

411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόχειρες Σημειώσεις

Βασιλική Μπιτσούνη

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Αθήνα, 2020

Το περιεχόμενο των ηλεκτρονικών μαθημάτων που φιλοξενεί η πλατφόρμα η-Τάξη ΕΚΠΑ, καθώς και τα πνευματικά δικαιώματα του υλικού αυτού, ανήκουν στους συγγραφείς τους. Για οποιαδήποτε χρήση ή αναδημοσίευση του περιεχομένου παρακαλούμε επικοινωνήστε με τους υπεύθυνους των αντίστοιχων μαθημάτων.

Περιεχόμενα

1	Βασικές έννοιες	1
1.1	Στοιχεία απειροστικού λογισμού	1
1.2	Μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ)	5
1.2.1	Ταξινόμηση των ΜΔΕ βάσει της γραμμικότητας της F	6
1.2.2	Παραδείγματα ΜΔΕ	7
1.3	Προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) / Προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)	8
1.4	Η έννοια της λύσης μιας ΜΔΕ	10
2	ΜΔΕ πρώτης τάξης στις δύο διαστάσεις	11
2.1	Γραμμικές εξισώσεις και μέθοδοι επίλυσης τους	11
2.1.1	Επίλυση ΜΔΕ με καμπύλες στάθμης:	11
2.1.2	Η μέθοδος αλλαγής συντεταγμένων (αλλαγή μεταβλητών)	12
2.1.3	Η μέθοδος των χαρακτηριστικών	16
2.2	Σχεδόν γραμμικές (quasilinear) ΜΔΕ στις δύο διαστάσεις	20
2.2.1	Πρόβλημα αρχικών τιμών ή πρόβλημα (του) Cauchy	24
2.3	Ερμηνεία προέλευσης ΜΔΕ: Νόμοι διατήρησης	26
2.4	Συνέπειες μη γραμμικότητας: χρουστικά κύματα	30
2.4.1	Χρόνος θραύσης	32
2.5	Ασθενείς λύσεις και συνθήκη Rankine-Hugoniot	36
2.5.1	Ασθενής διατύπωση προβλήματος	37
2.5.2	Συνθήκη Rankine-Hugoniot	41
3	Η εξίσωση μεταφοράς	49
3.1	Η ομογενής εξίσωση μεταφοράς	49
3.2	Η μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς	52
4	ΜΔΕ δεύτερης τάξης στις δύο διαστάσεις	55
4.1	Ταξινόμηση ΜΔΕ δεύτερης τάξης	55
4.2	Κανονικές μορφές και χαρακτηριστικές καμπύλες	57
5	Ανασκόπηση: χώροι με εσωτερικό γινόμενο & σειρές Fourier	63
5.1	Χώροι με εσωτερικό γινόμενο - Βασικοί ορισμοί	63
5.2	Σειρές Fourier	67
5.2.1	Ημιτονικές και συνημιτονικές σειρές	71
5.2.2	Μιγαδικές σειρές Fourier	72
5.2.3	Αλλαγή διαστήματος	72
5.2.4	Σύγκλιση σειρών Fourier	74
5.2.5	Διαφόριση και ολοκλήρωση σειρών Fourier	75
5.3	Προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville	76
5.3.1	Ανασκόπηση των προβλημάτων ιδιοτιμών από τη γραμμική άλγεβρα	76
5.3.2	Το Πρόβλημα ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές	77
6	Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου	81
6.1	Η εξίσωση του Laplace	81
6.1.1	Αρμονικές συναρτήσεις	81
6.2	Προβλήματα συνοριακών τιμών σε φραγμένο χωρίο	82
6.2.1	ΠΣΤ σε ένα ορθογώνιο	82

6.2.2	Το ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο και ο τύπος του Poisson	85
6.2.3	ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο	85
6.2.4	Βασικές ιδιότητες αρμονικών συναρτήσεων	89
6.3	Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace	92
7	Εξισώσεις παραβολικού τύπου	95
7.1	Μια εισαγωγή στην εξίσωση διάχυσης-θερμότητας	95
7.2	Πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών σε φραγμένο διάστημα	96
7.2.1	Συνοριακές συνθήκες Dirichlet	97
7.2.2	Συνοριακές συνθήκες Neumann	99
7.2.3	Μη ομογενείς εξισώσεις	101
7.3	Αρχή μεγίστου	103
8	Εξισώσεις υπερβολικού τύπου	107
8.1	Η κυματική εξίσωση	107
8.1.1	Το πρόβλημα παλλόμενης χορδής	107
8.2	Πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών σε φραγμένο διάστημα - Χωρισμός μεταβλητών	109
8.3	Η κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία	113
8.3.1	Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης	114
8.3.2	Το πρόβλημα αρχικών τιμών-Ο τύπος του d'Alembert	115
8.3.3	Μέθοδος της ενέργειας	120
8.4	Ανάκλαση κυμάτων	122
8.4.1	Η κυματική εξίσωση στην ημιευθεία	122
8.4.2	Ο τύπος του d'Alembert για το πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο διάστημα	125
8.5	Η μη ομογενής κυματική εξίσωση	128
8.5.1	Η μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία	132
8.5.2	Η μη ομογενής κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα	134
9	Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί	137
9.1	Περιοδικές συνοριακές συνθήκες	137
9.2	Μετασχηματισμός Fourier	138
9.3	Επίλυση ΜΔΕ σε μη φραγμένα χωρία	141
	Βιβλιογραφία	145

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Στο αυτό κεφάλαιο θα εισάγουμε βασικές έννοιες της ανάλυσης και θα δώσουμε τον ορισμό και μερικά παραδείγματα των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Στοιχεία απειροστικού λογισμού

Ορισμός 1.1. *Χωρίο* (ή *τόπος*) ονομάζεται κάθε ανοικτό¹ και συνεκτικό² υποσύνολο U του \mathbb{R}^n .

Ορισμός 1.2. Έστω ένα χωρίο $U \subset \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τότε τους ακόλουθους χώρους συναρτήσεων πάνω στο U :

- $C(U) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής στο } U\}$
- $C^k(U) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι } k\text{-τάξης της } u \text{ και είναι συνεχείς}\}$ ³
- $C^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U)$

Επίσης

- $C(\bar{U}) := \{u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής στο } \bar{U}\}$
- $C^k(\bar{U}) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{κάθε μερική παράγωγος τάξης } \leq k \text{ επεκτείνεται συνεχώς στο } \partial U\}$ ⁴
- $C^\infty(\bar{U}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\bar{U})$

Ορισμός 1.3. Έστω $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε το **σύνολο στάθμης**⁵ με τιμή c ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} \in U$ στα οποία $u(\mathbf{x}) = c$. Αν $n = 2$, μιλάμε για μια **καμπύλη στάθμης**⁶ (με τιμή c) και αν $n = 3$ για μια **επιφάνεια στάθμης**. Συμβολικά, το σύνολο στάθμης με τιμή c γράφεται

$$\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό των μερικών παραγώγων

Ορισμός 1.4. Έστω $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση. Τότε η **μερική παράγωγος** της u ως προς την i -οστή μεταβλητή ορίζεται στο σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ ως η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)}{h},$$

δοθέντος ότι το όριο υπάρχει. Γράφουμε συνήθως u_{x_i} για την $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Αντίστοιχα γράφουμε $u_{x_i x_j}$ για

την $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $u_{x_i x_j x_k}$ για την $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ κ.ο.κ.

¹Κάθε σημείο του είναι το κέντρο μιας ανοικτής σφαίρας η οποία είναι υποσύνολο του U .

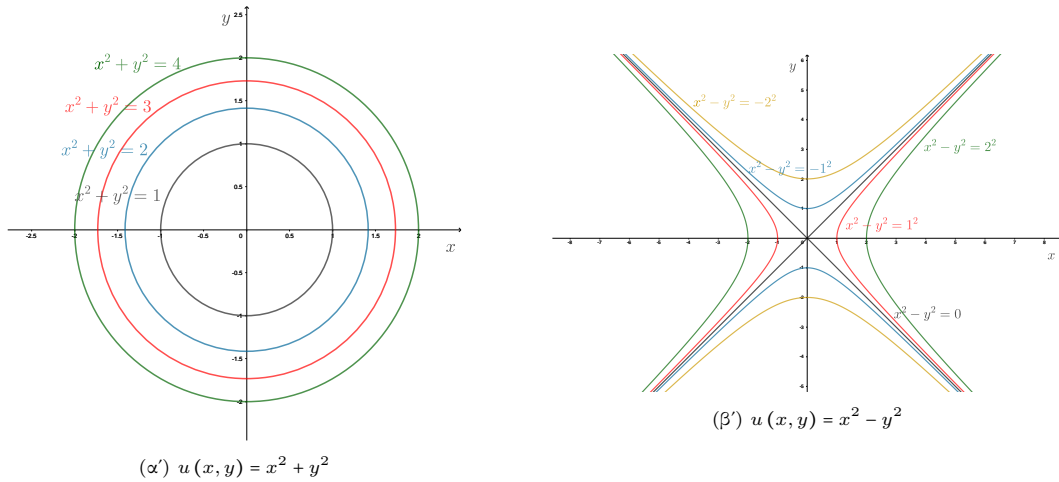
²Κάθε δύο σημεία του συνδέονται με μια συνεχή γραμμή η οποία ανήκει στο U .

³ $C^0(U) = C(U)$

⁴ $C^k(\bar{U}) \subset C^k(U)$

⁵Το σύνολο στάθμης περιέχεται πάντα στον χώρο όπου ορίζεται η συνάρτηση.

⁶Γνωστή επίσης ως ισοϋψής ή ισοσταθμική καμπύλη.

Σχήμα 1.1: Καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $u(x, y)$.

Ορισμός 1.5. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Λέμε ότι η u είναι **διαφορίσιμη (πα-ραγωγίσιμη)** στο $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in U$ αν οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν στο \mathbf{x}_0 και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

όπου $\mathbf{T} = \mathbf{D}u(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right]$. Ο \mathbf{T} ονομάζεται η παράγωγος της u στο \mathbf{x}_0 .

Ορισμός 1.6. (Κανόνας της αλυσίδας (chain rule)) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτά. Θεωρούμε δοσμένες συναρτήσεις $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, τέτοιες ώστε η g να απεικονίζει το U μέσα στο V , οπότε η $f \circ g$ ορίζεται. Υποθέτουμε ότι η g παραγωγίζεται στο \mathbf{x}_0 και η f παραγωγίζεται στο $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Τότε η $f \circ g$ έχει παράγωγο στο \mathbf{x}_0 και

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

Το δεξιό μέλος είναι γινόμενο πινάκων.

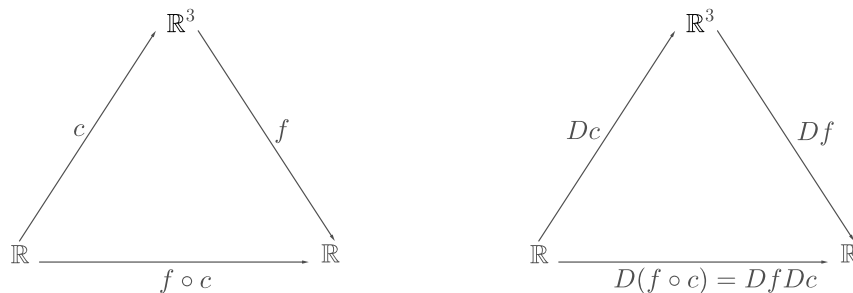
Παράδειγμα 1.7. (Ειδική περίπτωση) Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $h(t) = f(c(t))$, όπου $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Τότε

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Δηλαδή

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(c(t)) c'(t),$$

όπου $c'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα του κανόνα της αλυσίδας.

Στοιχειώδεις διαφορικοί τελεστές⁷:

- $\text{grad } u = \nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}), u \in C^1$ (κλίση (gradient))⁸
- $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}, \vec{F} \in C^1$ (απόκλιση (divergence))⁹
- $\Delta u = \text{div } \nabla u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}, u \in C^2$ (τελεστής του Laplace (Laplace operator) ή Λαπλασιανή)¹⁰

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $u : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ δοσμένα διανύσματα και θεωρούμε την συνάρτηση από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} που ορίζεται από την $t \rightarrow u(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$. Το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ είναι η ευθεία, L , που περνάει από το σημείο \mathbf{x} και είναι παράλληλο στο \mathbf{v} (βλ. Σχήμα 1.3α'). Άρα η συνάρτηση $t \rightarrow u(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ αποτελεί τον περιορισμό της συνάρτησης u στην ευθεία L . Τότε η τιμή της παραγώγου αυτής της συνάρτησης του t για $t = 0$ δίνει τον ρυθμό μεταβολής της u κατά μήκος της L στο σημείο \mathbf{x} . Αυτή θα είναι η παράγωγος της u στο σημείο \mathbf{x} στην κατεύθυνση της L , δηλαδή του \mathbf{v} .¹¹ Δίνουμε επομένως τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.8. Έστω $u : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στο \mathbf{x} στην κατεύθυνση ενός διανύσματος \mathbf{v} δίνεται από την

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \Big|_{t=0}$$

αν αυτή υπάρχει. Από τον ορισμό μπορούμε να δούμε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος δίνεται από τον τύπο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - u(\mathbf{x})}{h}.$$

Θεώρημα 1.9. Αν η $u : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η κατευθυνόμενη παράγωγος στο \mathbf{x} στην κατεύθυνση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ¹² δίνεται από την

$$D_{\mathbf{v}} u(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right] v_1 + \left[\frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right] v_2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right] v_3.$$

Θεώρημα 1.10. Έστω $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$. Τότε η κλίση $\nabla u(\mathbf{x})$ δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η u αυξάνεται γρηγορότερα.

Το ∇u είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης $C = \{(x, y) \mid u(x, y) = c\}$. Έτσι αν (x_0, y_0) σημείο της C , η εφαπτομένη της C στο (x, y) έχει την εξίσωση

$$\nabla u(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0,$$

αν $\nabla u(x_0, y_0) \neq 0$ (βλ. Σχήμα 1.3β').

Πολυδείκτες: Έστω ο πολυδείκτης (διάνυσμα) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, με τάξη (ή μήκος)

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Ορίζουμε τότε

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Για $k \in \mathbb{N}_0$ το σύνολο όλων των μερικών παραγώγων τάξης k είναι

$$D^k u := \{D^\alpha u \mid |\alpha| = k\}.$$

⁷Ο τελεστής είναι μια συνάρτηση από έναν χώρο συναρτήσεων σε έναν άλλο χώρο συναρτήσεων, δηλαδή δρα πάνω σε συναρτήσεις. Ο πιο απλός γραμμικός τελεστής που γνωρίζουμε είναι ένα πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

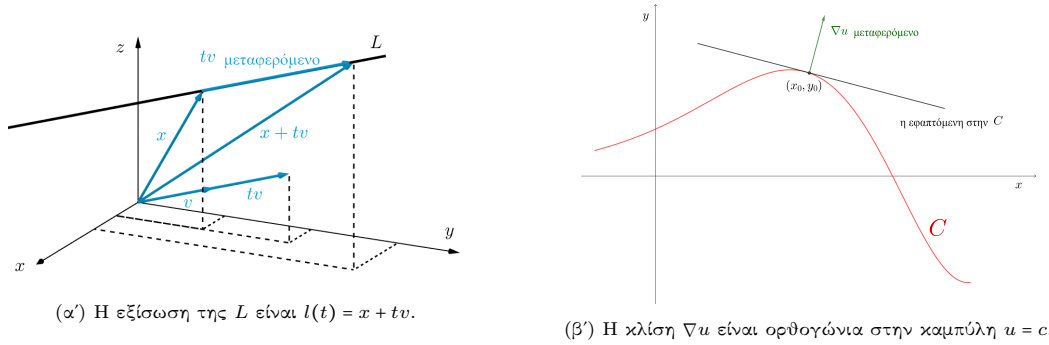
⁸Αν έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης είναι διάνυσμα διάσταση όσες οι ανεξάρτητες μεταβλητές της συνάρτησης.

⁹Αν έχουμε μια διανυσματική συνάρτηση, τότε η απόκλιση της είναι βαθμωτό μέγεθος.

¹⁰Αν έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η Λαπλασιανή της βαθμωτής συνάρτησης είναι βαθμωτό μέγεθος.

¹¹Για παράδειγμα ένα πτηνό πετάει σε ευθεία γραμμή με ταχύτητα \mathbf{v} έτσι ώστε την χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

¹²Στον ορισμό της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, διαλέγει κανείς συνήθως το \mathbf{v} να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα.



Σχήμα 1.3: Παράγωγοι κατά κατεύθυνση και κλίση.

Θεώρημα 1.11. (Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (ΘΠΣ) (*implicit function theorem*)) Έστω $u(x, y)$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση σε κάποιο ανοικτό χωρίο U του επιπέδου x, y , που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) . Αν $u(x_0, y_0) = 0$ και $u_y(x_0, y_0) \neq 0$, τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο

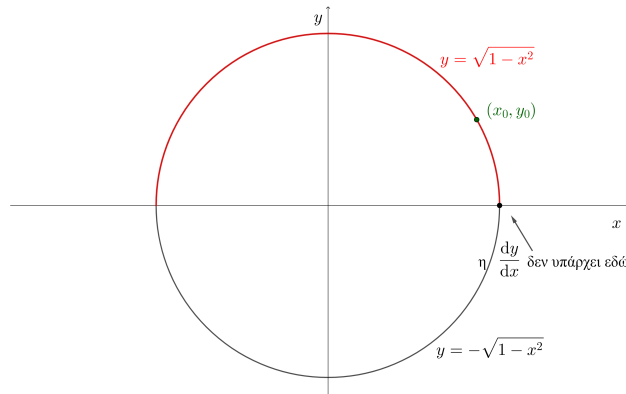
$$S: |y - y_0| < a, \quad |x - x_0| < b,$$

που περιέχεται στο U , τέτοιο ώστε:

- (i) Η εξίσωση $u(x, y) = 0$ έχει μοναδική λύση $y = y(x)$ στο S .
- (ii) Η συνάρτηση $y = y(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη για $|x - x_0| < b$, και η παράγωγος της δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}.$$

Παράδειγμα 1.12. Έστω $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Έχουμε $u_y = 2y$, οπότε το ΘΠΣ εφαρμόζεται σε κάθε σημείο (x_0, y_0) που ικανοποιεί $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$ και $y_0 \neq 0$, άρα κοντά σε τέτοια σημεία το y ορίζεται μονοσήμαντα σαν συνάρτηση του x . Αυτή η συνάρτηση είναι η $y = \sqrt{1 - x^2}$ αν $y_0 > 0$ και $y = -\sqrt{1 - x^2}$ αν $y_0 < 0$. Η y ορίζεται μόνο για $|x| < 1$ (η περιοχή δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη) και το y είναι μοναδικό μόνο αν βρίσκεται κοντά στο y_0 . Αυτά τα στοιχεία καθώς και η μη-ύπαρξη της dy/dx στο $y_0 = 0$ είναι φανερά από το γεγονός ότι η $x^2 + y^2 = 1$ ορίζει μια περιφέρεια στο επίπεδο xy .



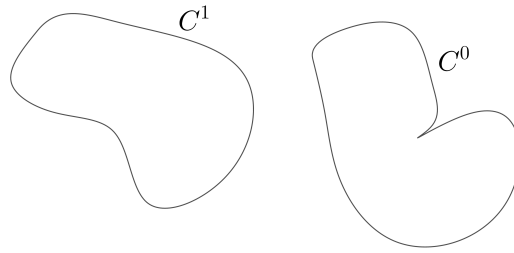
Σχήμα 1.4: Λύση εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή σε μικρές περιοχές.

Ορισμός 1.13. Λέμε ότι το U (ή το ∂U) είναι τάξης C^k αν τοπικά το σύνορο του U είναι το γράφημα μιας C^k συνάρτησης.

Υπενθυμίζουμε τώρα δύο βασικά θεωρήματα. Έστω U φραγμένο χωρίο με ομαλό (C^1) σύνορο ∂U . Τότε έχουμε:

Θεώρημα 1.14. (Θεώρημα απόκλισης (*div*)) Έστω $\vec{F} \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$, με $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$. Τότε ισχύει

$$\iint_U \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy = \int_{\partial U} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS. \tag{1.1}$$



Σχήμα 1.5

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ο σημαντικός τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη. Επίσης, από το θεώρημα της απόκλισης προκύπτουν οι ακόλουθοι ιδιαίτερα σημαντικές ταυτότητες/τύποι του Green. Επιλέγουμε ως $\vec{F} = v\nabla u$, δηλαδή

$$\vec{F} := v\nabla u = \left(v \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

με

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Καταλήγουμε επομένως στην πρώτη ταυτότητα του Green.

Θεώρημα 1.15. (Πρώτη ταυτότητα του Green) Έστω $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ και $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$. Τότε ισχύει

$$\iint_U v \Delta u \, dx dy + \iint_U \nabla v \cdot \nabla u \, dx dy = \int_{\partial U} v \nabla u \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dS. \quad (1.2)$$

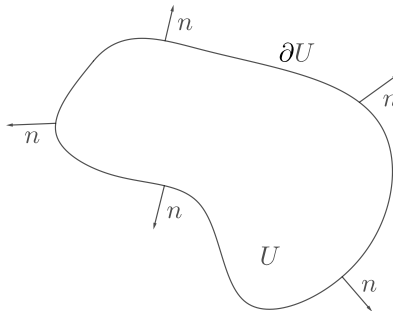
Αντίστοιχα, επιλέγοντας $\vec{F} = u\nabla v$ στην (1.1) παίρνουμε

$$\iint_U u \Delta v \, dx dy + \iint_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, dS. \quad (1.3)$$

Αφαιρώντας τις (1.2) και (1.3) κατά μέλη, παίρνουμε την δεύτερη ταυτότητα του Green.

Θεώρημα 1.16. (Δεύτερη ταυτότητα του Green) Έστω $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Τότε ισχύει

$$\iint_U (v \Delta u - u \Delta v) \, dx dy = \int_{\partial U} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) \, dS. \quad (1.4)$$



Σχήμα 1.6

1.2 Μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ)

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται στις φυσικές επιστήμες και στα Μαθηματικά και περιγράφουν προβλήματα που οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) (ordinary differential equation (ODE)) δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν γιατί η φύση του προβλήματος εξαρτάται από περισσότερες

της μιας ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. η μεταβλητή u μιας εξίσωσης μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο t και τον χώρο x (δηλαδή να εξελίσσεται στον χρόνο και τον χώρο) όπως στην περίπτωση της διάδοσης ενός κύματος.

Μια μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) (*partial differential equation (PDE)*) είναι μια εξίσωση με άγνωστη μια συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών, που περιέχει τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης αυτής.

Ορισμός 1.17. Έστω U ένα χωρίο του \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, και F μια ομαλή πραγματική συνάρτηση. Τότε κάθε σχέση της μορφής

$$F(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, u_{x_2 x_2} \dots) = 0, \quad \mathbf{x} \in U \quad (1.5)$$

λέμε ότι είναι μια μερική διαφορική εξίσωση με λύση ή κλασική λύση¹³ της κάθε ομαλή συνάρτηση $u : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Τάξη μιας ΜΔΕ ονομάζεται η υψηλότερης τάξης παράγωγος της u που εμφανίζεται σε αυτή. Η γενική μορφή μιας ΜΔΕ k τάξης στον \mathbb{R}^2 είναι της μορφής

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (x, y) \in U,$$

όπου $F : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση. Γενικεύοντας, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.18. Έστω U ένα χωρίο του \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Μια σχέση της μορφής

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), Du(\mathbf{x}), \dots, D^{k-1}u(\mathbf{x}), D^k u(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in U,$$

ονομάζεται μερική διαφορική εξίσωση k -τάξης, όπου η

$$F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R},$$

δίνεται και η

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι η άγνωστη.

1.2.1 Ταξινόμηση των ΜΔΕ βάσει της γραμμικότητας της F

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο και $u, a, b, c, d : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Γραμμικές ΜΔΕ

Ονομάζουμε μια ΜΔΕ **γραμμική** (*linear*)¹⁴ όταν όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι πρώτου βαθμού ως προς την άγνωστη συνάρτηση, u , και τις παραγώγους αυτής. Η γενική μορφή της γραμμικής ΜΔΕ k τάξης στον \mathbb{R}^2 είναι

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = d(x, y), \quad (x, y) \in U.$$

Για να αποφύγουμε την εκφύλιση της εξίσωσης σε κάποιο σημείο, θεωρούμε ότι οι δύο συντελεστές των μερικών παραγώγων της εξίσωσης, a, b , δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, υποθέτουμε δηλαδή ότι $[a(x, y)]^2 + [b(x, y)]^2 \neq 0, \forall (x, y) \in U$. Το διάνυσμα $\Phi = (a, b)$ ορίζει τότε ένα ομαλό πεδίο διευθύνσεων. Ονομάζουμε **χαρακτηριστικές καμπύλες** της ΜΔΕ τις καμπύλες εκείνες που εφάπτονται στο Φ και κατά μήκος των οποίων η ΜΔΕ μετατρέπεται σε ΣΔΕ.

Ένα παράδειγμα γραμμικής ΜΔΕ είναι η εξίσωση: $u_t + u_x = 1$.

¹³Οι μερικές παράγωγοι θεωρούνται με τον κλασικό ορισμό τους σε αντίθεση με τις γενικευμένες παραγώγους και τις αντίστοιχες ασθeneίς λύσεις που θα δούμε σε επόμενη ενότητα.

¹⁴Μια γραμμική εξίσωση είναι της μορφής

$$Lu = f,$$

όπου L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$L(u + v) = Lu + Lv, \quad L(cu) = cLu, \quad c \in \mathbb{R},$$

και f συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Μη γραμμικές ΜΔΕ

Μια ΜΔΕ ονομάζεται **σχεδόν γραμμική (ή οιονεί γραμμική) (quasilinear)** όταν η F είναι γραμμική μόνο ως προς τις μέγιστης τάξης παραγώγους της. Η γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής ΜΔΕ α' τάξης στον \mathbb{R}^2 είναι

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = d(x, y, u), \quad (x, y) \in U.$$

Ένα παράδειγμα σχεδόν γραμμικής ΜΔΕ είναι η εξίσωση του Burgers χωρίς ιξώδες (viscosity): $u_t + uu_x = 0$.

Μια υποπερίπτωση των σχεδόν γραμμικών ΜΔΕ αποτελούν οι **ημιγραμμικές (semilinear)** ΜΔΕ, όπου οι συντελεστές των μερικών παραγώγων της εξίσωσης, a, b , είναι ανεξάρτητοι της u . Η γενική μορφή της ημιγραμμικής ΜΔΕ α' τάξης στον \mathbb{R}^2 είναι

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = d(x, y, u), \quad (x, y) \in U.$$

Ένα παράδειγμα ημιγραμμικής ΜΔΕ είναι η εξίσωση: $u_t + u_x + u^2 = 0$.

Μια ΜΔΕ ονομάζεται **πλήρως μη γραμμική (fully nonlinear)** όταν η F είναι μη-γραμμική ως προς τις μέγιστης τάξης παραγώγους της. Ένα παράδειγμα μη γραμμικής ΜΔΕ που προέρχεται από την γεωμετρική οπτική είναι η **εξίσωση της εικόνας**: $u_x^2 + u_y^2 = 1$.

Στις παραπάνω ΜΔΕ η συνάρτηση d είναι γνωστή. Για $d \equiv 0$ η ΜΔΕ καλείται **ομογενής (homogeneous)**, ενώ για $d \neq 0$ η ΜΔΕ καλείται **μη-ομογενής (non-homogeneous)**.

1.2.2 Παραδείγματα ΜΔΕ

Παραδείγματα γνωστών ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2 είναι τα ακόλουθα:

Γραμμικές ΜΔΕ

- Η εξίσωση του Laplace ή εξίσωση δυναμικού:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y).$$

Η εξίσωση του Laplace είναι από τις πιο σημαντικές ΜΔΕ, με τις λύσεις της, $u(x, y)$, να καλούνται **αρμονικές συναρτήσεις (harmonic functions)**. Τυπικές λύσεις της εξίσωσης είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο.

- Η εξίσωση του Helmholtz (ή εξίσωση ιδιοτιμών)

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u = u(x, y),$$

που βρίσκει εφαρμογή σε εξισώσεις που περιγράφουν φαινόμενα της φυσικής όπως την κυματική εξίσωση και την εξίσωση θερμότητας/διάχυσης.

- Η εξίσωση θερμότητας ή διάχυσης (heat or diffusion equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t),$$

όπου $D > 0$ η σταθερά διάχυσης (diffusion coefficient ή diffusivity), περιγράφει το φαινόμενο της διάχυσης και της διάδοσης της θερμότητας ή της διάχυσης ενός υλικού διαλυμένου σε κάποιο ρευστό.

- Η κυματική εξίσωση (wave equation):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t).$$

Η κυματική εξίσωση είναι η σημαντικότερη εξίσωση κυματικής διάδοσης και περιγράφει μια πληθώρα κυμάτων όπως ηχητικά κύματα, κύματα φωτός και κύματα στο νερό.

- Η εξίσωση μεταφοράς (linear transport equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t).$$

Η εξίσωση μεταφοράς είναι μια απλούστερη εξίσωση κυματικής διάδοσης, όπου η λύση της είναι της μορφής $u(x, t) = f(x - ct)$ και παριστάνει ένα οδεύον κύμα που κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c .

Μη γραμμικές ΜΔΕ

- Η μη-γραμμική εξίσωση του Poisson:

$$-\Delta u = f(u), \quad u = u(x, y).$$

Η εξίσωση του Poisson είναι η μη-ομογενής εξίσωση δυναμικού με ευρεία εφαρμογή στην ηλεκτροστατική, τη μηχανολογία και τη θεωρητική φυσική.

- Η εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης (reaction-diffusion equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad u = u(x, t).$$

Η εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης περιγράφει τις μεταβολές ως προς τον χρόνο και τον χώρο διάφορων φυσικών ποσοτήτων της βιολογίας, της γεωλογίας, της φυσικής, της χημείας και της οικολογίας, όπως για παράδειγμα την συγκέντρωση χημικών ουσιών, την πυκνότητα κυττάρων κ.τ.λ.

- Η εξίσωση των Korteweg–de Vries (KdV):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t).$$

Η εξίσωση KdV περιγράφει ένα μεγάλο πλήθος φυσικών φαινομένων αν και πρωτοδιατυπώθηκε ως μοντέλο της διάδοσης κυμάτων σε ρηχά στρώματα νερού.

- Η εξίσωση του Burgers χωρίς ιξώδες (inviscid Burgers' equation) ή εξίσωση του Hopf:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t),$$

που περιγράφει την μετάδοση ενός κύματος με ταχύτητα εξαρτώμενη από το πλάτος του.

1.3 Προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) / Προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)

Οι ΜΔΕ περιγράφουν διάφορα φυσικά φαινόμενα με μοναδική κάθε φορά λύση. Στις ΣΔΕ ο προσδιορισμός των σταθερών που προκύπτουν από την ολοκλήρωση γίνεται μέσω των αρχικών ή συνοριακών συνθηκών, που με αυτόν τον τρόπο μας δίνουν μια μοναδική λύση. Οι ΜΔΕ συνήθως συνοδεύονται από αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες μέσω των οποίων επιλέγουμε μια από τις πολλές λύσεις τους. Η μορφή των συνθηκών που συνοδεύουν μια εξίσωση εξαρτάται από τη φύση της εξίσωσης, όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Όταν η συνθήκη ισχύει για $t = 0$ σε κάποιο διάστημα του άξονα των x λέγεται αρχική συνθήκη (initial condition (IC)). Όταν η συνθήκη δίνεται σε μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη στο επίπεδο x, t λέγεται συνοριακή συνθήκη (boundary condition (BC)). Οι αρχικές/συνοριακές συνθήκες μπορεί να είναι τιμές της λύσης u ή τιμές των παραγώγων της u ή και συνδυασμός τους πάνω στις δεδομένες αυτές καμπύλες του επιπέδου x, t . Τα αντίστοιχα προβλήματα ΜΔΕ που συνοδεύονται από βοηθητικές συνθήκες λέγονται προβλήματα αρχικών¹⁵ ή/και συνοριακών τιμών (initial/boundary value problems).

Παράδειγμα 1.19. Ένα παράδειγμα εξέλιξης φυσικού φαινομένου στον χρόνο και τον χώρο είναι η μεταφορά θερμοκρασίας, u , μιας ράβδου μήκους l , που εξαρτάται από τη θέση x στην ράβδο και τον χρόνο t που έχει παρέλθει από τη χρονική στιγμή κατά την οποία εφαρμόστηκαν οι αρχικές συνθήκες. Τότε η ροή θερμότητας στην ράβδο περιγράφεται από την ΜΔΕ

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

όπου k ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Μια βοηθητική συνθήκη της ΜΔΕ είναι η αρχική κατανομή θερμοκρασίας, δηλαδή η αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l,$$

¹⁵Το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) αναφέρεται και ως πρόβλημα (του) Cauchy.

όπου η f δεδομένη συνάρτηση που παριστάνει την αρχική (για $t = 0$) κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου. Άλλες βοηθητικές συνθήκες της ΜΔΕ είναι η συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t), \quad t > 0,$$

όπου η $g(x)$ και $h(x)$ παριστάνουν δεδομένες τιμές της θερμοκρασίας στα άκρα $x = 0$ και $x = l$, αντίστοιχα, για $t > 0$. Οι συνθήκες αυτές καλούνται **συνοριακές συνθήκες του Dirichlet** (ή συνοριακές συνθήκες 1ου είδους) ενώ αν οι τιμές στα άκρα είναι ίσες με μηδέν καλούνται **ομογενείς συνοριακές συνθήκες του Dirichlet**. Άλλες σημαντικές συνοριακές συνθήκες είναι οι **συνοριακές συνθήκες του Neumann** (ή συνοριακές συνθήκες 2ου είδους) που είναι της μορφής

$$u_x(0, t) = g(t), \quad u_x(l, t) = h(t), \quad t > 0,$$

και εφαρμόζονται στην περίπτωση που τα άκρα είναι μονωμένα, και τέλος, οι **συνοριακές συνθήκες του Robin** (ή συνοριακές συνθήκες 3ου είδους) που δίνονται από τους γραμμικούς συνδυασμούς

$$u_x(0, t) + r(0, t)u(0, t) = g(t), \quad u_x(l, t) + r(l, t)u(l, t) = h(t), \quad t > 0,$$

για δεδομένη συνάρτηση r . Στην περίπτωση αυτή η ροή είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας στο άκρο και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος.

Σε υψηλότερες διαστάσεις οι συνοριακές συνθήκες των Dirichlet, Neumann και Robin γράφονται αντίστοιχα

- Συνοριακές συνθήκες του Dirichlet:

$$u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial U, \quad t > 0,$$

- Συνοριακές συνθήκες του Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial U, \quad t > 0,$$

όπου n εξωτερικό κανονικό διάνυσμα κάθετο στο ∂U . Από τις συνθήκες αυτές προκαθορίζεται η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση του n σε κάθε σημείο του ∂U .

- Συνοριακές συνθήκες του Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + r(x, t)u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial U, \quad t > 0.$$

Παρατήρηση 1.20. Αντί για $x \in (0, l)$ που είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα μπορεί να έχουμε $x \in [0, \infty)$, όταν για παράδειγμα μιλάμε για την θερμοκρασία στο υπέδαφος, ή $x \in (-\infty, \infty)$ που συχνά χρειαζόμαστε επιπλέον συνθήκες, π.χ. $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, t > 0$, για λύσεις με φυσική σημασία.

Καλά τοποθετημένο (well-posed) κατά Hadamar πρόβλημα: Ένα πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες

1. Το πρόβλημα έχει μια λύση - Ύπαρξη (existence of solution)
2. Η λύση είναι μοναδική - Μοναδικότητα (uniqueness of solution)
3. Η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα βοηθητικά δεδομένα του προβλήματος - Ευστάθεια (των λύσεων σε μικρές διαταραχές)

Τα προβλήματα που δεν ικανοποιούν τουλάχιστον μια από τις παραπάνω συνθήκες ονομάζονται **μη καλά τοποθετημένα (ill-posed)**. Η μελέτη των ΜΔΕ ασχολείται κυρίως (i) με την διερεύνηση της καλής τοποθέτησης ενός προβλήματος καθώς και (ii) με τις μεθόδους κατασκευής λύσεων. Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με το θέμα (ii).

1.4 Η έννοια της λύσης μιας ΜΔΕ

Είναι γνωστό ότι η γενική λύση των ΣΔΕ k -τάξης είναι μια παραμετρική οικογένεια που περιέχει k αυθαίρετες σταθερές που προκύπτουν από τις k ολοκληρώσεις κατά την επίλυση της εξίσωσης. Στις ΜΔΕ οι αντίστοιχες αυθαίρετες σταθερές ως προς τη μεταβλητή παραγωγίσιμης μπορεί να εξαρτώνται από τις υπόλοιπες $n - 1$ (όταν $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) μεταβλητές και να είναι επομένως αυθαίρετες συναρτήσεις. Καταλήγουμε επομένως στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.21. Ονομάζουμε *γενική λύση* $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μιας ΜΔΕ k -τάξης μια λύση της εξίσωσης που περιέχει k αυθαίρετες συναρτήσεις με $n - 1$ μεταβλητές η κάθε μια.

Παράδειγμα 1.22. Η γενική λύση, u , της τετριμμένης, γραμμικής ΜΔΕ

$$u_x = 0, \quad (x, y) \in U := \mathbb{R}^2,$$

είναι $u(x, y) = f(y)$, με f αυθαίρετη C^1 συνάρτηση του y .

Κάθε λύση που προκύπτει από την γενική λύση με συγκεκριμένη επιλογή αυθαίρετων συναρτήσεων ονομάζεται *ειδική λύση*. Αν η γενική λύση της ΜΔΕ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή τότε ονομάζεται *γενικό ολοκλήρωμα* (και αντίστοιχα *ειδικό ολοκλήρωμα* για συγκεκριμένη επιλογή συναρτήσεων). *Πλήρης λύση* μιας ΜΔΕ ονομάζεται το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης. Κάθε λύση που δεν προκύπτει από την γενική με κατάλληλη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων λέγεται *ιδιάζουσα λύση* και αντιστοιχεί σε περιβάλλουσα συνόλου λύσεων που ανήκουν στην γενική λύση. Αντίστοιχα έχουμε τις έννοιες του *πλήρους ολοκληρώματος* και του *ιδιάζοντος ολοκληρώματος* όταν οι λύσεις είναι σε πεπλεγμένη μορφή. Πολλές φορές χρησιμοποιείται η έννοια της *ολοκληρωτικής επιφάνειας* σε αντιστοιχία με την έννοια της *ολοκληρωτικής καμπύλης* για να εκφράσεις τη γεωμετρική αναπαράσταση της λύσης μια ΣΔΕ.

