αφού ο S είναι ελαχιστικός διαχωριστής θα είναι και ελαχιστικός (a, b)-διαχωριστή για κάποια $a, b \in G \backslash S$. Έστω C_a και C_b οι συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$ όπου ανήκουν τα a και b. Παρατηρούμε ότι οι x και y θα έχουν γειτονικές κορυφές στις C_a και C_b, διαφορετικά κάποιο υποσύνολο του S θα είναι (a, b)-διαχωριστής του G. Άρα υπάρχει (x, y)-μονοπάτι P_a με εσωτερικές κορυφές στην C_a και (x, y)-μονοπάτι P_b με εσωτερικές κορυφές στην C_b. Επιλέγουμε τα P_a και P_b έτσι ώστε να είναι μικρότερου δυνατού μήκους. Τότε το $P_a \cup P_b$ είναι τρύπα στο G με μήκος ≥ 4, άτοπο γιατί το G είναι χορδικό. □

Λήμμα 11.13. Κάθε χορδικό γράφημα G είτε είνα κλίκα είτε έχει δύο μη γειτονικές απλοϊδείς κορυφές (για το πότε μια κορυφή είναι απλοϊδής, βλ. Ορισμό 5.39).

Απόδειξη. Έστω G αντιπαράδειγμα με τον μικρότερο πλήθος κορυφών. Προφανώς το G δεν είναι κλίκα και άρα περιέχει δύο μη γειτονικές κορυφές a και b. Έστω S ελαχιστικός (a, b)-διαχωριστής του G. Από το Λήμμα 11.12, το S ενάγει κλίκα στο G. Έστω C_a η συνεκτική συνιστώσα του $G\backslash S$ που περιέχει την a. Θέτουμε $G_1 = G[S \cup C_a]$ και $G_2 = G\backslash C_a$. Από την παρατήρηση 11.11, τα G_1 και G_2 είναι χορδικά. Παρατηρούμε επίσης ότι $n(G_i) < n(G), i = 1, 2$. Άρα, για $i = 1, 2$, το G_i θα είναι είτε κλίκα είτε θα περιέχει δύο απλοϊκές κορυφές. Αν, για κάποιο $i \in \{1, 2\}$, το G_i είναι κλίκα τότε επιλέγουμε μια κορυφή v_i στο $V(G_i)\backslash S$ και παρατηρούμε ότι είναι απλοϊδής στο G. Αν, για κάποιο $i \in \{1, 2\}$, το G_i δεν είναι κλίκα τότε περιέχει δύο μη γειτονικές απλοϊδείς κορυφές και, επειδή δεν είναι γειτονικές, κάποια από αυτές, την συμβολίζουμε με v_i, δεν ανήκει στο S. Σε κάθε περίπτωση, οι κορυφές v_1 και v_2 είναι μη γειτονικές απλοϊκές κορυφές του G και το λήμμα ισχύει. □

Λήμμα 11.14. Για κάθε χορδικό γράφημα G ισχύει ότι $\delta^*(G) \leq \omega(G) - 1$.

Απόδειξη. Αρκεί να απόδείξουμε ότι κάθε χορδικό γράφημα G έχει μια κορυφή βαθμού $\leq \omega(G) - 1$. Από το Λήμμα 11.13, το G έχει μια απλοϊδή κορυφή v και επειδή το $G' = G[N_G(v) \cup \{v\}]$ είναι κλίκα, $\deg_G(v) = \deg_{G'}(v) \leq \omega(G) - 1$. □

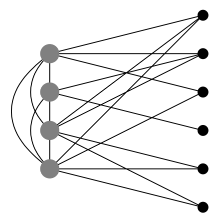
Θεώρημα 11.15. Κάθε χορδικό γράφημα είναι τέλειο.

Απόδειξη. Έστω G χορδικό γράφημα και έστω H εναγόμενο υπογράφημά του το οποίο είναι επίσης χορδικό (Παρατήρηση 11.11). Από τα Λήμματα 8.17 και 11.14, έχουμε $\chi(H) \leq \delta^*(H) + 1 \leq \omega(H) - 1 + 1 = \omega(H)$. □

Ορισμός 11.16. Καλούμε ένα γράφημα G *γράφημα διαχωρισμού* αν υπάρχει μια διαμέριση $\{V_c, V_d\}$ του $V(G)$ τέτοια ώστε το V_c να ενάγει κλίκα στο G και το V_d να είναι ανεξάρτητο σύνολο του G.

Λήμμα 11.17. Κάθε γράφημα διαχωρισμού G είναι χορδικό.

Απόδειξη. Έστω C_i τρύπα του G και έστω $\{V_c, V_d\}$ διαμέριση του $V(G)$ όπως στον Ορισμό 11.16 Αφού το $G[V_c]$ είναι κλίκα το C_i δεν μπορεί να έχει πάνω από 2 κορυφές του V_c και, αν όντως έχει 2, αυτές θα πρέπει να είναι γειτονικές στο G. Τότε το $G[V_d]$ θα περιέχει εναγόμενο μονοπάτι μήκους $\leq i - 3$. Αφού το V_d



Σχήμα 11.3: Ένα γράφημα διαχωρισμού.

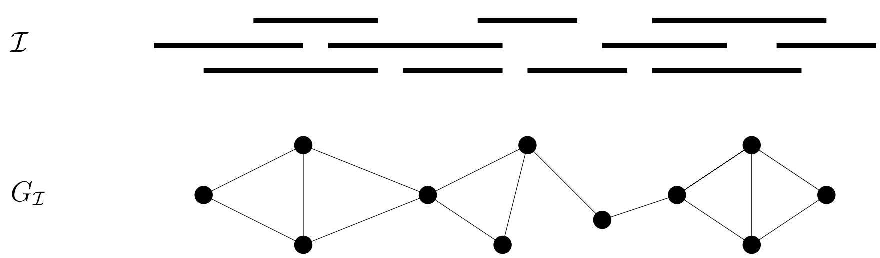
είναι ανεξάρτητο σύνολο του G, έχουμε ότι $i - 3 \leq 0 \Rightarrow i \leq 3$, άρα το G είναι χορδικό. $\square$

Πόρισμα 11.18. Κάθε γράφημα διαχωρισμού G είναι τέλειο.

Ορισμός 11.19. Έστω $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ μια πεπερασμένη συλλογή μη τετριμμένων κλειστών διαστημάτων της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Χρησιμοποιούμε για κάθε $i \in \mathcal{I}$, τον συμβολισμό $I_i = [l_i, r_i]$ με $l_i < r_i$. Καλούμε *γράφημα τομών* της $\mathcal{I}$ το γράφημα

$$G_{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}, \{\{I_i, I_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}),$$

(δηλ. οι κορυφές του $G_{\mathcal{I}}$ είναι τα διαστήματα του $\mathcal{I}$ και δύο διαστήματα είναι γειτονικά στο $G_{\mathcal{I}}$ αν και μόνο αν τέμνονται). Καλούμε ένα γράφημα G *γράφημα διαστημάτων* αν είναι ισόμορφο με το γράφημα τομών κάποιας συλλογή κλειστών διαστημάτων της ευθείας των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα 11.4: Μια συλλογή διαστημάτων $\mathcal{I}$ και το γράφημα $G_{\mathcal{I}}$ που αντιστοιχεί σε αυτήν.

Λήμμα 11.20. Κάθε γράφημα διαστημάτων G είναι χορδικό.