Κεφάλαιο 2

ΜΔΕ πρώτης τάξης στις δύο διαστάσεις

2.1 Γραμμικές εξισώσεις και μέθοδοι επίλυσης τους

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τρεις τρόπους επίλυσης της παραπάνω ΜΔΕ: (i) με καμπύλες στάθμης, (ii) με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών και (iii) με την μέθοδο των χαρακτηριστικών.

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο και $u, a, b, c, d \in C^1(U)$ με $a^2 + b^2 \neq 0, \forall (x, y) \in U$. Η γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y), \quad (x, y) \in U. \quad (2.1)$$

2.1.1 Επίλυση ΜΔΕ με καμπύλες στάθμης:

Ο πρώτος τρόπος επίλυσης ΜΔΕ είναι με καμπύλες στάθμης. Έστω $u = u(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών, $c \in \mathbb{R}$ και Σ_c το σύνολο στάθμης

$$\Sigma_c := \{(x, y) \mid u(x, y) = c\}. \quad (2.2)$$

Τότε, όπως είναι γνωστό

$$\nabla u = (u_x, u_y) \perp \Sigma_c, \quad \text{για } (x, y) \in \Sigma_c. \quad (2.3)$$

Έστω για παράδειγμα η ακόλουθη γραμμική ΜΔΕ

$$u_x + u_y = 0, \quad (x, y) \in U := \mathbb{R}^2, \quad (2.4)$$

η οποία σημαίνει ότι

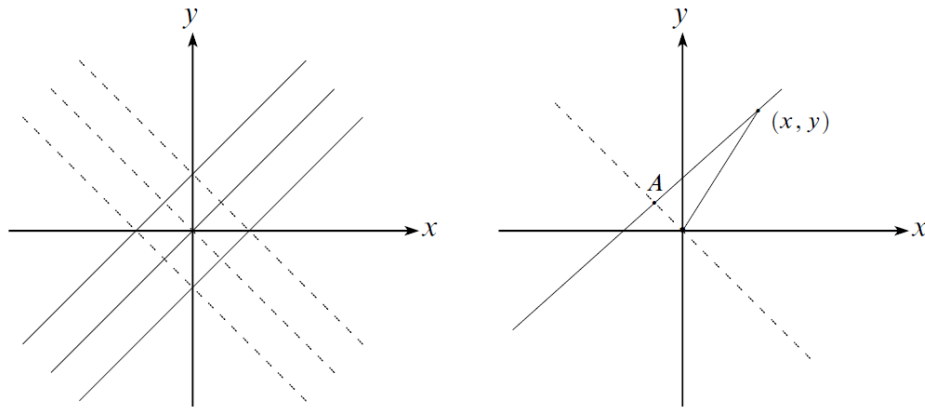
$$\nabla u \perp (1, 1), \quad \text{για } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

και από την (2.3) έχουμε ότι οι καμπύλες στάθμης της u είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $(1, 1)$ (βλ. Σχήμα 2.1), επομένως η τιμή της u σε ένα αυθαίρετο σημείο (x, y) θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την προβολή του (x, y) στην κάθετη κατεύθυνση $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$(x, y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

Άρα η γενική λύση της (2.4) είναι $u(x, y) = f\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$, για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, με f αυθαίρετη C^1 συνάρτηση. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να γράψουμε $u(x, y) = f(y-x)$ ή $u(x, y) = f(x-y)$, αφού το $\sqrt{2}$ στον παρονομαστή είναι θέμα κανονικοποίησης.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις άλλες δύο μεθόδους επίλυσης των ΜΔΕ που λόγω της ευρύτερης χρήσης τους θα τις μελετήσουμε πιο λεπτομερώς.



Σχήμα 2.1: Αριστερά: Η οικογένεια χαρακτηριστικών γραμμών της εξίσωσης (2.4) (συνεχής γκρι γραμμή) και οι κάθετες γραμμές σε αυτές (διακεκομμένη γκρι γραμμή). Δεξιά: Η προβολή του (x, y) σε ευθεία κάθετη στις χαρακτηριστικές [1].

2.1.2 Η μέθοδος αλλαγής συντεταγμένων (αλλαγή μεταβλητών)

Η δεύτερη μέθοδος επίλυσης είναι η μέθοδος αλλαγής συντεταγμένων. Ο στόχος της μεθόδου αυτής είναι να αναγάγουμε την ΜΔΕ είτε σε ΣΔΕ με κατάλληλη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, είτε σε απλούστερη ΜΔΕ στο καινούριο αυτό σύστημα συντεταγμένων.

Στη απλή περίπτωση του παραδείγματος (2.4) θέλουμε να στρέψουμε το σύστημα των αξόνων μας κατά γωνία θ κατά τη θετική φορά ώστε οι νέες συντεταγμένες μας να «πέσουν» πάνω στις καμπύλες στάθμης (βλ. Σχήμα 2.2). Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του ορθογωνίου πίνακα O^1 και τις νέες συντεταγμένες $x'y'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

όπου $u_{x'} = 0$ στις νέες συντεταγμένες. Για $\theta = \pi/4$ έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y), \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (y - x). \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tilde{u}(x', y') := u(O^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix})$$

και με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \tilde{u}_{x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \tilde{u}_{y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \tilde{u}_{x'} \frac{\sqrt{2}}{2} - \tilde{u}_{y'} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_y &= \tilde{u}_{x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \tilde{u}_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \tilde{u}_{x'} \frac{\sqrt{2}}{2} + \tilde{u}_{y'} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x + u_y = \sqrt{2} \tilde{u}_{x'}.$$

Άρα από την (2.4) έχουμε ότι $\tilde{u}_{x'} = 0$, απ'όπου καταλήγουμε όπως και στην προηγούμενη μέθοδο στην σχέση

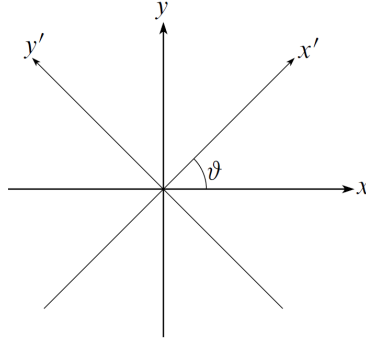
$$u(x, y) = f(y') \Rightarrow u(x, y) = f\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{για } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

όπου f αυθαίρετη C^1 συνάρτηση.

Γενικεύοντας για μια γραμμική ΜΔΕ α' τάξης της μορφής (2.1), θα χρησιμοποιήσουμε τις χαρακτηριστικές για να ορίσουμε τις νέες συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y). \end{aligned}$$

¹Ο O στρέφει ένα διάνυσμα (x, y) κατά την αρνητική φορά (φορά των δεικτών του ρολογιού) και το σύστημα των αξόνων κατά την θετική φορά.



Σχήμα 2.2: Περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία $\theta = \pi/4$ κατά τη θετική φορά [1].

Απαλείφουμε τώρα την παράμετρο s διαιρώντας τις διαφορικές εξισώσεις και έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad (2.5)$$

με λύσεις που δίνονται σε πεπλεγμένη (έμμεση) μορφή

$$\xi(x, y) = c, \quad (2.6)$$

όπου c σταθερά. Χρησιμοποιούμε τώρα ως συντεταγμένες δύο συστήματα καμπυλών, την οικογένεια λύσεων (2.6) και το ακόλουθο σύστημα καμπυλών

$$\eta(x, y) = c, \quad (2.7)$$

όπου c σταθερά. Για να είναι ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (2.8)$$

τοπικά αντιστρέψιμος, να επιτρέπει δηλαδή να εκφράσουμε τα x και y συναρτήσει των ξ και η , δηλαδή η (2.8) να γράφεται ισοδύναμα

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (2.9)$$

απαιτούμε

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (x, y) \in U. \quad (2.10)$$

Ορίζουμε επομένως την συνάρτηση \tilde{u} ως

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) =: \tilde{u}(\xi, \eta), \quad (2.11)$$

και υπολογίζουμε τις u_x, u_y εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \\ u_y = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην (2.1) έχουμε την διαφορική εξίσωση

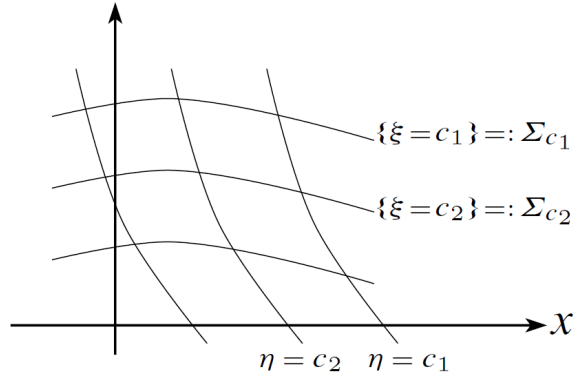
$$(a\xi_x + b\xi_y) \tilde{u}_\xi + (a\eta_x + b\eta_y) \tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d. \quad (2.12)$$

Κάθε σημείο $(x, y) \in U$ βρίσκεται σε μια καμπύλη στάθμης Σ_c της ξ , όπου $\Sigma_c := \{(x, y) \in U \mid \xi(x, y) = c\}$ για κατάλληλη τιμή της c , όπως μπορεί κανείς να δει στο Σχήμα 2.3. Επί της καμπύλης Σ_c , η y μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της x : $y = y(x)$. Επί της Σ_c έχουμε

$$0 = \frac{d}{dx} \xi(x, y(x)) = \xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} \stackrel{(2.5)}{=} \xi_x + \xi_y \frac{b}{a} \Rightarrow a\xi_x + b\xi_y = 0.$$

Από την τελευταία σχέση η (2.12) απλοποιείται σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς την η :

$$(a\eta_x + b\eta_y) \tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d. \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.3: Καμπύλες στάθμης των ξ και η [1].

Παράδειγμα 2.1. Έστω η ΜΔΕ

$$xyu_x + x^2u_y - yu = xy, \quad (x, y) \in U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}.$$

Θα λύσουμε την ΜΔΕ με την μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c,$$

επομένως $\xi(x, y) = (x^2 - y^2)/2$. Επιλέγουμε τώρα αυθαίρετα την $\eta(x, y) = x$ έτσι ώστε η οριζόνσια (2.10) (που ισούται με y) να είναι διάφορη του μηδενός στο χωρίο U . Από τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = (x^2 - y^2)/2, \\ \eta = \eta(x, y) = x, \end{cases}$$

παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) = \eta, \\ y = y(\xi, \eta) = \sqrt{\eta^2 - 2\xi}, \end{cases}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.12) έχουμε

$$\eta \tilde{u}_\eta - \tilde{u} = \eta.$$

Η τελευταία είναι μια γραμμική ΣΔΕ με λύση

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi)\eta + \eta \ln|\eta|,$$

όπου $f \in C^1$ (αυθαίρετη σταθερά ως προς η). Περνάμε στις (αρχικές) μεταβλητές x, y

$$u(x, y) = xf\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) + x \ln|x|.$$

Διαφορετική επιλογή της η : Έστω ότι επιλέγουμε την $\eta(x, y) := (x^2 + y^2)/2$. Έχουμε τότε

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) = \sqrt{\xi + \eta}, \\ y = y(\xi, \eta) = \sqrt{\eta - \xi}, \end{cases}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.12) έχουμε

$$2x^2y\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy \Rightarrow \tilde{u}_\eta - \frac{1}{2(\xi + \eta)}\tilde{u} = \frac{1}{2\sqrt{\xi + \eta}},$$

με γενική λύση

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = g(\xi)\sqrt{\xi + \eta} + \sqrt{\xi + \eta} \ln \sqrt{\xi + \eta},$$

όπου $g \in C^1$ αυθαίρετη. Περνάμε στις (αρχικές) μεταβλητές x, y

$$u(x, y) = |x|g\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) + |x|\ln|x|,$$

και η ορίζουσα (2.10) (που ισούται με $2xy$) είναι διάφορη του μηδενός στο χωρίο $U' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Στο χωρίο U' οι λύσεις που βρήκαμε με τις διαφορετικές επιλογές της η συμπίπτουν.

Παρατήρηση 2.2. Είναι πάγια τακτική να γράφουμε $u(\xi, \eta)$ αντί του $\tilde{u}(\xi, \eta)$.

Παράδειγμα 2.3. Έστω η ΜΔΕ

$$u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow y = 2x + c,$$

επομένως έχουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = y - 2x, \\ \eta = \eta(x, y) = x, \end{cases}$$

με αντίστροφο μετασχηματισμό (η ορίζουσα (2.10) είναι ίση με $-1 \neq 0$)

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) = \eta, \\ y = y(\xi, \eta) = \xi + 2\eta, \end{cases}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.12) έχουμε

$$u_\eta + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2 \Rightarrow u_\eta - \xi u = -5\xi\eta - 2\xi^2.$$

Λύνουμε την τελευταία ΣΔΕ χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{-\xi\eta}$

$$\frac{d}{d\eta}(ue^{-\xi\eta}) = (-5\xi\eta - 2\xi^2)e^{-\xi\eta},$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned} ue^{-\xi\eta} &= -5 \int \eta \xi e^{-\xi\eta} d\eta - 2\xi^2 \int \eta \xi e^{-\xi\eta} d\eta \\ &= 5 \left(\eta + \frac{1}{\xi} \right) e^{-\xi\eta} - 2\xi e^{-\xi\eta} + g(\xi) \Rightarrow \\ u &= 5 \left(\eta + \frac{1}{\xi} \right) - 2\xi + g(\xi) e^{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Περνάμε στις (αρχικές) μεταβλητές x, y

$$u(x, y) = 5 \left(x + \frac{1}{y - 2x} \right) - 2(y - 2x) + g(y - 2x) e^{(y - 2x)x},$$

όπου $g \in C^1$ αυθαίρετη.

Άσκηση 2.4. Λύστε την παρακάτω ΜΔΕ με τη μέθοδο της αλλαγής συντεταγμένων

$$x^2 u_x + y^2 u_y = 2xy.$$

2.1.3 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών

Η τρίτη μέθοδος κι αυτή που χρησιμοποιείται συνήθως για την επίλυση των ΜΔΕ είναι η μέθοδος των χαρακτηριστικών. Όπως αναφέραμε ήδη

Στόχος της μεθόδου αυτής είναι να κατασκευάσουμε καμπύλες $(x(s), y(s))$ τέτοιες ώστε η λύση u να «διαβάζει» τα αρχικά δεδομένα σε κάποιο σημείο του συνόλου Γ και να μας δίνει την τιμή της λύσης σε ένα σημείο της καμπύλης.²

Με άλλα λόγια, υποθέτοντας ότι u είναι μια λύση του προβλήματος, για δεδομένο $(x_0, y_0) \in U$ βρίσκουμε μια καμπύλη $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$, ώστε:

1. $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$
2. Η $z(s) = u(x(s), y(s))$ να ικανοποιεί μια ΣΔΕ
3. Η γ να συναντά το Γ

Η καμπύλη γ καλείται χαρακτηριστική της ΜΔΕ.

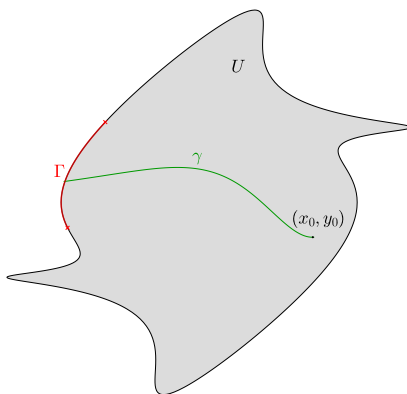
Ουσιαστικά, θέλουμε να αναγάγουμε ένα ΠΑΤ για μια ΜΔΕ της μορφής (2.1) σε ένα σύστημα ΣΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}x(s) &= a(x(s), y(s)), \\ \frac{d}{ds}y(s) &= b(x(s), y(s)), \\ \frac{d}{ds}z(s) &= \frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = a(x(s), y(s))u_x + b(x(s), y(s))u_y \\ &= d(x(s), y(s)) - c(x(s), y(s))z(s), \quad (x, y) \in U, \end{aligned} \tag{2.14}$$

Το σύστημα των δύο πρώτων διαφορικών εξισώσεων είναι κλειστό και μπορεί να επιλυθεί χωρίς την εμπλοκή της συνάρτησης z .

Ερώτημα: Έστω $(x_0, y_0) \in U$ δοθέν, και αρχικές τιμές $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Τέμνει η λύση $(x(s), y(s))$, για κάποιο s , το Γ ;

Στην απάντηση ουσιαστικό ρόλο παίζει η γεωμετρία του U καθώς και το διανυσματικό πεδίο $(a(x, y), b(x, y))$.



Σχήμα 2.4: Η χαρακτηριστική καμπύλη $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$ μιας ΜΔΕ σε ένα χωρίο U που συναντά το σύνολο Γ .

Παράδειγμα 2.5. Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & (x, y) \in U := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.15}$$

²Η γεωμετρία του Γ σε σχέση με το U και τη θέση του (x, y) παίζει σημαντικό ρόλο.

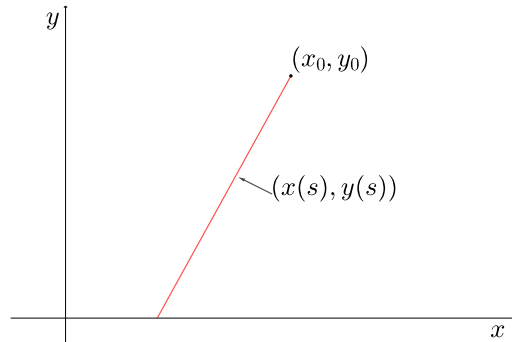
με $f : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R})$ δεδομένη συνάρτηση. Η (2.14) τότε γίνεται

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = 1, & x(0) = x_0, \\ \frac{dy}{ds} = 1, & y(0) = y_0, \\ \frac{dz}{ds} = 0, & z(0) = u(x_0, y_0), \end{cases}$$

απόπου έχουμε τις λύσεις

$$x(s) = s + x_0, \quad y(s) = s + y_0.$$

Επομένως, η χαρακτηριστική είναι μια ευθεία γραμμή (βλ. Σχήμα 2.5). Αν η χαρακτηριστική τέμνει τον άξονα των x για κάποιο \bar{s} τότε $y(\bar{s}) = 0 \Rightarrow \bar{s} = -y_0$, άρα $x(\bar{s}) = -y_0 + x_0$.



Σχήμα 2.5: Χαρακτηριστική ευθεία γραμμή του (2.15).

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος έχουμε ότι η z είναι σταθερή πάνω στην χαρακτηριστική καμπύλη, άρα από την παρατήρηση αυτή και από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε

$$\left. \begin{aligned} z(\bar{s}) &= z(0) = u(x_0, y_0) \\ z(\bar{s}) &= u(x(\bar{s}), 0) = f(x(\bar{s})) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(x_0, y_0) = f(x(\bar{s})) = f(x_0 - y_0).$$

Επομένως, η λύση u του προβλήματος (2.15) είναι

$$u(x, y) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Παράδειγμα 2.6. (Η εξίσωση μεταφοράς)

Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε το ΠΑΤ για την εξίσωση μεταφοράς

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in U := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.16)$$

με $f : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R})$ δεδομένη συνάρτηση. Η 2.14 τότε γίνεται

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = c, & x(0) = x_0, \\ \frac{dt}{ds} = 1, & y(0) = t_0, \\ \frac{dz}{ds} = 0, & z(0) = u(x_0, t_0), \end{cases}$$

απόπου έχουμε τις λύσεις

$$x(s) = cs + x_0, \quad t(s) = s + t_0,$$

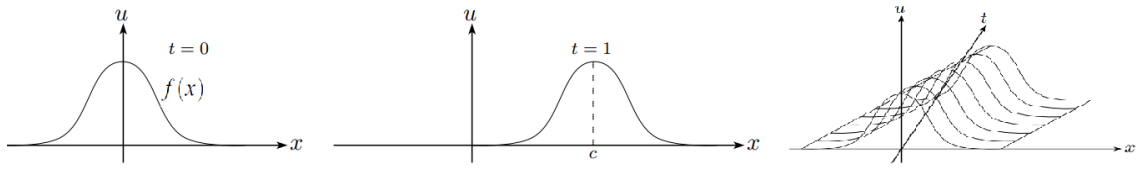
δηλαδή η χαρακτηριστική είναι μια ευθεία γραμμή στο επίπεδο xt με κλίση c , δηλαδή η ευθεία³

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0.$$

³Η οικογένεια των χαρακτηριστικών γραμμών $x - ct = \text{σταθερά}$ της εξίσωσης μεταφοράς αποτελείται από γραμμές παράλληλες μεταξύ τους και καθώς η σταθερά λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές $x \in \mathbb{R}, t > 0$, οι χαρακτηριστικές καλύπτουν όλο το U .

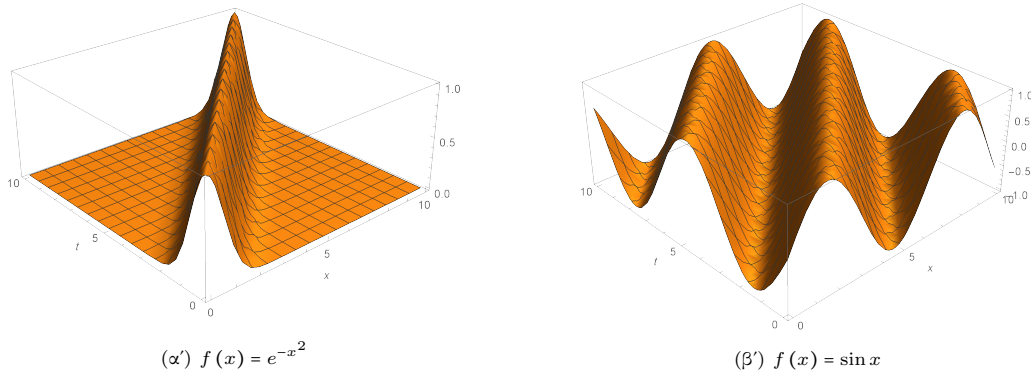
Έστω πάλι \bar{s} το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των x , τότε $t(\bar{s}) = 0 \Rightarrow \bar{s} = -t_0$, άρα $x(\bar{s}) = -ct_0 + x_0$. Επομένως, η λύση $u(x, t)$ του προβλήματος (2.16) (βλ. Σχήματα 2.6 και 2.7) είναι

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$



Σχήμα 2.6: Η λύση u του ΠΑΤ (2.16) είναι ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c διατηρώντας το σχήμα του. Το πρώτο στιγμιότυπο είναι για $t = 0$, το δεύτερο για $t = 1$ ενώ η τελευταία γραφική παράσταση μας δείχνει την εξέλιξη της λύσης σε διάφορες χρονικές στιγμές [1].

Παρατήρηση 2.7. Με αλλαγή μεταβλητών $\tilde{u}(x, t) := u(cx, t)$ η εξίσωση μεταφοράς $u_t + cu_x = 0$ ανάγεται στην απλούστερη μορφή $\tilde{u}_t + \tilde{u}_x = 0$.



Σχήμα 2.7: Η λύση u του ΠΑΤ (2.16) για $c = 1$ με αρχική τιμή $f(x)$. Για την επίλυση του ΠΑΤ χρησιμοποιήθηκε η Mathematica (How to | Solve a Partial Differential Equation) [16].

Παράδειγμα 2.8.

$$\begin{cases} u_x + u_t = u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

Η (2.14) τότε γίνεται

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 1, & x(0) &= x_0, \\ \frac{dt}{ds} &= 1, & t(0) &= t_0, \\ \frac{dz}{ds} &= z, & z(0) &= u(x_0, t_0), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = 1 \Rightarrow t - x = c, & t(x_0) &= t_0, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dx} = z \Rightarrow z(x) = ce^x, \end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η $t - x$ έχει σταθερή τιμή για όλα τα s , οπότε $t - x = t_0 - x_0$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\left. \begin{aligned} z(x_0 - t_0) &= u(x_0 - t_0, 0) = \cos(x_0 - t_0) \\ z(x_0 - t_0) &= ce^{x_0 - t_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = e^{t_0 - x_0} \cos(x_0 - t_0).$$

Έχουμε επομένως

$$z(x_0) = ce^{x_0} = e^{t_0 - x_0} \cos(x_0 - t_0) e^{x_0} = e^{t_0} \cos(x_0 - t_0).$$

Τελικά έχουμε

$$u(x_0, t_0) = e^{t_0} \cos(x_0 - t_0),$$

δηλαδή

$$u(x, t) = e^t \cos(x - t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Παρατήρηση 2.9. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με αναγωγή στην εξίσωση μεταφοράς:

$$w(x, t) := e^{-t}u(x, t).$$

Τότε

$$w_x + w_t = e^{-t}(u_x + u_t - u) = e^{-t}(u - u) = 0 \quad \text{και} \quad w(x, 0) = \cos x,$$

που όπως γνωρίζουμε έχει λύση $w(x, t) = \cos(x - t)$ κι έτσι

$$u(x, t) = e^t \cos(x - t).$$

Παράδειγμα 2.10. Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} xyu_x - x^2u_y - yu = xy, & \text{στο } U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{στο } \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

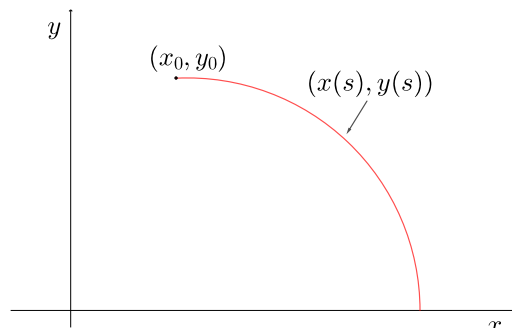
για δεδομένη ομαλή συνάρτηση $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Η (2.14) τότε γίνεται

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= xy, & x(0) &= x_0, \\ \frac{dy}{ds} &= -x^2, & y(0) &= y_0, \\ \frac{dz}{ds} &= y(x+z), & z(0) &= u(x_0, y_0), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = -x^2 \frac{1}{xy} = -\frac{x}{y}, & y(x_0) &= y_0, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dx} = y(x+z) \frac{1}{xy} = 1 + \frac{z}{x}, & z(x_0) &= u(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Από την πρώτη σχέση έχουμε τις λύσεις (σε πεπλεγμένη μορφή)

$$(x^2 + y^2)/2 = c.$$

Συμπεραίνουμε ότι η $x^2 + y^2$ έχει σταθερή τιμή για όλα τα s , οπότε $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Επομένως, απαλείφουμε την μεταβλητή s από την χαρακτηριστική καμπύλη και παραμετροποιούμε ως προς την x , δηλαδή η χαρακτηριστική καμπύλη $(x, y(x))$ με $x, y > 0$ τέτοια ώστε $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Η καμπύλη αυτή είναι ένα κυκλικό τόξο ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ που τέμνει το σύνορο Γ στο σημείο $P = (\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 0)$ (βλ. Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8: Η χαρακτηριστική του ΠΑΤ (2.17) είναι ένα τόξο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Από την δεύτερη σχέση στην (2.18) έχουμε τις λύσεις

$$z(x) = x \ln x + x \ln c, \quad (2.19)$$

όπου $c > 0$ σταθερά.⁴ Από τον ορισμό της $z(x) = u(x, y(x))$ και τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$u(x_0, y_0) = z(x_0) = x_0 \ln x_0 + x_0 \ln c \Rightarrow \ln c = \frac{1}{x_0} (u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0) \quad (2.20)$$

⁴Χρησιμοποιούμε συχνά το γράμμα c για να δηλώσουμε οποιαδήποτε σταθερά που μπορεί να υπολογιστεί ρητά σε όρους γνωστών ποσοτήτων. Η ακριβής τιμή που δηλώνεται από τη c μπορεί επομένως να αλλάξει από γραμμή σε γραμμή σε έναν δεδομένο υπολογισμό. Το μεγάλο πλεονέκτημα είναι ότι οι υπολογισμοί μας θα έχουν πιο απλή μορφή, από τη στιγμή που θα απορροφούν συνεχώς «περιττούς» παράγοντες στον όρο c .

και

$$z\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) = u\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 0\right) = f\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right). \quad (2.21)$$

Από τις σχέσεις (2.19) και (2.20) έχουμε

$$z(x) = x \ln x + x \frac{u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0}{x_0}.$$

και με την (2.21) έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \ln\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \frac{u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0}{x_0} \Rightarrow \\ u(x_0, y_0) &= x_0 \left[\ln x_0 - \ln\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) \right] + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} f\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right). \end{aligned}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ (2.17) είναι

$$u(x, y) = x \left[\ln x - \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right] + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Άσκηση 2.11. Λύστε το ακόλουθο ΠΑΤ με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

$$\begin{cases} xyu_x - x^2u_y - yu = xy, & \text{στο } U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x > 0\}, \\ u(x, x) = x, & \text{στο } \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}. \end{cases}$$

2.2 Σχεδόν γραμμικές (quasilinear) ΜΔΕ στις δύο διαστάσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις μη γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο και $u, a, b, d : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έχουμε την σχεδόν γραμμική (quasilinear) ΜΔΕ

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = d(x, y, u), \quad (x, y) \in U, \quad (2.22)$$

τότε αντίστοιχα με την περίπτωση των γραμμικών ΜΔΕ που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε τις χαρακτηριστικές εξισώσεις

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}x(s) = a(x(s), y(s), z(s)), \\ \frac{d}{ds}y(s) = b(x(s), y(s), z(s)), \end{cases}$$

όπου σε αντίθεση με την γραμμική περίπτωση το σύστημα δεν είναι κλειστό. Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\frac{d}{ds}z(s) = \frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = au_x + bu_y = d$$

δηλαδή

$$\frac{d}{ds}z(s) = d(x(s), y(s), z(s))$$

Έχουμε τότε

- $(x(s), y(s)) : \frac{dx}{ds} = a, \frac{dy}{ds} = b$ χαρακτηριστική καμπύλη στο xy -επίπεδο
- $(x(s), y(s), z(s)) : \frac{dx}{ds} = a, \frac{dy}{ds} = b, \frac{dz}{ds} = d$ χαρακτηριστική καμπύλη χώρου
- $(x, y, z) \mapsto \bar{v}(x, y, z) := (a(x, y, z), b(x, y, z), d(x, y, z))$ χαρακτηριστικό διανυσματικό πεδίο της (2.22)

Είναι προφανές ότι το \bar{v} εφάπτεται στην C (σε κάθε σημείο της) αν η C είναι χαρακτηριστική καμπύλη.

Θεώρημα 2.12. Έστω S λεία επιφάνεια, στον xyu -χώρο, που ορίζεται από την

$$u = z(x, y).$$

Η $u = z(x, y)$ είναι λύση της (2.22) αν και μόνο αν σε κάθε σημείο της S το \bar{v} εφάπτεται στην S .

Απόδειξη. Το κάθετο διάνυσμα στην S , σ'ένα αυθαίρετο σημείο της S , είναι

$$\bar{n} = (z_x, z_y, -1).$$

Αν το \bar{v} εφάπτεται στην S , τότε

$$(z_x, z_y, -1) \cdot (a, b, d) = 0,$$

δηλαδή

$$az_x + bz_y - d = 0,$$

άρα η $z(x, y)$ είναι λύση της (2.22).

Αντιστρόφως: Έστω $u = z(x, y)$ λύση της (2.22) και P ένα αυθαίρετο σημείο της S . Έχουμε

$$az_x + bz_y - d = 0, \quad \text{στο } P,$$

δηλαδή

$$(a, b, d) \perp (z_x, z_y, -1) \Rightarrow \bar{v} \perp \bar{n},$$

άρα το \bar{v} είναι στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P . □

Παρατηρήσεις 2.13. 1. Αν

$$a, b, d \in C^1(U \times \mathbb{R}) \quad \text{και} \quad ab \neq 0 \quad (2.23)$$

από την θεωρία των ΣΔΕ (Θ. Μοναδικότητας) έπεται ότι μια δεδομένη χαρακτηριστική της (2.22) είτε βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια λύσεων είτε έχει κενή τομή με την επιφάνεια λύσεων.

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι ισχύει η (2.23).

2. Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 2.12: Μια ομαλή λύση της (2.22) μπορεί να θεωρηθεί ως επιφάνεια αποτελούμενη από χαρακτηριστικές καμπύλες.

Παράδειγμα 2.14. Έστω το ΠΑΤ

$$\begin{cases} (y + 2xu)u_x - (x + 2yu)u_y = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), & \text{στο } U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ u(x, 0) = x, & \text{στο } \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}. \end{cases}$$

Το σύστημα χαρακτηριστικών είναι

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = y + 2xz, & x(0) = x_0, \\ \frac{dy}{ds} = -(x + 2yz), & y(0) = y_0, \\ \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), & z(0) = u(x_0, y_0). \end{cases}$$

Για να λύσουμε το σύστημα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί y και την δεύτερη επί x , και προσθέτοντας τες έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds}y + \frac{dy}{ds}x &= (y + 2xz)y - (x + 2yz)x = y^2 - x^2 = -2\frac{dz}{ds} \Rightarrow \\ \frac{d}{ds}(xy) &= -2\frac{dz}{ds} \Rightarrow x(s)y(s) = -2z(s) + c_1, \end{aligned}$$

και με τις αρχικές συνθήκες έχουμε $x_0y_0 = -2u(x_0, y_0) + c_1$, απ'όπου παίρνουμε ότι $c_1 = 2u(x_0, y_0) + x_0y_0$. Καταλήγουμε στη σχέση

$$x(s)y(s) + 2z(s) = 2u(x_0, y_0) + x_0y_0. \quad (2.24)$$

Εντελώς ανάλογα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί x και τη δεύτερη επί y , και προσθέτουμε αυτές έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds}x + \frac{dy}{ds}y &= (y + 2xz)x - (x + 2yz)y = 2z(x^2 - y^2) = 4z \frac{dz}{ds} = \frac{d}{ds}(2z^2) \Rightarrow \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) &= \frac{d}{ds}(2z^2) \Rightarrow [x(s)]^2 + [y(s)]^2 = 4[z(s)]^2 + c_2, \end{aligned}$$

και με τις αρχικές συνθήκες έχουμε $x_0^2 + y_0^2 = 4[u(x_0, y_0)]^2 + c_2$, απ' όπου παίρνουμε ότι $c_2 = x_0^2 + y_0^2 - 4[u(x_0, y_0)]^2$. Καταλήγουμε στη σχέση

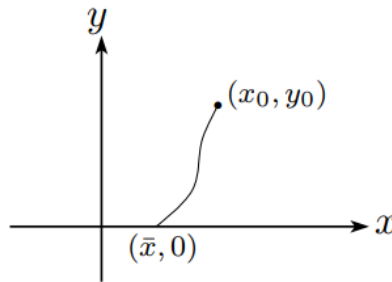
$$[x(s)]^2 + [y(s)]^2 = 4[z(s)]^2 + x_0^2 + y_0^2 - 4[u(x_0, y_0)]^2. \quad (2.25)$$

Θέτουμε $y = 0$ για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής $(\bar{x}, 0)$ της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το (x_0, y_0) με τον x -άξονα (βλ. Σχήμα 2.9). Από την αρχική συνθήκη γνωρίζουμε ότι ισχύει $u(x, 0) = x$, άρα αφού $z(x) = u(x, y(x))$ όταν $y = 0$ έχουμε $z = \bar{x}$, και η (2.25) γίνεται

$$\bar{x}^2 = 4\bar{x}^2 + x_0^2 + y_0^2 - 4[u(x_0, y_0)]^2 \Rightarrow 3\bar{x}^2 + x_0^2 + y_0^2 - 4[u(x_0, y_0)]^2 = 0.$$

Ομοίως για την (2.24)

$$2\bar{x} = 2u(x_0, y_0) + x_0 y_0.$$



Σχήμα 2.9: Το σημείο τομής $(\bar{x}, 0)$ της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το (x_0, y_0) με τον x -άξονα [1].

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε

$$3x_0 y_0 u(x_0, y_0) + \frac{3}{4}x_0^2 y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - [u(x_0, y_0)]^2 = 0,$$

δηλαδή

$$[u(x, y)]^2 - 3xyu(x, y) - \left(x^2 + y^2 + \frac{3}{4}x^2 y^2 \right) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0,$$

που είναι η ζητούμενη λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

Εδώ μπορούμε να λύσουμε το τριώνυμο ως προς το $u(x, y)$ και να πάρουμε την λύση

$$u_{\pm}(x, y) = \frac{3}{2}xy \pm \sqrt{3x^2 y^2 + x^2 + y^2}$$

και για να ικανοποιείται η $u(x, 0) = x$, $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}xy + \sqrt{3x^2 y^2 + x^2 + y^2}, & x \geq 0 \\ \frac{3}{2}xy - \sqrt{3x^2 y^2 + x^2 + y^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} u(0^+, y) &= y, \quad \text{ενώ} \\ u(0^-, y) &= -y. \end{aligned}$$

Άρα η $u(x, y)$ δεν είναι συνεχής για $y > 0$, οπότε δεν μπορεί να είναι λύση του δεδομένου ΠΑΤ.

Παρατήρηση 2.15. Ακόμη κι αν η ΜΔΕ είναι γραμμική, οι χαρακτηριστικές ΣΔΕ είναι γενικώς μη γραμμικές. Συνεπώς έχουμε (Θεώρημα Picard-Lindelöf ή Θεώρημα Peano για τις ΣΔΕ) μόνο τοπική ύπαρξη λύσης.

Παράδειγμα 2.16.

$$\begin{cases} xuu_x + tuu_t = -xt, & \text{στο } U := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}, \\ u = 5, & \text{στο } \Gamma := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, t) = (p(\tau), q(\tau)) = \left(\tau, \frac{1}{\tau}\right), \tau > 0\}. \end{cases}$$

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= xz, & x(0) &= x_0, \\ \frac{dt}{ds} &= tz, & t(0) &= t_0, \\ \frac{dz}{ds} &= -xt, & z(0) &= u(x_0, t_0). \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες σχέσεις έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \Rightarrow \ln x = \ln t + \ln \phi(\tau),$$

όπου $\phi(\tau)$ αυθαίρετη «σταθερά» ολοκλήρωσης ως προς s . Από τη συνθήκη $x = \tau, t = \frac{1}{\tau}$ επί της Γ μπορούμε να προσδιορίσουμε την $\phi(\tau) (= \tau^2)$ και βρίσκουμε $x = \tau^2 t$. Έτσι

$$\frac{dz}{ds} = -xt = -\tau^2 t^2.$$

Έξαλλου

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} = -xt &\Rightarrow z \frac{dz}{ds} = -zxt, \\ \frac{dt}{ds} = tz &\Rightarrow -x \frac{dt}{ds} = -zxt. \end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε

$$z \frac{dz}{ds} = -x \frac{dt}{ds} = -\tau^2 t \frac{dt}{ds}$$

και έτσι (εφόσον $x = \tau^2 t$)

$$z^2 + \tau^2 t^2 = \psi(\tau),$$

όπου $\psi(\tau)$ αυθαίρετη «σταθερά» ολοκλήρωσης ως προς s . Από τη συνθήκη $u = 5, t = \frac{1}{\tau}$ επί της Γ , βρίσκουμε

$$\psi(\tau) = 26$$

και άρα η λύση δίνεται ως

$$u^2 + \tau^2 t^2 = 26.$$

Εφόσον $x = \tau^2 t$, παίρνουμε $u^2 + xt = 26$, άρα

$$u = \sqrt{26 - xt}, \quad xt \leq 26.$$

(Η περίπτωση $u = -\sqrt{26 - xt}$ απορρίπτεται λόγω των αρχικών συνθηκών.)

Άσκηση 2.17. Λύστε το ακόλουθο ΠΑΤ με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

$$\begin{cases} \ln(x+u)u_x + u_y = -1, & \text{στο } U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{στο } \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}. \end{cases}$$

2.2.1 Πρόβλημα αρχικών τιμών ή πρόβλημα (του) Cauchy

Έστω $\Gamma = \{(x, t) \mid x = f(s), t = g(s), s \in (\sigma_1, \sigma_2)\}$ δοθείσα καμπύλη στον \mathbb{R}^2 , με $f, g \in C^1$ και $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}$, με $U \subset \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε $a, b, d \in C^1(\tilde{U})$ με $ab \neq 0$.

Έστω $h \in C^1(\mathbb{R})$. Έχουμε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} a(x, t, u)u_x + b(x, t, u)u_t = d(x, t, u), & \text{στο } \tilde{U} \\ u = h, & \text{επί της } \Gamma. \end{cases} \quad (2.26)$$

Αν $f(s) = s, g(s) = 0, \sigma_1 = -\infty, \sigma_2 = +\infty$ η (2.27) γίνεται η συνήθης αρχική συνθήκη: $u(x, 0) = h(x), x \in \mathbb{R}$.

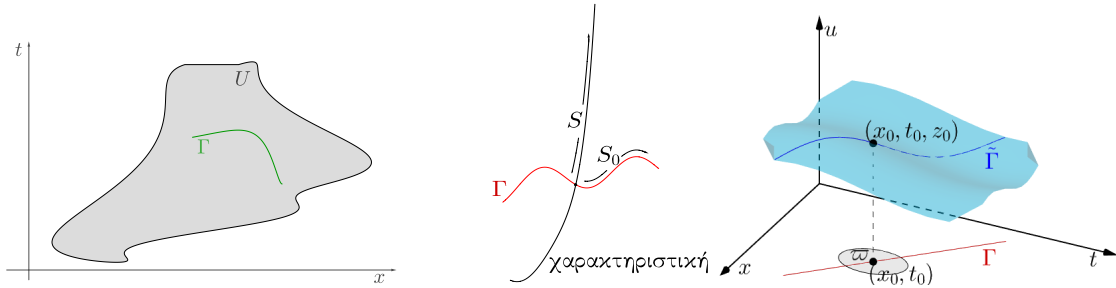
Θεωρούμε τη λύση $u(x, t)$ της (2.26) σαν μια επιφάνεια. Η γεωμετρική διατύπωση του προβλήματος (2.26)-(2.27) είναι:

Να βρεθεί μια επιφάνεια που λύνει την (2.26) και περιέχει τη δοθείσα καμπύλη⁵ $\tilde{\Gamma}$ στον \mathbb{R}^3 , η οποία περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$x = f(s), \quad t = g(s), \quad z = u(x(s), t(s)) = h(s), \quad s \in (\sigma_1, \sigma_2)$$

με

$$x_0 = f(s_0), \quad t_0 = g(s_0), \quad z_0 = h(s_0), \quad \text{για } s_0 \in (\sigma_1, \sigma_2) \text{ συγκεκριμένο.}$$



Σχήμα 2.10

Το Θεώρημα 2.12 παίρνει την ακόλουθη μορφή για το ΠΑΤ

Θεώρημα 2.18. Έστω $a, b, d \in C^1(\tilde{U}), \tilde{U} \subset \mathbb{R}^3: (x_0, t_0, z_0) \in \tilde{U}$ και $f, g, h \in C^1$.

Έστω

$$\begin{vmatrix} f'(s) & g'(s) \\ a(f(s), g(s), h(s)) & b(f(s), g(s), h(s)) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in (\sigma_1, \sigma_2) \quad (2.28)$$

(δηλαδή $ag'(s) \neq bf'(s)$ επί της Γ).

Τότε σε μια περιοχή ω του (x_0, t_0) υπάρχει μοναδική (κλασική) λύση της (2.26) που ικανοποιεί την (2.27) σε κάθε σημείο της Γ που περιέχεται στην ω .

Απόδειξη. (Βασική ιδέα) Έστω $x = x(s, s_0), t = t(s, s_0), z = z(s, s_0)$ η λύση του παρακάτω συστήματος. Όπως πάντα $z = z(s, s_0) = u(x(s, s_0), t(s, s_0))$,

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a, & x(0, s_0) = f(s_0), \\ \frac{dy}{ds} = b, & y(0, s_0) = g(s_0), \\ \frac{dz}{ds} = d, & z(0, s_0) = h(s_0), \end{cases}$$

Αν μπορούμε να γράψουμε (αντίστροφη των $x = x(s, s_0), t = t(s, s_0)$)

$$s = s(x, t), \quad s_0 = s_0(x, t)$$

τότε η

$$u(s, s_0) = u(s(x, t), s_0(x, t))$$

⁵Η $\tilde{\Gamma}$ είναι η προβολή της $\tilde{\Gamma}$ στο επίπεδο xt .

θα δίνει τη λύση του ΠΑΤ (2.26)-(2.27).

Ικανή συνθήκη επιλυσιμότητας των $x = x(s, s_0)$, $t = t(s, s_0)$ είναι να μην μηδενίζεται επί της Γ η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s_0} \\ \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial s_0} \end{vmatrix}.$$

Έχουμε: $\frac{\partial x}{\partial s} = a$, $\frac{\partial t}{\partial s} = b$, $\frac{\partial x}{\partial s_0} = f'$, $\frac{\partial t}{\partial s_0} = g'$, οπότε

$$J = ag' - bf'$$

και λόγω της (2.28) $J \neq 0$, $\forall s \in (\sigma_1, \sigma_2)$, δηλαδή επί της Γ .

Πόρισμα 2.19. Το «κλασικό» ΠΑΤ έχει μοναδική κλασική λύση.

$$\begin{cases} a(x, t, u) u_x + b(x, t, u) u_t = d(x, t, u), & x \in \mathbb{R}, t > 0, a, b, d \in C^1, ab \neq 0 \\ u = h, & x \in \mathbb{R}, h \in C^1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Εδώ $f(s) = s$, $g(s) = 0$, $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = +\infty$, $\Gamma = \{(x, t) \mid t = 0\}$ (ο άξονας των x), τότε η σχέση (2.28) γίνεται

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b \neq 0, \text{ εξ υποθέσεως.} \quad (2.31)$$

Παρατήρηση 2.20. 1. Η μέθοδος αυτή είναι η μέθοδος των χαρακτηριστικών (ή μέθοδος του Lagrange). Ουσιαστικά λέει ότι από κάθε σημείο μιας μη χαρακτηριστικής αρχικής καμπύλης Γ διέρχεται μια χαρακτηριστική καμπύλη της (2.26), ούτως ώστε παράγεται μια επιφάνεια λύσεων.

2. Τοπικό αποτέλεσμα.

3. Σε ειδικές περιπτώσεις (π.χ. ΜΔΕ με σταθερούς συντελεστές), η μέθοδος των χαρακτηριστικών μπορεί να εξασφαλίσει την ύπαρξη (και μοναδικότητα) ολική λύσης.

4. Μη Ύπαρξη/Μη Μοναδικότητα Λύσεων

Θεώρημα 2.21. (Μη Ύπαρξη Λύσεων)

$$\frac{f'(s)}{a(f(s), g(s), h(s))} = \frac{g'(s)}{b(f(s), g(s), h(s))} \neq \frac{h'(s)}{d(f(s), g(s), h(s))} \quad (2.32)$$

Θεώρημα 2.22. (Ύπαρξη Άπειρου Πλήθους Λύσεων)

$$\frac{f'(s)}{a(f(s), g(s), h(s))} = \frac{g'(s)}{b(f(s), g(s), h(s))} = \frac{h'(s)}{d(f(s), g(s), h(s))}, \forall s \in (\sigma_1, \sigma_2). \quad (2.33)$$

□

Παράδειγμα 2.23. Έστω η εξίσωση

$$u_x = 1, \quad (2.34)$$

τότε η χαρακτηριστική καμπύλη της εξίσωσης είναι $x = t + k$, k σταθερά. Ας δούμε τρεις περιπτώσεις αρχικών δεδομένων

1. $u(0, t) = t^2$

Έχουμε τότε

$$f(s) = 0, \quad g(s) = s, \quad h(s) = s^2.$$

Έχουμε τον μετασχηματισμό

$$x = s, \quad t = s_0, \quad z = s + s_0^2.$$

Τότε $J = 1 \neq 0$, άρα το ΠΑΤ έχει μοναδική ολική λύση

$$u(x, t) = x + t^2$$

2. $u(x, 0) = x^2$

Έχουμε τότε

$$f(s) = s, \quad g(s) = 0, \quad h(s) = s^2.$$

Έχουμε τον μετασχηματισμό

$$x = s + s_0, \quad t = 0, \quad z = s + s_0^2.$$

Τότε $J = 0$ με διαφορετικούς συντελεστές αναλογίας (βλ. (2.32)), άρα το ΠΑΤ δεν έχει λύση.

3. $u(x, 0) = x$

Έχουμε τότε

$$f(s) = s, \quad g(s) = 0, \quad h(s) = s.$$

Έχουμε τον μετασχηματισμό

$$x = s + s_0, \quad t = 0, \quad z = s + s_0.$$

Τότε $J = 0$ με συντελεστή αναλογίας $\mu = 1$ (βλ. (2.33)), άρα το ΠΑΤ έχει άπειρο πλήθος λύσεων

$$u(x, t) = x + p(t), \quad p \in C^1 \quad \mu\epsilon \quad p(0) = 0.$$

Παράδειγμα 2.24. Έστω το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = -2x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

έχουμε τότε

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = z, & x(\rho, 0) = \rho \Rightarrow \frac{dx}{ds} = -2\rho e^{-s}, \quad x(\rho, 0) = \rho \Rightarrow x(\rho, s) = 2\rho e^{-s} - \rho, \\ \frac{dt}{ds} = 1, & t(\rho, 0) = 0 \Rightarrow t(\rho, s) = s, \\ \frac{dz}{ds} = -z, & z(\rho, 0) = -2\rho \Rightarrow z(\rho, s) = -2\rho e^{-s}, \end{cases}$$

άρα έχουμε τον μετασχηματισμό

$$\rho = -(x + z), \quad s = t,$$

απόπου παίρνουμε

$$z(x, t) = z(\rho(x, t), s(x, t)) = -2(-(x + z))e^{-t} \Rightarrow z = 2(x + z)e^{-t} \Rightarrow z = \frac{2x}{e^t - 2},$$

δηλαδή η λύση του ΠΑΤ είναι

$$u = \frac{2x}{e^t - 2}, \quad \text{για } t \in [0, \ln 2).$$

2.3 Ερμηνεία προέλευσης ΜΔΕ: Νόμοι διατήρησης

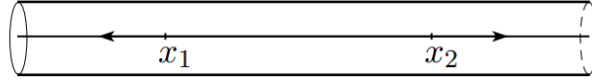
Πολλές θεμελιώδεις εξισώσεις των φυσικών επιστημών προέρχονται από νόμους διατήρησης. Για παράδειγμα εξισώσεις που εκφράζουν την διατήρηση του ισοζυγίου (π.χ. διατήρηση ενέργειας/θερμότητας) μιας ποσότητας καθ' όλη τη διάρκεια μιας διαδικασίας. Ένα άλλο παράδειγμα στην οικολογία είναι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ενός συγκεκριμένου είδους ζώων σε κάποιον ορισμένο χώρο, ο οποίος πρέπει να ισούται με τον ρυθμό των γεννήσεων μείον το ρυθμό των θανάτων συν/μείον τον ρυθμό μετανάστευσης προς/από το χώρο αυτό. Οι νόμοι διατήρησης εκφράζονται συνήθως από διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τον τρόπο εξέλιξης των φαινομένων αυτών στον χρόνο (ΣΔΕ) ή/και τον χώρο (ΜΔΕ).

Η εξίσωση της συνέχειας

Θεωρούμε ένα ρευστό σε έναν λεπτό κυλινδρικό σωλήνα (βλ. Σχήμα 2.11) με πυκνότητα⁶ $\rho(x, t)$, στο σημείο x , τη χρονική στιγμή t (π.χ. μελάνι σε νερό), με $\rho: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ομαλή συνάρτηση. Τότε η συνολική μάζα $M(t)$ που περιέχεται κατά τη χρονική στιγμή t σε ένα σταθεροποιημένο διάστημα $[x_1, x_2]$ είναι

$$M(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx. \quad (2.35)$$

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή της μάζας στο $[x_1, x_2]$ οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του ρευστού,



Σχήμα 2.11: Ρευστό σε κυλινδρικό, λεπτό σωλήνα [1].

επομένως μπορούμε να έχουμε τόσο εκροή από, όσο και εισροή προς το $[x_1, x_2]$ μέσω των άκρων x_1 και x_2 . Έστω $q(x, t)$ η ροή της μάζας που διέρχεται δια μέσου του x , από αριστερά προς τα δεξιά, ανά μονάδα χρόνου, τη χρονική στιγμή t . Όταν $q < 0$ η κίνηση της μάζας είναι από δεξιά προς τα αριστερά. Τότε έχουμε την ακόλουθη **ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας (mass conservation law)**⁷:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = -[q(x_2, t)(+1) + q(x_1, t)(-1)]. \quad (2.36)$$

Για να κατανοήσουμε τα πρόσημα της εξίσωσης, υποθέτουμε ότι $q(x_2, t) > 0$ και $q(x_1, t) < 0$, δηλαδή ότι η μάζα εκρέει και από τα δύο άκρα του $[x_1, x_2]$. Σε αυτή την περίπτωση η μεταβολή της μάζας που δίνεται στο αριστερό μέλος της (2.36) θα πρέπει να είναι αρνητική.

Συνθήκες ομαλότητας: Έστω ότι $\rho \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, $q \in C^1(\mathbb{R}) \times C(0, \infty)$. Τότε μπορούμε από την (2.36) να οδηγηθούμε σε μια «τοπική» διαφορική μορφή. Από τον Απειροστικό Λογισμό ξέρουμε ότι η παραγωγήιση εναλλάσσεται με την ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της (2.36)

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) dx,$$

και από το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho_t(\tilde{x}(t), t)(x_2 - x_1),$$

για κάποιο $\tilde{x}(t) \in (x_1, x_2)$. Άρα η (2.36) γίνεται

$$\rho_t(\tilde{x}(t), t) = -\frac{q(x_2, t) - q(x_1, t)}{x_2 - x_1} \quad (2.37)$$

και αφήνοντας τα x_1, x_2 να τείνουν συγχρόνως σε κάποιο x καταλήγουμε στην **εξίσωση συνέχειας**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.38)$$

που αποτελεί διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας σε διαφορική μορφή.

Παρατήρηση 2.25. Η διατηρητέα ποσότητα δεν είναι αναγκαστικά η μάζα. Μπορεί να είναι π.χ. η ορμή, οπότε ο νόμος διατήρησης της ορμής είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.39)$$

όπου $u(x, t)$ η ταχύτητα του ρευστού.

⁶ $\rho = \frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}} = ML^{-3}$

⁷ $q = \frac{\text{μάζα/διατομή}}{\text{μονάδα χρόνου}} = ML^{-2}T^{-1}$.

Καταστατική σχέση (σχέση μεταξύ q και ρ)

Παραδείγματα 2.26. 1. $q = \Phi(\rho)$ Αφού

$$\frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \Phi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

και αν $\phi(\rho) = \Phi'(\rho)$, παίρνουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \phi(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2.40)$$

Ειδικότερα:

- Αν $q = \frac{1}{2} \rho^2$ (στην περίπτωση ροής αερίου), τότε καταλήγουμε στην εξίσωση του Burgers χωρίς ιξώδες

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

- Αν η σχέση $q = \Phi(\rho)$ είναι γραμμική, τότε $\phi(\rho) = c$ (σταθερή) και καταλήγουμε στην εξίσωση μεταφοράς

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

2. 1ος νόμος του Fick⁸: Αναμένουμε μετακίνηση (διάχυση) μάζας από περιοχές υψηλής σε περιοχές χαμηλής πυκνότητας.

$$q(x, t) = -c\rho_x(x, t), \quad \text{με } c > 0 \text{ σταθερά.}$$

Τότε παίρνουμε την εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Παράδειγμα 2.27. (Ροή αγωγού-Πλημμύρα) Θωρούμε ανοικτό αγωγό ύδατος ορθογώνιας διατομής πλάτους L με σταθερή πυκνότητα νερού ρ_0 . Έστω $h(x, t)$ και $q(x, t)$ το ύψος και η ροή του νερού, αντίστοιχα, στη θέση x τη στιγμή t (βλ. Σχήμα 2.12). Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης τότε είναι

$$\frac{d}{dt} \left[\rho_0 L \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx \right] = q(x_1, t) - q(x_2, t),$$

και η αντίστοιχη διαφορική μορφή είναι

$$\rho_0 L h_t + q_x = 0.$$

Αν η ροή q εξαρτάται μόνο από το ύψος h τότε έχουμε την καταστατική εξίσωση

$$q = f(h),$$

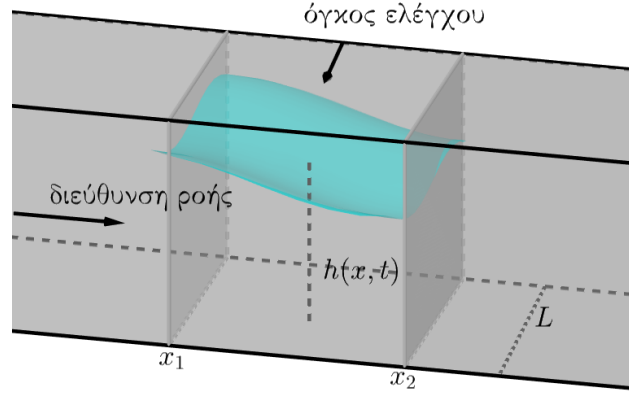
απ' όπου έχουμε την εξίσωση συνέχειας

$$h_t + \frac{f'(h)}{\rho_0 L} h_x = 0.$$

Καθορίζοντας μέσω μετρήσεων τη συνάρτηση f μπορούμε να λύσουμε την τελευταία εξίσωση και να πάρουμε το ύψος h του νερού σε κάθε θέση του αγωγού κάθε χρονική στιγμή ώστε να γνωρίζουμε αν θα πλημμυρίσει ο αγωγός. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι ένα τεχνολογικό πρόβλημα σχεδιασμού, όπου για δοσμένες συνθήκες ροής θέλουμε να κατασκευάσουμε αγωγό ελάχιστου ύψους (άρα και κόστους) για τον οποίο είμαστε βέβαιοι ότι δεν θα πλημμυρίσει ποτέ και πουθενά. Το ύψος ενός τέτοιου αγωγού δεν πρέπει να ξεπερνάει την τιμή

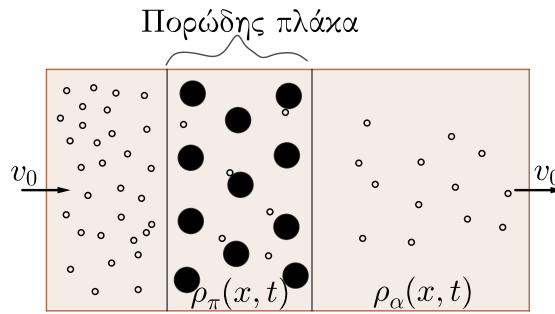
$$h_0 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t > 0}} h(x, t).$$

⁸Συχνά καλείται και νόμος του Fourier αφού ο Fourier πρώτος διατύπωσε ανάλογη σχέση για την μεταφορά της θερμότητας. Ανάλογες σχέσεις που ανακαλύφθηκαν την ίδια εποχή από άλλους επιστήμονες είναι επίσης ο νόμος του Darcy για την υδραυλική ροή και ο νόμος του Ohm για την μεταφορά φορτίου.



Σχήμα 2.12: Ροή σε ανοικτό ορθογώνιο αγωγό.

Παράδειγμα 2.28. (Ροή διαμέσου πορώδους πλάκας) Σε πολλά τεχνολογικά προβλήματα ένα ρευστό που μεταφέρει σωματίδια κάποιου υλικού διέρχεται μέσα από μία στερεή πορώδη πλάκα⁹ (βλ. Σχήμα 2.13). Ένα μέρος των σωματιδίων εναποτίθεται πάνω στην πλάκα ενώ τα υπόλοιπα διέρχονται ανενόχλητα. Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε σταθερή την ταχύτητα του ρευστού και ίση με την ταχύτητα των αιωρούμενων σωματιδίων, v_0 . Έστω $\rho_\alpha(x, t)$ η πυκνότητα του υλικού των αιωρούμενων σωματιδίων μέσα στο ρευστό, και $\rho_\pi(x, t)$ η πυκνότητα του υλικού των αιωρούμενων σωματιδίων που παγιδεύτηκε στην πορώδη πλάκα. Έστω $q(x, t)$ η ροή του υλικού των σωματιδίων διαμέσου μιας



Σχήμα 2.13: Ροή σωματιδίων μέσω πορώδους πλάκας.

διατομής στην θέση x , τη χρονική στιγμή t . Τότε

$$q(x, t) = \rho_\alpha(x, t) v_0,$$

και η εξίσωση συνέχειας (2.38) γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha + \rho_\pi) + v_0 \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (2.41)$$

όπου ο δεύτερος όρος περιγράφει τη μεταβολή της ροής q_x . Είναι γνωστό από πειράματα ότι για μικρές ταχύτητες v_0 η πυκνότητα των σωματιδίων που παγιδεύονται στην πλάκα είναι συνάρτηση της πυκνότητας των αιωρούμενων σωματιδίων, δηλαδή $\rho_\pi = f(\rho_\alpha)$, με $f'(\rho_\alpha) \geq 0$. Άρα

$$(\rho_\pi)_t = f'(\rho_\alpha) (\rho_\alpha)_t,$$

απόπου η (2.41) γράφεται

$$(\rho_\alpha)_t + c(\rho_\alpha) (\rho_\alpha)_x = 0,$$

⁹Τα προβλήματα ροής διαμέσου πορώδους μέσου (porous medium) αποτελούν κλασικά προβλήματα της ρευστομηχανικής. Κλασικά παραδείγματα είναι τα φίλτρα αίματος και βλαστοκυττάρων, τα φίλτρα αέρα κ.τ.λ. Βασικές ΜΔΕ της δυναμικής των ρευστών είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes.

με $c(\rho_\alpha) = \frac{v_0}{1 + f'(\rho_\alpha)}$. Καθορίζοντας πειραματικά την εξάρτηση του ρ_π από το ρ_α θα βρούμε την συνάρτηση f , μπορούμε τότε να λύσουμε την τελευταία ΜΔΕ και να πάρουμε την πυκνότητα των αιωρούμενων σωματιδίων για κάθε x και για κάθε t ως συνάρτηση της ταχύτητας ροής v_0 .

Παράδειγμα 2.29. (Διάβρωση βουνών) Έστω $h(x, t)$ το υψόμετρο της θέσης x από την επιφάνεια της θάλασσας την χρονική στιγμή x (βλ. Σχήμα 2.14). Λόγω βαρύτητας οι πλαγιές με μεγάλη κλίση επιδέχονται μεγαλύτερη διάβρωση, δηλαδή ο ρυθμός μείωσης του ύψους είναι συνάρτηση της κλίσης στο αντίστοιχο σημείο

$$h_t = -f(h_x), \quad f > 0. \quad (2.42)$$

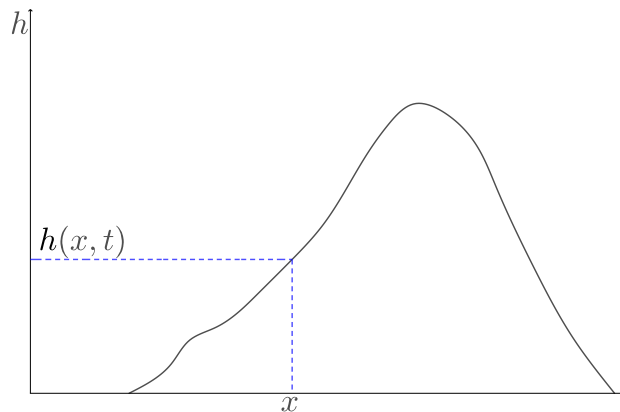
Το αρνητικό πρόσημο στην (2.42) δηλώνει ότι πρόκειται για διάβρωση, που αντιστοιχεί σε μείωση ύψους. Παραγωγίζοντας την (2.42) ως προς x έχουμε

$$h_{xt} = -f'(h_x) h_{xx},$$

και θέτοντας $s(x, t) = h_x(x, t)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$s_t + f'(s) s_x = 0.$$

Με αρχικά δεδομένα την κατανομή του ύψους του βουνού κάποια χρονική στιγμή μπορούμε να λύσουμε την τελευταία εξίσωση και να βρούμε την συνάρτηση $s(x, t)$, η οποία μας δίνει την κατανομή των κλίσεων του βουνού στα διάφορα σημεία του για κάθε χρονική στιγμή. Από την s μπορούμε να υπολογίσουμε την h και να λύσουμε αυτό το γεωλογικό πρόβλημα.



Σχήμα 2.14: Κατανομή του βουνού τη χρονική στιγμή t .

2.4 Συνέπειες μη γραμμικότητας: κρουστικά κύματα

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις συνέπειες της μη γραμμικότητας, εστιάζοντας στον σχηματισμό κρουστικών κυμάτων (*shock waves*). Θεωρούμε την εξίσωση του Burgers χωρίς ιξώδες ή εξίσωση του Hopf,¹⁰ δηλαδή

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.43)$$

Για να καταλάβουμε την φυσική σημασία της εξίσωσης αυτής θεωρούμε ένα μονοδιάστατο μέσο το οποίο μοντελοποιούμε με το πραγματικό άξονα. Η $u(x, t)$ τότε δίνει την ταχύτητα ενός σωματιδίου στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

και παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = uu_x + u_t \stackrel{(2.43)}{=} 0.$$

¹⁰Γενικευμένη εξίσωση του Burgers για $a(u) = u$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση είναι μηδενική, άρα η ταχύτητα του σωματιδίου $x(t)$ είναι σταθερή και έτσι σωματίδια που αρχικά κινούνται ταχύτερα από κάποια άλλα εξακολουθούν να κινούνται με υψηλή ταχύτητα με αποτέλεσμα να φτάνουν τα άλλα που κινούνται και αυτά με σταθερή ταχύτητα, αλλά βραδύτερα από τα πρώτα. Αναπόφευκτα θα έχουμε σύγκρουση σωματιδίων, δηλαδή θα δημιουργηθούν κρουστικά κύματα (*shock waves*).

Παρατήρηση 2.30. Η εξίσωση που μελέτησε ο Burgers είναι

$$u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}, \quad (2.44)$$

που συχνά καλείται εξίσωση του Burgers με ιξώδες (*viscous Burgers' equation*).

Θεωρούμε τώρα την γενικευμένη εξίσωση του Burgers¹¹ και το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & \text{στο } U := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{στο } \Gamma := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = 0\}, \end{cases} \quad (2.45)$$

όπου $a \in C^1(\mathbb{R})$, $a' > 0$, και δοθείσα $f \in C^1(\mathbb{R})$ με $f' > 0$ (f γνησίως αύξουσα).

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών με $t = t(s)$, $x = x(s)$ και $z = u(x(s), t(s))$ μας δίνει

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dt}{ds} = 1, \quad t(0) = t_0, \\ \frac{dx}{ds} = a(z), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{dz}{ds} = 0, \quad z(0) = u(x_0, t_0), \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t(s) = s + t_0, \\ x(s) = a(u(x_0, t_0))s + x_0, \\ z(s) = u(x_0, t_0), \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x(t) = a(u(x_0, t_0))(t - t_0) + x_0, \quad (2.46\alpha')$$

$$z(t) = u(x(t), t), \quad (2.46\beta')$$

άρα οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες (βλ. Σχήμα 2.15). Έστω $(\bar{x}, 0)$ το σημείο τομής της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το σημείο (x_0, t_0) με τον άξονα των x , επιλέγοντας $t = 0$ στην (2.46α') έχουμε

$$\bar{x} = -a(u(x_0, t_0))t_0 + x_0$$

και αφού $z(t) = u(x(t), t)$, παίρνουμε

$$z(0) = u(x(0), 0) = u(\bar{x}, 0) = f(\bar{x})$$

και έτσι

$$u(x_0, t_0) = f(-a(u(x_0, t_0))t_0 + x_0),$$

οπότε παίρνουμε την λύση (σε πεπλεγμένη μορφή)

$$u(x, t) = f(x - a(u(x, t))t), \quad (x, t) \in U.$$

Για $t = 0$: $u(x, 0) = f(x - a(u(x, t)) \cdot 0) = f(x)$, που επαληθεύει την αρχική συνθήκη του ΠΑΤ. Αφού $f, a \in C^1$ έχουμε

$$u_x = f'(x - a(u)t) [1 - a'(u)u_x t] \Rightarrow u_x = \frac{f'(x - a(u)t)}{1 + f'(x - a(u)t) a'(u)t}. \quad (2.47)$$

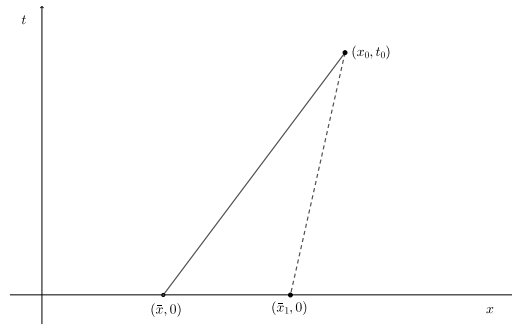
Ομοίως

$$u_t = -\frac{a(u) f'(x - a(u)t)}{1 + f'(x - a(u)t) a'(u)t}.$$

Αφού $f' > 0$, $a' > 0$ (και $t > 0$), ισχύει ότι ο παρονομαστής είναι θετικός (δηλαδή διάφορος του μηδενός) οπότε ικανοποιείται και η $u_t + a(u)u_x = 0$.

Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο θεώρημα.

¹¹Η γενικευμένη εξίσωση του Burgers είναι μια σχεδόν γραμμική ΜΔΕ με $a(x, t, u) = a(u)$, $b(x, t, u) = 1$, $d(x, t, u) = 0$.



Σχήμα 2.15: Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του (2.45) είναι ευθείες, όχι αναγκαστικά παράλληλες (βλ. Παρατήρηση 2.32).

Θεώρημα 2.31. (τοπική λύση) Η λύση του ΠΑΤ (2.45) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή ως

$$u = f(x - a(u)t). \quad (2.48)$$

Παρατηρήσεις 2.32. 1. Στην περίπτωση που $f' < 0$ ο παρονομαστής στην (2.47) μπορεί να μηδενιστεί προκαλώντας έκρηξη (blow-up) της κλίσης της λύσης, δηλαδή $u_x = \infty$ και δεν μπορούμε να έχουμε συνεχώς παραγωγίσιμη λύση για όλους τους θετικούς χρόνους t .

2. Όπως αποδείχθηκε οι χαρακτηριστικές του (2.45) είναι ευθείες και η u είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(\bar{x}, 0)$ είναι

$$\frac{dx}{dt} = a(f(\bar{x})),$$

άρα οι χαρακτηριστικές δεν είναι γενικά παράλληλες μεταξύ τους. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε αφού από την υπόθεση μας η a είναι γνησίως αύξουσα η $a \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $\bar{x} < \bar{x}_1$ ισχύει $a(f(\bar{x})) > a(f(\bar{x}_1))$ και οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από τα σημεία $(\bar{x}, 0)$ και $(\bar{x}_1, 0)$ τέμνονται για κάποιο $t > 0$. Στο σημείο τομής η u δεν ορίζεται γιατί θα έπρεπε να λαμβάνει ταυτόχρονα τις τιμές $f(\bar{x})$ και $f(\bar{x}_1)$. Οδηγηθήκαμε σε αυτή την αντίφαση γιατί η μέθοδος των χαρακτηριστικών προϋποθέτει ότι η u είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και αυτό δεν ισχύει γενικά στις μη γραμμικές εξισώσεις. Επομένως η μέθοδος καταρρέει σε αυτή την περίπτωση.

Παράδειγμα 2.33. (Κυκλοφορία σε εθνική οδό) Θεωρούμε την κυκλοφορία οχημάτων σε μια εθνική οδό. Το βασικό μέγεθος εδώ είναι ο αριθμός των οχημάτων. Επειδή ο αριθμός αυτός είναι διακριτός και όχι συνεχής, υποθέτουμε ότι η μονάδα μήκους της οδού είναι αρκετά μεγάλη ώστε η συνάρτηση πυκνότητας, $\rho(x, t)$, που δίνει τον αριθμό των οχημάτων ανά μονάδα μήκους της οδού (η θέση x αποτελεί για παράδειγμα ένα συγκεκριμένο χιλιόμετρο της εθνικής οδού) τη χρονική στιγμή t , μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο. Έστω $v(x, t)$ η συνάρτηση που δίνει τη μέση τοπική ταχύτητα των οχημάτων και $q(x, t)$ η συνάρτηση ροής οχημάτων ανά μονάδα χρόνου, έτσι ώστε να ισχύει

$$q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

Υποθέτουμε ότι το τμήμα της εθνικής που μελετάμε δεν έχει εισόδους και εξόδους, τότε ο αριθμός των οχημάτων στην εθνική διατηρείται, κατά συνέπεια ισχύει η εξίσωση συνέχειας (2.38). Από πειραματικά δεδομένα γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα v εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα των οχημάτων, άρα έχουμε την καταστατική εξίσωση $v = f(\rho)$, απ' όπου έχουμε τελικά $q = \rho f(\rho)$ και η εξίσωση συνέχειας γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (f(\rho) + \rho f'(\rho)) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Στην τελευταία εξίσωση οι πιθανές πολλαπλές συγκρούσεις οχημάτων αντιστοιχούν σε τομές χαρακτηριστικών καμπυλών και στη δημιουργία κρουστικών κυμάτων.

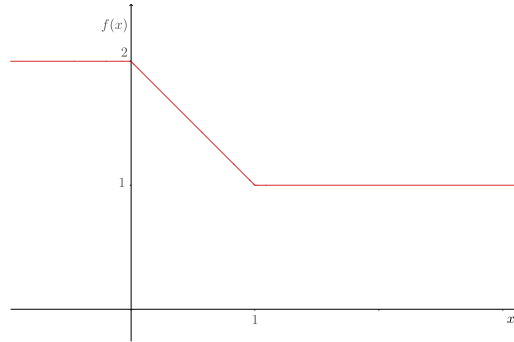
2.4.1 Χρόνος θραύσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον ελάχιστο δυνατό χρόνο $t = t_\theta$ στον οποίο οι χαρακτηριστικές ενός προβλήματος τέμνονται, γνωστό ως χρόνο θραύσης. Για την κατανόηση του t_θ δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.34. Έστω το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{στο } U := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x > 1, \end{cases} \end{cases} \quad (2.49)$$

Η f είναι φθίνουσα, συνεχής και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη (βλ. Σχήμα 2.16). Οι



Σχήμα 2.16: Η f είναι φθίνουσα, συνεχής και κατά τμήματα C^1 .

χαρακτηριστικές του προβλήματος (2.49), όπως είδαμε στο ΠΑΤ (2.45), προκύπτουν από τη σχέση (2.46α') με αντικατάσταση $a(u) = u$, δηλαδή είναι οι ευθείες

$$x(t) = u(x_0, t_0)(t - t_0) + x_0,$$

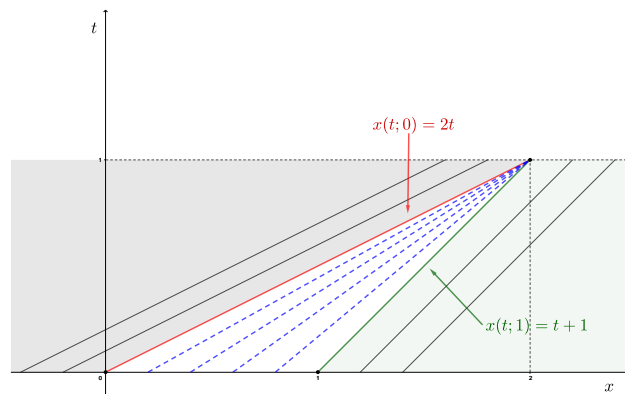
και για $t_0 = 0$

$$x(t; x_0) = f(x_0)t + x_0,$$

δηλαδή

$$x(t; x_0) = \begin{cases} 2t + x_0, & x_0 < 0, \\ (2 - x_0)t + x_0, & x_0 \in [0, 1], \\ t + x_0, & x_0 > 1. \end{cases} \quad (2.50)$$

Οι δύο «ακραίες» χαρακτηριστικές $x(t; 0) = 2t$ και $x(t; 1) = t + 1$ τέμνονται στο σημείο $(2, 1)$, και όλες



Σχήμα 2.17: Οι δύο «ακραίες» χαρακτηριστικές $x(t; 0) = 2t$ (κόκκινη συνεχής γραμμή) και $x(t; 1) = t + 1$ (πράσινη συνεχής γραμμή), και οι ενδιάμεσες χαρακτηριστικές γραμμές για $x \in (0, 1)$ (διακεκομμένες μπλε γραμμές).

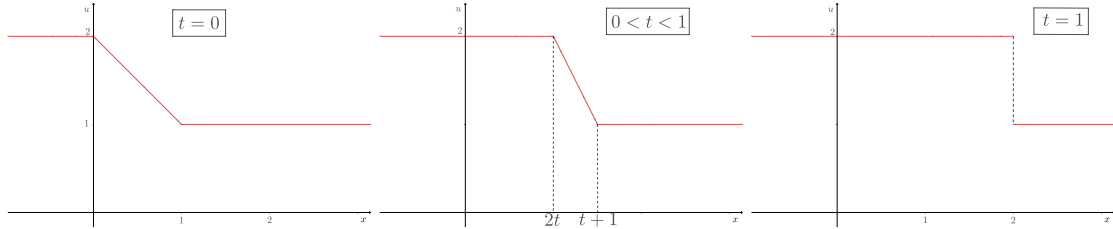
οι ενδιάμεσες χαρακτηριστικές διέρχονται επίσης από το σημείο αυτό (βλ. Σχήμα 2.17). Ο χρόνος θραύσης είναι τέτοιος ώστε:

$$2t_\theta = t_\theta + 1 \Rightarrow t_\theta = 1 \quad (2.51)$$

Από τη σχέση (2.48) για $a(u) = u$ και $t < 1$ έχουμε ότι η κλασική η λύση του ΠΑΤ (2.49) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή ως $u = f(x - ut)$, δηλαδή $u = 2 - (x - ut)$, οπότε $u(x, t) = \frac{2 - x}{1 - t}$ για $2t < x < t + 1$

(βλ. Σχήμα 2.18), και με ανάλογο τρόπο για τις άλλες άλλες τιμές της συνάρτησης έχουμε τελικά

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x \leq 2t, \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t < x < t+1, \\ 1, & x \geq t+1, \end{cases}$$



Σχήμα 2.18: Στιγμιότυπα της u για φιξαρισμένο $t \in [0, 1]$.