Απόδειξη. Έστω C_i τρύπα του G όπου $i \geq 4$ και έστω $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_i$ τα διαστήματα που αντιστοιχούν στις κορυφές του C_i. Η αυθαιρεσία στην επιλογή του I_1 μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι $l_1 = \min\{l_j \mid 1 \leq j \leq i\}$. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του διαστήματος I_3 βρίσκονται δεξιότερα του r_1 στην ευθεία των πραγματικών αριθμών (επειδή οι I_1 και I_3 δεν είναι γειτονικές κορυφές του G). Παρομοίως, για κάθε $j = 1, \ldots, i-2$, όλα τα σημεία του I_{j+2} βρίσκονται δεξιότερα του r_j και άρα και του r_1. Αυτό σημαίνει ότι $I_1 \cap I_i = \emptyset$, άτοπο γιατί οι I_1 και I_i είναι γειτονικές κορυφές του G. $\square$

Πόρισμα 11.21. Κάθε γράφημα διαστημάτων G είναι τέλειο.

11.3 Το θεώρημα των τέλειων γραφημάτων

Το πρώτο μεγάλο βήμα για την μελέτη των τέλειων γραφημάτων έγινε από τον Lovász το 1972 ο οποίος απόδειξε την ασθενή εικασία των τέλειων γραφημάτων. Παραθέτουμε παρακάτω μια μεταγενέστερη απόδειξη της εικασίας που προτάθηκε από τον Gasparian το 1996 [9].

Θεώρημα 11.22 (Θεώρημα των τέλειων γραφημάτων, Lovász, 1972)**.** Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι τέλειο.

Απόδειξη. Αφού $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ και $n(G) = n(\overline{G})$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

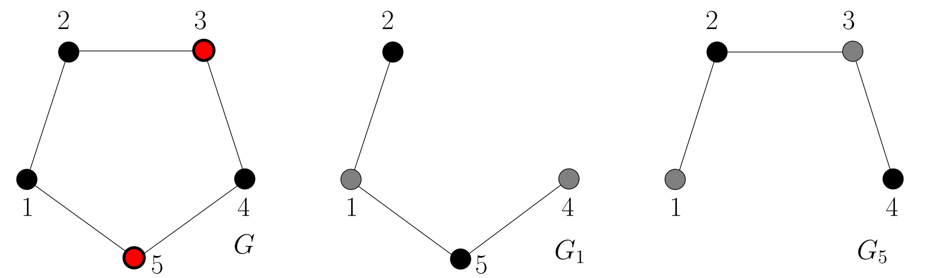
Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν για κάθε εναγόμενο υπογράφημά του H ισχύει ότι $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$. (11.1)

(«μόνο αν» για την (11.1)) Αν το G είναι τέλειο, τότε για κάθε εναγόμενο υπογράφημά του H, ισχύει ότι $\chi(H) = \omega(H)$. Από την Παρατήρηση 9.15, έχουμε ότι $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \chi(H)$ και άρα $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$.

(«αν» για την (11.1)) Έστω G αντιπαράδειγμα με ελάχιστο αριθμό κορυφών. Αυτό σημαίνει ότι

- **(α)** $\chi(G) > \omega(G)$ και
- **(β)** για κάθε εναγόμενο υπογράφημα H του G, διαφορετικό του G, ισχύει ότι $\chi(H) = \omega(H)$.

Θέτουμε $p = \omega(G)$. Έστω $I_0 = \{v_1, \ldots, v_q\}$ ένα ανεξάρτητο σύνολο του G μεγίστου μεγέθους ($q = \alpha(G)$). Για κάθε $i \in \{1, \ldots, q\}$, θέτουμε $G_i = G \backslash v_i$ και



Σχήμα 11.5: Ένα (μη τέλειο) γράφημα G, το ανεξάρτητο σύνολο $I_0 = \{3, 5\}$, τα γραφήματα G_3 και G_5 και 2-χρωματισμοί χ_3 και χ_5 των G_3 και G_5 αντίστοιχα. Οι χρωματικές κλάσεις των χ_3 και χ_5 αντιστοιχούν στα εξής ανεξάρτητα σύνολα $I_1 = \{2, 5\}, I_2 = \{1, 4\}, I_3 = \{2, 4\}$ και $I_4 = \{1, 3\}$ του G. Οι κλίκες του G που αντιστοιχούν στα ανεξάρτητα σύνολα I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 ενάγονται από τα σύνολα $S_0 = \{1, 2\}, S_1 = \{3, 4\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{1, 5\}$ και $S_4 = \{4, 5\}$.

παρατηρούμε ότι $\omega(G_i) = \omega(G)$, πράγματι αν $\omega(G_i) < \omega(G)$, τότε, από την **(β)**, $\chi(G_i) = \omega(G_i) < \omega(G)$ και αφού η πρόσθεση μιας κορυφή μπορεί να αυξήσει τον χρωματικό αριθμό το πολύ κατά 1, έχουμε ότι $\chi(G) \leq \omega(G)$, πράγμα που αντιβαίνει στην **(α)**. Από την **(β)**, έχουμε ότι $\chi(G_i) = \omega(G_i) = p$ και άρα, για κάθε $i \in 1, \ldots, q$, υπάρχει ένας p-χρωματισμός $\sigma_i : V(G_i) \to \{1, \ldots, p\}$ του G_i. Έστω επίσης $I_{(i-1)\cdot p+1}, \ldots, I_{(i-1)\cdot p+p}$ οι χρωματικές κλάσεις του σ_i, για $i = 1, \ldots, q$. Προφανώς κάθε μια από αυτές είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του G. Κατασκευάσαμε με αυτό τον τρόπο $pq + 1$ ανεξάρτητα σύνολα $I_0, I_1, \ldots, I_{pq}$ του G. Έστω $j \in \{0, \ldots, pq\}$. Παρατηρούμε ότι αν $\chi(G \backslash I_j) < \omega(G)$, τότε χρωματίζοντας με ένα ακόμα χρώμα όλες τις (ανεξάρτητες) κορυφές του I_j, έχουμε ότι $\chi(G) \leq \omega(G)$, πράγμα που αντιβαίνει την **(α)**. Άρα $\chi(G \backslash I_j) \geq \omega(G)$ και από την **(β)**, έχουμε ότι $\omega(G) \leq \chi(G \backslash I_j) = \omega(G \backslash I_j) \leq \omega(G)$ και άρα το $G \backslash I_j$ έχει μια κλίκα μεγέθους p της οποίας το σύνολο κορυφών συμβολίζουμε με S_j. Με αυτό τον τρόπο, κατασκευάσαμε $pq + 1$ κλίκες $S_0, S_1, \ldots, S_{pq}$ του G.

Ισχυρισμός: Για κάθε $j, j' \in \{0, \ldots, pq\}$, όπου $j \neq j'$, ισχύει ότι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$.
Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $j = 0$. Έστω $j' \in \{1, \ldots, pq\}$ και έστω $G_{i'} = G \backslash v_{i'}$ το γράφημα του οποίου ο χρωματισμός $\sigma_{i'}$ έχει το $I_{j'}$ μεταξύ των χρωματικών του κλάσεων. Μια και $S_0 \subseteq G \backslash I_0$, το S_0 δεν περιέχει κανένα στοιχείο του I_0, συνεπώς $v_{i'} \notin S_0$. Άρα ή κλίκα $G[S_0]$ είναι και υπογράφημα του $G_{i'}$ και αφού $\chi(G_{i'}) = p$, η $G[S_0]$ θα τέμνει κάθε χρωματική κλάση της $\sigma_{i'}$ άρα και την $I_{j'}$ (διαφορετικά, η $G[S_0]$ θα μπορούσε να χρωματιστεί με $< p$ χρώματα).