Παρατηρήσεις 2.35. 1. Όλες οι χαρακτηριστικές διέρχονται από το ίδιο σημείο τη στιγμή της θραύσης.

2. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ η λύση γίνεται ασυνεχής (βλ. Σχήματα 2.17 και 2.18).

Υπολογισμός χρόνου θραύσης

Υπολογίζουμε τον χρόνο θραύσης από τη σχέση (2.47). Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα ($f' < 0$) και υπολογίζουμε τον ελάχιστο χρόνο t για τον οποίο μηδενίζεται ο παρονομαστής στην (2.47),

$$1 + f'(x - a(u)t) a'(u)t = 0. \quad (2.52)$$

Ξέρουμε ότι η λύση του ΠΑΤ δίνεται από τη σχέση $u = f(x - a(u)t)$, συνεπώς $x - a(u)t = f^{-1}(u)$. Επίσης, από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $u = u(x_0, t_0) = f(x_0)$, οπότε από την (2.52) έχουμε

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{f'(x - a(u)t) a'(f(x_0))} = -\frac{1}{f'(f^{-1}(u)) a'(f(x_0))} \\ &= -\frac{1}{f'(f^{-1}(f(x_0))) a'(f(x_0))} = -\frac{1}{f'(x_0) a'(f(x_0))}, \end{aligned}$$

άρα ο χρόνος θραύσης t_θ δίνεται από τη σχέση

$$t_\theta = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \left[-\frac{1}{f'(x_0) a'(f(x_0))} \right]. \quad (2.53)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (2.53) στο ΠΑΤ (2.49) έχουμε

$$t_\theta = \inf_{x_0 \in [0, 1]} \left[-\frac{1}{f'(x_0)} \right] = \inf_{x_0 \in [0, 1]} \left[-\frac{1}{-1} \right] = 1,$$

που επαληθεύει την τιμή που υπολογίσαμε στη σχέση (2.51).

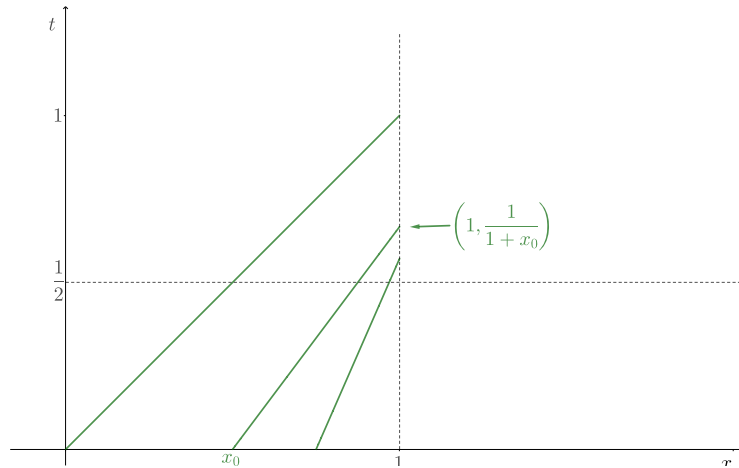
Έστω το ΠΑΤ (2.49) για

$$f(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2.54)$$

Στο Σχήμα 2.19 μπορούμε να δούμε κάποιες χαρακτηριστικές του ΠΑΤ.

Εφαρμόζοντας την σχέση (2.53) έχουμε ότι ο χρόνος θραύσης είναι

$$t_\theta = \inf_{x_0 \in (0, 1)} \left[-\frac{1}{f'(x_0)} \right] = \inf_{x_0 \in [0, 1]} \left[-\frac{1}{-2x_0} \right] = \frac{1}{2}.$$



Σχήμα 2.19: Τρεις χαρακτηριστικές γραμμές για το ΠΑΤ (2.49) με $f(x)$ όπως ορίζεται στην (2.54).

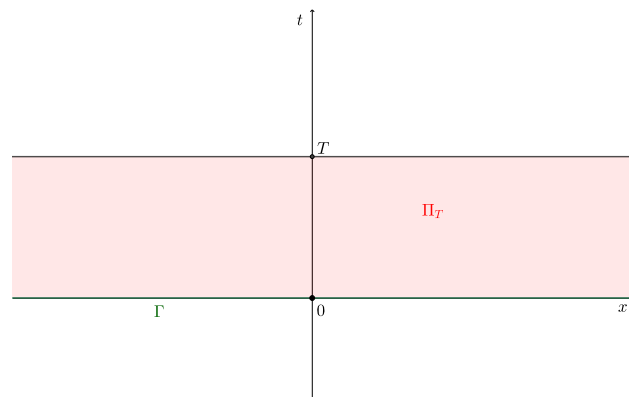
Χρόνος θραύσης για λύση ορισμένη σε μια λωρίδα

Θεωρούμε το ΠΑΤ (2.45) με $a(u) = F'(u)$, $F \in C^2$ σε μια λωρίδα Π_T και αρχική καμπύλη Γ :

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & \text{στο } \Pi_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, T)\}, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{στο } \Gamma := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x = s, t = 0, s \in (-\infty, +\infty)\}, \end{cases} \quad (2.55)$$

όπου $f \in C^1(\mathbb{R})$ δοθείσα συνάρτηση με $f' > 0$ (f γνησίως αύξουσα). Τότε

$$\tilde{\Gamma} := \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid x = s, t = 0, z = u(x(s), t(s)) = f(s)\}.$$



Σχήμα 2.20: Ύπαρξη λύση σε μια λωρίδα Π_T με αρχική συνθήκη Γ .

Έχουμε

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F' & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Συνεπώς το ΠΑΤ έχει τοπικά μοναδική κλασική λύση

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = F'(z), & x(0, s_0) = s_0, \\ \frac{dy}{ds} = 1, & y(0, s_0) = 0 \\ \frac{dz}{ds} = 0, & z(0, s_0) = f(s_0). \end{cases}$$

Όπως έχουμε δει οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες και η

$$u = f(x - F'(u)t) \quad (2.56)$$

είναι η λύση του ΠΑΤ (2.55) σε πεπλεγμένη μορφή.

Θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή του $T > 0$ για την οποία η (2.56) δίνει ομαλή λύση του (2.55) στην λωρίδα Π_T . Δηλαδή το μεγαλύτερο $T > 0$ ώστε η εξίσωση

$$\Phi(x, t, u) := u - f(x - F'(u)t) = 0$$

να έχει μοναδική (ως προς u) λύση για κάθε σταθεροποιημένο $t \in [0, T]$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η $\Phi(x, 0, u)$ είναι αύξουσα ως προς u . Από το ΘΠΣ έπεται ότι πρέπει $\Phi_u > 0$, $\forall (x, t, u) : \Phi(x, t, u) = 0$ και $t \in [0, T]$.

Όμως

$$\Phi_u = 1 + f'(x - F'(u)t)F''(u)t.$$

Έτσι, αν $|F''(u)| \leq L$ στο πεδίο τιμών της $f(x)$ και αν, επιπλέον, $|f'| \leq K$, τότε $\Phi_u > 0$ όταν

$$1 - KLt > 0.$$

Άρα υπάρχει ομαλή λύση του (2.55) στη λωρίδα

$$\left\{ (x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \left(0, \frac{1}{KL}\right) \right\}.$$

Θέτουμε

$$y = x - F'(u)t,$$

ενώ

$$u = f(y)$$

(αφού $\Phi(x, t, u) = 0$). Έτσι έχουμε

$$1 + f'(y)F''(f(y))t > 0.$$

Τελικά

$$T = \begin{cases} -\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} [f'(y)F''(f(y))]} & , \text{αν } \inf_{y \in \mathbb{R}} [f'(y)F''(f(y))] < 0, \\ +\infty & , \text{αν } \inf_{y \in \mathbb{R}} [f'(y)F''(f(y))] \geq 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f'(y)F''(f(y)) = \frac{d}{dy}(F'(f(y))).$$

Στο ΠΑΤ για την εξίσωση του Burgers (2.43) έχουμε

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad f \in C^1, \end{cases}$$

έχουμε $F'(u) = u$, οπότε

$$T = \begin{cases} -\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} (f'(y))} & , \text{αν } \inf_{y \in \mathbb{R}} (f'(y)) < 0, \\ +\infty & , \text{αν } \inf_{y \in \mathbb{R}} (f'(y)) \geq 0. \end{cases}$$

2.5 Ασθενείς λύσεις και συνθήκη Rankine-Hugoniot

Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε την έννοια της λύσης μιας ΜΔΕ, εισάγοντας τον ορισμό της ασθενούς λύσης, και θα δώσουμε μια σημαντική συνθήκη που σχετίζεται με τις ασθενείς λύσεις, την συνθήκη Rankine-Hugoniot.

2.5.1 Ασθενής διατύπωση προβλήματος

Στις προηγούμενες ενότητες μιλήσαμε για κλασικές λύσεις των ΜΔΕ, δηλαδή για λύσεις τόσο ομαλές ώστε οι παράγωγοί τους που εμφανίζονται στην ΜΔΕ να είναι συνεχείς ($u \in C^k$). Εδώ θα γενικεύσουμε την έννοια της λύσης δίνοντας τον ορισμό των ασθενών ή γενικευμένων λύσεων.

Ορισμός 2.36. Έστω $v = v(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. **Φορέας (support)** της v είναι η κλειστότητα¹² του συνόλου στο οποίο αυτή δεν μηδενίζεται¹³:

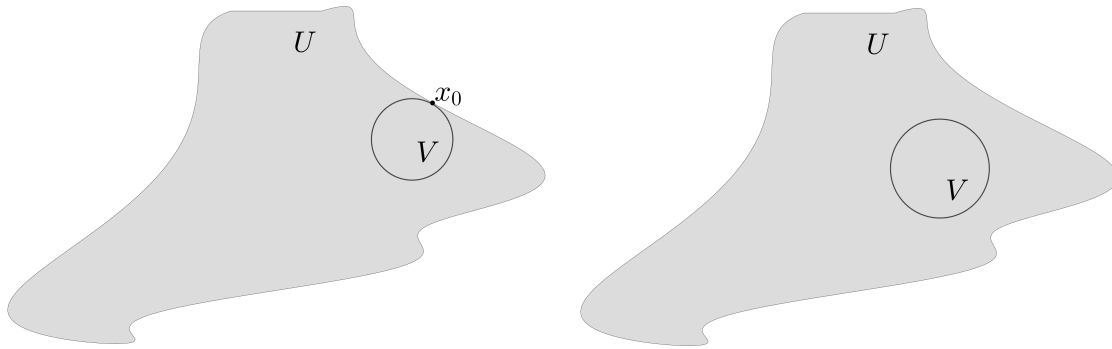
$$\text{supp } v := \overline{\{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \mid v(x, t) \neq 0\}}. \quad (2.57)$$

Ορισμός 2.37. (συμπαγές υποσύνολο) Έστω U ένα χωρίο και $V \subset U$. Λέμε ότι το V περιέχεται συμπαγώς στο U αν

i) \bar{V} συμπαγές σύνολο¹⁴

ii) $\bar{V} \subset U$

Γράφουμε τότε $V \subset\subset U$ (βλ. Σχήμα 2.21).



(α) Το V δεν περιέχεται συμπαγώς στο U αφού $x_0 \in \bar{V} \setminus U$.

(β) $V \subset\subset U$

Σχήμα 2.21: Παράδειγμα πάνω στον ορισμό του συμπαγούς υποσυνόλου.

Ορισμός 2.38. Για $0 \leq k \leq \infty$ ορίζουμε τον χώρο

$$C_0^k(U) := \{v \in C^k(U) \mid \text{supp } v \subset\subset U\}. \quad (2.58)$$

Παρατηρήσεις 2.39. 1. Αν $\text{supp}(u) \subset\subset U$, τότε $u = 0$ κοντά στο ∂U .

2. Για $0 \leq k \leq \infty$

$$C_0^k(U) \subset C^k(\bar{U}) \subset C^k(U).$$

Ορισμός 2.40. Μια συνάρτηση $v = v(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ λέγεται **συνάρτηση δοκιμής (test function)** αν το $\text{supp } v$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, δηλαδή $v \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Πρόταση 2.41. Έστω $\text{supp } v$ συμπαγές στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Τότε υπάρχει ορθογώνιο τέτοιο, ώστε $\text{supp } v \subset (a, b) \times [0, T)$ (βλ. Σχήμα 2.22),¹⁶ με

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in \text{supp } v\} - 1$$

$$b = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in \text{supp } v\} + 1$$

$$T = \sup\{t \geq 0 \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in \text{supp } v\} + 1$$

¹²Με την παύλα συμβολίζουμε το τοπολογικό κάλυμμα του συνόλου.

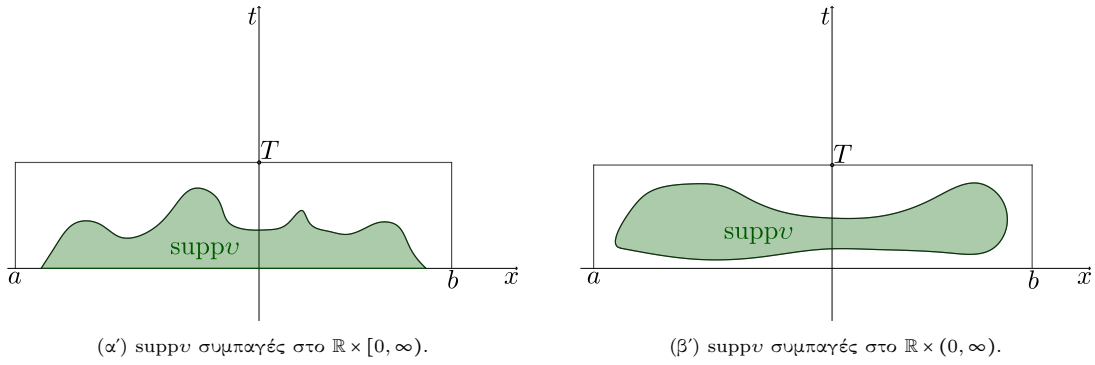
¹³Γενικότερα, ο φορέας μια συνάρτησης $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n :

$$\text{supp}(u) := \overline{\{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

¹⁴Στην περίπτωση χώρων πεπερασμένης διάστασης ένα σύνολο είναι συμπαγές (compact) αν είναι κλειστό και φραγμένο.

¹⁵Συμβολίζεται επίσης και $C_c^k(U)$.

¹⁶Δηλαδή, η v μπορεί να λάβει μη μηδενικές τιμές μόνο σε κάποιο ορθογώνιο, έξω από αυτό μηδενίζεται.



Σχήμα 2.22: Ο φορέας $\text{supp} v$ μιας συνάρτησης δοκιμής v , με πράσινο (σκιασμένο).

Παρατήρηση 2.42. Μια συνάρτηση v με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ που μηδενίζεται για $t = 0$, δηλαδή $v(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, δεν έχει αναγκαστικά συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

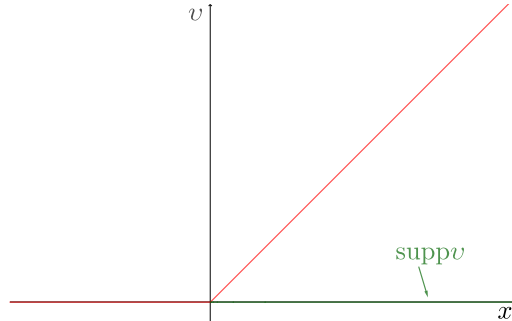
Παραδείγματα 2.43. 1. Έστω η συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Τότε ο φορέας της v είναι

$$\text{supp} v = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \neq 0\}} = [0, \infty).$$

Το $\text{supp} v$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R} .



Σχήμα 2.23: Η v (κόκκινο) που δίνεται από την (2.59) και ο φορέας της (πράσινο).

2. Έστω η συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \leq -1 \text{ \& } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.60)$$

Τότε ο φορέας της v είναι το συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R} :

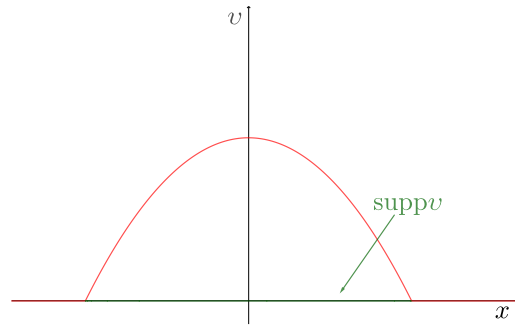
$$\text{supp} v = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \neq 0\}} = [-1, 1].$$

3. Έστω η συνάρτηση

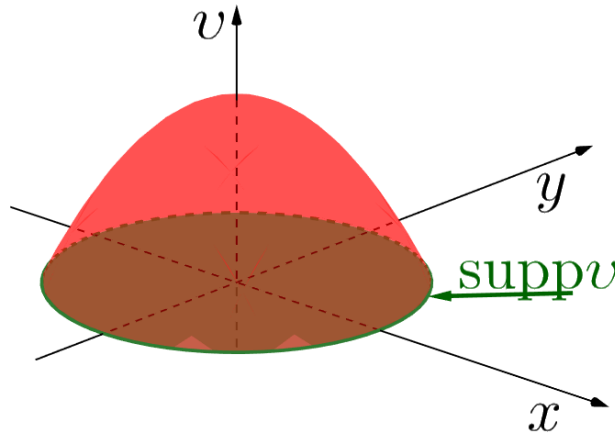
$$v(x, t) = \begin{cases} 1 - (x^2 + t^2), & x^2 + t^2 < 1, \\ 0, & x^2 + t^2 \geq 1. \end{cases} \quad (2.61)$$

Τότε ο φορέας της v είναι το συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^2 :

$$\text{supp} v = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + t^2 \leq 1\}.$$



Σχήμα 2.24: Η v (κόκκινο) που δίνεται από την (2.60) και ο φορέας της (πράσινο).



Σχήμα 2.25: Η v (κόκκινο) που δίνεται από την (2.61) και ο φορέας της (πράσινο).

Θεωρούμε το ΠΑΤ για την γενικευμένη εξίσωση του Burgers, που είδαμε και στις προηγούμενες ενότητες, δηλαδή

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.62)$$

όπου F παράγουσα της συνάρτησης a (βλ. (2.45)), δηλαδή $F'(y) = a(y)$ ¹⁷ και η f είναι φραγμένη και κατά τμήματα ομαλή. Υποθέτουμε ότι η a είναι συνεχής.

Έστω v μια συνάρτηση δοκιμής. Έτσι $\text{supp } v \subset [a, b] \times [0, T]$. Πολλαπλασιάζουμε τη ΜΔΕ επί v και ολοκληρώνουμε στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u_t + (F(u))_x \right) v dx dt = \underbrace{\int_0^T \int_a^b (F(u))_x v dx dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T \int_a^b u_t v dx dt}_{I_2}.$$

Έχουμε με παραγοντική ολοκλήρωση¹⁸

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \int_a^b \left((F(u)v)_x - F(u)v_x \right) dx dt \\ &= \int_0^T \left(F(u(b,t))v(b,t) - F(u(a,t))v(a,t) \right) dt - \int_0^T \int_a^b F(u)v_x dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)v_x dx dt, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι η v είναι συνάρτηση δοκιμής, άρα $v(a, t) = v(b, t) = 0$ (βλ. Ορισμούς 2.38 και 2.40, και Παρατηρήσεις 2.39).

¹⁷Στην περίπτωση της εξίσωσης του Burgers χωρίς ιξώδες (ή εξίσωση του Hopf) ισχύει: $a(u) = u$ και $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

¹⁸ $(F(u)v)_x = (F(u))_x v + F(u)v_x$

Ομοίως

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \int_a^b ((wv)_t - wv_t) dx dt \\ &= \int_a^b \int_0^T (wv)_t dt dx - \int_0^T \int_a^b wv_t dx dt \\ &= \int_a^b (u(x, T)v(x, T) - u(x, 0)v(x, 0)) dx - \int_0^T \int_a^b wv_t dx dt \\ &\stackrel{v(x, T)=0}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)v(x, 0) dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} wv_t dx dt, \end{aligned}$$

οπότες χρησιμοποιήσαμε ξανά το γεγονός ότι η v είναι συνάρτηση δοκιμής.

Έχουμε, λοιπόν, την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.44. Η κλασική λύση του ΠΑΤ (2.62) ικανοποιεί την ολοκληρωτική σχέση

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (wv_t + F(u)v_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)v(x, 0) dx = 0, \quad (2.63)$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής v .

Ορισμός 2.45. Μια συνάρτηση u , ορισμένη στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ λέγεται **ασθενής λύση** του ΠΑΤ (2.62), αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε ορθογώνιο της μορφής $[a, b] \times [0, T]$ και ικανοποιεί τη σχέση (2.63) για κάθε συνάρτηση δοκιμής v .

Παρατηρήσεις 2.46. 1. Επιτρέπονται ασυνεχείς συναρτήσεις $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ως λύσεις του ΠΑΤ (2.62). Έτσι διευρύνεται κατά πολύ η έννοια της λύσης.

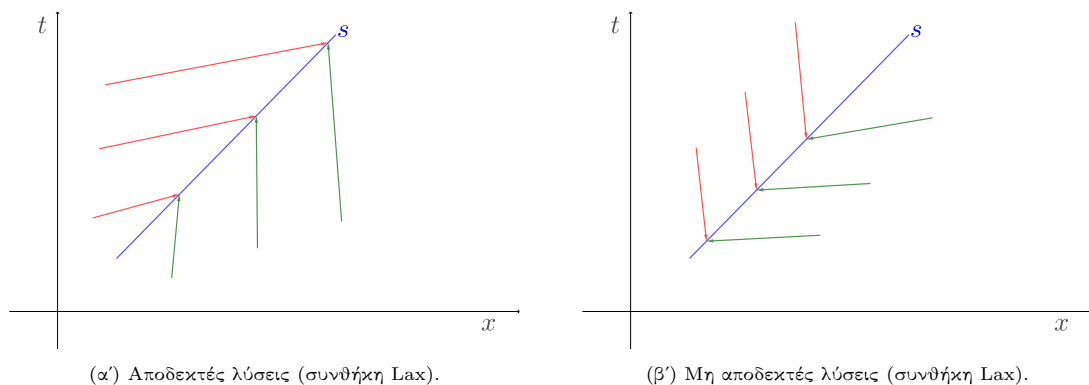
2. Παρόλα αυτά η (2.63) περιορίζει το σύνολο των υποψηφίων ασθενών λύσεων.

3. Αν η συνάρτηση v έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (βλ. Σχήμα 2.22β'), τότε $v(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (wv_t + F(u)v_x) dx dt = 0, \quad (2.64)$$

δηλαδή δεν εμφανίζεται η αρχική συνθήκη. Επομένως, ο ρόλος της επιλογής κατάλληλου συνόλου συναρτήσεων δοκιμής είναι σημαντικός.

4. Η έννοια της ασθενούς λύσης που θα μας απασχολήσει για το ΠΑΤ (2.62) είναι: να βρεθεί φραγμένη και κατά τμήματα ομαλή¹⁹ συνάρτηση $u(x, t)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (2.63) για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση v . Επιπλέον, μας ενδιαφέρουν ασθενείς λύσεις των οποίων οι μόνες ασυνέχειες οδηγούν στην αποφυγή πλειότιμων συναρτήσεων:



Σχήμα 2.26: Η καμπύλη ασυνέχειας $x = s(t)$ (μπλε) και οι χαρακτηριστικές καμπύλες της u από διαφορετικές πλευρές της $s(t)$ (κόκκινες από αριστερά και πράσινες από δεξιά).

Η καμπύλη ασυνέχειας $x = s(t)$ είναι τέτοια ώστε οι χαρακτηριστικές από διαφορετικές πλευρές της $s(t)$, τέμνονται επί της $s(t)$ καθώς αυξάνεται το t (βλ. Σχήμα 2.26).

¹⁹Η συνθήκη κατά τμήματα ομαλή μπορεί να αντικατασταθεί με μετρήσιμη.

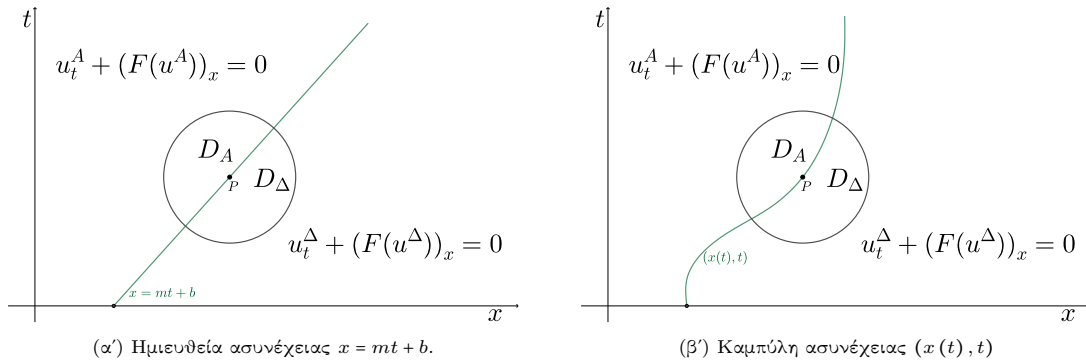
2.5.2 Συνθήκη Rankine-Hugoniot

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με μια σημαντική συνθήκη που σχετίζεται με τις ασθενείς λύσεις ΜΔΕ και θα εξετάσουμε το κατά πόσο μια γενικευμένη λύση προκύπτει από την συγκόλληση κλασικών λύσεων.

Θεωρούμε την εξίσωση του ΠΑΤ (2.62)

$$u_t + (F(u))_x = 0, \quad (2.65)$$

και την ημιευθεία ασυνέχειας $x = mt + b$ (βλ. Σχήμα 2.27α') ή την καμπύλη ασυνέχειας $(x(t), t)$ (βλ. Σχήμα 2.27β') στο θετικό ημιεπίπεδο xt με $t > 0$. Περιοριζόμαστε αρχικά στην περίπτωση της ημιευθείας ασυνέχειας. Έστω $u^A(x, t)$ και $u^\Delta(x, t)$ κλασικές λύσεις της εξίσωσης (2.65) αριστερά και δεξιά της ημιευθείας, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.27: Οι u^A και u^Δ αποτελούν κλασικές λύσεις της εξίσωσης (2.65) αριστερά και δεξιά της (α') ημιευθείας ασυνέχειας, και (β') καμπύλης ασυνέχειας.

Ερώτημα: Υπό ποιες συνθήκες η συνάρτηση u :

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A(x, t), & \text{για } (x, t) \text{ αριστερά της ημιευθείας} \\ u^\Delta(x, t), & \text{για } (x, t) \text{ δεξιά της ημιευθείας} \end{cases} \quad (2.66)$$

είναι γενικευμένη (ασθενής) λύση της εξίσωσης (2.65);

Υποθέσεις:

- Σε κάθε σημείο P της ημιευθείας ασυνέχειας, $x = mt + b$, $t > 0$, υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$u^A(P) = \lim_{(x,t) \rightarrow P^-} u^A(x, t), \quad u^\Delta(P) = \lim_{(x,t) \rightarrow P^+} u^\Delta(x, t).$$

- Η u είναι γενικά ασυνεχής κατά μήκος της ημιευθείας $x = mt + b$, δηλαδή για σημεία P της ημιευθείας επιτρέπεται να ισχύει

$$u^A(P) \neq u^\Delta(P).$$

Πρόταση 2.47. (Συνθήκη Rankine-Hugoniot) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η συνάρτηση u της (2.66) γενικευμένη λύση της εξίσωσης (2.65) είναι η

$$F(u^A(P)) - F(u^\Delta(P)) = (u^A(P) - u^\Delta(P))m, \quad (2.67)$$

για κάθε σημείο P της ημιευθείας $x = mt + b$, $t > 0$.

Παρατήρηση 2.48. Θεωρούμε την ειδική περίπτωση $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, οπότε έχουμε την εξίσωση του Burgers χωρίς ιξώδες. Τότε η (2.67) γίνεται

$$\frac{1}{2}(u^A(P))^2 - \frac{1}{2}(u^\Delta(P))^2 = (u^A(P) - u^\Delta(P))m,$$

δηλαδή στην περίπτωση $u^A(P) \neq u^\Delta(P)$ έχουμε

$$\frac{u^A(P) + u^\Delta(P)}{2} = m.$$

Άρα, η κλίση m της ημιευθείας ασυνέχειας θα πρέπει να συνδέεται με τις τιμές τις λύσεις εκατέρωθεν της με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο ώστε η ασυνεχής συνάρτηση u να αποτελεί ασθενής λύσης της ΜΔΕ.

Συμβολισμός: Ορίζουμε ως άλμα (*jump*) ασυνέχειας μιας συνάρτησης κατά μήκος της ημιευθείας ασυνέχειας τη διαφορά των τιμών αριστερά και δεξιά της εν λόγω ημιευθείας και το συμβολίζουμε $[\cdot]$.

Τότε η συνθήκη Rankine-Hugoniot ή συνθήκη άλματος (2.67) διατυπώνεται ως

$$[F(u)] = m[u]. \quad (2.68)$$

Γενίκευση σε καμπύλη: Στην σχέση (2.68) έχουμε την σταθερή κλίση, m , της ημιευθείας ασυνέχειας. Στην γενική περίπτωση που έχουμε ομαλή καμπύλη ασυνέχειας (βλ. Σχήμα 2.27β') η κλίση μεταβάλλεται γενικά, και σε κάθε σημείο $(x(t), t)$ της καμπύλης είναι ίση με $\frac{dx}{dt}(t)$. Τότε, η σχέση (2.68) αντικαθίσταται από την

$$[F(u)] = \frac{dx}{dt}[u],$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]}, \quad (2.69)$$

σε κάθε σημείο $(x(t), t)$ της καμπύλης ασυνέχειας.

Παρατήρηση 2.49. Η συνθήκη Rankine-Hugoniot δεν είναι αρκετή για να προσδιορίσει μονοσήμαντα τη λύση ενός ΠΑΤ.

Παράδειγμα 2.50. (Επανεξέταση του Παραδείγματος 2.34) Επιστρέφουμε στο ΠΑΤ (2.49) του Παραδείγματος 2.34:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{στο } U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x > 1, \end{cases} \end{cases}$$

για το οποίο γνωρίζουμε ότι στη χρονική στιγμή $t = 1$ η λύση του ΠΑΤ είναι ασυνεχής

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x \leq 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Για $t = 1$ η κλασική λύση του ΠΑΤ καταρρέει για δοθείσα αρχική τιμή f . Η συνέχιση της λύσης θα γίνει με ασθενή λύση (για $t \geq 1$). Κατά την κατασκευή γενικευμένης λύσης γνωρίζουμε ότι στο ημιεπίπεδο xt υπάρχει μια καμπύλη ασυνέχειας που διέρχεται από το σημείο θραύσης $(2, 1)$ και τη χρονική στιγμή $t = 1$ δημιουργείται κρουστικό κύμα. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις

$$u^A(x, t) = 2, \quad u^\Delta(x, t) = 1,$$

είναι κλασικές λύσεις της εξίσωσης. Από την συνθήκη Rankine-Hugoniot (2.69) έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(u^A)^2 - (u^\Delta)^2}{u^A - u^\Delta} = \frac{u^A + u^\Delta}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2},$$

οπότε

$$x(t) = \frac{3}{2}t + b.$$

Για $t = 1$: $x(1) = \frac{3}{2} + b$, αλλά $x(1) = 2$ (αφού διέρχεται από το σημείο θραύσης), και τελικά

$$x(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2},$$

όπου η κλίση $m = 3/2$ της ημιευθείας ασυνέχειας είναι ο μέσος όρος των κλίσεων των δύο ακραίων χαρακτηριστικών πριν τη σύγκρουση των χαρακτηριστικών (βλ. Σχήματα 2.17 και 2.28).

Συνεπώς, μια ολική γενικευμένη λύση του ΠΑΤ (βλ. Σχήμα 2.28) είναι

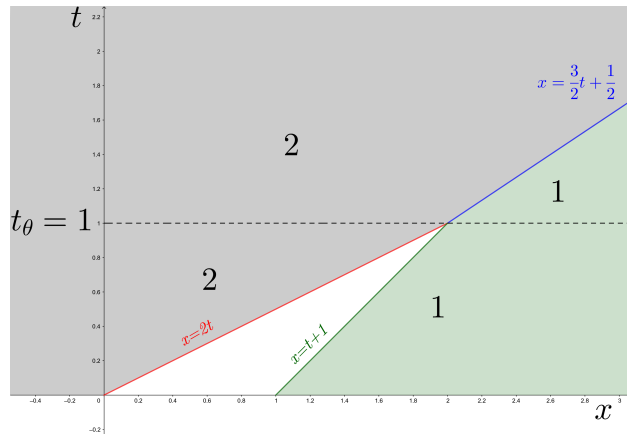
$$u(x, t) = \begin{cases} u_{\text{κλασ.}}, & t < 1, \\ u_{\text{ασθ.}}, & t \geq 1. \end{cases}$$

όπου για $t < 1$ η $u_{\text{κλ.ασ.}}$ είναι η κλασική λύση που υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 2.34 (βλ. Σχήμα 2.18)

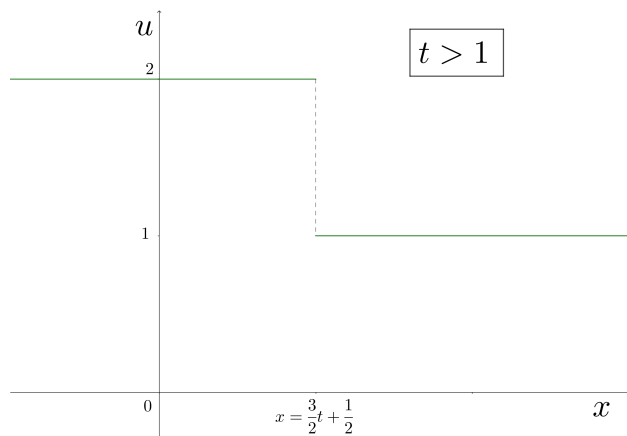
$$u_{\text{κλ.ασ.}}(x, t) = \begin{cases} 2, & x \leq 2t, \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t < x < t+1, \\ 1, & x \geq t+1, \end{cases}$$

και για $t \geq 1$ η $u_{\text{ασθ.}}$ είναι η ασθενής λύση (βλ. Σχήματα 2.28 και 2.29)

$$u_{\text{ασθ.}}(x, t) = \begin{cases} 2, & x < \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, \end{cases}$$



Σχήμα 2.28: Η ημιευθεία ασυνέχειας και η γενικευμένη λύση του ΠΑΤ.



Σχήμα 2.29: Στιγμιότυπο της λύσης $u_{\text{ασθ.}}(\cdot, t)$, για $t > 1$.

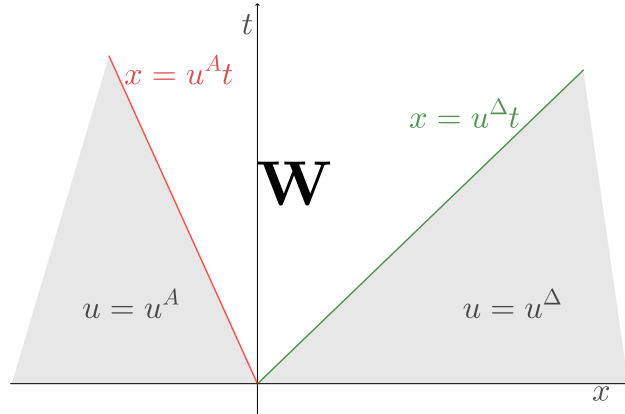
Παράδειγμα 2.51. (Πρόβλημα του Riemann) Θεωρούμε το ακόλουθο μη γραμμικό πρόβλημα με ασυνεχείς σταθερές αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^A, & x < 0 \\ u^\Delta, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.70)$$

Υποθέτουμε ότι $u^A < u^\Delta$. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών δίνει

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A, & x - u^A t < 0 \\ u^\Delta, & x - u^\Delta t > 0 \end{cases}$$

αλλά δεν δίνει λύση στον κώνο $W : u^A t < x < u^\Delta t$, επειδή δεν υπάρχουν χαρακτηριστικές εντός του W (βλ. Σχήμα 2.30).



Σχήμα 2.30: Λύσεις του ΠΑΤ (2.70): u^A , αριστερά της χαρακτηριστικής $x = u^A t$ (κόκκινη γραμμή), και u^Δ , δεξιά της χαρακτηριστικής $x = u^\Delta t$ (πράσινη γραμμή).

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση του Burgers παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$x \mapsto \lambda x, \quad t \mapsto \lambda t \quad (\lambda > 0),$$

ενώ η αρχική συνθήκη $u(x, 0) = f(x)$ παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$x \mapsto \lambda x \quad (\lambda > 0).$$

Υποθέτοντας τη μοναδικότητα ασθενών λύσεων για το ΠΑΤ, οι λύσεις $u(\lambda x, \lambda t)$ είναι ανεξάρτητες του λ , δηλαδή

$$u(x, t) = u(\lambda x, \lambda t) \quad \forall \lambda > 0,^{20}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}, t > 0$, δηλαδή η u παραμένει σταθερή πάνω σε κάθε ευθεία $x = \xi t$, $t > 0$, που περνάει από το $(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η $u(x, t)$ εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή $\xi = \frac{x}{t} : u(x, t) = u(\xi t, 1 \cdot t) = u(\xi, 1)$, δηλαδή²¹

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0.$$

Οι λύσεις που εξαρτώνται μόνο απ' το $\frac{x}{t}$ λέγονται αυτο-όμοιες.

Θα περιγράψουμε όλες τις ομαλές, αυτο-όμοιες λύσεις της εξίσωσης του Burgers. Αντικαθιστούμε την $u\left(\frac{x}{t}\right)$ στην εξίσωση $u_t + uu_x = 0$, άρα έχουμε

$$-\frac{x}{t^2} u' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} u \left(\frac{x}{t} \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t} \right) \left[u \left(\frac{x}{t} \right) - \frac{x}{t} \right] = 0,$$

οπότε

²⁰Υπενθύμιση: Οι ομογενείς ΣΔΕ $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ με M, N ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού m ($P(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m P(t, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$) μετατρέπονται σε ΣΔΕ χωρίζομένων μεταβλητών

$$\frac{d\xi}{\xi + Q(\xi)} = -\frac{dt}{t}, \quad Q(\xi) := \frac{M(1, \xi)}{N(1, \xi)}$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$\xi = \frac{y}{t}.$$

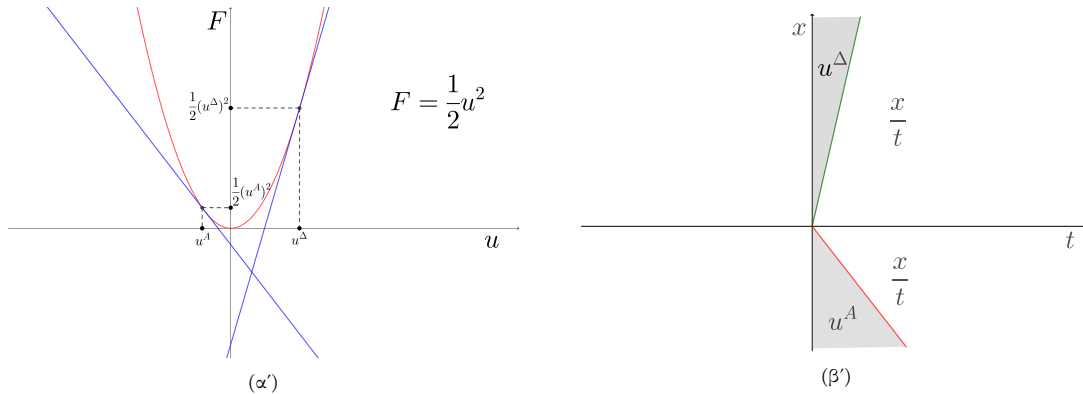
²¹Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε ότι $u(x, t) = u(\lambda x, \lambda t) \quad \forall \lambda > 0$, επιλέγοντας επομένως $\lambda = 1/t, t > 0$, έχουμε ότι $u(x, t) = u(x/t, 1)$. Έχουμε έτσι έναν μετασχηματισμό $(x, t) \rightarrow x/t (= \xi)$ τέτοιον ώστε $u(x, t) = u(x/t, 1) = \tilde{u}(x/t) (= \tilde{u}(\xi))$, όμως όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενες ενότητες είναι πάγια τακτική να γράφουμε u αντί του \tilde{u} . Γενικά, χρησιμοποιούμε συχνά το γράμμα u για να δηλώσουμε την λύση μιας ΜΔΕ ή ενός προβλήματος. Η ακριβής τιμή που δηλώνεται από τη u μπορεί επομένως να αλλάξει από γραμμή σε γραμμή σε έναν δεδομένο υπολογισμό. Το μεγάλο πλεονέκτημα είναι ότι οι υπολογισμοί μας θα έχουν πιο απλή μορφή. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με τις σταθερές που χρησιμοποιούμε συχνά το γράμμα c για να δηλώσουμε οποιαδήποτε σταθερά σε έναν υπολογισμό.

- είτε $u' = 0$, δηλαδή $u \equiv c$ (σταθερή),
- είτε $u\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$.

Έτσι η λύση του προβλήματος του Riemann είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A, & x \leq u^A t, \\ \frac{x}{t}, & u^A t < x < u^\Delta t, \\ u^\Delta, & x \geq u^\Delta t, \end{cases}$$

που είναι συνεχής στο άνω ημιεπίπεδο $t > 0$ (βλ. Σχήμα 2.31).



Σχήμα 2.31: (α) Εφαπτόμενες στο γράφημα της $f(u)$ στα σημεία $(u^A, \frac{(u^A)^2}{2}), (u^\Delta, \frac{(u^\Delta)^2}{2})$, (β') Οι $x = u^A t$ και $x = u^\Delta t$ είναι παράλληλες με τις ανωτέρω εφαπτόμενες.

Θεωρούμε τώρα το γενικό πρόβλημα Riemann

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^A, & x < 0, \\ u^\Delta, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.71)$$

Έστω $F \in C^2$, γνήσια κυρτή ($F'' > 0$). Η κατάσταση είναι εντελώς ανάλογη με εκείνη της εξίσωσης του Burgers χωρίς ιξώδες, απλώς αντί για $u(x, t) = \frac{x}{t}$, η μη σταθερή, ομαλή, αυτο-όμοια λύση αναζητείται τώρα στη μορφή

$$u(x, t) = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad g \in C^1.$$

Την αντικαθιστούμε στην εξίσωση του ΠΑΤ (2.71) και παίρνουμε

$$-\frac{x}{t^2}g'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t}F'\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right)g'\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}g'\left(\frac{x}{t}\right)\left[F'\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right) - \frac{x}{t}\right] = 0.$$

Υποθέτουμε ότι η παράγωγος g' δεν μηδενίζεται. Τότε, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$F'(g(\xi)) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η g είναι η αντίστροφη της F' :

$$g = (F')^{-1}, \quad \text{με } g' \neq 0,$$

η οποία υπάρχει, διότι αφού η F είναι γνήσια κυρτή, η F' είναι γνήσια μονότονη.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: $u^A < u^\Delta$, όπως θεωρήσαμε προηγουμένως στην ειδική περίπτωση του προβλήματος Riemann, και $u^A > u^\Delta$. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές παίρνουμε μοναδική λύση εντροπίας (entropy solution):

1. Λύση αυξανόμενης αραιώσης (rarefaction wave, fan): $u^A < u^\Delta$

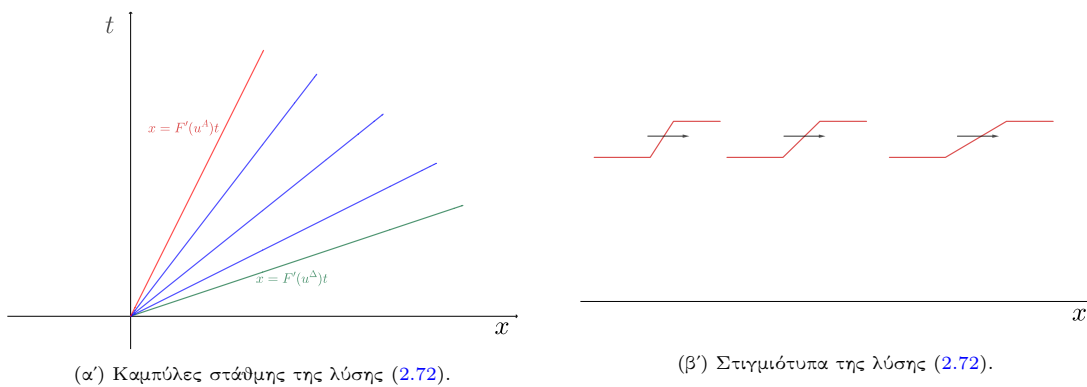
Παρατηρούμε ότι επί των ευθειών $x = F'(u^j)t$, $j = A, \Delta$, έχουμε

$$u(F'(u^j)t, t) = g(F'(u_j)) = u^j, \quad j = A, \Delta.$$

Έτσι, ορίζεται η ακόλουθη συνεχής ασθενής λύση του ΠΑΤ:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A, & \frac{x}{t} \leq F'(u^A), \\ g\left(\frac{x}{t}\right), & F'(u^A) < \frac{x}{t} < F'(u^\Delta), \\ u^\Delta, & \frac{x}{t} \geq F'(u^\Delta), \end{cases} \quad (2.72)$$

με $g = (F')^{-1}$. Η λύση $u(x, t) = g\left(\frac{x}{t}\right)$ είναι ασυνεχής στο $(0, 0)$, θετική για $t > 0$ και λέγεται λύση αυξανόμενης αραιώσης ή λύση-βεντάλια (βλ. Σχήμα 2.32).



Σχήμα 2.32: Καμπύλες στάθμης και στιγμιότυπα της λύσης (2.72). Τα βέλη δείχνουν τη φορά κίνησης της λύσης με την πάροδο του χρόνου.

2. Κρουστικό κύμα: $u^A > u^\Delta$

Στην περίπτωση αυτή η σχέση της $u(x, t)$ που δώσαμε δεν έχει νόημα αφού καμία συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο δεν προσδιορίζεται από αυτή τη σχέση. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ασθενής λύση εντελώς διαφορετικής μορφής, που είναι ασυνεχής (κρουστικό κύμα):

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A, & \frac{x}{t} < m, \\ u^\Delta, & \frac{x}{t} > m, \end{cases} \quad (2.73)$$

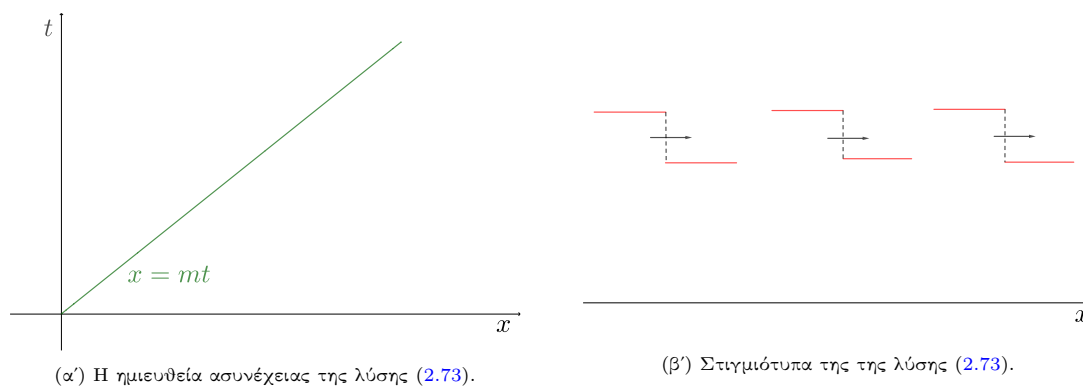
όπου $m = \frac{F(u^A) - F(u^\Delta)}{u^A - u^\Delta}$ (συνθήκη Rankine-Hugoniot). Δηλαδή, η γραφική παράσταση της λύσης ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής μένει αναλλοίωτη και μετατοπίζεται προς τα δεξιά με την πάροδο του χρόνου (βλ. Σχήμα 2.33) με ταχύτητα m , οπότε η ασυνέχεια της αρχικής τιμής μετατοπίζεται την χρονική στιγμή t στο σημείο $x = mt$.

Παρατηρήσεις 2.52. 1. Στην πρώτη περίπτωση οι τιμές u^A και u^Δ διαχωρίζονται από ένα κύμα αυξανόμενης αραιώσης. Στη δεύτερη περίπτωση οι τιμές u^A και u^Δ διαχωρίζονται από ένα κρουστικό κύμα με σταθερή ταχύτητα m .

2. Η κυρτότητα της F χρειάζεται μόνο στο διάστημα $[u^A, u^\Delta]$.

3. Αν η F είναι γνήσια κοίλη, ανταλλάσσονται τα συμπεράσματα, δηλαδή για $u^A < u^\Delta$ έχουμε κρουστικό κύμα και για $u^A > u^\Delta$ έχουμε λύση αυξανόμενης αραιώσης.

4. Αν η F δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη, το ΠΑΤ επίσης αντιμετωπίζεται (χρήση κυρτής και κοίλης θήκης).



Σχήμα 2.33: Καμπύλες στάθμης και στιγμιότυπα της λύσης (2.73). Τα βέλη δείχνουν τη φορά κίνησης της λύσης με την πάροδο του χρόνου.

Σχόλιο:

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών ανάγει σε ΣΔΕ τα προβλήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης και χειρίζεται ακόμη και τις ολικά μη γραμμικές εξισώσεις. Ωστόσο, καταρρέει για γραμμικά συστήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης ή για εξισώσεις υψηλότερης τάξης.

Κεφάλαιο 3

Η εξίσωση μεταφοράς

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε εκτενέστερα την εξίσωση μεταφοράς (βλ. Παράδειγμα 2.6). Η εξίσωση μεταφοράς, $u_t + cu_x = f$ (ομογενής για $f \equiv 0$ και μη ομογενής για $f \neq 0$), όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι μια απλή γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης που αποτελεί την απλούστερη εξίσωση κυματικής διάδοσης. Για το λόγο αυτό η μελέτη κάποιων επιπλέον στοιχείων της στο κεφάλαιο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντική για να κατανοήσουμε αργότερα την κυματική εξίσωση δεύτερης τάξης (βλ. Κεφάλαιο 8).

3.1 Η ομογενής εξίσωση μεταφοράς

Κυματική διάδοση:

Το κύμα είναι μια διαταραχή που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου σε ένα μέσο μεταφέροντας ενέργεια (όχι αναγκαστικά ύλη). Παραδείγματα κυμάτων συναντάμε σε

- Ακουστική (ήχος)
- Ρευστομηχανική (κύματα σε νερό, αεροδυναμική)
- Ελαστικότητα (σεισμοί, παραμορφώσεις υλικών)
- Ηλεκτρομαγνητισμός (οπτική, ηλεκτρομαγνητικά κύματα)
- Βιολογία ('επιζωοτικά' κύματα, επιζωοτία=επιδημία σε έμβια όντα εκτός του ανθρώπου)
- Χημεία (εκρήξεις)

Οδεύοντα κύματα: Έστω συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, t)$. Η απλούστερη μορφή κύματος είναι η συνάρτηση

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (3.1)$$

με $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή παριστάνει ένα οδεύον κύμα (*travelling wave*) που κινείται προς τα δεξιά¹ με σταθερή ταχύτητα c , διατηρώντας το σχήμα του,² όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.6 της Ενότητας 2.1.3. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η u επαληθεύει την ομογενή εξίσωση μεταφοράς

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = -cf'(x - ct) + cf'(x - ct) = 0$$

Αυτή η συμπεριφορά είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των γραμμικών κυμάτων.

Ερώτημα: Υπάρχουν λύσεις οδεύοντος κύματος για μια δεδομένη ΜΔΕ;

¹Ομοίως προς τα αριστερά οδεύον κύμα: $u(x, t) = f(x + ct)$ με αντίστοιχες ευθείες: $x + ct = \text{σταθ.}$, που αποτελεί λύση της ΜΔΕ $u_t - cu_x = 0$

²Έτσι, η ονομασία της προέρχεται από το φαινόμενο που περιγράφει. Για παράδειγμα, μια υγρή χρωστική ουσία που εισέρχεται σε ένα ρεύμα νερού που ρέει με ταχύτητα c , θα μεταφερθεί κατά την κατεύθυνση της ροής χωρίς να παραμορφωθεί.

Συνήθως θεωρούμε ότι ο χρόνος μεταβάλλεται από το $-\infty$ στο $+\infty$, δηλαδή ότι το κύμα υπάρχει για κάθε χρόνο t οπότε δεν απαιτούμε αρχικές συνθήκες. Αντιθέτως, απαιτούμε συνήθως συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$u(-\infty, t) = c_1, \quad u(+\infty, t) = c_2,$$

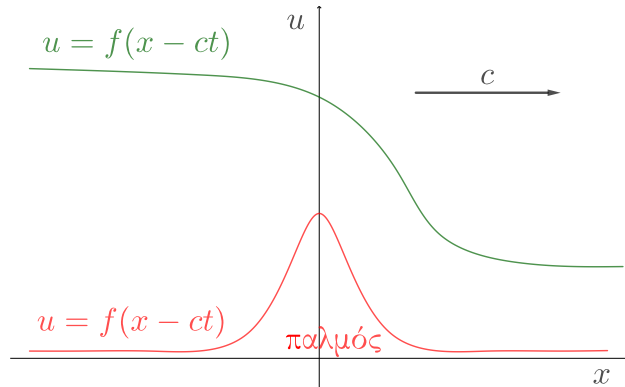
όπου c_1, c_2 σταθερές.

Μια λύση τύπου κυματικού μετώπου (*travelling front*) είναι μια λύση της μορφής

$$u(x, t) = f(x \mp ct),$$

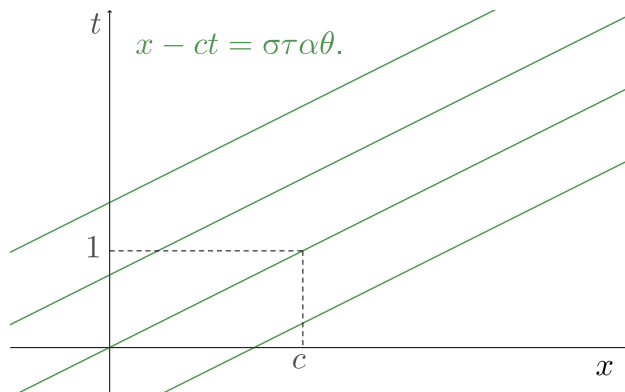
με f αρκούντως ομαλή, που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Αν $c_1 = c_2$, η λύση τύπου κυματικού μετώπου λέγεται παλμός (*pulse*) (βλ. Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Λύση τύπου κυματικού μετώπου.

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η οικογένεια των χαρακτηριστικών γραμμών $x - ct = \text{σταθερά}$ της εξίσωσης μεταφοράς αποτελείται από ευθείες παράλληλες μεταξύ τους και καθώς η σταθερά λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές, οι χαρακτηριστικές καλύπτουν όλο το Καρτεσιανό επίπεδο xt . Υπενθυμίζουμε ότι οι λύσεις u της εξίσωσης είναι σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών γραμμών/καμπυλών στάθμης, αφού η έκφραση $u_t + cu_x$ για κάθε συνεχώς παραγωγίσιμη u είναι πολλαπλάσιο της κατά κατεύθυνση παραγώγου της u στην κατεύθυνση $(c, 1)$ στο επίπεδο xt (βλ. Ενότητα 2.1.1 και Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Χαρακτηριστικές ευθείες της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς.

Είδαμε επομένως παραπάνω την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς με καμπύλες στάθμης, και σε προηγούμενη ενότητα την επίλυση της ΜΔΕ με χαρακτηριστικές καμπύλες (βλ. Ενότητα 2.1.3). Αν θέλαμε να λύσουμε την εξίσωση με την μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων (βλ. Ενότητα 2.1.2), δηλαδή να εισάγουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $\xi\eta$ (αντικαθιστώντας το xt) έτσι ώστε ο ένας άξονας των νέων συντεταγμένων (π.χ. ο ξ) να είναι παράλληλος προς τις χαρακτηριστικές (πάνω στις οποίες η λύση της ΜΔΕ u είναι σταθερή), οι χαρακτηριστικές θα έχουν εξισώσεις της μορφής $\xi = \text{σταθερά}$ ($\xi = x - ct = \text{σταθερά}$). Ο άλλος (νέος) άξονας η μπορεί να είναι όποιος επιθυμούμε αρκεί να μην είναι παράλληλος προς τον άξονα των ξ (δηλαδή προς τις χαρακτηριστικές). Με τον τρόπο αυτό η ΜΔΕ

θα αναχθεί σε μια ΣΔΕ. Αλλάζουμε λοιπόν τις συντεταγμένες μας σε

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, t) = x - ct, \\ \eta = \eta(x, t) = cx + t. \end{cases}$$

Έχουμε τότε

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 + c^2 \neq 0,$$

άρα ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ είναι αντιστρέψιμος. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση

$$\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)),$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας η (ομογενής) εξίσωση μεταφοράς γίνεται

$$0 = u_t + cu_x = (-c\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta) + c(\tilde{u}_\xi + c\tilde{u}_\eta) = (1 + c^2)\tilde{u}_\eta$$

οπότε $\tilde{u}_\eta = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi)$ δηλαδή

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

όπου f συνεχώς παραγωγίσιμη.

Παρατηρήσεις 3.1. 1. Αντίστοιχα το ΠΑΤ για την εξίσωση μεταφοράς είναι

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Η συνάρτηση $u(x, t) := f(x - ct)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}, t > 0$, και αποτελεί κλασική λύση του ΠΑΤ αν και μόνο αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Γενικά, η u είναι τόσες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όσες και η αρχική συνθήκη f . Αν η f δεν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (π.χ. είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη ή (κατά τμήματα) συνεχής ή ασυνεχής) τότε η u είναι γενικευμένη ή ασθενής λύση του προβλήματος.

2. Οι ιδιομορφίες των αρχικών δεδομένων f διαδίδονται κατά μήκος της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το εν λόγω σημείο. Δηλαδή, έστω για παράδειγμα ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη παντού εκτός από ένα σημείο x^* , έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο x^* και να υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι από αριστερά ($f'(x^* -)$) και δεξιά ($f'(x^* +)$), αλλά να είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Τότε, η λύση $u(x, t) := f(x - ct), x \in \mathbb{R}, t > 0$, του παραπάνω ΠΑΤ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της που δεν βρίσκεται επί της χαρακτηριστικής $x - ct = x^*, t \geq 0$, που διέρχεται από το σημείο x^* , δηλαδή η ιδιομορφία της αρχικής συνθήκης f επηρεάζει την ομαλότητα της λύσης μόνο επί της χαρακτηριστικής ευθείας της εξίσωσης. Γενικεύοντας για τις ΜΔΕ, οι ιδιομορφίες διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.

Παράδειγμα 3.2. Το ΠΑΤ

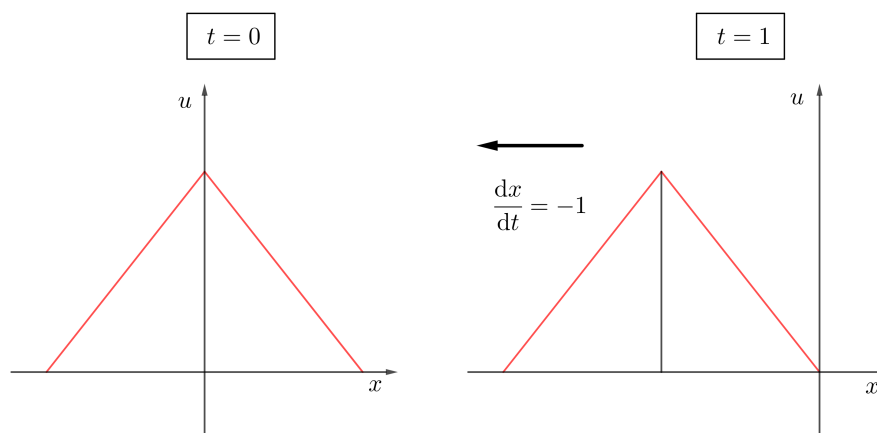
$$\begin{cases} -u_x + u_t = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1 - |x|, & |x| \leq 1, \end{cases} \end{cases}$$

έχει γενικευμένη λύση (βλ. Σχήμα 3.3)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > 1 - t, \\ 1 - |x + t|, & -1 - t \leq x \leq 1 - t, \\ 0, & x < -1 - t. \end{cases}$$

Άσκηση 3.3. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} 2u_x + u_t = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Σχήμα 3.3

3.2 Η μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς

Θα μελετήσουμε τώρα την μη-ομογενή εξίσωση μεταφοράς

$$u_t + cu_x = f(x, t), \quad (3.2)$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεδομένη (μη μηδενική) συνεχής συνάρτηση. Σε αντίθεση με τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς που είναι οδεύοντα κύματα, οι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $u = u(x, t)$.

Για $c = 0$ η (3.2) έχει λύση

$$u(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds + u(x, 0),$$

Για $c \neq 0$ θα λύσουμε με δύο τρόπους την εξίσωση.

1ος τρόπος: Έστω σημείο (ρ, σ) . Θέλουμε να προσδιορίσουμε την τιμή $u(\rho, \sigma)$. Η χαρακτηριστική ευθεία της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς που διέρχεται από το σημείο (ρ, σ) είναι

$$x = \rho + c(t - \sigma).$$

Επιλέγουμε $\tau := t - \sigma$, η εξίσωση της χαρακτηριστικής γίνεται τότε $x = \rho + c\tau$. Έτσι η συνάρτηση

$$g(\tau) := u(\rho + c\tau, \sigma + \tau)$$

δίνει τις τιμές της λύσης u της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς κατά μήκος της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το σημείο (ρ, σ) . Η παράγωγος της g μας δίνει (εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας)

$$g'(\tau) = cu_x(\rho + c\tau, \sigma + \tau) + u_t(\rho + c\tau, \sigma + \tau),$$

άρα από την (3.2) έχουμε

$$g'(\tau) = f(\rho + c\tau, \sigma + \tau),$$

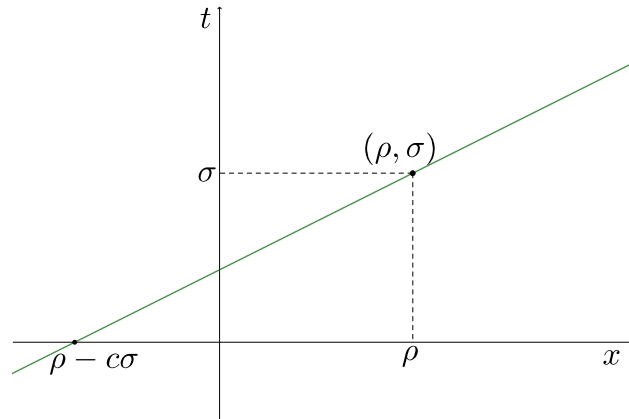
και ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση από $-\sigma$ έως 0 έχουμε

$$g(0) - g(-\sigma) = \int_{-\sigma}^0 f(\rho + c\tau, \sigma + \tau) d\tau = \int_0^\sigma f(\rho + c(s - \sigma), s) ds,$$

όπου η τελευταία σχέση προέκυψε με αλλαγή μεταβλητής $s = \sigma + \tau$. Αφού $g(0) = u(\rho, \sigma)$ και $g(-\sigma) = u(\rho - c\sigma, 0)$ έχουμε τελικά τη λύση

$$u(\rho, \sigma) = u(\rho - c\sigma, 0) + \int_0^\sigma f(\rho + c(s - \sigma), s) ds. \quad (3.3)$$

Δηλαδή, η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς είναι το άθροισμα της τιμής της u στο σημείο τομής της χαρακτηριστικής ευθείας της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς με τον άξονα των x και του ολοκληρώματος του μη ομογενούς όρου f στο ευθύγραμμο τμήμα της χαρακτηριστικής μεταξύ των σημείων $(\rho - c\sigma, 0)$ και (ρ, σ) (βλ. Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4: Χαρακτηριστική γραμμή της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς που διέρχεται από το σημείο (ρ, σ) .

2ος τρόπος: Θα λύσουμε πρώτα την εξίσωση με τη μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων όπως στην περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης. Η ξ προκύπτει όπως και πριν και για την η επιλέγουμε $\eta = t$. Χρησιμοποιούμε επομένως ως συντεταγμένες το ακόλουθο σύστημα καμπυλών

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, t) = x - ct, \\ \eta = \eta(x, t) = t. \end{cases}$$

Έχουμε τότε

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

άρα ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ είναι αντιστρέψιμος. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση

$$\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)),$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας η μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς γίνεται

$$f(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = (-c\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta) + c(\tilde{u}_\xi) = \tilde{u}_\eta$$

οπότε $\tilde{u}_\eta = f(\xi + c\eta, \eta)$. Ολοκληρώνοντας από 0 έως η έχουμε

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int_0^\eta f(\xi + cs, s) ds + h(\xi),$$

όπου h αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αντικαθιστώντας τις αρχικές συντεταγμένες έχουμε

$$u(x, t) = \int_0^t f(x + c(s-t), s) ds + h(x-ct).$$

Για $t = 0$ η σχέση δίνει $u(x, 0) = h(x)$, άρα μπορούμε να γράψουμε τη λύση της εξίσωσης στη μορφή

$$u(x, t) = u(x-ct, 0) + \int_0^t f(x + c(s-t), s) ds, \quad (3.3')$$

βλ. την (3.3).

Παρατήρηση 3.4. Άρα το αντίστοιχο ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.4)$$

έχει λύση

$$u(x, t) = \phi(x-ct) + \int_0^t f(x + c(s-t), s) ds.$$

Για να είναι η λύση u του ΠΑΤ (3.4) συνεχώς παραγωγίσιμη, υπό την προϋπόθεση ότι η ϕ είναι αρκετά ομαλή, αναγκαία συνθήκη είναι να είναι η f συνεχής, και ικανή συνθήκη είναι να είναι η f συνεχώς παραγωγίσιμη.

Κεφάλαιο 4

ΜΔΕ δεύτερης τάξης στις δύο διαστάσεις

4.1 Ταξινόμηση ΜΔΕ δεύτερης τάξης

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ΜΔΕ 2ης τάξης με εξαρτημένη μεταβλητή u δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y (αντίστοιχα για t). Η γενική μορφή της γραμμικής¹ ομογενούς² εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2f \frac{\partial u}{\partial x} + 2g \frac{\partial u}{\partial y} + eu = 0, \quad (4.1)$$

όπου οι a, h, b, f, g, e είναι γενικά συναρτήσεις των x και y . Υποθέτουμε ότι η u και οι συναρτήσεις-συντελεστές είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες (C^2).

Η ταξινόμηση γίνεται ως προς τη δυνατότητα της αναγωγής της (4.1) μέσω ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων σε μια **κανονική μορφή** σ'ένα σημείο.

Μια εξίσωση λέγεται υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική σ'ένα σημείο (x_0, y_0) ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας

$$ab - h^2.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν

- (i) $ab - h^2 < 0$, τότε η εξίσωση λέγεται υπερβολική.
- (ii) $ab - h^2 = 0$, τότε η εξίσωση λέγεται παραβολική.
- (iii) $ab - h^2 > 0$, τότε η εξίσωση λέγεται ελλειπτική.

Η ονομασία των διαφορικών τύπων της ταξινόμησης έχει γεωμετρική προέλευση. Όπως είναι γνωστό η γενική μορφή της κωνικής τομής

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0$$

παριστάνει μια

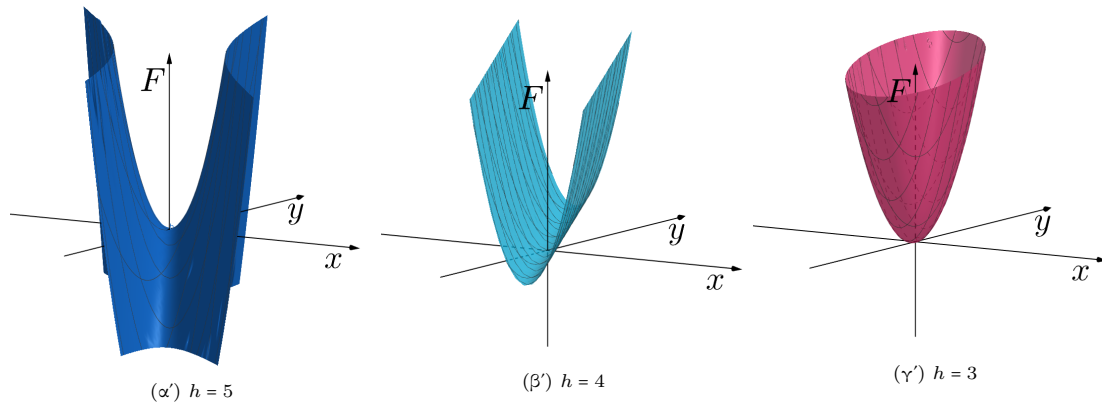
- (i) υπερβολή όταν $ab - h^2 < 0$.
- (ii) παραβολή όταν $ab - h^2 = 0$.
- (iii) έλλειψη όταν $ab - h^2 > 0$.

Έτσι έχουμε

1. Η εξίσωση $u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{yy}$ προκύπτει από την (4.1) αν θέσουμε $a = 1, b = -c^{-2}, h = f = g = e = 0$, και αφού $ab - h^2 = -c^{-2} < 0$ είναι υπερβολική εξίσωση.

¹ Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας: Θυμίζουμε ότι αν u_1, u_2, \dots, u_n λύσεις της γραμμικής εξίσωσης $Lu = f$ τότε και οι γραμμικοί συνδυασμοί $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, c_i \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύσεις της.

² Μια γραμμική συνάρτηση λέγεται ομογενής αν κάθε όρος της περιέχει είτε την άγνωστη συνάρτηση είτε κάποια παράγωγο της. Για παράδειγμα η εξίσωση $\nabla^2 u(x, y) = 0$ είναι ομογενής, ενώ η εξίσωση $\nabla^2 u(x, y) = f(x, y) \neq 0$ είναι μη ομογενής.



Σχήμα 4.1: Η γενική μορφή της συνάρτησης $F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e$ με $a = 8, b = 2, f = g = e = 0$ και διάφορες τιμές της h .

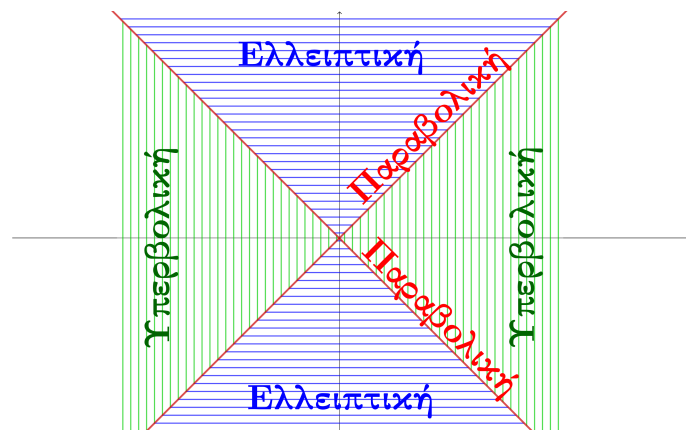
2. Η εξίσωση $u_{xx} = \frac{1}{D}u_y$ προκύπτει από την (4.1) αν θέσουμε $a = 1, b = h = f = g = e = 0, g = -1/(2D)$, και αφού $ab - h^2 = 0$ είναι παραβολική εξίσωση.
3. Η εξίσωση του Laplace : $u_{xx} + u_{yy} = 0$ προκύπτει από την (4.1) αν θέσουμε $a = b = 1, h = f = g = e = 0$, και αφού $ab - h^2 = 1 > 0$ είναι ελλειπτική εξίσωση.

Οι εξισώσεις όπου τα a, b, h είναι συναρτήσεις των x και y (εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές) μπορεί να αλλάζουν όταν αλλάζει το πεδίο ορισμού τους στο επίπεδο xy . Για παράδειγμα η εξίσωση

$$yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = 0$$

είναι:

- (i) υπερβολικού τύπου στην περιοχή $y^2 - x^2 < 0$
- (ii) παραβολικού τύπου κατά μήκος των γραμμών $y^2 - x^2 = 0$
- (iii) ελλειπτικού τύπου στην περιοχή $y^2 - x^2 > 0$.



Σχήμα 4.2: Η εξίσωση $yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = 0$ είναι (i) υπερβολική στην περιοχή $y^2 - x^2 < 0$ (πράσινη γραμμοσκιασμένη περιοχή), (ii) παραβολική κατά μήκος των γραμμών $y^2 - x^2 = 0$ (κόκκινες γραμμές), (iii) ελλειπτική στην περιοχή $y^2 - x^2 > 0$ (μπλε γραμμοσκιασμένη περιοχή).

Η ταξινόμηση γίνεται εντελώς ανάλογα (αλλά πιο περίπλοκα) για τις εξισώσεις τριών ή και περισσότερων μεταβλητών, όπου η ονομασία διατηρείται (αν και θα έπρεπε να αντικατασταθεί από αντίστοιχους τριδιάστατους όρους πχ. ελλειψοειδής κοκ.). Έτσι έχουμε ότι

1. Η κυματική εξίσωση: $\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}u_{tt}$ είναι υπερβολική εξίσωση.
2. Η εξίσωση διάχυσης ή θερμότητας: $\nabla^2 u = \frac{1}{D}u_t$ είναι παραβολική εξίσωση.

3. Η εξίσωση του Laplace : $\nabla^2 u = 0$ όπως είδαμε είναι ελλειπτική εξίσωση.

Οι μορφές των γενικών λύσεων και των συνοριακών συνθηκών των γραμμικών ΜΔΕ εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον τύπο της εξίσωσης.

Παρατηρήσεις 4.1. 1. Αν στην εξίσωση (4.1) $f = g = e = 0$ τότε η εξίσωσή γίνεται

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

και ονομάζεται εξίσωση του Euler .

2. Η ταξινόμηση των γραμμικών ΜΔΕ είναι ουσιαστικά η ταξινόμηση των φυσικών προβλημάτων σε τρεις βασικούς τύπους:

- (i) Ταλαντούμενα συστήματα και διάδοση κυμάτων (υπερβολικού τύπου),
- (ii) Διαδικασίες ροής θερμότητας και διάχυσης (παραβολικού τύπου)
- (iii) Φαινόμενα σταθερής κατάστασης/ισορροπίας (ελλειπτικού τύπου)

4.2 Κανονικές μορφές και χαρακτηριστικές καμπύλες

Θεωρούμε την εξίσωση (4.1) και εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

ώστε να μετατρέψουμε την εξίσωση μας σε κανονική μορφή.

Υποθέτουμε ότι οι ξ, η είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και ότι η Ιακωβιανή

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός, άρα ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε τα x, y μπορούν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα από τα ξ, η . Αν οι x, y είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις των ξ, η έχουμε³:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην (4.1) παίρνουμε την κανονική μορφή

$$A u_{\xi\xi} + 2H u_{\xi\eta} + B u_{\eta\eta} + 2F u_\xi + 2G u_\eta + E u = 0 \quad (4.3)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= a \xi_x^2 + 2h \xi_x \xi_y + b \xi_y^2 \\ H &= a \xi_x \eta_x + h (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + b \xi_y \eta_y \\ B &= a \eta_x^2 + 2h \eta_x \eta_y + b \eta_y^2 \\ 2F &= a \xi_{xx} + 2h \xi_{xy} + b \xi_{yy} + 2f \xi_x + 2g \xi_y \\ 2G &= a \eta_{xx} + 2h \eta_{xy} + b \eta_{yy} + 2f \eta_x + 2g \eta_y \\ E &= e \end{aligned} \quad (4.4)$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$AB - H^2 = J^2 (ab - h^2).$$

³Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια γράφουμε u αντί του \tilde{u} για απλούστερη μορφή των υπολογισμών.

Επειδή η ταξινόμηση εξαρτάται από τους συντελεστές $a, h, b / A, H, B$ γράφουμε τις (4.1) και (4.3) ως εξής

$$au_{xx} + 2hu_{xy} + bu_{yy} = \Theta, \quad (4.5)$$

όπου $\Theta = \Theta(x, y, u, u_x, u_y)$, και

$$Au_{\xi\xi} + 2Hu_{\xi\eta} + Bu_{\eta\eta} = Q, \quad (4.6)$$

όπου $Q = Q(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Έτσι, θέλουμε να μετασχηματίσουμε την (4.5) σε κανονικές μορφές. Υποθέτουμε αρχικά ότι κανένα από τα a, b, h δεν είναι μηδέν. Έστω ότι τα ξ, η είναι οι νέες μεταβλητές έτσι ώστε τα A, B της (4.6) να μηδενίζονται. Από τις (4.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2h\xi_x\xi_y + b\xi_y^2 = 0 \\ B &= a\eta_x^2 + 2h\eta_x\eta_y + b\eta_y^2 = 0. \end{aligned}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις είναι του τύπου

$$a\zeta_x^2 + 2h\zeta_x\zeta_y + b\zeta_y^2 = 0.$$

Διαιρούμε δια ζ_y^2 και έχουμε

$$a\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + 2h\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + b = 0. \quad (4.7)$$

Κατά μήκος της καμπύλης $\zeta = \text{σταθ.}$ έχουμε

$$d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\zeta_x}{\zeta_y} = -\frac{dy}{dx}$$

κι έτσι η (4.7) γράφεται

$$ay_x^2 - 2hy_x + b = 0 \quad (4.8)$$

που έχει ρίζες

$$y_x = \frac{h + \sqrt{h^2 - ab}}{a}, \quad (4.9)$$

και

$$y_x = \frac{h - \sqrt{h^2 - ab}}{a}. \quad (4.10)$$

Οι (4.9) και (4.10) είναι γνωστές ως *χαρακτηριστικές εξισώσεις* και είναι οι ΣΔΕ για οικογένειες καμπυλών του επιπέδου xy κατά μήκος των οποίων $\xi = \text{σταθ}$ και $\eta = \text{σταθ}$.