Άρα η $G[S_0]$ θα τέμνει κάθε $I_{j'}$ για $j' \in \{1, \ldots, pq\}$.

Έστω τώρα $j > 0$. Από τον ορισμό της, η κλίκα $G[S_j]$ είναι υπογράφημα του $G \backslash I_j$ όπου I_j είναι μια χρωματική κλάση του σ_i για κάποιο $i \in \{1, \ldots, q\}$ (υπενθυμίζουμε ότι το σ_i είναι ένας χρωματισμός του $G_i = G \backslash v_i$). Θα δείξουμε ότι $v_i \in S_j$. Πράγματι, αν $v_i \notin S_j$, τότε η κλίκα $G[S_j]$ είναι και υπογράφημα του $G_i \backslash I_j$ το οποίο έχει μια χρωματική κλάση λιγότερο από το G_i και άρα $\chi(G_i \backslash I_j) < p$, άτοπο γιατί τότε η κλίκα $G[S_j]$ θα μπορούσε να χρωματιστεί με $< p$ χρώματα. Συνεπώς, $v_i \in S_j$ και άρα $S_j \cap I_0 \neq \emptyset$. Μένει να δείξουμε ότι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$ για κάθε $j' \in \{1, \ldots, pq\} \backslash \{j\}$. Έστω $G_{i'} = G \backslash v_{i'}$ το γράφημα του οποίου ο χρωματισμός $\sigma_{i'}$ έχει το $I_{j'}$ μεταξύ των χρωματικών του κλάσεων. Αν $i' \neq i$, τότε επειδή $v_i \in S_j$ και $v_i, v_{i'} \in I_0$, έχουμε ότι $v_{i'} \notin S_j$. Τότε η $G[S_j]$ είναι και υπογράφημα του $G_{i'} = G \backslash v_{i'}$ και τέμνει κάθε χρωματική κλάση του $G_{i'}$ άρα και την $I_{j'}$, διαφορετικά το S_j θα μπορεί να χρωματιστεί με $< p$ χρώματα. Αν $i' = i$, τότε οι I_j και $I_{j'}$ θα είναι διαφορετικές χρωματικές κλάσεις του σ_i. Μένει να αποδείξουμε ότι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$. Πράγματι, αν $S_j \cap I_{j'} = \emptyset$, τότε η κλίκα $G[S_j]$ θα είναι και υπογράφημα του $G \backslash I_j \cup I_{j'}$. Αφού το $G \backslash \{v_i\} \cup I_j \cup I_{j'}$ έχει χρωματικό αριθμό $\leq p - 2$, το $G \backslash I_j \cup I_{j'}$ θα έχει χρωματικό αριθμό $\leq p - 1$ και άρα $\chi(S_j) < p$, άτοπο.

X:

	1	2	3	4	5
I_0	0	0	1	0	1
I_1	0	1	0	0	1
I_2	1	0	0	1	0
I_3	0	1	0	1	0
I_4	1	0	1	0	0

Y:

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	1

Z:

0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Σχήμα 11.6: Οι πίνακες X και Y όπως προκύπτουν από το γράφημα του Σχήματος 11.5. Μια και το γράφημα C_5 δέν είναι τέλειο, η διάσταση των X, Y και Z είναι ίση με $n(G) = 5 > 2 \cdot 2 = \alpha(G) \cdot \omega(G)$.

Έστω $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ορίζουμε τώρα τον $(pq + 1) \times n$ πίνακα $X = [x_{i,h}]_{(i,h) \in [pq+1] \times [n]}$ έτσι ώστε $x_{i,h} = 1$ αν και μόνο αν $v_h \in I_i$ (οι γραμμές του X αναπαριστούν την χαρακτηριστική συνάρτηση των συνόλων $I_i, i = \{0, \ldots, pq\}$). Επίσης ορίζουμε τον $n \times (pq+1)$ πίνακα $Y = [y_{h,j}]_{(h,j) \in [n] \times [pq+1]}$ έτσι ώστε $y_{h,j} = 1$ αν και μόνο αν $v_h \in S_j$ (οι στήλες του Y αναπαριστούν την χαρακτηριστική συνάρτηση των συνόλων $S_j, j = \{0, \ldots, pq\}$). Θα εξετάσουμε τώρα την τιμή του

$|S_j \cap I_i|$ για όλες τις πιθανές τιμές των i και j. Αν $i = j$, τότε $|S_j \cap I_i| = 0$. Πράγματι, επειδή $S_j \subseteq G \backslash I_j$, έχουμε ότι $S_j \cap I_j = S_j \cap I_i = \emptyset$. Αν $i \neq j$, ισχύει, από τον παραπάνω ισχυρισμό, ότι $S_j \cap I_i \neq \emptyset$ και αφού το S_j είναι κλίκα και το I_i είναι ανεξάρτητο σύνολο, έχουμε $|S_j \cap I_i| = 1$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$z_{i,j} = \sum_{h \in \{1,\ldots,n\}} x_{i,h} \cdot y_{h,j} = |S_i \cap I_j| \tag{11.2}$$

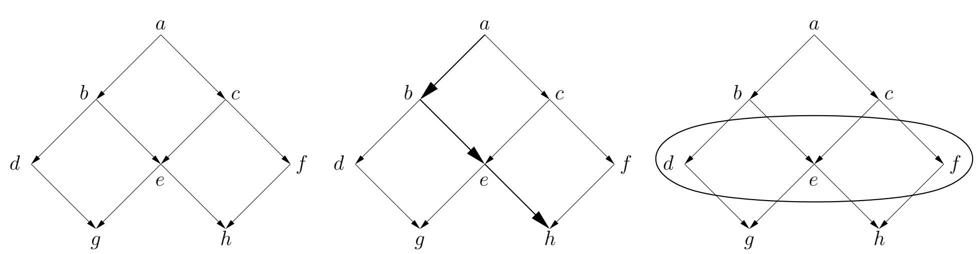
και άρα το γινόμενο XY των δύο πινάκων είναι ίσο με τον $(pq+1)\times(pq+1)$ πίνακα $Z = [z_{i,j}]_{(i,j)\in[pq+1]^2}$. Σύμφωνα με την (11.2), ο Z έχει όλες τις μη διαγώνιες τιμές του ίσες με 1 και όλες τις διαγώνιες τιμές του ίσες με 0. Επειδή ο X έχει n στήλες, η διάσταση του X είναι μικρότερη από το n, άρα από την αρχική μας υπόθεση έχουμε ότι η διάσταση του X είναι το πολύ pq. Αυτό σημαίνει ότι και η διάσταση του $Z = XY$ είναι το πολύ pq (η διάσταση του XY είναι το πολύ το ελάχιστο των διαστάσεων των X και Y). Όμως, η ορίζουσα του Z είναι διάφορη του 0, και άρα η διάσταση του Z είναι ίση με $pq + 1$, άτοπο. □

Από το Λήμμα 11.9 και το Θεώρημα 11.22 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 11.23. Τα γραμμικά γραφήματα των διμερών γραφημάτων είναι τέλεια.

11.4 Γραφήματα συγκρισιμότητας

Ορισμός 11.24. Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη σε κάποιο σύνολο S. Καλούμε ένα υποσύνολο R του S *αλυσίδα* αν κάθε ζεύγος $x, y \in R$ είναι συγκρίσιμο (δηλ. $x < y$ ή $y < x$). Καλούμε ένα υποσύνολο R του S *αντιαλυσίδα* αν κανένα ζεύγος $x, y \in R$ δεν είναι συγκρίσιμο (δηλ. $x \not< y$ και $y \not< x$). Από εδώ και στο εξής θα θεωρήσουμε μόνο μερικές διατάξεις σε πεπερασμένα σύνολα.

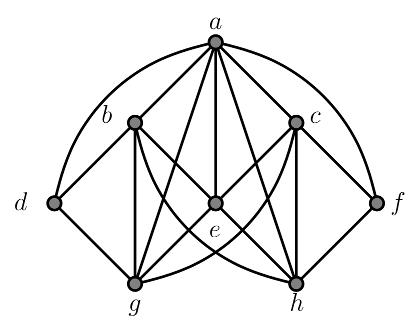


Σχήμα 11.7: Μια μερική διάταξη $\mathcal{P}$, μια αλυσίδα και μια αντιαλυσίδα στην $\mathcal{P}$.

Ορισμός 11.25. Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη. Ορίζουμε το γράφημα συγκρίσεων της $G_{\mathcal{P}}$ ως εξής:

$$G_{\mathcal{P}} = (S, \{\{x, y\} \mid x < y \text{ ή } x > y\}),$$

δηλαδή το σύνολο S είναι και σύνολο κορυφών του $G_{\mathcal{P}}$ και οι ακμές του $G_{\mathcal{P}}$ αντιστοιχούν στα συγκρίσιμα ζεύγη της $\mathcal{P}$. Ένα γράφημα καλείται *γράφημα συγκρισιμότητας* αν είναι ισόμορφο με το γράφημα συγκρίσεων $G_{\mathcal{P}}$ κάποιας μερικής διάταξης $\mathcal{P}$.



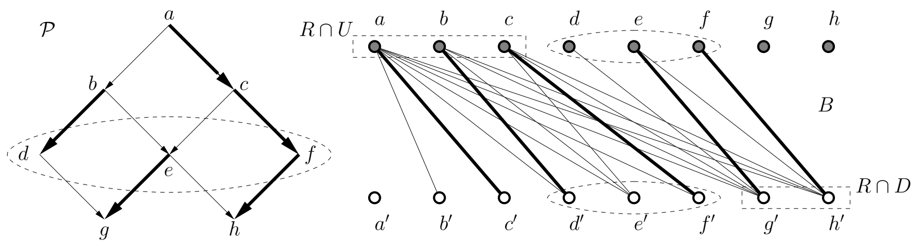
Σχήμα 11.8: Το γράφημα συγκρισιμότητας $G_{\mathcal{P}}$ που αντιστοιχεί στην μερική διάταξη του Σχήματος 11.9.

Λήμμα 11.26. Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη σε κάποιο πεπερασμένο σύνολο S. Τότε υπάρχει ένας αριθμός ρ τέτοιος ώστε η $\mathcal{P}$ να μπορεί να διαμεριστεί σε ρ αλυσίδες και η $\mathcal{P}$ περιέχει αντιαλυσίδα μεγέθους ρ.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη όπου $|S| = n$.

Χρησιμοποιούμε την $\mathcal{P}$ για να κατασκευάσουμε το διμερές γράφημα B με μέρη U και D ως εξής. Θέτουμε $U = S$ και για κάθε στοιχείο v του S δημιουργούμε ένα αντίγραφό του v' και ορίζουμε το D ως το σύνολο αυτών των αντιγράφων. Για κάθε συγκρίσιμο ζεύγος $(v, u) \in S \times S$ όπου $v < u$, συνδέουμε στο B την κορυφή $v \in U$ με την κορυφή $u' \in D$ (δηλ. το αντίγραφο της u στην D). Για κάθε κορυφή $v \in U$ ($v' \in D$) θα καλούμε την κορυφή v' (v) *αντίποδά* της.

Έστω M μέγιστο ταίριασμα του B και R ελάχιστο κάλυμμα κορυφών στο B (υπενθυμίζουμε ότι, από το Θεώρημα 10.13, $|M| = \mu(B) = \mathbf{vc}(B) = |R| = k$). Παρατηρούμε ότι οι κορυφές του R και οι αντίποδές τους αντιστοιχούν σε $\leq k$ στοιχεία του S. Τα υπόλοιπα $\geq n - k$ στοιχεία του S αποτελούν μια αντιαλυσίδα



Σχήμα 11.9: Η μερική διάταξη του Σχήματος 11.9, το αντίστοιχο διμερές γραφήμα B της απόδειξης του Λήμματος 11.26, ένα ταίριασμα στο B και ένα κάλυμμα κορυφών του R. Στην μερική διάταξη διακρίνονται οι αλυσίδες $\{a, c, f, h\}$, $\{b, d\}$ και $\{e, g\}$ στις οποίες διαμερίζεται. Οι κορυφές d, e και f δεν αντιστοιχούν σε κορυφές του καλύματος κορυφών και αποτελούν μια αντιαλυσίδα της $\mathcal{P}$.

της $\mathcal{P}$. Κατασκευάζουμε τώρα μια συλλογή $\mathcal{F}$ από αλυσίδες της $\mathcal{P}$ ως εξής (αναπαριστούμε κάθε αλυσίδα του με μια ακολουθία στοιχείων του S):

1. $\mathcal{F} = \emptyset$

2. $E \leftarrow M$

3. Επιλέγουμε κάποια ακμή $\{v, u'\}$ του E. Αν υπάρχει $A \in \mathcal{F}$ που να τελειώνει στο v τότε πρόσθέτουμε στο τέλος της A το στοιχείο u, αν υπάρχει $A \in \mathcal{F}$ που να αρχίζει από το u, προσθέτουμε στην αρχή του A το στοιχείο v. Αν κανένα από αυτά δεν ισχύει, τότε προσθέτουμε στο $\mathcal{F}$ μια νέα ακολουθία, την $[v, u]$.

4. $E \leftarrow E \backslash \{\{v, u'\}\}$.

5. Αν $E = \emptyset$, τότε σταματάμε και επιστρέφουμε την συλλογή $\mathcal{F}$, διαφορετικά πηγαίνουμε στο Βήμα **3**.

Επειδή υπάρχουν $n - k$ κορυφές στο U που καλύπτονται από το M αλλά που οι αντίποδές τους να μην καλύπτονται από το M, έχουμε ότι $|\mathcal{F}| = n - k$ και το θεώρημα ισχύει για $\rho = n - k$. □

Ορισμός 11.27. Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη. Καλούμε *πλάτος της* $\mathcal{P}$, συμβολισμός **width**$(\mathcal{P})$, τον ελάχιστο πληθάριθμο k μιας διαμέρισης $\mathcal{F} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ του S για την οποία κάθε $L_i \in \mathcal{F}$ είναι αλυσίδα της $\mathcal{P}$.

Θεώρημα 11.28 (Dilworth, 1950)**.** Για κάθε μερική διάταξη $\mathcal{P} = (S, <)$ το πλάτος της $\mathcal{P}$ είναι ίσο με το μέγιστο πληθάριθμο μιας αντιαλυσίδας του $\mathcal{P}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}$ μια διαμέριση της $\mathcal{P}$ σε ρ αλυσίδες και έστω I αντιαλυσίδα μεγέθους ρ, σύμφωνα με το Λήμμα 11.26.