Οι λύσεις των (4.9) και (4.10) λέγονται **χαρακτηριστικές καμπύλες**. Αφού οι ΣΔΕ είναι 1ης τάξης, η λύση κάθε μιας περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά. Παίρνουμε ως ξ τη μια και ως η την άλλη απ'αυτές τις σταθερές. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $\xi = \text{σταθ}$ και $\eta = \text{σταθ}$ παριστάνουν ευθείες παράλληλες προς τους άξονες στο σύστημα αξόνων $\xi\eta$. Θεωρούμε στην συνέχεια τις τρεις δυνατές περιπτώσεις.

I) Υπερβολικές εξισώσεις: $ab - h^2 < 0$

Οι ρίζες (4.9) και (4.10) της (4.8) είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους, δηλαδή δίνουν δύο πραγματικές και διακεκριμένες οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών.

Έτσι η (4.6) ανάγεται στην

$$u_{\xi\eta} = Q_1, \quad \text{όπου} \quad Q_1 = \frac{Q}{2H} \quad (4.11)$$

και εύκολα δείχνεται ότι $H \neq 0$.

Η (4.11) λέγεται *πρώτη κανονική μορφή των υπερβολικών εξισώσεων*.

Αν τώρα εισάγουμε τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\begin{aligned} \sigma &= \xi + \eta, \\ \tau &= \xi - \eta, \end{aligned}$$

τότε η (4.11) μετασχηματίζεται στην

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\tau\tau} = Q_2(\sigma, \tau, u, u_\sigma, u_\tau)$$

που λέγεται *δεύτερη κανονική μορφή των υπερβολικών εξισώσεων*.

II) Παραβολικές εξισώσεις: $ab - h^2 = 0$

Οι (4.9),(4.10) συμπίπτουν. Έτσι υπάρχει μια πραγματική οικογένεια χαρακτηριστικών, και παίρνουμε μια μόνο λύση $\xi = \text{σταθ}$ (ή $\eta = \text{σταθ}$).

Αφού $ab = h^2$ και $A = 0$ έχουμε

$$A = a\xi_x^2 + 2h\xi_x\xi_y + b\xi_y^2 = \left(\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{b}\xi_y\right)^2 = 0$$

και έτσι

$$H = a\xi_x\eta_x + h(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + b\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{b}\xi_y\right)\left(\sqrt{a}\eta_x + \sqrt{b}\eta_y\right) = 0.$$

Διαιρώντας την (4.6) δια B παίρνουμε την

$$u_{\eta\eta} = Q_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad B \neq 0$$

που λέγεται *κανονική μορφή των παραβολικών εξισώσεων*. Η (4.6) μπορεί επίσης να πάρει τελικά τη μορφή

$$u_{\xi\xi} = Q_4(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

αν επιλέξουμε της $\eta = \text{σταθ}$. ως λύση της (4.9).

III) Ελλειπτικές εξισώσεις: $ab - h^2 > 0$

Η (4.8) δεν έχει πραγματικές λύσεις. Αντίθετα έχει δύο μιγαδικές, συζυγείς λύσεις που είναι συνεχείς συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές των πραγματικών μεταβλητών x και y . Συνεπώς δεν υπάρχουν πραγματικές χαρακτηριστικές καμπύλες. Όμως, αν οι a, h, b είναι αναλυτικές⁴ συναρτήσεις των x, y , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την (4.8) για μιγαδικά x και y .

Αφού τα ξ, η είναι μιγαδικά, εισάγουμε τις νέες, πραγματικές, μεταβλητές

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \tau &= \frac{1}{2i}(\xi - \eta)\end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}\xi &= \sigma + i\tau \\ \eta &= \sigma - i\tau.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Μετασχηματίζουμε πρώτα την (4.5). Έχουμε

$$Q^*(\sigma, \tau) u_{\sigma\sigma} + 2h^*(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau} + b^*(\sigma, \tau) u_{\tau\tau} = Q_5(\sigma, \tau, u, u_\sigma, u_\tau),\tag{4.13}$$

όπου οι συντελεστές έχουν την ίδια μορφή με εκείνους της (4.4).

Με χρήση των (4.12) οι εξισώσεις $A = B = 0$ γίνονται

$$(a\sigma_x^2 + 2h\sigma_x\sigma_y + b\sigma_y^2) - (a\tau_x^2 + 2h\tau_x\tau_y + b\tau_y^2) \pm 2i\{a\sigma_x\tau_x + h(\sigma_x\tau_y + \sigma_y\tau_x) + b\sigma_y\tau_y\} = 0,$$

(με «+» στο $A = 0$ και «-» στο $B = 0$) ή ισοδύναμα

$$(a^* - b^*) \pm 2ih^* = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^* = b^* \\ h^* = 0. \end{cases}$$

Έτσι η (4.13) γίνεται

$$u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau} = Q_6(\sigma, \tau, u, u_\sigma, u_\tau).$$

Η τελευταία σχέση λέγεται *κανονική μορφή των ελλειπτικών εξισώσεων*

⁴Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x, y λέγεται αναλυτική σε κάποιο πεδίο, αν σε μια περιοχή κάθε σημείου (x_0, y_0) αυτού του πεδίου, η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά των μεταβλητών $(x - x_0)$ και $(y - y_0)$.

Παράδειγμα 4.2. Έστω η εξίσωση

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0.$$

Εδώ $a = y^2$, $h = 0$, $b = -x^2$, $f = g = e = 0$, οπότε $ab - h^2 = -x^2 y^2$. Η εξίσωση είναι υπερβολική παντού, εκτός από τους άξονες $x = 0, y = 0$.

Από τις (4.9) και (4.10) παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y}.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 &= c_1 \quad (\text{οικογένεια υπερβολών}), \\ \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 &= c_2 \quad (\text{οικογένεια κύκλων}). \end{aligned}$$

Για να μετασχηματίσουμε την αρχική εξίσωση σε κανονική μορφή, παίρνουμε (βλ. Σχήμα 4.3)

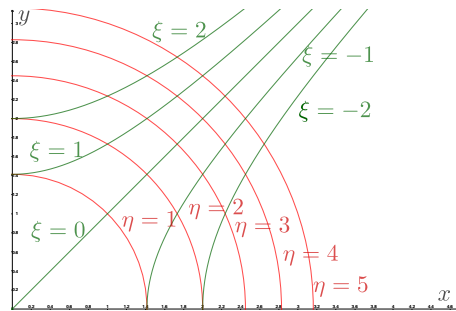
$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \\ \eta &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε (βλ. (4.2)):

$$\begin{aligned} u_x &= -x u_\xi + x u_\eta, \\ u_y &= y u_\xi + y u_\eta, \\ u_{xx} &= x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} - u_\xi + u_\eta, \\ u_{yy} &= y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + u_\xi + u_\eta. \end{aligned}$$

Η αρχική εξίσωση παίρνει τελικά την κανονική μορφή

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\eta.$$



Σχήμα 4.3: Οι καμπύλες $\xi = \text{σταθ}$ (υπερβολές) με πράσινο και $\eta = \text{σταθ}$ (κύκλοι) με κόκκινο.

Παράδειγμα 4.3.

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

Εδώ $a = 1$, $h = 0$, $b = x^2$, $f = g = e = 0$, οπότε $ab - h^2 = x^2$. Η εξίσωση είναι ελλειπτική παντού εκτός από τον άξονα $x = 0$. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι

$$\frac{dy}{dx} = \pm ix$$

απόπου παίρνουμε

$$2y \mp ix^2 = c_{1,2}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\xi &= 2y - ix^2 \\ \eta &= 2y + ix^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}(\xi + \eta) = 2y \\ \tau &= \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -x^2.\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι όπως πριν παίρνουμε την κανονική μορφή

$$u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau} = -\frac{1}{2\tau}u_{\tau}.$$

Παράδειγμα 4.4.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

Εδώ $a = 1, h = -2, b = 4, f = g = e = 0$, οπότε $ab - h^2 = 4 - 4 = 0$. Η εξίσωση είναι παραβολική (μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές). Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{a} = -2$$

απόπου παίρνουμε

$$y = -2x + c_1.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\xi &= y + 2x \\ \eta &= y \quad (\text{αυθαίρετη επιλογή για την οποία } J \neq 0).\end{aligned}$$

Η κανονική μορφή είναι

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{4}e^{\eta}.$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές ως προς η και περνώντας στις (αρχικές) μεταβλητές x, y , έχουμε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$u(x, y) = \frac{1}{4}e^y + f(y + 2x).$$

Παρατήρηση 4.5. Στην πράξη η εύρεση της γενικής λύσης από την κανονική μορφή, εφαρμόζεται μόνο για υπερβολικές εξισώσεις.

Σχόλιο:

Συνοψίζοντας, μπορεί να δειχθεί ότι για (ξ, η) ή (σ, τ) νέες ανεξάρτητες μεταβλητές οι τρεις τύποι εξισώσεων παίρνουν τις παρακάτω κανονικές μορφές:

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ	ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ	ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ
I) $u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$	$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$	$\xi, \eta \in \mathbb{C}$
II) $u_{\sigma\sigma} - u_{\tau\tau} = H_2(\sigma, \tau, u, u_{\sigma}, u_{\tau})$	$u_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$	$u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau} = H_4(\sigma, \tau, u, u_{\sigma}, u_{\tau})$
$\sigma = \xi + \eta$		$\sigma = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$
$\tau = \xi - \eta$		$\tau = \frac{1}{2i}(\xi - \eta)$

Κεφάλαιο 5

Ανασκόπηση: χώροι με εσωτερικό γινόμενο & σειρές Fourier

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια ανασκόπηση. Παρουσιάζουμε πρώτα κάποιους βασικούς ορισμούς των χώρων εσωτερικού γινομένου που είναι οι κατάλληλοι χώροι για να αναζητήσουμε λύσεις των ΜΔΕ. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις σειρές Fourier ¹ (ή μέθοδος των αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις) που είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών-αρχικών τιμών (ΠΣΑΤ) των ΜΔΕ. Η μέθοδος των σειρών Fourier χρησιμοποιείται σε προβλήματα σε φραγμένα (στο χώρο) χωρία.²

Η μεθοδολογία επομένως συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα:

1. Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών: κατασκευή λύσεων της μορφής $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$
2. Αναγωγή της ΜΔΕ σε ΣΔΕ (Πρόβλημα Sturm-Liouville)
3. $T_n(t)$ και $X_n(x)$ ιδιοσυναρτήσεις (λύσεις) του ΠΣΤ Sturm-Liouville (S-L)
4. Λύση της ΜΔΕ οι γραμμικοί συνδυασμοί των ιδιοσυναρτήσεων του S-L (Αρχή Υπέρθεσης³)
5. Επέκταση λύσεων στο $\infty \rightsquigarrow$ Σειρές Fourier

5.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο - Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 5.1. Ονομάζουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο έναν γραμμικό χώρο X πάνω στον \mathbb{C} εφοδιασμένο με μια απεικόνιση⁴ $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει

$$(i) (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z), \quad x, y, z \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$(ii) (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x, y \in X$$

$$(iii) (x, x) \geq 0 \quad x \in X, \text{ και } (x, x) = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0.$$

¹Ο Fourier πρώτος εισήγαγε τη σειρά το 1807 ως λύση της εξ. θερμότητας σε μια μεταλλική πλάκα, αφού μέχρι τότε δεν ήταν γνωστή καμία λύση για την εξ. θερμότητας στη γενική περίπτωση, αν και ήταν γνωστές οι μερικές λύσεις της στην περίπτωση που η πηγή θερμότητας συμπεριφερόταν με έναν απλό τρόπο, ιδίως, εάν η πηγή θερμότητας ήταν ένα ημιτονοειδές ή συνημιτονοειδές κύμα. Αυτές οι μερικές λύσεις καλούνται χαρακτηριστικές συναρτήσεις ή ιδιοσυναρτήσεις. Η ιδέα του Fourier ήταν να μοντελοποιήσει μια περίπλοκη πηγή θερμότητας ως μια επαλληλία (ή γραμμικό συνδυασμό) απλών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών κυμάτων, και να γράψει τη λύση ως μια επαλληλία (αρχή της επαλληλίας) των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων. Η σύνθεση των μελών της επαλληλίας ή του γραμμικού συνδυασμού ονομάζεται σειρά Fourier και μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες ΜΔΕ, ενώ έχει πολλές εφαρμογές στον τομέα της ηλεκτρολογίας, της ανάλυσης κραδασμών, στην ακουστική, οπτική, επεξεργασία σήματος, επεξεργασία εικόνας, στην χβαντομηχανική, οικονομμετρία, στη θεωρία λεπτού κελύφους με τοιχώματα, κ.τ.λ.

²Για άπειρα χωρία χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών.

³Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας: Θυμίζουμε ότι αν u_1, u_2, \dots, u_n λύσεις της γραμμικής εξίσωσης $Lu = f$ τότε και οι γραμμικοί συνδυασμοί $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, c_i \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύσεις της.

⁴Στη βιβλιογραφία το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με (\cdot, \cdot) . Αυτή η πρακτική ωστόσο αποφεύγεται γιατί δημιουργεί σύγχυση με το δυϊκό γινόμενο που επίσης συμβολίζεται έτσι.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι

$$(iv) (x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}(x, y) + \bar{\mu}(x, z), \quad x, y, z \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$(v) (x, 0) = (0, x) = 0, \quad x \in X.$$

Παράδειγμα 5.2. Οι παρακάτω χώροι είναι χώροι εσωτερικού γινομένου

1. Ο χώρος \mathbb{C}^n με το εσωτερικό γινόμενο $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$ για $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ στον \mathbb{C}^n .

2. Ο γραμμικός χώρος

$$l^2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

με το εσωτερικό γινόμενο

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Η σειρά συγκλίνει αφού $|x_n y_n| \leq (|x_n|^2 + |y_n|^2)/2$.

3. Ο χώρος $C([0, 1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0, 1]$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Παρατηρήσεις 5.3. 1. Ένας πλήρης χώρος (δηλ. ένας μετρικός χώρος όπου κάθε ακολουθία *Cauchy*⁵ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου) με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος *Hilbert*.

2. Οι χώροι εσωτερικού γινομένου του παραπάνω παραδείγματος δεν είναι απαραίτητα και χώροι *Hilbert*. Έτσι οι χώροι \mathbb{C}^n και l^2 είναι χώροι *Hilbert*, ενώ ο χώρος $C([0, 1])$ δεν είναι χώρος *Hilbert*.

3. Στην υποεπίπτωση που ο X είναι ένας πραγματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ένας *Ευκλείδειος* χώρος, έχουμε τις ίδιες ιδιότητες για το εσωτερικό γινόμενο με $(x, y) = (y, x)$ κ.ο.κ. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος θα περιοριστούμε σε πραγματικούς χώρους θεωρώντας από εδώ και στο εξής ότι ο $(X, (\cdot, \cdot))$ είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 5.4. (ανισότητα *Cauchy-Schwarz*) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2} (y, y)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Απόδειξη. Για $y = 0$ η (5.1) προφανώς ισχύει.

Για $y \neq 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\lambda) := (x - \lambda y, x - \lambda y)$. Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (y, y) \lambda^2 - 2(x, y) \lambda + (x, x),$$

και αφού αυτό ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ , η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$4[(x, y)^2 - (x, x)(y, y)] \leq 0,$$

απόπου έπεται η ζητούμενη ανισότητα. □

Παράδειγμα 5.5. Στον χώρο $C([0, 1])$ η ανισότητα *Cauchy-Schwarz* γίνεται

$$\left(\int_0^1 |f(x)g(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right).$$

Από την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* διαπιστώνουμε την παρακάτω πρόταση.

⁵Θυμίζουμε ότι η ακολουθία $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ του μετρικού χώρου X , ονομάζεται ακολουθία *Cauchy* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \epsilon \forall n, m \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, όλοι οι όροι από κάποιο δείκτη και μετά μιας ακολουθίας *Cauchy*, δηλαδή όλοι οι όροι της ουράς της ακολουθίας, πλησιάζουν μεταξύ τους οσοδήποτε κοντά.

Πρόταση 5.6. Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται νορμικός χώρος αν ορίσουμε

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}.$$

Λέμε ότι αυτή η νόρμα επάγεται ή παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο, επομένως ισχύουν οι ιδιότητες

$$(i) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X \quad (\text{τριγωνική ανισότητα, βλ. Σχήμα 5.1α'})$$

$$(ii) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad x, y \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \|x\| = 0 \iff x \in X, \text{ αν και μόνο αν } x = 0.$$

Απόδειξη. Η μόνη μη τετριμμένη ιδιότητα είναι η τριγωνική ανισότητα. Έχουμε

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \stackrel{(5.1)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα. \square

Παρατηρήσεις 5.7. 1. Αν $(x, y) = 0$ τότε $x \perp y$.

2. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνει την απλούστερη μορφή

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

3. Η νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από τον χώρο $C[0, 1]$ είναι η $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

4. Ένας πλήρης νορμικός χώρος ονομάζεται χώρος Banach. Άρα, κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach και όλη η θεωρία των χώρων Banach μπορεί να εφαρμοστεί και σε χώρους Hilbert

Λήμμα 5.8. (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Αν $x, y \in X$ και $(x, y) = 0$ τότε

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Λήμμα 5.9. (Κανόνας του παραλληλογράμμου) Αν $x, y \in X$ τότε

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X.$$

Παρατήρηση 5.10. Η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός νορμικού χώρου X είναι η νόρμα που επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

Ορισμός 5.11. (Βέλτιστη προσέγγιση) Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ ένας γραμμικός χώρος εσωτερικού γινομένου και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη (παραγόμενη) νόρμα. Έστω \tilde{X} ένας υπόχωρος του X και $x \in X$. Αν υπάρχει στοιχείο $y \in \tilde{X}$ τέτοιο ώστε

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in \tilde{X},$$

τότε το y λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του x από τον \tilde{X} .

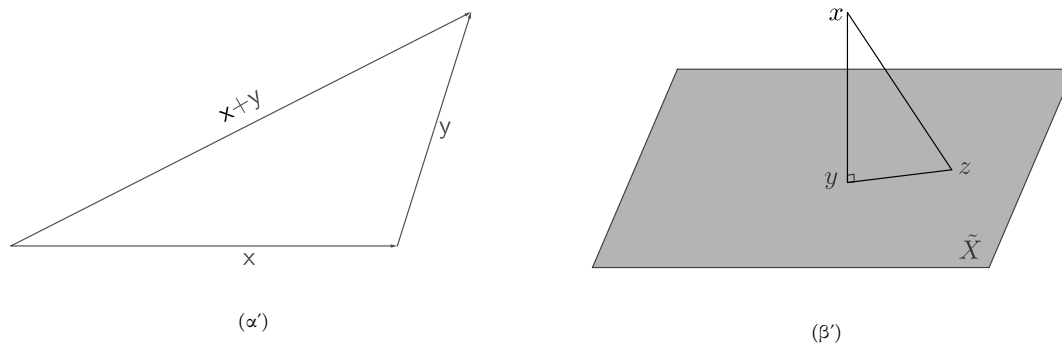
Θεώρημα 5.12. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ ένας γραμμικός χώρος εσωτερικού γινομένου και \tilde{X} ένας υπόχωρος του X . Ένα στοιχείο $y \in \tilde{X}$ λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του $x \in X$ από τον \tilde{X} , αν και μόνο αν ισχύει

$$(x, z) = (y, z) \quad \forall z \in \tilde{X}, \quad (5.2)$$

ή ισοδύναμα

$$(x - y, z) = 0 \quad \forall z \in \tilde{X},$$

Πόρισμα 5.13. (Ορθογώνια προβολή) Η βέλτιστη προσέγγιση $y \in \tilde{X}$ ενός στοιχείου $x \in X$ (από τον \tilde{X}) είναι το μοναδικό στοιχείο του \tilde{X} με την ιδιότητα $(x - y, z) = 0 \quad \forall z \in \tilde{X}$, γι' αυτό και λέγεται ορθογώνια προβολή του x στον υπόχωρο \tilde{X} (βλ. Σχήμα 5.1β').



Σχήμα 5.1: (α) Τριγωνική ανισότητα. Το μήκος $\|x+y\|$ της μιας πλευράς του τριγώνου είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα $\|x\| + \|y\|$ των μηκών των δύο άλλων πλευρών. (β) Ορθογώνια προβολή του x στον υπόχωρο \tilde{X} όπως δίνεται από τη σχέση (5.2).

Παρατήρηση 5.14. Η βέλτιστη προσέγγιση y του x από τον \tilde{X} είναι το εγγύτερο στοιχείο του \tilde{X} στο στοιχείο x , δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$\|x - y\| = \min\{\|x - z\|, z \in \tilde{X}\}.$$

Θεώρημα 5.15. (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt) Κάθε γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης \tilde{X} του X έχει ορθοκανονική βάση.⁶

Ανισότητα Bessel: Αν το $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ είναι ένα άπειρο ορθοκανονικό σύστημα, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

Λήμμα 5.16. (Riemann-Lebesgue) Αν το $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ είναι ένα άπειρο ορθοκανονικό σύστημα, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x, e_n) = 0.$$

Θεώρημα 5.17. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ ένας γραμμικός χώρος εσωτερικού γινομένου και $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ ένα άπειρο ορθοκανονικό σύστημα. Τότε οι παρακάτω τέσσερις ιδιότητες είναι ισοδύναμες

- (i) Το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών από στοιχεία του $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι **πυκνό**⁷ στον X .
- (ii) Το σύστημα $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ είναι **κλειστό**, δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \right\| = 0,$$

δηλαδή

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i.$$

(Η σειρά αυτή ονομάζεται **σειρά Fourier**.)

- (iii) Για κάθε $x \in X$ ισχύει η **ισότητα του Parseval**

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2.$$

- (iv) Το σύστημα $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ είναι **πλήρες** στον $(X, \|\cdot\|)$, δηλαδή αν $(x, e_i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$, τότε $x = 0$.

⁶Το σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται ορθογώνιο όταν $(e_i, e_j) = 0$ για κάθε ζεύγος δεικτών $i \neq j$ και ορθοκανονικό όταν επιπλέον ισχύει $\|e_i\|^2 = (e_i, e_i) = 1$ για κάθε i .

⁷Ένα υποσύνολο \tilde{X} ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται πυκνό στον X , όταν κάθε στοιχείο του X είναι όριο μιας ακολουθίας στοιχείων του \tilde{X} .

5.2 Σειρές Fourier

Σημασία:

1. Επειδή κάποιοι τύποι ασυνεχών συναρτήσεων που δεν μπορούν να αναπτυχθούν σε δυναμοσειρά, αναπτύσσονται σε σειρά Fourier.
2. Επειδή μια ευρεία κλάση προβλημάτων από τις εφαρμογές, αναφέρεται σε περιοδικά φαινόμενα.

Ορισμός 5.18. (Κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις) Η f λέγεται κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ αν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ τέτοια ώστε η f να είναι συνεχής στα διαστήματα $x_j < x < x_{j+1}$ και τα όρια⁸ $f(x_j^-)$ και $f(x_{j+1}^+)$ να υπάρχουν για όλα τα $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Ορισμός 5.19. (Κατά τμήματα λείες ή συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις) Η f λέγεται κατά τμήματα λεία ή συνεχώς διαφορίσιμη (αντίστοιχα κατά τμήματα k φορές συνεχώς διαφορίσιμη) συνάρτηση στο $[a, b]$ αν είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a, b]$ και επιπλέον η f' (αντίστοιχα η $f^{(k)}$) είναι συνεχής σε κάθε (x_j, x_{j+1}) και υπάρχουν τα όρια⁹ $f'(x_j^-)$ και $f'(x_{j+1}^+)$.

Ορισμός 5.20. (Άρτιες και περιττές συναρτήσεις) Μια συνάρτηση f λέγεται

1. Άρτια (A) αν $f(-x) = f(x)$, $\forall x$
2. Περιττή (Π) αν $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$

Παρατηρήσεις 5.21. 1. Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές, όμως κάθε συνάρτηση γράφεται ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\} = A + \Pi.$$

2. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $A \cdot A = \Pi \cdot \Pi = A$ και $A \cdot \Pi = \Pi \cdot A = \Pi$
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ όταν f άρτια, και $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ όταν f περιττή

Ορισμός 5.22. (Περιοδικές συναρτήσεις) Μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση f σ'ένα διάστημα $[a, b]$ λέγεται περιοδική (με περίοδο p), αν υπάρχει $p \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x+p) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύουν ότι

- (i) $f(x+np) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Αν c_1, \dots, c_n σταθερές και f_1, \dots, f_n p -περιοδικές τότε η

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

είναι p -περιοδική.

Ξέρουμε ήδη ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο $[-\pi, \pi]$ και γραμμικά ανεξάρτητες. Έχουμε τότε το ακόλουθο θεώρημα.

⁸ $f(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h)$, $f(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h)$ και αν f συνεχής στο x_0 : $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.
⁹ $f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$, $f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Θεώρημα 5.23. Έστω E ο χώρος των κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με το εσωτερικό γινόμενο¹⁰

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Το σύστημα

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \dots \right\}$$

είναι ορθοκανονικό στον χώρο E .

Από το Θεώρημα 5.17 ξέρουμε ότι αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι κλειστό στον E , τότε για $f \in E$ έχουμε

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i$$

όπου

(i) Αν $e_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ τότε

$$(f, e_i) e_i = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

(ii) Αν $e_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(ix)$ τότε

$$(f, e_i) e_i = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(it) dt \right) \sin(ix)$$

(iii) Αν $e_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(ix)$ τότε

$$(f, e_i) e_i = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(it) dt \right) \cos(ix).$$

Δίνουμε επομένως τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.24. (Σειρά Fourier) Έστω $f \in E$. Η σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

που αντιστοιχεί στην f μέσω της σχέσης $\sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i$, όπου

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.3)$$

λέγεται σειρά Fourier της f , και γράφεται ως

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (5.4)$$

Οι συντελεστές a_n, b_n λέγονται συντελεστές Fourier.

¹⁰Το ολοκλήρωμα Riemann υπάρχει αφού οι f και g είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) σύνολο, δηλ. είναι φραγμένες και συνεχείς σχεδόν παντού (το σύνολο των σημείων ασυνέχειας των f, g είναι μέτρου μηδέν), άρα ολοκληρώσιμες κατά Riemann (Θεώρημα Riemann–Lebesgue).

Παρατηρήσεις 5.25. 1. Το σύμβολο \sim σημαίνει ένα συσχετισμό των a_0, a_n, b_n με την f κατά ένα μοναδικό τρόπο. Τονίζουμε ότι δεν γνωρίζουμε ακόμα αν η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει σημειακά στην f .

2. Αν η σειρά του δεξιού μέλους συγκλίνει για κάθε x τότε ορίζει μια 2π -περιοδική συνάρτηση σε όλο τον \mathbb{R} , αφού οι συναρτήσεις $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, n \in \mathbb{N}$ είναι 2π -περιοδικές.

3. Η νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγει το εσωτερικό γινόμενο του E είναι

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Αν $f \in E$ με $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, τότε $f \in L^2[-\pi, \pi]$.¹¹

(i) Αν $\|f\| = 0$ για $f \in E$, τότε η f είναι ίση με τη μηδενική συνάρτηση σχεδόν παντού (δηλαδή με εξαίρεση ένα σύνολο μέτρου μηδέν), άρα ταυτίζεται με τη μηδενική.

(ii) Αν $f = g$ σχεδόν παντού για $f, g \in E$, τότε οι f και g ισοδύναμες με ακριβώς ίδιες σειρές Fourier.

4. Οι συντελεστές a_0, a_n, b_n υπολογίζονται έτσι ώστε η

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (5.5)$$

να παριστάνει την καλύτερη προσέγγιση της $f(x)$ με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Θέλουμε δηλαδή να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα

$$I(a_0, a_n, b_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - s_N(x)\}^2 dx$$

άρα θέλουμε $\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \frac{\partial I}{\partial b_n} = 0$, απόπου παίρνουμε την σχέση (5.3).

Η s_N καλείται N -στό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f .

Πόρισμα 5.26. (Ανισότητα του Bessel) Αν $f[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής και 2π -περιοδική, τότε

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (5.6)$$

Πόρισμα 5.27. (Riemann-Lebesgue) Αν $f[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής και $f \sim (a_n, b_n)$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (5.7)$$

Η σειρά Fourier συγκλίνει μεσοτετραγωνικά¹² προς την $f(x)$ αν

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) \right]^2 dx = 0. \quad (5.8)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0.$$

¹¹Γενικά, ο συναρτησιακός χώρος $L^2(S)$ ορίζονται ως ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ (ή \mathbb{C}) στον χώρο μέτρου (S, Σ, μ) , για τις οποίες η δεύτερη δύναμη της απόλυτης τιμής τους είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue, δηλαδή $\|f\|_{L^2(S)} = \left(\int_S |f(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty$. Ο χώρος L^2 είναι ένας σημαντικός χώρος Hilbert στην ανάλυση και τη θεωρία πιθανοτήτων, με εφαρμογές σε προβλήματα της φυσικής, στατιστικής, μηχανικής, οικονομίας κ.α. Αν μια L^2 συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με μια συνεχή συνάρτηση f , τότε η f είναι ο μόνος συνεχής αντιπρόσωπος.

¹²Αυτός ο τύπος σύγκλισης διαφέρει από την ομοιόμορφη και από την κατά σημείο σύγκλιση. Η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[-\pi, \pi]$ εξασφαλίζει και την $L^2[-\pi, \pi]$ και την κατά σημείο σύγκλιση στο $[-\pi, \pi]$. Αντιθέτως η σύγκλιση στον $L^2[-\pi, \pi]$ δεν εξασφαλίζει ούτε κατά σημείο ούτε ομοιόμορφη σύγκλιση.

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του E (βλ. 5.25 (3).)

Σχέση του Parseval : Αν η σειρά Fourier συγκλίνει μεσοτετραγωνικά προς την $f(x)$, τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (5.9)$$

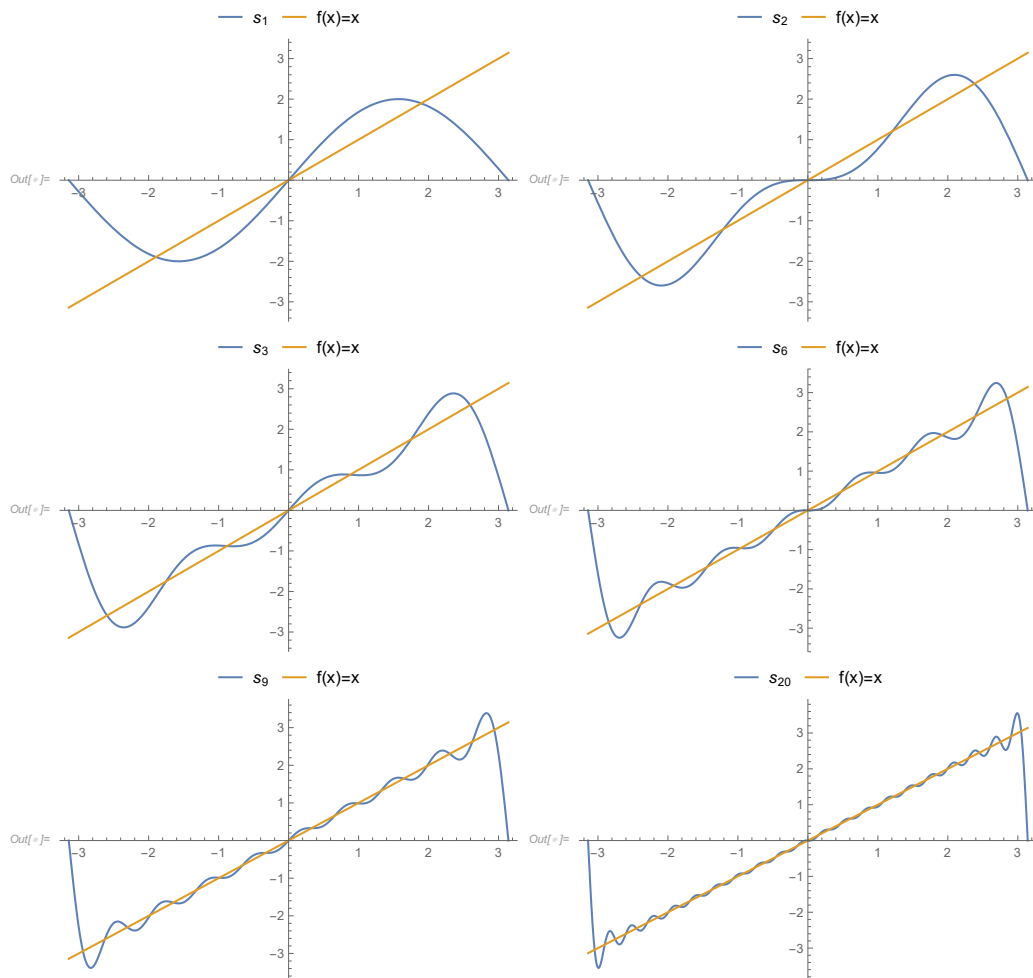
που λέγεται σχέση του Parseval.

Παράδειγμα 5.28. Να βρεθεί η ανάπτυξη σε σειρά Fourier της $f(x) := x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Άρα

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}.$$



Σχήμα 5.2: Η συνάρτηση $f(x) = x$ με πορτοκαλί και τα μερικά αθροίσματα Fourier s_N με μπλε, ξεκινώντας με το πρώτο τμήμα της σειράς Fourier s_1 πάνω αριστερά, μέχρι τα πρώτα 20 τμήματα s_{20} κάτω δεξιά. Τα σχήματα φτιάχτηκαν με χρήση της Mathematica (FourierSeries)[16]. (Στην Wolframalpha: <https://www.wolframalpha.com/>: Plot[FourierSeries[x, x, 3], x, -Pi, Pi].)

Παράδειγμα 5.29. Να βρεθεί η ανάπτυξη σε σειρά Fourier της $f(x) := x + x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$. Έχουμε

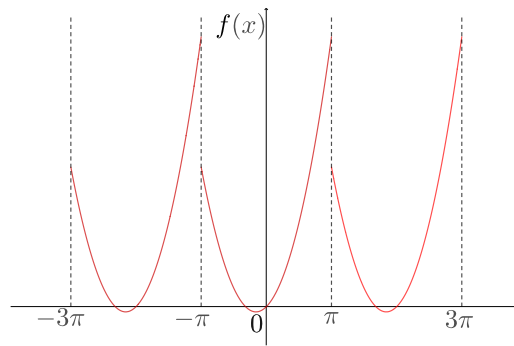
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) dx = 2 \frac{\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x^2 \sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \right\} = -\frac{1}{n\pi} \left\{ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{4}{n^2} \cos(nx) = \frac{4}{n^2} (-1)^n, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ομοίως

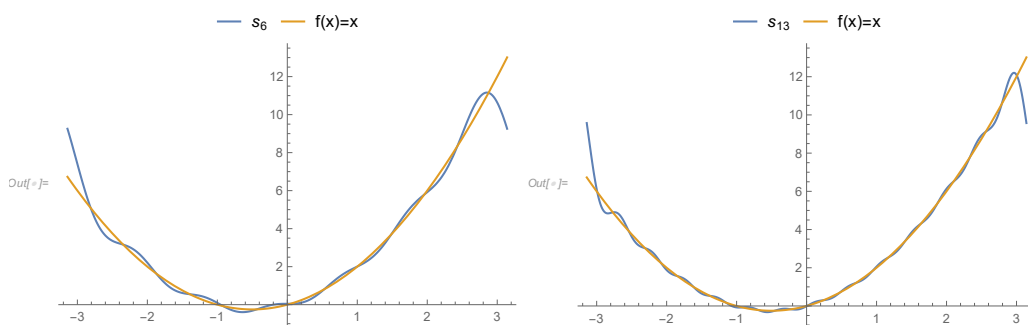
$$b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Άρα

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx) - \frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \right).$$



Σχήμα 5.3: Περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x) = x + x^2$ με περίοδο 2π σε όλο το $(-\infty, \infty)$.



Σχήμα 5.4: Η συνάρτηση $f(x) = x + x^2$ με πορτοκαλί και τα μερικά αθροίσματα Fourier s_6 και s_{13} με μπλε. Το σχήμα φτιάχτηκε με χρήση της Mathematica (FourierSeries) [16].

Άσκηση 5.30. Να βρεθεί η ανάπτυξη σε σειρά Fourier της $f(x) := |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

5.2.1 Ημίτονικές και συνημιτονικές σειρές

Ξέρουμε πως η $\cos(nx)$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η $\sin(nx)$ είναι περιττή. Από τις ιδιότητες των άρτιων και περιττών συναρτήσεων έχουμε συνεπώς ότι για f άρτια η $f(x) \cos(nx)$ είναι άρτια και η $f(x) \sin(nx)$ περιττή και αντίστοιχα για f περιττή. Ανάλογα λοιπόν με το είδος της f έχουμε:

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} f: \text{Άρτια} \\ f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} & \begin{array}{l} f: \text{Περιττή} \\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ n = 1, 2, \dots \end{array}
 \end{array}$$

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $(-\pi, \pi)$ για να δουλέψουμε με σειρές Fourier, απλώς επεκτείνουμε τη συνάρτηση περιοδικά,¹³ με περίοδο 2π σε όλο το $(-\infty, \infty)$ (π.χ. Σχήμα 5.3 για το Παράδειγμα (5.29)).

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $(0, \pi)$ μπορούμε να την επεκτείνουμε στο $(-\pi, 0)$ με δύο τρόπους

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} \text{Άρτια επέκταση} \\ F_A(x) := \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases} \end{array} & \begin{array}{l} \text{Περιττή επέκταση} \\ F_{\Pi}(x) := \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases} \end{array}
 \end{array}$$

και τα αντίστοιχα αναπτύγματα Fourier δίνονται όπως παραπάνω.