Μια και κάθε διαμέριση $\mathcal{F}'$ της $\mathcal{P}$ σε αλυσίδες πρέπει να έχει τουλάχιστον μια αλυσίδα ανα μέλος της αντιαλυσίδας I, έχουμε ότι $|\mathcal{F}'| \geq |I| = |\mathcal{F}|$. Άρα η $\mathcal{F}$ είναι διαμέριση ελαχίστου μεγέθους.

Μια και κάθε αντιαλυσίδα I' της $\mathcal{P}$ μπορεί να έχει το πολύ ένα στοιχείο από κάθε αλυσίδα της διαμέρισης $\mathcal{F}$, έχουμε ότι $|I'| \leq |\mathcal{F}| = |I|$. Άρα το I είναι αντιαλυσίδα μεγίστου μεγέθους. □

Παρατήρηση 11.29. *Κάθε εναγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος συγκρισιμότητας είναι επίσης γράφημα συγκρισιμότητας.*

Παρατήρηση 11.30. *Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη στο πεπερασμένο σύνολο S. Τότε $\alpha(G_{\mathcal{P}}) = \textbf{width}(\mathcal{P})$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε αντιαλυσίδα στην $\mathcal{P}$ αντιστοιχεί σε ένα ανεξάρτητο σύνολο του $G_{\mathcal{P}}$. Άρα το $\alpha(G_{\mathcal{P}})$ είναι ίσο με το μέγιστο μέγεθος μιας αντιαλυσίδας του $\mathcal{P}$ το οποίο, από το Θεώρημα 11.28, είναι ίσο με το πλάτος της $\mathcal{P}$. □

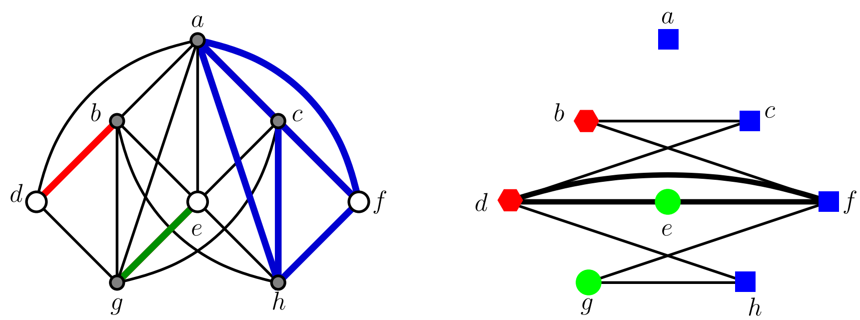
Παρατήρηση 11.31. *Έστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερική διάταξη στο πεπερασμένο σύνολο S. Τότε $\textbf{width}(\mathcal{P}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}})$*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε αλυσίδα στην $\mathcal{P}$ αντιστοιχεί σε μια κλίκα του $G_{\mathcal{P}}$. Άρα υπάρχει μια διαμέριση $\mathcal{F}$ της $\mathcal{P}$ σε ρ αλυσίδες, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση του $V(G_{\mathcal{P}})$ σε ρ σύνολα κορυφών εκ των οποίων το καθένα ενάγει κλίκα στο G. Από το Λήμμα 8.9, έχουμε ότι τότε (και μόνο τότε) ισχύει ότι $\chi(\overline{G}) \leq \rho$. Από τον ορισμό του πλάτους της $\mathcal{P}$, καταλήγουμε ότι $\textbf{width}(\mathcal{P}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}})$ □

Θεώρημα 11.32. Τα γραφήματα συγκρισιμότητας είναι τέλεια.

Απόδειξη. Έστω G γράφημα συγκρισιμότητας με n κορυφές. Από την Παρατήρηση 11.29 αρκεί να δείξουμε ότι $\chi(G) \leq \omega(G)$. Αντί αυτού θα δείξουμε ότι $\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G})$ και το θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 11.22.

Έστω $\mathcal{P} = (V(G), <)$ μια μερική διάταξη που αντιστοιχεί το G (δηλαδή $G = G_{\mathcal{P}}$). Από τις Παρατηρήσεις 11.31, 11.30 και 9.14 έχουμε ότι $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}}) = \textbf{width}(\mathcal{P}) = \alpha(G_{\mathcal{P}}) = \alpha(G) = \omega(\overline{G})$ και το θεώρημα ισχύει. □



Σχήμα 11.10: Το γράφημα συγκρισιμότητας $G_{\mathcal{P}}$ που της αντιστοιχεί στην μερική διάταξη $\mathcal{P}$ του Σχήματος 11.9 και το συμπληρωματικό του $\overline{G_{\mathcal{P}}}$. Στο γράφημα $G_{\mathcal{P}}$ διακρίνεται η διαμέριση σε 3 κλίκες και το ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3 τα οποία στο $\overline{G_{\mathcal{P}}}$ αντιστοιχούν σε ένα 3-χρωματισμό και σε μια κλίκα με 3 κορυφές.

Παρατήρηση 11.33. *Παρατηρούμε ότι αυτό που ουσιαστικά αποδείξαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 11.4, είναι ότι τα συμπληρώματα των γραφημάτων συγκρισιμότητας είναι τέλεια (για την τελειότητα των γραφημάτων συγκρισιμότητας χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 11.22).*

Ορισμός 11.34. Καλούμε ένα γράφημα *γράφημα συνσυγκρισιμότητας* αν το συμπλήρωμά του είναι γράφημα συγκρισιμότητας.

Πόρισμα 11.35. Τα γραφήματα συνσυγκρισιμότητας είναι τέλεια.

11.5 Το ισχύρο θεώρημα τέλειων γραφημάτων

Η ισχυρή εικασία των τέλειων γραφημάτων είναι πλέον θεώρημα.

Θεώρημα 11.36 (Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002)**.** Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν ούτε το ίδιο ούτε το συμπλήρωμά του δεν περιέχουν περιττές τρύπες μεγέθους μεγαλύτερο ή ίσο του 5.

Η απόδειξή του Θεωρήματος 11.36 είναι αρκετά περίπλοκη. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το πως βρέθηκε, βλ. [26].

Ασκήσεις Κεφαλαίου

11.1 (☆☆☆)**.** Δείξτε ότι οι κλάσεις των γραφημάτων διαστημάτων και διαχωρισμού είναι μη συγκρίσιμες με τη σχέση υποσυνόλου. Δείξτε επίσης ότι η τομή τους είναι μη κενή και ότι η ένωσή τους δεν περιλαμβάνει όλα τα γραφήματα.

11.2 (☆☆☆)**.** Η κλάση των χορδικών γραφημάτων είναι κλειστή ως προς συνθλίψεις ακμών.

11.3 (☆☆☆)**.** Έστω:

$$k = \min\{\omega(H) - 1 \mid G \subseteq H, H \text{ γράφημα διαχωρισμού}\}$$

$$l = \min\{\omega(H) \mid G \subseteq H, H \text{ γράφημα διαχωρισμού}\}$$

Δείξτε ότι $k \leq \mathbf{vc}(G) \leq l$.
Σε ποιες περιπτώσεις ο αριθμός καλύμματος κορυφών του G είναι ίσος με το μικρότερο αριθμό κλίκας που μπορεί να έχει ένα γράφημα διαχωρισμού H που περιέχει το G ως υπογράφημα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

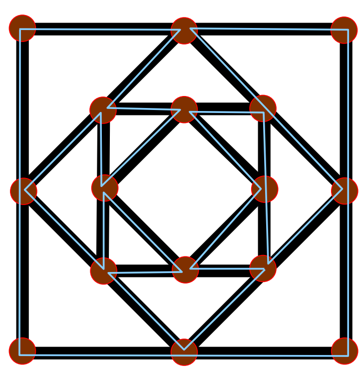
ΔΙΑΠΕΡΑΣΕΙΣ

12.1 Διαπεράσεις ακμών

Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1 μια περιήγηση σε ένα γράφημα G είναι ένας περίπατος που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή.

Ορισμός 12.1. Μια *περιήγηση Euler* σε ένα γράφημα G είναι μια περιήγηση $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}, v_0]$ που περνάει από όλες τις ακμές του G μια ακριβώς φορά. Με άλλα λόγια μια περιήγηση $W = [v_1, \ldots, v_r, v_1]$ είναι περιήγηση Euler αν

$$\forall_{e \in E(G)} \, |\{i \mid \{v_i, v_{i+1 \bmod r}\} = e\}| = 1.$$



Σχήμα 12.1: Ένα γράφημα και μία περιήγηση Euler σε αυτό.

Σχόλιο 12.2. Το πρόβλημα της εύρεσης (αν υπάρχει) μιας περιήγησης Euler σε ένα γράφημα είναι από τα πρώτα γραφοθεωρητικά προβλήματα που έχουν τεθεί ποτέ. Το πρόβλημα ορίστηκε τον 18 αιώνα από το μαθηματικό Leonhard Euler με αφορμή την διάταξη των γεφυρών πάνω από τον ποταμό Pregel της πόλης Königsberg η οποία τότε[1] ήτανε η πρωτεύουσα της Ανατολικής Πρωσσίας. Το ερώτημα που απασχολούσε τους κατοίκους της πόλης ήτανε η ύπαρξη διαδρομής η οποία να επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης αφού περάσει μόνο μια φορά από κάθε μια από τις επτά γέφυρες της πόλης (βλ. σχ. 12.2). Το ερώτημα τέθηκε στον Euler ο οποίος εκείνη την εποχή έδρευε στην Αγία Πετρούπολη. Η απάντηση του Euler ήτανε ότι τέτοια διαδρομή δεν υπάρχει και συνοδεύτηκε από το Θεώρημα 12.3 το οποίο ξεκαθαρίζει το πότε μια τέτοια διαδρομή υπάρχει. Το θεώρημα αυτό (λόγω της παλαιότητάς του) θεωρείται ως ιδρυτικό για την θεωρία γραφημάτων.

Θεώρημα 12.3 (Euler, 1736)**.** Ένα συνεκτικό γράφημα έχει περιήγηση Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα την κατεύθυνση «μόνο αν». Έστω ότι το G έχει περιήγηση Euler $C = [v_0, \dots, v_{r-1}, v_0]$ και έστω v μια οποιαδήποτε κορυφή του G. Έστω $I \subseteq \{0, \dots, r-1\}$ το σύνολο των δεικτών για τους οποίους $v = v_i$ (δηλ. $I = \{i \in \{0, \dots, r-1\} \mid v = v_i\}$). Για κάθε $i \in I$ υπάρχουν 2 προσκείμενες στην $v = v_i$ ακμές, οι $\{v_{i-1 \text{ mod } r}, v_i\}$ και $\{v_i, v_{i+1 \text{ mod } r}\}$ και για διαφορετικούς δείκτες του I οι ακμές αυτές είναι διαφορετικές. Μια και όλες οι ακμές του γραφήματος εμφανίζονται ως διαδοχικές στην C, έχουμε ότι $\deg(v) = 2 \cdot |I|$ και άρα η v έχει άρτιο βαθμό.

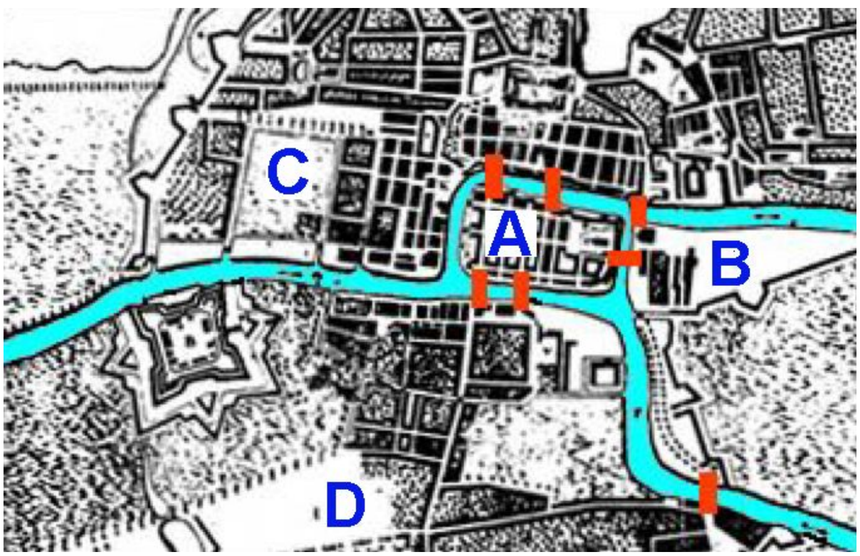
Για την κατεύθυνση «αν» ορίζουμε πρώτα την ποσότητα

$$\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 2).$$

και παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου $\rho(G) = 0$ το θεώρημα ισχύει προφανώς γιατί τότε το G είναι κύκλος. Έστω τώρα G αντιπαράδειγμα για το οποίο το $\rho(G)$ είναι το ελάχιστο δυνατό. Μια και $\rho(G) > 0$, υπάρχει μια κορυφή v με (άρτιο) βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4. Κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα G' ως εξής: αν η v δεν είναι αρθρική κορυφή του G τότε επιλέγουμε δύο οποιεσδήποτε ακμές $\{x, v\}$ και $\{y, v\}$ προσκείμενες στο v, τις αφαιρούμε από το G, προσθέτουμε μια

[1]Σήμερα η πόλη αυτή βρίσκεται στην επικράτεια της Ρωσσικής Ομοσπονδίας και ονομάζεται Калининград (Kaliningrad).

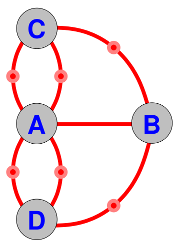
νέα κορυφή w και την συνδέουμε με τις κορυφές x και y. Αν η v είναι αρθρική κορυφή του G, τότε εφαρμόζουμε την ίδια κατασκευή επιλέγοντας όμως ακμές που να ανήκουν σε διαφορετικά ταμάχια του G. Σε κάθε περίπτωση, το νέο γράφημα G' είναι συνεκτικό, όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό ($\deg_{G'}(v) = \deg_G(v) - 2$) και η ύπαρξη περιήγησης Euler στο G' συνεπάγεται την ύπαρξη περιήγησης Euler στο G (όταν η περιήγηση στο G περάσει από την νέα κορυφη w, η αντίστοιχη περιήγηση στο G θα (ξανα)περάσει από την κορυφή v). Παρατηρούμε επίσης ότι $\rho(G') < \rho(G)$ και από τον τρόπο με τον οποίο επιλέξαμε το G, το G' έχει περιήγηση Euler. Άρα και το G θα έχει περιήγηση Euler, άτοπο. $\square$



Σχήμα 12.2: Η πόλη Königsberg κατά τον $18^{\text{ο}}$ αιώνα και οι επτά γέφυρες πάνω από τον ποταμό Pregel. Το νησάκι στο κέντρο της πόλης στο οποίο προσπίπτουν 5 από τις 7 γέφυρες ονομάζεται Kniephof.