5.2.2 Μιγαδικές σειρές Fourier

Από τους γνωστούς τύπους

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i},$$

και με στοιχειώδεις υπολογισμούς, προκύπτει το ανάπτυγμα Fourier σε μιγαδική μορφή:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad -\pi < x < \pi,$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Παράδειγμα 5.31. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$, τότε

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx} dx = \frac{(1+in)(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sin h\pi$$

και η σειρά Fourier είναι

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+in)(-1)^n}{\pi(1+n^2)} (\sin h\pi) e^{inx}.$$

5.2.3 Αλλαγή διαστήματος

Έστω ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα $[a, b]$ αντί του $[-\pi, \pi]$. Εισάγοντας τότε τη νέα μεταβλητή t μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού

$$x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{b-a}{2\pi}t,$$

το $a \leq x \leq b$ γίνεται $-\pi \leq t \leq \pi$ κι έτσι η

$$F(t) := f\left(\frac{1}{2}(b+a) + \frac{b-a}{2\pi}t\right)$$

έχει περίοδο 2π , άρα για την F έχουμε τη γνωστή ανάπτυξη σε σειρά Fourier. Μεταφέροντας την, ως προς x , στο $[a, b]$ παίρνουμε

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} + b_n \sin \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right].$$

¹³Επεκτείνουμε γενικά τις συναρτήσεις αφού οι σειρές Fourier είναι στον περιοδικό χώρο.

όπου

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} dx.$$

Πολλά προβλήματα των ΜΔΕ περιγράφονται σε διαστήματα της μορφής $[-l, l]$. Σε αυτή τη περίπτωση οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right].$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Αν, τέλος, η f είναι $2l$ -περιοδική και άρτια/περιττή έχουμε όπως και πριν:

$$f: \text{Άρτια} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$f: \text{Περιττή} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Παράδειγμα 5.32. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Επεκτείνουμε την f όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Αφού η επέκταση είναι άρτια $b_n = 0$ και έχουμε

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^{1/2} dx = 1$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^{1/2} \cos 2n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

οπότε

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} (-1)^{n-1} \cos [2(2n-1)\pi x].$$

Παρατήρηση 5.33. Γίνεται σαφές από τα παραπάνω ότι ο χειρισμός μιας περιοδικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με περίοδο p είναι ανάλογος. Δηλαδή, όπως προηγουμένως έχουμε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)$, είναι προφανώς 2π -περιοδική συνάρτηση. Ισχύει τότε $g\left(\frac{2\pi}{p}x\right) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

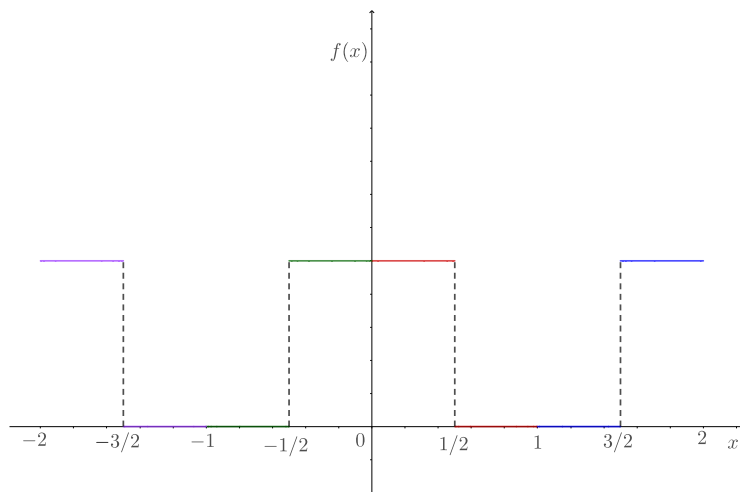
Οι συντελεστές Fourier της g με αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{p}{2\pi}x$ είναι τότε

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} g\left(\frac{2\pi}{p}y\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}ny\right) dy = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} g\left(\frac{2\pi}{p}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{p}ny\right) dy = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) dx,$$

και η σειρά Fourier της f είναι

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) \right].$$

Σχήμα 5.5: Επέκταση της f του Παραδείγματος 5.32.

5.2.4 Σύγκλιση σειρών Fourier

Θεώρημα 5.34. (Κατά σημείο σύγκλιση) Αν η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία και 2π -περιοδική στο $[-\pi, \pi]$, τότε για κάθε x ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (5.10)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Παρατηρήσεις 5.35. 1. Στα σημεία συνέχειας της f , ισχύει $f(x) = f(x-) = f(x+)$.

2. Αν $x \in (-\pi, \pi)$ ισχύει η (5.10) και στα σημεία $x = \pm\pi$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει στην τιμή

$$\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2}.$$

3. Στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος εμφανίζεται ο τύπος του Dirichlet για το N -οστό μερικό άθροισμα s_N της σειράς:

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds. \quad (5.11)$$

Ο πυρήνας Dirichlet $\frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}}$ είναι 2π -περιοδικός και $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds = 1$.

4. Επίσης στην απόδειξη χρησιμοποιείται το Λήμμα Riemann-Lebesgue:

Αν η $g(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a, b]$ έχουμε

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

Παράδειγμα 5.36. Είδαμε στο Παράδειγμα (5.29) ότι

$$x + x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \frac{2}{n} (-1)^n \sin nx \right)$$

και αφού η $x + x^2$ είναι κατά τμήματα λεία, στα σημεία συνέχειας το « \sim » μπορεί να γίνει « $=$ », ενώ στα σημεία ασυνέχειας θα ισχύει ο τύπος (5.10). Το $x = \pi$ είναι σημείο ασυνέχειας και έτσι:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos n\pi = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{(-\pi + \pi^2) + (\pi + \pi^2)}{2},$$

και απλοποιώντας παίρνουμε

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Μια ασθενέστερη μορφή του Θεωρήματος 5.34 είναι η εξής:

Μια συνάρτηση που είναι περιοδική, κατά τμήματα συνεχής και έχει πεπερασμένο πλήθος μεγίστων και ελαχίστων στο $[-\pi, \pi]$, λέμε ότι ικανοποιεί τις «συνθήκες Dirichlet».¹⁴

Ισχύει ότι: Αν η f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στο $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Ομαλή σύγκλιση σειρών Fourier

Θεώρημα 5.37. (Ομοιόμορφη σύγκλιση) Έστω $f(x)$ μια 2π -περιοδική συνεχής συνάρτηση και έστω ότι η $f'(x)$ κατά τμήματα συνεχής στο $[-\pi, \pi]$. Αν επιπλέον, $f(-\pi) = f(\pi)$ τότε η ανάπτυξη της $f(x)$ σε σειρά Fourier είναι ομαλά και απόλυτα συγκλίνουσα.

Παρατήρηση 5.38. Στην απόδειξη του τελευταίου Θεωρήματος χρησιμοποιείται η ανισότητα του Bessel.

Θεώρημα 5.39. Έστω f μια 2π -περιοδική, κατά τμήματα λεία συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$. Τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομαλά στην f σε κάθε κλειστό διάστημα που δεν περιέχει ασυνέχειες.

Αυτή η συμπεριφορά, της «απόκλισης» δηλαδή του $s_N(x)$ από την $f(x)$ σε κάθε διάστημα που περιέχει ένα σημείο ασυνέχειας της f , είναι γνωστή ως «φαινόμενο Gibbs».

5.2.5 Διαφόριση και ολοκλήρωση σειρών Fourier

Είδαμε στο Παράδειγμα 5.28 ότι

$$x = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

και η σειρά συγκλίνει για κάθε x .

Παραγωγίζοντας, φορμαλιστικά,¹⁵ τη σειρά έχουμε

$$2 [\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots]$$

που αποκλίνει για κάθε x . Το πρόβλημα πηγάζει απ'το ότι μετά την περιοδική της επέκταση η $f(x) = x$ είναι ασυνεχής στα σημεία $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να παραγωγίζουμε μια σειρά Fourier.

Θεώρημα 5.40. Έστω f συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ με $f(-\pi) = f(\pi)$ και έστω ότι η $f'(x)$ είναι κατά τμήματα λεία στο ίδιο διάστημα. Τότε η σειρά Fourier της f' μπορεί να βρεθεί με όρο προς όρο παραγώγιση της σειράς Fourier της f , και η σειρά που προκύπτει συγκλίνει κατά σημείο στην f' .

Η όρο προς όρο ολοκλήρωση σειρών Fourier γίνεται κάτω από γενικότερες συνθήκες απ'ότι η όρο προς όρο παραγώγιση. Παρ'όλο που, ως γνωστό, για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση μιας σειράς που έχει ολοκληρωθεί όρο προς όρο, πρέπει η αρχική σειρά να συγκλίνει ομαλά, αυτή η συνθήκη δεν είναι αναγκαία στην περίπτωση των σειρών Fourier.

Θεώρημα 5.41. Έστω f 2π -περιοδική και κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$. Τότε, η σειρά Fourier της $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

άσχετα με το αν συγκλίνει ή όχι, μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο ανάμεσα σε οποιαδήποτε όρια.

Για $-\pi \leq x \leq \pi$ ισχύει:

$$\int_{-\pi}^x f(\xi) d\xi = \frac{a_0}{2} (x + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \sin nx - b_n (\cos nx - \cos n\pi)]$$

¹⁴Οι συνθήκες Dirichlet διατυπώνονται ισοδύναμα ως: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (i) περιοδική με περίοδο 2π , (ii) κατά τμήματα συνεχής (iii) κατά τμήματα μονότονη.

¹⁵Γενικά, στα μαθηματικά λέμε φορμαλιστικό έναν υπολογισμό που δεν είναι πλήρως αυστηρός, αλλά που μπορεί συνήθως να επαληθευθεί υπό ορισμένες προϋποθέσεις.

Θεώρημα 5.42. (Ρυθμός σύγκλισης - Ομαλότητα της f) Έστω $f \in C^k([-\pi, \pi])$ 2π -περιοδική. Τότε, για τους συντελεστές Fourier ισχύουν οι εκτιμήσεις

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^k}, \quad |b_n| \leq \frac{c}{n^k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.3 Προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

Θα συνεχίσουμε την μελέτη της μεθόδου Fourier με τα προβλήματα Sturm-Liouville που έχουμε συναντήσει στη θεωρία των ΣΔΕ.

5.3.1 Ανασκόπηση των προβλημάτων ιδιοτιμών από τη γραμμική άλγεβρα

Πριν μιλήσουμε για τα προβλήματα Sturm-Liouville θα θυμίσουμε ένα γνωστό σε όλους πρόβλημα ιδιοτιμών από τη γραμμική άλγεβρα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας, που είναι το απλούστερο παράδειγμα γραμμικού τελεστή. Αναζητούμε αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

έχει μια μη τετριμμένη λύση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Όπως είναι γνωστό οι τιμές του λ , με $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda \in \mathbb{C}$, για τις οποίες υπάρχει μια τέτοια λύση \mathbf{u} λέγονται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις \mathbf{u} λέγονται *ιδιοδιανύσματα*.

Υποθέτουμε ότι ο A είναι συμμετρικός και έχει n πραγματικές και διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα \mathbf{e}_i , και το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Επιπλέον, αφού A συμμετρικός τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, i \neq j$, και κανονικοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα (διαιρώντας το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του) παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n , οπότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{e}_i , δηλαδή

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i, \quad (5.12)$$

όπου c_i οι συντεταγμένες του \mathbf{u} ως προς αυτή την ορθοκανονική βάση, με $c_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$ (δηλαδή το c_i είναι η προβολή του \mathbf{u} στο i -οστό διάνυσμα).

Επομένως, αν έχουμε ένα γραμμικό σύστημα

$$A\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (5.13)$$

όπου \mathbf{f} δεδομένο διάνυσμα και μ γνωστή σταθερά διαφορετική από όλες τις ιδιοτιμές του A . Αν υπάρχει κάποια λύση \mathbf{u} του προβλήματος (5.13) θα γράφεται στη μορφή (5.12), όπου οι σταθερές c_i θα πρέπει να προσδιοριστούν. Αφού \mathbf{f} γνωστό διάνυσμα γράφεται κι αυτό στη μορφή

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{e}_i,$$

όπου οι συντελεστές $f_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i$ είναι γνωστοί. Επομένως, το πρόβλημα γίνεται

$$\sum_{i=1}^n c_i A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n (\mu c_i + f_i) \mathbf{e}_i.$$

Όμως $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, αφού το \mathbf{e}_i είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i . Άρα έχουμε

$$\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n (\mu c_i + f_i) \mathbf{e}_i \Rightarrow c_i \lambda_i = \mu c_i + f_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \mu}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (5.13) δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i - \mu} \mathbf{e}_i.$$

Βλέπουμε επομένως ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα βοηθούν στην επίλυση άλλων προβλημάτων που σχετίζονται με τον πίνακα αυτόν. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και για τις ΜΔΕ, όπου οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις ενός διαφορικού τελεστή βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με αυτόν τον τελεστή.

5.3.2 Το Πρόβλημα Ιδιοτιμών για Διαφορικούς Τελεστές

Εδώ, αντικαθιστούμε το χώρο \mathbb{R}^n της προηγούμενης ενότητας με έναν χώρο συναρτήσεων, και τον πίνακα A με έναν διαφορικό τελεστή. Αυτός ο διαφορικός τελεστής μπορεί να είναι ο τελεστής δευτέρας παραγώγου d^2/dx^2 , οπότε να έχουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών διαφορικού τελεστή:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \phi &= \lambda \phi, \quad a < x < b, \\ \phi(a) &= \phi(b) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, ανάλογα με πριν εδώ αναζητούμε τις ιδιοσυναρτήσεις ϕ του προβλήματος που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ . Επειδή είναι δύσκολο να βρει κανείς γενικές ιδιότητες των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων ενός τυχαίου διαφορικού τελεστή, θα εξετάσουμε συγκεκριμένους διαφορικούς τελεστές, όπως είναι ο τελεστής Sturm-Liouville που θα δούμε παρακάτω.

Πρόβλημα Sturm-Liouville

Έστω $p \in C^1([a, b])$ με $p(x) > 0$ για $x \in [a, b]$ και $q \in C([a, b])$, όπου (a, b) φραγμένο διάστημα στον \mathbb{R} .

Ο γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής 2ης τάξης

$$L := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x), \quad (5.14)$$

ονομάζεται *τελεστής Sturm-Liouville*.

Έστω $w \in C([a, b])$ με $w(x) > 0$ για $x \in [a, b]$ *συνάρτηση βάρους*, και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Θεωρούμε τη ΣΔΕ

$$Lu = -\lambda w(x)u, \quad x \in (a, b), \quad (5.15)$$

και τις χωριζόμενες ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} A_1 u(a) + B_1 u(b) = 0, & A_1, B_1 \text{ σταθ. : } |A_1| + |B_1| > 0 \\ A_2 u(a) + B_2 u(b) = 0, & A_2, B_2 \text{ σταθ. : } |A_2| + |B_2| > 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών (ΠΣΤ) (5.15)-(5.16) με τις παραπάνω υποθέσεις λέγεται *κανονικό ή ομαλό πρόβλημα Sturm-Liouville*.

Είναι προφανές ότι η $u = 0$ είναι λύση για κάθε τιμή του λ .

Εκείνες οι τιμές του λ για τις οποίες υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις ονομάζονται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται *ιδιοσυναρτήσεις* του ΠΣΤ (5.15)-(5.16).

Το εσωτερικό γινόμενο με βάρος w είναι

$$(f, g)_w := \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

και η επαγόμενη νόρμα με βάρος w είναι

$$\|f\|_w := \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx.$$

Παρατηρήσεις 5.43. 1. Η γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (5.17)$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$y(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int p(x) dx\right\} u(x),$$

γράφεται στην κανονική (*normal*) μορφή

$$u'' + \Theta(x)u = 0,$$

όπου

$$\Theta(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x).$$

Ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτα τα σημεία μηδενισμού των λύσεων.

Επίσης, μέσω του μετασχηματισμού

$$P(x) = \exp\left\{\int p(x) dx\right\}, \quad Q(x) = q(x) \exp\left\{\int p(x) dx\right\},$$

γράφεται στην αυτοσυζυγή μορφή της (5.17)

$$(P(x)y')' + Q(x)y = 0. \quad (5.18)$$

Αν οι p, q είναι συνεχείς, τότε $P \in C^1, Q \in C$ και $P > 0$,

2. Το φασματικό θεώρημα (*spectral theorem*) που γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα, ισχύει για αυτοσυζυγείς και συμπαγείς τελεστές σε συναρτησιακούς χώρους.

Παράδειγμα 5.44. Έστω το ΠΣΤ

$$\begin{cases} u'' = \lambda u, & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση των πραγματικών ιδιοτιμών. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (i) Αν $\lambda = 0$, τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι $u(x) = ax + b$ και από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε τελικά $u(x) = 0$ και αφού δεν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή.

- (ii) Αν $\lambda > 0$, τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι¹⁶

$$u(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} a + b &= 0, \\ ae^{\sqrt{\lambda}l} + be^{-\sqrt{\lambda}l} &= 0, \end{aligned}$$

απόπου έχουμε $a = b = 0$, οπότε $u(x) = 0$ και αφού δεν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις δεν έχουμε θετικές ιδιοτιμές.

- (iii) Αν $\lambda < 0$, τότε η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως $u'' + \mu u = 0$, όπου $\lambda = -\mu^2$ με μ θετικό. Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x) = a \sin \mu x + b \cos \mu x$$

και από τις συνοριακές συνθήκες στο $x = 0$ παίρνουμε ότι $b = 0$, άρα

$$u(x) = a \sin \mu x,$$

με $a \sin \mu l = 0$. Για $\mu = 0$ έχουμε πάλι την τετριμμένη λύση. Άρα το $\mu = n\pi/l$, $n = 1, 2, \dots$. Βρήκαμε επομένως άπειρο πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις¹⁷:

$$u = u_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

¹⁶Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε τη λύση ως $u(x) = C_1 \sinh \sqrt{\lambda}x + C_2 \cosh \sqrt{\lambda}x$ για κατάλληλες σταθερές C_1, C_2 .

¹⁷Το γινόμενο μιας ιδιοσυνάρτησης επί οποιαδήποτε μη μηδενική σταθερά είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση

Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων

Θεώρημα 5.45. Για το κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville (5.15)-(5.16) ισχύουν τα εξής:

- (i) Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι πραγματικές, απλές, αριθμήσιμες, διατεταγμένες και υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

Επιπλέον,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

- (ii) Έστω λ_n ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $\phi_n(x)$. Η ϕ_n έχει ακριβώς $n-1$ σημεία μηδενισμού στο (a, b) .
- (iii) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.
- (iv) Το σύνολο των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ είναι πλήρες υπό την έννοια ότι κάθε συνάρτηση $f \in L_w^2(a, b)$ ¹⁸ (δηλ. τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση) μπορεί να αναπαρασταθεί ως γενικευμένη σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

όπου

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)_w}{(\phi_n, \phi_n)_w}$$

είναι οι γενικευμένοι συντελεστές Fourier.

¹⁸ Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε $f \in L_w^2(a, b)$ ανν $\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty$.

Κεφάλαιο 6

Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

6.1 Η εξίσωση του Laplace

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στις ελλειπτικές εξισώσεις,¹ δηλαδή τις μη εξελικτικές εξισώσεις (δηλαδή που δεν παρουσιάζουν χρονική εξέλιξη). Οι μελέτη των ελλειπτικών ΜΔΕ θα γίνει μέσω του προτύπου των ελλειπτικών ΜΔΕ και της σημαντικότερης ίσως ΜΔΕ, της εξίσωσης **Laplace**²

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.1)$$

Τα ελλειπτικά προβλήματα, όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, περιγράφουν φαινόμενα ισορροπίας όπου η λύση τους εξαρτάται μόνο από τη θέση x και όχι από τον χρόνο. Η εξίσωση Laplace είναι μια ομογενής εξίσωση. Η αντίστοιχη μη ομογενής εξίσωση είναι η εξίσωση **Poisson**

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (6.2)$$

Μια άλλη αντιπροσωπευτική ελλειπτική εξίσωση είναι η εξίσωση του **Helmholtz**

$$(\Delta + k^2)u(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.3)$$

Η εξίσωση Laplace είναι ευρέως χρήσιμη στη φυσική, επειδή οι (κλασικές) λύσεις της (γνωστές ως αρμονικές συναρτήσεις όπως θα δούμε παρακάτω) εμφανίζονται σε προβλήματα ηλεκτρικού, μαγνητικού³ και βαρυτικού δυναμικού,⁴ ρευστομηχανικής,⁵ και θερμοκρασιών σταθερής κατάστασης.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι οι εξισώσεις (6.1)-(6.2) προκύπτουν ως όρια για μεγάλες τιμές τους χρόνου (ή ασυμπτωματικά όρια) της εξίσωσης διάχυσης. Αν υποθέσουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες και οι πηγές (που μπορεί υπάρχουν (Poisson) ή όχι (Laplace)) δεν εξαρτώνται από το χρόνο, τότε είναι αναμενόμενο ότι μετά από πολύ χρόνο η επίδραση της αρχικής συνθήκης στο χωρίο θα εξαφανισθεί τελείως και το φαινόμενο θα καταλήξει σε μια κατάσταση ισορροπίας που θα ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις. Επομένως, μπορούμε να σχεφθούμε τις εξισώσεις (6.1)-(6.2) ως εξισώσεις διάχυσης σε κατάσταση ισορροπίας.

6.1.1 Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός 6.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ονομάζουμε **αρμονική συνάρτηση** (harmonic function) στο U , κάθε συνάρτηση που ανήκει στη κλάση $C^2(U)$ και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

¹Οι ελλειπτικές εξισώσεις στη μία διάσταση αποτελούν ΣΔΕ.

²Η εξίσωση ανακαλύφθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό και αστρονόμο Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Θυμίζουμε ότι ο τελεστής Laplace είναι ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $\Delta u(\mathbf{x}) = u_{x_1x_1}(\mathbf{x}) + u_{x_2x_2}(\mathbf{x}) + \dots + u_{x_nx_n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

³Συνδυάζοντας τις βασικές εξισώσεις ηλεκτρομαγνητισμού $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, προκύπτει η εξίσωση του Poisson $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, όπου ρ η συνάρτηση κατανομής φορτίου μέσα στον όγκο της πηγής και ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Εάν $\rho = 0$, τότε προκύπτει η εξίσωση του Laplace.

⁴Η εξίσωση του Poisson για την βαρύτητα (όπως προκύπτει απ'το νόμο του Gauss) είναι: $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_m$, όπου το βαρυτικό δυναμικό εξαρτάται από την πυκνότητα μάζας, ρ_m , και για $\rho_m = 0$ η εξίσωση ανάγεται στην εξίσωση του Laplace $\nabla^2 \phi = 0$.

⁵Στις εξισώσεις Navier-Stokes για ασυμπίεστα ρευστά, η εξίσωση του πεδίου πίεσης περιγράφεται από την εξίσωση του Poisson.

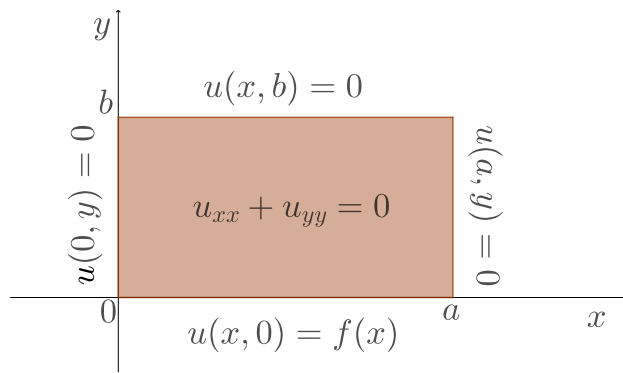
Παράδειγμα 6.2. Η συναρτήσεις $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ και $u(x, y) = e^x \sin y$ είναι παραδείγματα αρμονικών συναρτήσεων στον \mathbb{R}^2 αφού $\Delta u = 0$. Αντίστοιχα για υψηλότερες διαστάσεις αποδεικνύουμε εύκολα ότι η $u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{2-n}$, $\mathbf{x} \neq 0$, $n \geq 3$ είναι αρμονική.

6.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών σε φραγμένο χωρίο

6.2.1 ΠΣΤ σε ένα ορθογώνιο

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας με ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet για την εξίσωση του Laplace (πρόβλημα Dirichlet⁶) σε ένα ορθογώνιο:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) = f(x) & \text{στο } [0, a], \\ u(x, b) = 0 & \text{στο } [0, a], \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & \text{στο } [0, b]. \end{cases} \quad (6.4)$$



Σχήμα 6.1: Η εξίσωση Laplace σε ένα ορθογώνιο $[0, a] \times [0, b]$ όπως ορίζεται στο ΠΣΤ (6.4).

Η λύση του ΠΣΤ (6.4) μπορεί για παράδειγμα να περιγράψει την κατανομή θερμότητας σε μια ορθογώνια λεπτή μεταλλική πλάκα με μήκος πλευρών a και b , αντίστοιχα, όταν το φαινόμενο βρίσκεται σε μόνιμη ισορροπία. Στο (6.4) έχουμε υποθέσει ότι η θερμοκρασία στην αριστερή, δεξιά και πάνω πλευρά της πλάκας διατηρείται στους μηδέν βαθμούς, και ότι η βάση διατηρείται σε θερμοκρασία $f(x)$, $0 < x < a$. (Ανάλογα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η αριστερή και δεξιά πλευρά είναι θερμικά μονωμένες και να επιλέξουμε τις συνθήκες Neumann $u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$.)

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να βρούμε πολλές λύσεις για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & \text{στο } (0, a) \times (0, b), \\ v(x, b) = 0 & \text{στο } [0, a], \\ v(0, y) = v(a, y) = 0 & \text{στο } [0, b], \end{cases} \quad (6.5)$$

που θα χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό της λύσης του (6.4).

Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών:

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις της μορφής:

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (6.6)$$

Για μια συνάρτηση v της παραπάνω μορφής η διαφορική εξίσωση $v_{xx} + v_{yy} = 0$ γράφεται ισοδύναμα ως

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

⁶Ένα πρόβλημα Dirichlet είναι το πρόβλημα εύρεσης της λύσης ενός ΠΣΤ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Αν και το πρόβλημα Dirichlet αφορά πολλές ΜΔΕ, συχνά ο όρος χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας αρμονικής συνάρτησης (κλασικής λύσης της εξίσωσης του Laplace) με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, αφού αρχικά τέθηκε για την εξίσωση αυτή. Το ζητούμενο του προβλήματος Dirichlet είναι η απόδειξη ύπαρξης λύσης, ενώ η μοναδικότητα μπορεί να αποδειχθεί με την αρχή του μεγίστου.

Διαιρώντας την τελευταία σχέση δια $X(x)Y(y)$ έχουμε:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι μια συνάρτηση μόνο του x και το δεξιό είναι συνάρτηση μόνο του y . Επομένως ο μόνος τρόπος να ισχύει η ισότητα αυτή για κάθε x και y είναι και τα δύο μέλη να είναι ίσα με μια σταθερά λ , δηλαδή

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αναγάγουμε έτσι το πρόβλημα ΜΔΕ σε δυο προβλήματα ΣΔΕ, δηλαδή στα ακόλουθα προβλήματα Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

και

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), & 0 < y < b \\ Y(b) = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση του προβλήματος (6.7) με $X(x)$ και ολοκληρώνουμε στο $[0, a]$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στον αριστερό όρο και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^a X''(x)X(x) dx &= -\lambda \int_0^a [X(x)]^2 dx \Rightarrow \\ X'(x)X(x) \Big|_0^a - \int_0^a [X'(x)]^2 dx &= -\lambda \int_0^a [X(x)]^2 dx \Rightarrow \\ \int_0^a [X'(x)]^2 dx &= \lambda \int_0^a [X(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\lambda > 0$. Έχουμε επομένως (βλ. Παράδειγμα 5.44):

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.9)$$

όπου A_n αυθαίρετες σταθερές.

Η εξίσωση $Y''(y) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y)$ έχει λύσεις της μορφής

$$Y_n(y) = B_n \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b-y) \right] + C_n \cosh \left[\frac{n\pi}{a} (b-y) \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου B_n, C_n αυθαίρετες σταθερές. Από τη συνοριακή συνθήκη ισχύει ότι $Y(b) = 0$, άρα $C_n = 0$.

Συνεπώς, για $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ το ΠΣΤ (6.8) έχει λύση

$$Y_n(y) = B_n \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b-y) \right]. \quad (6.10)$$

Συνεπώς, από τις (6.6), (6.9) και (6.10) το πρόβλημα (6.5) έχει ένα άπειρο πλήθος λύσεων

$$v_n(x, y) = c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b-y) \right], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.11)$$

Επιστρέφουμε στο ΠΣΤ (6.4). Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε

$$f(0) = f(a) = 0.$$

Από την αρχή της υπέρθεσης (αφού η εξίσωση είναι γραμμική) έχουμε ότι ο πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b-y) \right] \quad (6.12)$$

είναι λύση του (6.4) αν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, και πιο συγκεκριμένα αν $u(x, 0) = f(x)$ (αφού οι υπόλοιπες συνθήκες επαληθεύονται εύκολα), όπου

$$u_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}. \quad (6.13)$$

Άρα, η σχέση ισχύει αν και μόνο αν η f είναι ένα περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο $2a$, δηλαδή ο περιορισμός ενός τέτοιου τριγωνομετρικού πολυωνύμου στο $[0, a]$ είναι

$$f(x) = \sum_{n=1}^N d_n \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Επεκτείνουμε περιττά το f στο $(-a, 0)$ και στη συνέχεια σε όλη την ευθεία περιοδικά με περίοδο $2a$. Έστω $f_{\text{επεκ.}}$ η συνάρτηση που παίρνουμε από την επέκταση αυτή. Αφού η $f_{\text{επεκ.}}$ είναι περιττή θεωρούμε τη σειρά Fourier της $f_{\text{επεκ.}}$ ως μια σειρά ημιτόνων. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη (λεία), τότε τις ίδιες ιδιότητες θα έχει και η $f_{\text{επεκ.}}$. Επομένως, η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f_{\text{επεκ.}}$

$$f_{\text{επεκ.}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6.14)$$

όπου

$$b_n := \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η λύση του (6.4) δίνεται ως

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b - y) \right],$$

και συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με τις σχέσεις (6.13) και (6.14) θα πρέπει να έχουμε

$$a_n = \frac{b_n}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

Άρα, ισχυριζόμαστε εκ νέου ότι η λύση του ΠΣΤ (6.4) είναι

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b - y) \right], \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (6.15)$$

Μένει να δούμε ότι η λύση είναι όντως αυτή.

Έχουμε υποθέσει ότι η f είναι συνεχής και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη. Επομένως, από την ομαλότητα της f και τη σχέση

$$\left| \frac{\sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b - y) \right]}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq b,$$

προκύπτει ότι η σειρά στην (6.15) συγκλίνει ομοιόμορφα και η u είναι συνεχής στο $[0, a] \times [0, b]$. Άρα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το όριο με το άπειρο άθροισμα (λόγω συνέχειας). Συνεπώς, η u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, και ειδικότερα τη σχέση $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq a$.

Από την ανισότητα του Bessel η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνει, και από τη σχέση

$$\frac{\sinh \left[\frac{n\pi}{a} (b - y) \right]}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} = e^{-\frac{n\pi}{a} y} \frac{1 - e^{-2\frac{n\pi}{a} (b-y)}}{1 - e^{-\frac{n\pi b}{a}}}$$

έχουμε ότι για $\epsilon > 0$, στο $[0, a] \times [\epsilon, b]$ αν πάρουμε οποιεσδήποτε παραγώγους στους όρους της σειράς στην (6.15) προκύπτει ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά. Επομένως, η u είναι άπειρες φορές συνεχώς

παραγωγίσιμη στο $[0, a] \times (0, b]$ και οι παράγωγοι της u λαμβάνονται με παραγωγή της σειράς όρο προς όρο. Συνεπώς, αφού οι u_n της (6.11) είναι αρμονικές και η u είναι αρμονική στο $[0, a] \times (0, b]$.

Συμπέρασμα:

Η u που δίνεται από την (6.15) είναι λύση⁷ του ΠΣΤ (6.4) και επιπλέον είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, a] \times (0, b]$.

Άσκηση 6.3.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

6.2.2 Το ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο και ο τύπος του Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το ΠΣΤ Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε έναν δίσκο. Σκοπός, της ενότητας αυτής είναι να οδηγηθούμε σε μια αναπαράσταση της λύσης, τον λεγόμενο *τύπο του Poisson*.

Οι αναπαραστάσεις γενικά είναι σημαντικές γιατί δίνουν χρήσιμες πληροφορίες για τις ιδιότητες των λύσεων και σε απλές περιπτώσεις δυνατότητα υπολογισμού της λύσης. Μέσω λοιπόν του τύπου Poisson θα αποδείξουμε τρεις σημαντικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων:

- (i) Ιδιότητα Μέσης Τιμής
- (ii) Αρχή του Μεγίστου
- (iii) Ομαλότητα Αρμονικών Συναρτήσεων (C^∞)

Οι ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων σε έναν δίσκο D μπορούν εύκολα να γενικευθούν σε ένα φραγμένο χωρίο (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) U εάν καλύψουμε το χωρίο αυτό με δίσκους γύρω από κάθε στοιχείο. Επομένως, γενικεύουμε έτσι τις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων σε οποιοδήποτε χωρίο, και μέσω του τύπου Poisson μπορούμε να αποδείξουμε ότι το ΠΣΤ Dirichlet για την εξίσωση Laplace έχει κλασική λύση ακόμη για αρχικές συνθήκες που είναι σχεδόν παντού συνεχείς (κατά τμήματα συνεχείς).

6.2.3 ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο

Αλλάζουμε τις συντεταγμένες μας σε πολικές μέσω του μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας έτσι μια συνάρτηση $u(x(r, \theta), y(r, \theta)) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ως προς r έχουμε μετά από εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

κάνοντας το ίδιο για την θ έχουμε τελικά τους τελεστές:

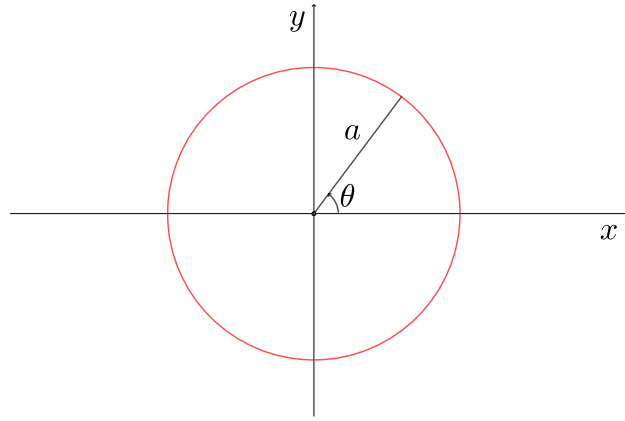
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση επί $\cos \theta$ και τη δεύτερη επί $-\sin \theta/r$ και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει ο τελεστής

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (6.16)$$

και ανάλογα πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση επί $\sin \theta$ και τη δεύτερη επί $\cos \theta/r$ και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει ο τελεστής

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (6.17)$$



Σχήμα 6.2: Θα λύσουμε το ΠΣΤ Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε ένα δίσκο D με συνοριακές συνθήκες στον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$.

Η δεύτερη παράγωγος ως προς x δίνεται από τον τελεστή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \stackrel{(6.16)}{=} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ανάλογα παίρνουμε για το y :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (6.19)$$

Από τις (6.18)-(6.19) παίρνουμε την εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (6.20)$$

Θεωρούμε τώρα το (εσωτερικό) ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & 0 \leq r < a, \theta \in \mathbb{R}, \\ u(a, \theta) = h(\theta), & \theta \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.21)$$

όπου h συνεχώς παραγωγίσιμη⁸ περιοδική συνάρτηση. Για την εύρεση της λύσης του ΠΣΤ ακολουθούμε τα ίδια βήματα με την απόδειξη του προβλήματος στο ορθογώνιο.

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε μη μηδενικές λύσεις του προβλήματος

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad 0 \leq r < a, \theta \in \mathbb{R}, \quad (6.22)$$

της μορφής

$$v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta). \quad (6.23)$$

(μέθοδο χωρισμού μεταβλητών), οι οποίες είναι συνεχείς στο $[0, a] \times \mathbb{R}$ και 2π -περιοδικές ως προς θ . Για να ικανοποιούν οι λύσεις αυτές την εξίσωση (6.22) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$R''(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = 0.$$

⁷Μοναδική λύση, όπως αποδεικνύεται από την αρχή του μεγίστου στην επόμενη ενότητα.

⁸Επιλέγουμε εδώ την h να είναι μια αρκούντως ομαλή συνάρτηση για να χρησιμοποιήσουμε τις σειρές Fourier κατά την διαδικασία εύρεσης λύσης, και να καταλήξουμε στον τύπο του Poisson. Ωστόσο, ο τύπος του Poisson ικανοποιείται για $h \in L^1$ (ολοκληρώσιμη). Αποδεικνύεται ότι το ΠΣΤ λύνεται και για $h \in L^1$ (βλ. Θεώρημα 6.4 και Παρατήρησή 6.5).

Διαιρώντας κατά τα γνωστά δια $R(r)\Theta(\theta)$ έχουμε

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

και καταλήγουμε έτσι στις εξισώσεις

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (6.24)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < a. \quad (6.25)$$

Κατά τα γνωστά πολλαπλασιάζοντας την (6.24) με $\Theta(\theta)$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο $[0, 2\pi]$, προκύπτει ότι $\lambda \geq 0$ και μαζί με τη συνθήκη περιοδικότητας $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ έχουμε τα ζεύγη ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta(\theta) = C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

όπου C_n, D_n αυθαίρετες σταθερές.

Η εξίσωση (6.25) είναι μια εξίσωση Euler που για $\lambda_n = n^2$ έχει λύση⁹

$$R(r) = c_n r^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

όπου c_n αυθαίρετη σταθερά.

Συνεπώς, παίρνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων για την (6.22) που δίνεται από τη σχέση

$$v_n(r, \theta) = [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

που είναι φραγμένες και 2π -περιοδικές (ως προς θ) λύσεις της εξίσωσης Laplace.

Αφού η h είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε η σειρά Fourier της συγκλίνει ομοιόμορφα στην h :

$$h(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (6.26)$$

όπου

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (6.27)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.28)$$

Ισχυριζόμαστε ότι η λύση του ΠΣΤ (6.21) δίνεται ως

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (6.29)$$

με a_n, b_n από τις σχέσεις (6.27), (6.28), αντίστοιχα, και αποδεικνύουμε ότι είναι όντως λύση του ΠΣΤ και άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικού του κύκλου, δηλαδή για $r < a$, με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε την λύση του ΠΣΤ στην προηγούμενη ενότητα.

Ο τύπος του Poisson

Θα δούμε τώρα πως αυτή η λύση θα γραφεί σε κλειστή μορφή.

Θέτουμε $\rho = \frac{r}{a}$ και η (6.29) γίνεται

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]. \quad (6.30)$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις (6.27), (6.28), στην (6.30) και να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και της άθροισης:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_0^{2\pi} h(\phi) (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \phi) \right\} h(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

⁹Η λύση $\tilde{R}_n(r) = r^{-n}$ απορρίπτεται στο εσωτερικό ΠΣΤ Dirichlet στον δίσκο αφού απειρίζεται στο μηδέν, ενώ είναι δεκτή στο εξωτερικό πρόβλημα $r > a$.