Παρατήρηση 12.4. *Η γραφοθεωρητική αναπαράσταση του προβλήματος των γεφυρών του Königsberg αντιστοιχεί στην εύρεση μιας περιήγησης Euler στο γράφημα του Σχήματος 12.3. Παρατηρούμε ότι το κριτήριο του Θεωρήματος 12.3 αποτυγχάνει για αυτό το γράφημα και κατά συνέπεια η απάντηση στο πρόβλημα είναι αρνητική.*

Ορισμός 12.5. Ένας *περίπατος Euler* σε ένα γράφημα G είναι ένας περίπατος $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}]$ που να περνάει από όλες τις ακμές του G μια ακριβώς φορά.



Σχήμα 12.3: Το γράφημα που μοντελοποιεί το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg. Το νησί Kniephof αντιστοιχεί στην κορυφή A και οι τρεις περιοχές γύρω από αυτό αντιστοιχούν στις κορυφές B, C και D.

Το παρακάτω Πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 12.3.

Πόρισμα 12.6. Ένα συνεκτικό γράφημα έχει περίπατο Euler αν και μόνο αν είτε όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό ή έχει μόνο δύο κορυφές περιττού βαθμού. Στην πρώτη περίπτωση το περίπατος Euler είναι και περιήγηση Euler και στην δεύτερη περίπτωση, ο περίπατος Euler θα έχει ως άκρα τις δύο κορυφές περιττού βαθμού.

Απόδειξη. («μόνο αν») Αν το G έχει περίπατο Euler το οποίο είναι περιήγηση Euler τότε από το Θεώρημα 12.3 όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό. Αν όχι, τότε η πρόσθεση μιας ακμή μεταξύ της αρχικής v_0 και της τελικής κορυφής v_{r-1} του μονοπατιού δημιουργεί ένα γράφημα G' με περιήγηση Euler άρα από το Θεώρημα 12.3, όλες οι κορυφές του G' έχουν άρτιο βαθμό και άρα όλες οι κορυφές του G εκτός από τις v_0 και v_{r-1} έχουν άρτιο βαθμό.

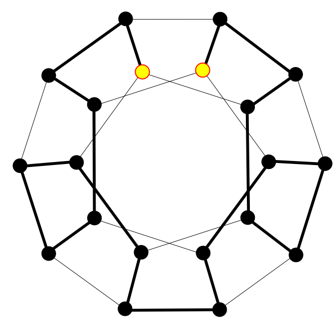
(«αν») Αν όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό τότε, από το Θεώρημα 12.3, το G έχει περιήγηση Euler και άρα περίπατο Euler. Αν μόνο δύο κορυφές του G έχουν περιττό βαθμό, τότε το γράφημα G' που προκύπτει αν συνδέσουμε τις δύο αυτές ακμές έχει περιήγηση Euler ο οποίος μετά την αφαίρεση της ακμής μετατρέπεται σε περίπατο Euler στο γράφημα G. □

12.2 Διαπεράσεις κορυφών

Ορισμός 12.7. Ένας *κύκλος Hamilton* σε ένα γράφημα G είναι ένας κύκλος του G που περιέχει όλες τις κορυφές του G. Ένα *μονοπάτι Hamilton* σε ένα γράφημα G είναι ένα μονοπάτι του G που περιέχει όλες τις κορυφές του G.

Το πρόβλημα της εύρεσης (αν υπάρχει) ενός κύκλου Hamilton φέρει το όνομα του Sir William Rowan Hamilton ο οποίος το έθεσε αρχικά το 1857 με το όνομα Icosian Game. Το αρχικό πρόβλημα αναφερότανε στην εύρεση ενός κύκλου Hamilton σε ένα δωδεκάεδρο. Το παίγνιο αυτό έγινε αργότερα γνωστό ως το παζλ του Hamilton.

Παρατήρηση 12.8. *Σύμφωνα με το ορισμούς 12.1 και 12.7 μια περιήγηση Euler είναι μια κυκλική ακολουθία κορυφών ενώ ένας κύκλος Hamilton είναι ένα παραγόμενο υπογράφημα το οποίο είναι κύκλος.*



Σχήμα 12.4: Ένα εικοσάεδρο και ένα μονοπάτι Hamilton σε αυτό.

Το πρώτο κριτήριο για την ύπαρξη κύκλου Hamilton έχει να κάνει με την ύπαρξη κορυφών μεγάλου βαθμού. Η απόδειξή του βασίζεται στην παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση 12.9. *Έστω $I = \{1, \ldots, k\}$ και έστω $I_1, I_2 \subseteq I$ τέτοια ώστε $|I_1| + |I_2| \geq k+2$. Τότε υπάρχει $i \in I_1$ τέτοιο ώστε $i+1 \in I_2$ και υπάρχει $j \in I_2$ τέτοιο ώστε $j+1 \in I_1$.*

Θεώρημα 12.10 (Ore, 1960)**.** Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον 3 κορυφές για το οποίο κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών έχει άθροισμα βαθμών τουλάχιστον $n(G)$ έχει κύκλο Hamilton.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το G είναι συνεκτικό, διαφορετικά, αν x και y είναι κορυφές σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες τότε $\deg_G(x) + \deg_G(y) \leq n(G) - 2 < n(G)$.

Υποθέτουμε, με σκοπό το άτοπο, ότι το G δεν έχει κύκλο Hamilton. Έστω $P = [v_1, \ldots, v_r]$ ένα μονοπάτι του G μέγιστου μήκους (προφανώς, $r \leq n(G)$). Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι το G περιέχει κύκλο του οποίου οι κορυφές είναι αυτές του P. Μια και αυτό είναι προφανές αν $\{v_1, v_r\} \in E(G)$, υποθέτουμε ότι οι v_1 και

v_r δεν είναι γειτονικές κορυφές. Κατά συνέπεια, έχουμε ότι $N_G(v_1), N_G(v_r) \subseteq \{v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ και άρα $|N_G(v_1) \cup N_G(v_r)| \leq r - 2 \leq n(G) - 2$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψην την σχέση $|N_G(v_1)| + |N_G(v_r)| \geq n(G)$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 12.9, έχουμε ότι υπάρχει $i \in \{2, \ldots, r-2\}$ τέτοιο ώστε $v_i \in N_G(v_r)$ και $v_{i+1} \in N_G(v_1)$. Τότε όμως το G περιέχει τον κύκλο $C = [v_0, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_r, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_0]$ και ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Μια και υποθέσαμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο Hamilton, έχουμε ότι $r < n$ και άρα, από την συνεκτικότητα του G, υπάρχει μια κορυφή w στο G που να μην ανήκει στο C και να είναι γειτονική κάποιας κορυφής v του C. Τότε όμως το G θα περιέχει μονοπάτι (αυτό με άκρα την w και κάποια γειτονική στην v κορυφή του C) με μήκος $r+1$, άτοπο γιατί το P επιλέχθηκε ως μονοπάτι μέγιστου μήκους. $\square$

Σχόλιο 12.11. Το θεώρημα του Ore είναι γενίκευση του κριτηρίου του Dirac σύμφωνα με το οποίο

> *«Ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμο $n(G)/2$.»*

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει την ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton με την συνεκτικότητα και τον αριθμό ανεξαρτησίας του.

Θεώρημα 12.12. Κάθε γράφημα G με τουλάχιστον 3 κορυφές για το οποίο $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ έχει κύκλο Hamilton.

Απόδειξη. Έστω C κύκλος του G μεγίστου μεγέθους. Υποθέτουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο Hamilton και έστω u μια κορυφή του $V(G) \backslash V(C)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $|V(C)| \geq \kappa(G)$. Πράγματι, αν $|V(C)| < \kappa(G)$ τότε επιλέγουμε οποιεσδηποτε δύο διαδοχικές κορυφές x, x' του C και από το Θεώρημα 5.32 υπάρχουν $\geq \kappa(G)$ διακεκριμένα μονοπάτια στο G μεταξύ των x και x'. Το μόνο από αυτά τα μονοπάτια που δεν περιέχει εσωτερικές κορυφές είναι η ακμή $e = \{x, x'\}$ και αφού $|V(C) \backslash \{x, x'\}| < \kappa(G) - 2$, κάποιο, έστω το P, από τα υπόλοιπα μονοπάτια δεν θα έχει εσωτερικές κορυφές στο $V(C) \backslash \{x, x'\}$. Τότε όμως το $P \cup (C \backslash e)$ είναι κύκλος μήκους μεγαλύτερου του r, άτοπο και άρα έχουμε ότι $r \geq \kappa(G)$. Έστω τώρα G^+ το γράφημα που προκύπτει αν προσθέσουμε στο G μια νέα κορυφή v_{new} και την συνδέσουμε με όλες τις κορυφές του C. Αφού $|V(C)| \geq \kappa(G)$, έχουμε ότι $\kappa(G^+) \geq \kappa(G)$. Αφού οι κορυφές v_{new} και u δεν είναι συνδεδεμένες στο G^+, από το Θεώρημα 5.29 θα υπάρχουν $\geq \kappa(G)$ διακεκριμένα μονοπάτια μεταξύ του v_{new} και του u στο G^+. Αυτό όμως συνεπάγεται την ύπαρξη μιας (u, S)-βεντάλιας στο G όπου $S \subseteq V(C)$ και $|S| \geq \kappa(G)$. Επιλέγουμε μια τέτοια βεντάλια με το $|S|$ να είναι το μεγαλύτερο δυνατόν, έτσι εξασφαλίζουμε ότι η κορυφή u δεν έχει γειτονικές κορυφές στο $V(C)\backslash S$. Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε κορυφή $x \in S$, η επόμενή (κατά την φορά του ωρολογιού) της x' κορυφή στο C, δεν ανήκει στο S. Πράγματι, αν δεν είναι έτσι, τότε το γράφημα $(C\backslash e') \cup P_1 \cup P_2$, όπου $e' = \{x, x'\}$ και P_1, P_2 είναι τα μονοπάτια της βεντάλιας που συνδέουν την u με τις x και x', είναι ένας κύκλος με μήκος μεγαλύτερο του C, άτοπο. Έστω λοιπόν I το σύνολο των κορυφών του $V(C)$ που είναι επόμενες κορυφών του S. Ισχυριζόμαστε ότι το I είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του G. Πράγματι, αν οι κορυφές $x', y' \in I$ συνδέονται με μια ακμή e, τότε καταλήγουμε σε άτοπο κατασκευάζοντας το κύκλο $C\backslash\{\{x, x'\}, \{y, y'\}\} \cup (e, \{e\}) \cup P_x \cup P_y$ όπου x και y είναι οι προηγούμενες κορυές των x' και y' και P_x και P_y είναι τα μονοπάτια της βεντάλιας που συνδέουν την u με τις x και y αντίστοιχα. Μια και $I \subseteq V(C)\backslash S$ και η u δεν είναι γειτονική στις κορυφές του $V(C)\backslash S$, τό σύνολο $\{u\} \cup I$ είναι ανεξάρτητο σύνολο του G το οποίο έχει πληθάριθμο $\kappa(G) + 1$. Άρα $\alpha(G) > \kappa(G)$, άτοπο. $\square$

Ασκήσεις Κεφαλαίου

12.1 (☆☆☆)**.** Βρέστε έναν κύκλο Hamilton στο εικοσάεδρο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. The solution of the four-color-map problem. *Sci. Amer.*, 237(4):108–121, 152, 1977.

[2] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 37(37):194–197, 1941.

[3] Gabriel A. Dirac. In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.*, 22:61–85, 1960.

[4] Gabriel A. Dirac. Short proof of Menger's graph theorem. *Mathematika*, 13:42–44, 1966.

[5] Paul Erdős and Tibor Gallai. Graphs with prescribed degrees of vertices. *Mat. Lapok.*, 11:264–274, 1960.

[6] P. Erdős. Graph theory and probability. *Canad. J. Math.*, 11:34–38, 1959.

[7] Paul Erdős. On the structure of linear graphs. *Israel J. Math.*, 1:156–160, 1963.

[8] Paul Erdős and András Hajnal. On chromatic number of graphs and set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 1:61–99, 1966.

[9] G. S. Gasparian. Minimal imperfect graphs: a simple approach. *Combinatorica*, 16(2):209–212, 1996.

[10] Branko Grünbaum. *Convex polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.

[11] Hugo Hadwiger. über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 88:133–142, 1943.

[12] Rudolf Halin. On the structure of n-connected graphs. In *Recent Progress in Combinatorics (Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968)*, pages 91–102. Academic Press, New York, 1969.

[13] Percy J. Heawood. Map colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 24:332–338, 1830.

[14] Lefteris M. Kirousis, Maria Serna, and Paul Spirakis. Parallel complexity of the connected subgraph problem. *SIAM J. Comput.*, 22(3):573–586, 1993.

[15] Casimir Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.

[16] Don R. Lick and Arthur T. White. k-degenerate graphs. *Canad. J. Math.*, 22:1082–1096, 1970.

[17] L. Lovász. On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 19:59–67, 1968.

[18] Wolfgang K.W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. *Math. Ann.*, 174:265–268, 1967.

[19] Simon Marshall. A new proof of the girth-chromatic number theorem. Technical Report 2004-531, University of Auckland Department of Mathematics, Auckland, 2004.

[20] David W. Matula. A min–max theorem for graphs with application to graph coloring. *SIAM Reviews*, 10:481–482, 1968.

[21] David W. Matula, George Marble, and Joel D. Isaacson. Graph coloring algorithms. In *Graph theory and computing*, pages 109–122. Academic Press, New York, 1972.

[22] Karl Menger. über reguläre Baumkurven. *Math. Ann.*, 96(1):572–582, 1927.

[23] Heinz Prüfer. Neuer beweis eines satzes über permutationen. *Arch. Math. Phys.*, 96(27):742–744, 1918.

[24] S. Radziszowski. Small ramsey numbers, electronic journal of combinatorics, dynamic survey ds1, 1994, 28pp., 1994.

[25] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. The four-colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(1):2–44, 1997.

[26] Paul D. Seymour. How the proof of the strong perfect graph conjecture was found, manuscript, 2006.

[27] George Szekeres and Herbert S. Wilf. An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combinatorial Theory*, 4:1–3, 1968.

[28] Andrew Thomason. The extremal function for complete minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 81(2):318–338, 2001.

[29] William T. Tutte. A theory of 3-connected graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.*, 23:441–455, 1961.

[30] Klaus Wagner. über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.*, 114(1):570–590, 1937.

ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