Τώρα για $0 \leq \rho < 1$ μπορούμε να αναγάγουμε τη σειρά αυτή σε γεωμετρική σειρά:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n \cos n(\theta - \phi)] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n e^{in(\theta - \phi)} + \rho^n e^{-in(\theta - \phi)}] = 1 + \frac{\rho e^{i(\theta - \phi)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \phi)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta - \phi)}}{1 - \rho e^{-i(\theta - \phi)}} \\ &= \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho e^{i(\theta - \phi)} - \rho e^{-i(\theta - \phi)} + \rho^2} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} \end{aligned}$$

και έτσι παίρνουμε τον τύπο του Poisson

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) - r^2} d\phi. \quad (6.31)$$

Η (6.31) είναι μια δεύτερη μορφή της μοναδικής αρμονικής συνάρτησης $u(r, \theta)$ που ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη του ΠΣΤ (η πρώτη είναι η (6.30)). Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος λέγεται ολοκλήρωμα *Poisson* για τον κύκλο.

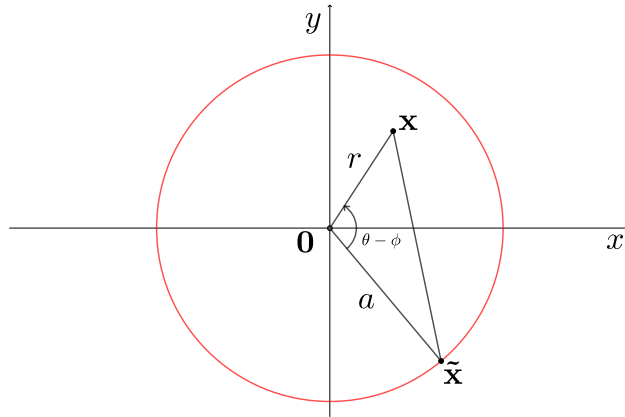
Έστω σημεία $\mathbf{x} = (x, y)$ με πολικές συντεταγμένες (r, θ) και $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ με πολικές συντεταγμένες (a, ϕ) (βλ. Σχήμα 6.3). Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι $r = |\mathbf{x}|$, $a = |\tilde{\mathbf{x}}|$ και $|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|$. Τότε από το νόμο των συνημιτόνων ισχύει

$$|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi).$$

Το μήκος s τόξου γωνίας ϕ είναι $s = a\phi$, επομένως $ds = a d\phi$.

Έτσι η (6.31) γίνεται

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\tilde{\mathbf{x}}|=a} \frac{u(\tilde{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2} ds, \quad |\mathbf{x}| < a. \quad (6.32)$$



Σχήμα 6.3: Γεωμετρική ερμηνεία του τύπου Poisson.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα που δείχνει μοναδικότητα υπό ασθενέστερες συνθήκες για την ομαλότητα της συνάρτησης h .

Θεώρημα 6.4. Έστω $h(\phi) = u(\tilde{\mathbf{x}})$ οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στον κύκλο ∂D . Τότε, η (6.31) ή η (6.32) δίνει την μόνη αρμονική συνάρτηση στο D για την οποία ισχύει

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial D. \quad (6.33)$$

Άρα η συνάρτηση $u(\mathbf{x})$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\bar{D} = D \cup \partial D$ και απείρως παραγωγίσιμη στο D .

Παρατήρηση 6.5. Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται ότι ισχύει για $h \in L^1$ (συνεχής σχεδόν παντού).

Παράδειγμα 6.6. Έστω το ΠΣΤ

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 \leq r < a, \theta \in \mathbb{R}, \\ u(a, \theta) = 1 + 3 \sin \theta, & \theta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Έχουμε δείξει ότι

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) r^n.$$

Επιλέγουμε

$$A_0 = 1, \quad A_n = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad B_1 = \frac{3}{a}, \quad B_n = 0 \quad \forall n \geq 2$$

ώστε $u(a, \theta) = 1 + 3 \sin \theta$.

Άρα

$$u(r, \theta) = 1 + \frac{3r}{a} \sin \theta.$$

6.2.4 Βασικές ιδιότητες αρμονικών συναρτήσεων

Ας δούμε τώρα τις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων όπως προκύπτουν από τον τύπο του Poisson.

Ιδιότητα μέσης τιμής

Θεώρημα 6.7. (ΘΜΤ) Αν η u είναι αρμονική σε έναν δίσκο D και $u \in C(\overline{D})$, τότε η τιμή της u στο κέντρο του δίσκου ισούται με τη μέση τιμή της u στον κύκλο.

Απόδειξη. Για $r = 0$ η (6.31) γίνεται

$$u(0, \theta) = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2} d\phi, \quad (6.34)$$

ή αντίστοιχα η (6.32) γίνεται

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a^2}{2\pi a} \int_{|\tilde{\mathbf{x}}|=a} \frac{u(\tilde{\mathbf{x}})}{|\tilde{\mathbf{x}}|^2} ds = \frac{1}{2\pi a} \int_{|\tilde{\mathbf{x}}|=a} u(\tilde{\mathbf{x}}) ds, \quad (6.35)$$

όπου $|\tilde{\mathbf{x}}| = a$. Άρα, η τιμή της u στο κέντρο του δίσκου ισούται με τη μέση τιμή της u στην περιφέρεια του κύκλου $|\tilde{\mathbf{x}}| = a$. \square

Παρατήρηση 6.8. Ισχύει και η αντίστροφα φορά, δηλαδή αν η συνάρτηση $u \in C(\overline{D})$ ικανοποιεί το ΘΜΤ, τότε είναι αρμονική (ικανοποιεί τον τύπο του Poisson). Επομένως ο τύπος του Poisson είναι ισοδύναμος με το ΘΜΤ.

Αρχή του μεγίστου

Η επόμενη ιδιότητα των αρμονικών συναρτήσεων είναι ότι ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου. Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι αρμονική, τότε τόσο η μέγιστη τιμή της όσο και η ελάχιστη λαμβάνονται στο σύνορο του χωρίου. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική και στην απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης ενός ΠΣΤ (εφόσον υπάρχει), και συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.9. (Αρχή του μεγίστου) Έστω U (ανοικτό και συνεκτικό) φραγμένο χωρίο και $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ με $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Αν η u είναι αρμονική στο U , τότε:

(i) $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ (Ασθενής αρχή μεγίστου)

(ii) Αν επιπλέον υπάρχει $\mathbf{x}_M \in U$ τέτοιο ώστε $u(\mathbf{x}_M) = \max_{\overline{U}} u$, τότε η u είναι σταθερή. (Ισχυρή αρχή μεγίστου)

Αντίστοιχα ισχύουν για το \min .

Απόδειξη. (ii) Έστω $\mathbf{x}_M \in \bar{U}$ τέτοιο ώστε $u(\mathbf{x}_M) = \max_{\bar{U}} u$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathbf{x}_M \notin U$ εκτός αν $u \equiv c$.

Έστω $M := \max_{\bar{U}} u$, δηλαδή $M = u(\mathbf{x}_M)$ τέτοιο ώστε $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_M) \quad \forall \mathbf{x} \in U$. Αν το \mathbf{x}_M είναι εσωτερικό σημείο, δηλαδή $\mathbf{x}_M \in U$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε ο δίσκος με κέντρο το \mathbf{x}_M και ακτίνα δ να είναι υποσύνολο του U . Θα δείξουμε ότι $u(\mathbf{x}) = M$ για κάθε σημείο \mathbf{x} του δίσκου αυτού.

Από τη σχέση (6.35) του ΘΜΤ έχουμε

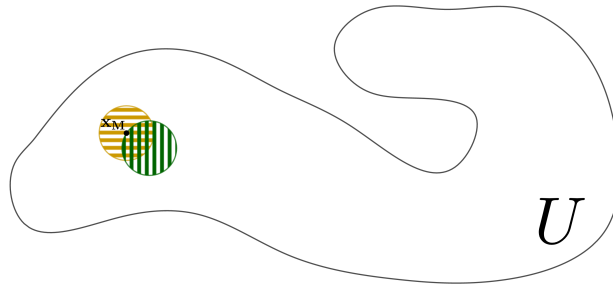
$$u(\mathbf{x}_M) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|\bar{\mathbf{x}}|=\delta} u(\bar{\mathbf{x}}) ds \leq \int_{|\bar{\mathbf{x}}|=\delta} M ds = M.$$

Άρα $u(\mathbf{x}_M) = M$ για όλα τα σημεία στην περιφέρεια του κύκλου. Για κάθε εσωτερικό σημείο \mathbf{x} του δίσκου το συμπέρασμα έπεται με τον ίδιο τρόπο, αν θεωρήσουμε έναν άλλο δίσκο με κέντρο το \mathbf{x}_M τέτοιο ώστε το \mathbf{x} να ανήκει στον κύκλο του (βλ. Σχήμα 6.4).

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με διαφορετικό κέντρο. Μπορούμε έτσι να καλύψουμε όλο το χωρίο με κύκλους. Έτσι, από το γεγονός ότι το U είναι συνεκτικό, παίρνουμε $u(\mathbf{x}) = M$ σε όλο το U , άρα η u είναι σταθερή συνάρτηση.

(i) Έπεται από (ii).

□



Σχήμα 6.4: Γεωμετρική ερμηνεία του ΘΜΤ.

Ομαλότητα αρμονικών συναρτήσεων

Πόρισμα 6.10. Αν η u είναι αρμονική συνάρτηση σε ένα χωρίο U , τότε $u \in C^\infty(U)$.

Απόδειξη. Η (6.32) γράφεται

$$u(x, y) = \frac{a^2 - (x^2 + y^2)}{2\pi a} \int_{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = a^2} \frac{u(\tilde{x}, \tilde{y})}{(\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2} dS, \quad x^2 + y^2 < \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμο. Άρα μια αρμονική συνάρτηση είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε έναν κύκλο. Το ίδιο ισχύει και σε ένα τυχαίο χωρίο U , αφού πάντα μπορούμε να βρούμε έναν δίσκο που να περιέχεται στο U και να περιέχει ένα τυχαίο σημείο $(x, y) \in U$. □

Θα δείξουμε τώρα κάποια συμπεράσματα που προκύπτουν από την αρχή του μεγίστου.

Πόρισμα 6.11. Έστω U φραγμένο χωρίο. Η λύση του ΠΣΤ

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (6.36)$$

αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω $u_1, u_2 \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ λύσεις του (6.36), τότε ισχύει

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f, & \text{στο } U \\ u_1 = g, & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f, & \text{στο } U \\ u_2 = g, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Έστω $v = u_1 - u_2$. Τότε η v είναι λύση του ΠΣΤ

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{στο } U \\ v = 0, & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Από την αρχή του μεγίστου έχουμε ότι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της v είναι στο ∂U , άρα $v = 0$ στο U , δηλαδή $u_1 = u_2$ στο U . Συνεπώς, η λύση είναι μοναδική. \square

Παρατήρηση 6.12. Για μη φραγμένα χωρία δεν ισχύει απαραίτητα η μοναδικότητα. Για παράδειγμα το ακόλουθο ΠΣΤ

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, 2\pi), \\ u = 0, & \text{στο } \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \times \{(x, 2\pi) \mid x \in \mathbb{R}\}, \end{cases}$$

εκτός από τη μηδενική λύση έχουμε και τη λύση $u(x, y) = e^x \sin y$.

Θεώρημα 6.13. (Θεώρημα ευστάθειας¹⁰) Η λύση του ΠΣΤ (6.36) εξαρτάται συνεχώς από τη συνοριακή συνθήκη.

Πόρισμα 6.14. Έστω $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ λύση του ΠΣΤ

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U. \end{cases} \quad (6.37)$$

και $g \in C(\partial U)$, $g \geq 0$. Αν $g(\mathbf{x}_0) > 0$ σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}_0 \in \partial U$, τότε

$$u(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{στο } U.$$

Απόδειξη. Από την ασθενή αρχή μεγίστου έχουμε

$$u(\mathbf{x}) \geq \min_{\mathbf{x} \in \partial U} u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \partial U} g(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in U.$$

Με άτοπο: Έστω ότι υπάρχει $\mathbf{x}_1 \in U$ τέτοιο ώστε $u(\mathbf{x}_1) = 0$. Άρα, $u = 0$ από την ισχυρή αρχή μεγίστου. Άτοπο, αφού $g(\mathbf{x}_0) > 0$. \square

Παρατήρηση 6.15. (Η μέθοδος της ενέργειας) Μπορούμε να αποδείξουμε μοναδικότητα και ευστάθεια (συνεχή εξάρτηση) της λύσης $u \in C^2(\bar{U})$ του ΠΣΤ (6.36) σε ένα φραγμένο χωρίο U με ομαλό (C^1) σύνορο ∂U με τη μέθοδο της ενέργειας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση του Poisson του ΠΣΤ (6.36) επί u , ολοκληρώνουμε στο U και χρησιμοποιούμε την πρώτη ταυτότητα του Green (βλ. Θεώρημα 1.2)

$$\iint_U \Delta u \, u \, dx \, dy = \iint_U f \, u \, dx \, dy \Rightarrow - \iint_U \nabla u \cdot \nabla u \, dx \, dy + \int_{\partial U} g \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, dS = \iint_U f \, u \, dx \, dy.$$

Αν u_1, u_2 λύσεις του (6.36), τότε η $v := u_1 - u_2$ είναι λύση του αντίστοιχου προβλήματος με $f = g = 0$. Άρα

$$\iint_U |\nabla v|^2 \, dx \, dy = 0 \Rightarrow \nabla v = 0,$$

στο U (αφού η ∇v είναι συνεχής συνάρτηση), δηλαδή $v_x = v_y = 0 \Rightarrow v \equiv c$ στο U . Όμως $v = 0$ στο ∂U , άρα $v \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

¹⁰Η λύση ενός ΠΣΤ είναι ευσταθής αν μικρές διαταραχές των βοηθητικών (αρχικών ή συνοριακών) δεδομένων οδηγούν σε μικρές μόνο μεταβολές της λύσης. Αν το πρόβλημά δεν είναι ευσταθές, τότε δεν είναι καλά ορισμένο (βλ. Ενότητα 1.3). Η ευστάθεια είναι απαραίτητη και στους αριθμητικούς υπολογισμούς, καθώς τα μικρά σφάλματα στρογγύλευσης στα βοηθητικά δεδομένα ενός ασταθούς μοντέλου θα μεταδοθούν μέσω της αριθμητικής μεθόδου και θα αυξηθούν σε μέγεθος κι έτσι οι υπολογισμοί δεν θα έχουν πια νόημα.

Σημείωση: Ο όρος $\frac{1}{2} \iint_U |\nabla u|^2 dx dy$ είναι η ενέργεια (π.χ. ελαστική ενέργεια μιας μεμβράνης) που είναι μόνο δυναμική τυπικά στα ελλειπτικά προβλήματα (δεν υπάρχει δηλαδή κινητική ενέργεια).

Γενικότερα, από όλες τις συναρτήσεις $w(\mathbf{x})$ σε ένα χωρίο U που ικανοποιούν την συνθήκη *Dirichlet* στο σύνορο

$$w = g(\mathbf{x}), \quad \text{στο } \partial U$$

η χαμηλότερη ενέργεια εμφανίζεται για τις αρμονικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την τελευταία σχέση.

Παρατήρηση 6.16. Εύκολα παρατηρούμε ότι το ΠΣΤ *Poisson* με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* (6.36), λόγω της γραμμικότητας του διασπάται σε δύο ειδικότερα προβλήματα:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & \text{στο } U \\ u_1 = g, & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f, & \text{στο } U \\ u_2 = 0, & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Αν u_1 η λύση του πρώτου και u_2 η λύση του δεύτερου ΠΣΤ, τότε η λύση u του (6.36) δίνεται από το άθροισμα τους: $u = u_1 + u_2$.

Άσκηση 6.17. Να βρεθεί η λύση του εσωτερικού προβλήματος *Neumann*:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < a, \theta \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), & \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6.3 Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace

Μια καλή στρατηγική να ακολουθήσει κανείς για την επίλυση μιας γραμμικής ΜΔΕ είναι να αναζητήσει πρώτα λύσεις σε κλειστή μορφή και ύστερα να εκφράσει μέσω αυτών πιο περίπλοκες λύσεις. Μια τέτοια λύση σε κλειστή μορφή για την εξίσωση Laplace είναι η γνωστή και ως θεμελιώδης λύση της, την οποία και εισάγουμε στην παρούσα υποενότητα. Δεν θα αναφερθούμε, ωστόσο, στον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε πιο περίπλοκες λύσεις μέσω αυτής.

Τώρα, κατά την αναζήτηση λύσεων σε κλειστή μορφή είναι συχνά συνετό να περιοριστεί κανείς σε κλάσεις συναρτήσεων με συγκεκριμένες ιδιότητες συμμετρίας. Αφού η εξίσωση Laplace είναι αμετάβλητη σε περιστροφές, συνιστάται να αναζητήσει κανείς πρώτα ακτινικές (radial) λύσεις, δηλαδή συναρτήσεις ως προς $r = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Θα προσπαθήσουμε επομένως να βρούμε μια λύση της εξίσωσης $\Delta u = 0$ στο χωρίο $U \subset \mathbb{R}^n$, της μορφής $u(\mathbf{x}) = v(r)$. Βλέπουμε ότι για $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

Έχουμε τότε

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

για $i = 1, \dots, n$, και έτσι

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Συνεπώς, $\Delta u = 0$ αν και μόνο αν

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Αν $v' \neq 0$, παίρνουμε

$$\log(|v'|)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

και έτσι $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ για κάποια σταθερά a . Συνεπώς, αν $r > 0$, έχουμε

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3), \end{cases}$$

όπου b και c σταθερές.

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.18. Η συνάρτηση

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|\mathbf{x}| & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)a(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} & (n \geq 3), \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

όπου $a(n)$ ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας $B(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$, είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace (*fundamental solution of Laplace's equation*).

Η συγκεκριμένη επιλογή των συντελεστών της Φ δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

Κεφάλαιο 7

Εξισώσεις παραβολικού τύπου

Στο Κεφάλαιο αυτό και στο επόμενο θα μελετήσουμε τις θεμελιώδεις φυσικές διεργασίες της διάχυσης και της κυματικής διάδοσης, αντίστοιχα, παρουσιάζοντας εξελικτικές εξισώσεις (δηλαδή εξισώσεις που παρουσιάζουν χρονική εξέλιξη). Εδώ, εστιάζουμε τη μελέτη μας στις γραμμικές παραβολικές εξισώσεις που περιγράφουν διαδικασίες ροής θερμότητας και διάχυσης, μελετώντας το πρότυπο αυτών των εξισώσεων, την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας, στη μία (χωρική) διάσταση.

7.1 Μια εισαγωγή στην εξίσωση διάχυσης-θερμότητας

Πολλές από τις θεμελιώδεις εξισώσεις που συναντάμε στις φυσικές επιστήμες προέρχονται από τους νόμους διατήρησης, δηλαδή εξισώσεις που περιγράφουν την διατήρηση του ισοζυγίου κατά την διάρκεια μιας διαδικασίας. Παραδείγματα διατήρησης ισοζυγίου συναντάμε σε:

- **Θερμοδυναμική (1ος νόμος):** Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας δεδομένου συστήματος είναι ίση με την ολική θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα συν το έργο που παράγεται.
- **Ρευστομηχανική:** Θεωρούμε τη ροή ενός ρευστού σε χωρίο U που περιέχει χημικές ενώσεις που αντιδρούν μεταξύ τους. Τότε, ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ποσότητας μιας συγκεκριμένης χημικής ένωσης στο U , πρέπει να ισούται με το ρυθμό εισόδου της χημικής ένωσης στο U , μείον το ρυθμό εξόδου της χημικής ένωσης από το U , συν το ρυθμό δημιουργίας ή ανάλωσης εξαιτίας των χημικών αντιδράσεων.
- **Βιοεπιστήμες:** Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ενός συγκεκριμένου είδους ζώων (κυττάρων κ.τ.λ.) σε κάποιον ορισμένο χώρο πρέπει να ισούται με το ρυθμό γεννήσεων, μείον το ρυθμό θανάτου συν το ρυθμό μετανάστευσης προς ή από το χώρο αυτό.

Από τους νόμους διατήρησης και τον 1ο νόμο του Fick (βλ. Ενότητα 2.3) παίρνουμε την *εξίσωση διάχυσης (diffusion equation)*

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad (7.1)$$

όπου $u(x, t)$ η άγνωστη πυκνότητα του υλικού διάχυσης στη θέση x και τη χρονική στιγμή t , και D η σταθερά διάχυσης (*diffusion coefficient or diffusivity*)¹. Ο όρος Du_{xx} είναι ο όρος διάχυσης.

Παράδειγμα 7.1. (Η κλασική εξίσωση της θερμότητας) Στη περίπτωση που η u είναι πυκνότητα ενέργειας² η εξίσωση διάχυσης περιγράφει τη διάχυση της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο μέσο. Για παράδειγμα, σε ένα ομογενές μέσο πυκνότητας ρ και ειδικής θερμότητας (υπό σταθερό όγκο) C , η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$u(x, t) = C\rho T(x, t),$$

όπου T η θερμοκρασία. Τότε, από τον νόμο διατήρησης

$$C\rho T_t + q_x = 0,$$

¹ $D = \frac{\text{μήκος}^2}{\text{χρόνος}}$
² $u = \frac{\text{ενέργεια}}{\text{όγκος}}$

όπου $q(x, t)$ η ροή της μάζας, και τον νόμο του Fourier για την αγωγή της θερμότητας (βλ. Ενότητα 2.3)

$$q = -KT_x,$$

όπου K ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$T_t - aT_{xx} = 0, \quad (7.2)$$

όπου $a = \frac{K}{C\rho}$ ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Καταλήγουμε επομένως στην εξίσωση της θερμότητας που είναι ακριβώς η εξίσωση της διάχυσης (7.1) με τον συντελεστή θερμικής διάχυσης να είναι το ανάλογο της σταθεράς διάχυσης σε προβλήματα ροής θερμότητας.

Παρατήρηση 7.2. Εδώ, υποθέσαμε ότι οι φυσικές παράμετροι του μέσου, C, K και ρ , είναι σταθερές. Ωστόσο, οι ποσότητες αυτές μπορεί να εξαρτώνται και από τη θερμοκρασία, T , οπότε η εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση θα είναι μη γραμμική. Αντίστοιχα, μη γραμμική θα είναι και η εξίσωση διάχυσης αν η σταθερά διάχυσης εξαρτάται από την πυκνότητά u , δηλαδή είναι μια συνάρτηση $D(u)$. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος θα περιοριστούμε στη μελέτη της γραμμικής εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας.

Παράδειγμα 7.3. (Η εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης) Η εξίσωση διάχυσης είναι μια εξίσωση χωρίς πηγές. Αν στο πρόβλημα υπάρχουν πηγές, τότε η εξίσωση ονομάζεται εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης (reaction-diffusion equation) και έχει τη μορφή

$$u_t - Du_{xx} = f(x, t, u).$$

Οι εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης μπορεί να είναι μη γραμμικές αν ο όρος πηγής³ (ή όρος αντίδρασης, όπως επίσης λέγεται) f είναι μη γραμμικός ως προς u . Οι εξισώσεις αυτές παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για τη μη γραμμική ανάλυση και για τις εφαρμογές σε προβλήματα ανάφλεξης, φυσικής πλάσματος, οικολογίας, σε βιολογικά συστήματα⁴ κ.α.

Παράδειγμα 7.4. (Η εξίσωση του Fisher) Μία από τις απλούστερες ημιγραμμικές εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης που περιγράφει προβλήματα δυναμικής πληθυσμού είναι η εξίσωση του Fisher. Αν θεωρήσουμε ότι ένας πληθυσμός διέπεται από τον λογιστικό νόμο (logistic growth), όπως γνωρίζουμε από τις ΣΔΕ, τότε ο ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού $u = u(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$u_t = ru \left(1 - \frac{u}{k_r}\right),$$

όπου $r > 0$ Ο ρυθμός αύξησης (growth rate) και $k_r > 0$ η φέρουσα ικανότητα (carrying capacity).

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η $u(x, t)$ παριστάνει την πυκνότητα πληθυσμού (δηλαδή πληθυσμός ανά μονάδα όγκου) στο σημείο x τη χρονική στιγμή t , τότε από το νόμο διατήρησης έχουμε την εξίσωση του Fisher:

$$u_t - Du_{xx} = ru \left(1 - \frac{u}{k_r}\right).$$

Η εξίσωση πήρε το όνομα της από τον P.A. Fisher που μελέτησε την εξίσωση κατά τη διάρκεια της έρευνας του για τη διάδοση, σε ένα δεδομένο πληθυσμό, ενός γονιδίου με ορισμένα πλεονεκτήματα.

7.2 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών σε φραγμένο διάστημα

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας για τις σειρές Fourier για να επιλύσουμε, με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών σε φραγμένα χωρία. Για να απλοποιήσουμε την μελέτη μας θα μελετήσουμε τα προβλήματα αυτά σε μια χωρική διάσταση, επομένως μελετάμε προβλήματα σε φραγμένα διαστήματα. Ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων είναι αντίστοιχος με αυτόν που εφαρμόσαμε στα ελλειπτικά προβλήματα, με τη διαφορά ότι εδώ θα μας απασχολήσει η χρονική εξάρτησή.

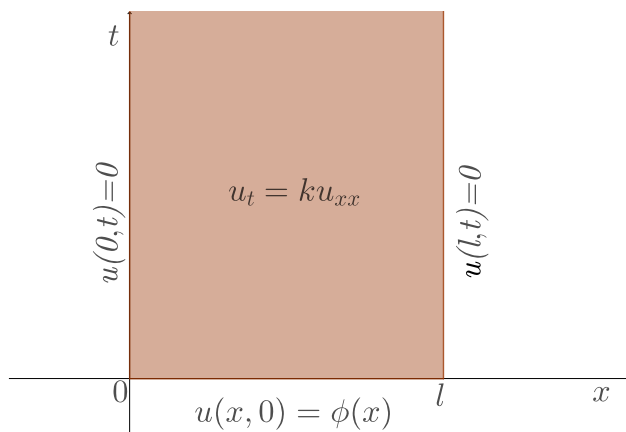
³ Αν η f είναι θετική, τότε θα λέμε ότι είναι πηγή, ενώ αν είναι αρνητική θα λέμε ότι είναι καταβόθρα (απαγωγή).

⁴ Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης σε βιολογικά συστήματα είναι τα μοτίβα του Turing (Turing patterns) που συναντάμε στο δέρμα αρκετών ζώων, αλλά και σε πολλές άλλες φυσικές καταστάσεις. Τα μοτίβα αυτά τα εισήγαγε και μελέτησε πρώτος ο Alan Turing το 1952, ενώ αργότερα μελετήθηκαν ιδιαίτερα από τον James D. Murray στο εκτενές έργο του πάνω στη Μαθηματική Βιολογία.

7.2.1 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (ΠΑΣΤ) για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.3)$$



Σχήμα 7.1: Η εξίσωση διάχυσης-θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα $[0, l]$ όπως ορίζεται στο ΠΑΣΤ (7.3).

Κατά τα γνωστά θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

και από αυτές θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια τη λύση του αρχικού ΠΑΣΤ (7.3). Εφαρμόζουμε πάλι τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, δηλαδή προσπαθούμε να βρούμε μη μηδενικές λύσεις v του (7.4) της μορφής

$$v(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.5)$$

που ικανοποιούν την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας, δηλαδή

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

Διαιρώντας την τελευταία σχέση δια $kX(x)T(t)$ έχουμε κατά τα γνωστά

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{σταθερά}.$$

Καταλήγουμε έτσι στις ΣΔΕ

$$T'(t) = -\lambda kT(t), \quad t > 0 \quad (7.6)$$

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < l. \quad (7.7)$$

Οι λύσεις της (7.6) δίνονται ως

$$T(t) = Ae^{-\lambda kt}, \quad t > 0, \quad (7.8)$$

όπου A αυθαίρετη σταθερά. Για να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες $v(0, t) = v(l, t) = 0$ από την $v(x, t) = X(x)T(t)$, πρέπει και αρκεί $X(0) = X(l) = 0$ (αφού η T δεν μηδενίζεται). Άρα, ζητάμε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ιδιοτιμές) και ομαλές, μη μηδενικές συναρτήσεις (αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις) X του προβλήματος Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Ακολουθώντας λοιπόν τα ίδια βήματα με αυτά της Ενότητας 6.2.1 (βλ. Σχέση (6.7), καθώς και Παράδειγμα 5.44 της Ενότητας 5.3.2) έχουμε

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.10)$$

Άρα, από (7.5), (7.8) και (7.10) λαμβάνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n του ΠΑΣΤ (7.4):

$$v_n(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.11)$$

όπου A_n αυθαίρετες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο ΠΑΣΤ (7.3). Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε ότι $\phi(0) = \phi(l) = 0$. Μελετάμε τώρα σε ποιές περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (7.3) ως πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων v_1, \dots, v_N , $N \in \mathbb{N}$, που δίνονται από την (7.11). Για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$ ή u_N :

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

ικανοποιεί τόσο τη ΜΔΕ όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (7.3). Η αρχική συνθήκη του προβλήματος ικανοποιείται αν και μόνο αν η ϕ είναι της μορφής

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

δηλαδή αν η ϕ είναι ένα ένα περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο $2l$ ή ακριβέστερα ο περιορισμός στο διάστημα $[0, l]$ ενός τέτοιου τριγωνομετρικού πολυωνύμου.

Στην γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τη ϕ κατά περιττό τρόπο στο διάστημα $(-l, 0)$ και στη συνέχεια σε όλη την ευθεία περιοδικά με περίοδο $2l$. Έστω $\phi_{\text{πεκ.}}$ η συνάρτηση που λαμβάνουμε κατ'αυτόν τον τρόπο. Θεωρούμε τη σειρά Fourier της $\phi_{\text{πεκ.}}$, η οποία είναι προφανώς σειρά ημιτόνων, αφού η $\phi_{\text{πεκ.}}$ είναι περιττή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ εκτός από συνεχές είναι και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη. Η $\phi_{\text{πεκ.}}$ κληρονομεί φυσικά αυτές τις ιδιότητες, και κατά συνέπεια η σειρά Fourier της $\phi_{\text{πεκ.}}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην $\phi_{\text{πεκ.}}$ (βλ. Θεώρημα 5.37):

$$\phi_{\text{πεκ.}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.12)$$

με συντελεστές Fourier

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (7.13)$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τις (7.11) και (7.12), ισχυριζόμαστε ότι η λύση u του προβλήματος (7.3) δίνεται ως

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (7.14)$$

όπου b_n οι συντελεστές Fourier της $\phi_{\text{πεκ.}}$, όπως δίνονται στην (7.13). Από το γεγονός ότι

$$|e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}| \leq 1$$

και την ομαλότητα της $\phi_{\text{πεκ.}}$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σειρά στην (7.14) συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η u που δίνεται στην (7.14) είναι συνεχής.

Είναι προφανές ότι η u της (7.14) ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet του προβλήματος και από την (7.12) διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Τέλος, από το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνει (ανισότητα Bessel) και από γνωστές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, διαπιστώνουμε ότι η u της (7.14) είναι για $t > 0$ άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι η παραγωγήση αντιμετωπίζεται με το σύμβολο της άθροισης, οπότε αφού η v_n ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας συμπεραίνουμε ότι και για την u ισχύει $u_t = k u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, δηλαδή η u είναι λύση του προβλήματος (7.3).

Παράδειγμα 7.5. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 3u, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad (7.15)$$

με αρχική τιμή $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := \sin x - 3 \sin(2x) + 5 \sin(4x)$.

Για να προσδιορίσουμε τη λύση του παραπάνω ΠΑΣΤ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή του ΠΑΣΤ (7.3), δηλαδή με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών καταλήγοντας αυτή τη φορά στην εξίσωση $T'(t) = -(2\lambda + 3)T(t)$, $t > 0$, ενώ η ΣΔΕ για το $X(x)$ παραμένει ίδια (βλ. Σχέσεις (7.6)-(7.7)).

Έχοντας αποδείξει ωστόσο ότι η λύση του του ΠΑΣΤ (7.3) δίνεται από τη σχέση (7.14), μπορούμε να λύσουμε το ΠΑΣΤ (7.15) απευθείας με αλλαγή μεταβλητής. Θεωρούμε επομένως την μεταβλητή $v(x, t) := e^{3t}u(x, t)$, και διαπιστώνουμε ότι η ΜΔΕ $u_t = 2u_{xx} - 3u$ γράφεται στη μορφή $v_t = 2v_{xx}$. Βλέπουμε επίσης ότι η v ικανοποιεί τις ίδιες αρχικές και συνοριακές συνθήκες με τη u , αφού

$$v(0, t) = e^{-3t}u(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = e^{-3t}u(\pi, t) = 0,$$

και

$$v(x, 0) = u(x, 0) = \phi(x).$$

Σύμφωνα με την (7.14), με $k = 2$, $l = \pi$ και τους συντελεστές Fourier της δοθείσας αρχικής τιμής ϕ , έχουμε

$$\sin x - 3 \sin(2x) + 5 \sin(4x) = b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \dots,$$

που ισχύει για

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 5, \quad b_n = 0, \quad n \geq 5,$$

κι έτσι η v δίνεται από τη σχέση

$$v(x, t) = e^{-2t} \sin x - 3e^{-8t} \sin(2x) + 5e^{-32t} \sin(4x).$$

Συνεπώς, η ζητούμενη λύση $u(x, t) = e^{-3t}v(x, t)$ είναι

$$u(x, t) = e^{-5t} \sin x - 3e^{-11t} \sin(2x) + 5e^{-35t} \sin(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

7.2.2 Συνοριακές συνθήκες Neumann

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.16)$$

Θα εργαστούμε όπως στην περίπτωση των ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet και θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

της μορφής

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (7.18)$$

Για να ικανοποιεί η v την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας του (7.16) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$T'(t) = -\lambda k T(t), \quad t > 0 \quad (7.19)$$

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < l. \quad (7.20)$$

Οι λύσεις της (7.19) δίνονται ως

$$T(t) = Ae^{-\lambda kt}, \quad t > 0, \quad (7.21)$$

όπου A αυθαίρετη σταθερά. Για να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες $v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0$ από την $v(x, t) = X(x)T(t)$, πρέπει και αρχεί $X'(0) = X'(l) = 0$ (αφού η T δεν μηδενίζεται). Άρα, ζητάμε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ομαλές, μη μηδενικές συναρτήσεις X του προβλήματος ιδιοτιμών Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Ακολουθώντας λοιπόν τα ίδια βήματα με αυτά της προηγούμενης ενότητας έχουμε

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (7.23)$$

Άρα, από (7.18), (7.21) και (7.23) λαμβάνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n του ΠΑΣΤ (7.17):

$$v_n(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (7.24)$$

όπου A_n αυθαίρετες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο ΠΑΣΤ (7.16). Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, l]$. Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε ότι $\phi'(0) = \phi'(l) = 0$. Μελετάμε τώρα σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (7.16) ως πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων v_1, \dots, v_N , $N \in \mathbb{N}_0$, που δίνονται από την (7.24). Για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$ η u_N :

$$u_N(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

ικανοποιεί τόσο τη ΜΔΕ όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (7.16). Η αρχική συνθήκη του προβλήματος ικανοποιείται αν και μόνο αν η ϕ είναι της μορφής

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

δηλαδή αν η ϕ είναι ένα άρτιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο $2l$ ή ακριβέστερα ο περιορισμός στο διάστημα $[0, l]$ ενός τέτοιου τριγωνομετρικού πολυωνύμου.

Στην γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τη ϕ κατά άρτιο τρόπο στο διάστημα $(-l, 0)$ και στη κατά περιοδικό τρόπο με περίοδο $2l$ σε όλη την ευθεία, και λαμβάνουμε τη συνάρτηση $\phi_{\text{επεκ.}}$, η οποία είναι άρτια και συνεχώς παραγωγίσιμη. Η σειρά Fourier της $\phi_{\text{επεκ.}}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην $\phi_{\text{επεκ.}}$ (βλ. Θεώρημα 5.37):

$$\phi_{\text{επεκ.}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.25)$$

με συντελεστές Fourier

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (7.26)$$

Όπως και στην περίπτωση ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet διαπιστώνουμε ότι η λύση του προβλήματος (7.16) δίνεται ως

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (7.27)$$

όπου a_n οι συντελεστές Fourier της $\phi_{\text{επεκ.}}$, όπως δίνονται στην (7.26).

Παράδειγμα 7.6. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad (7.28)$$

με αρχική τιμή $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := 1 - \cos(2x) + 4 \cos(3x)$.

Για να προσδιορίσουμε τη λύση του παραπάνω ΠΑΣΤ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή του ΠΑΣΤ (7.16), δηλαδή με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών καταλήγοντας αυτή τη φορά στην

εξίσωση $T'(t) = -(2\lambda - 1)T(t), t > 0$, ενώ η ΣΔΕ για το $X(x)$ παραμένει ίδια (βλ. Σχέσεις (7.19)-(7.20)).

Έχοντας αποδείξει ωστόσο ότι η λύση του του ΠΑΣΤ (7.16) δίνεται από τη σχέση (7.27) μπορούμε να λύσουμε το ΠΑΣΤ (7.28) απευθείας με αλλαγή μεταβλητής. Θεωρούμε επομένως την μεταβλητή $v(x, t) := e^{-t}u(x, t)$, και διαπιστώνουμε ότι η ΜΔΕ $u_t = 2u_{xx} + u$ γράφεται στη μορφή $v_t = 2v_{xx}$. Βλέπουμε επίσης ότι η v ικανοποιεί τις ίδιες αρχικές και συνοριακές συνθήκες με τη u .

Από την (7.27) για $k = 2, l = \pi$ και τους συντελεστές Fourier της αρχικής συνθήκης ϕ , η v δίνεται από τη σχέση

$$v(x, t) = 1 - e^{-8t} \cos(2x) + 4e^{-18t} \cos(3x),$$

και συνεπώς, η ζητούμενη λύση $u(x, t) = e^t v(x, t)$ είναι

$$u(x, t) = e^t - e^{-7t} \cos(2x) + 4e^{-17t} \cos(3x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

7.2.3 Μη ομογενείς εξισώσεις

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών για τη μη γραμμική εξίσωση διάχυσης-θερμότητας με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.29)$$

Λόγω της γραμμικότητας της ΜΔΕ το πρόβλημα διασπάται σε δύο ειδικότερα προβλήματα (βλ. Παρατήρηση 6.16): το ΠΑΣΤ (7.3), που έχουμε ήδη μελετήσει, και το ακόλουθο ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.30)$$

Επεκτείνουμε κατά περιττό (και ενδεχόμενος ασυνεχή) τρόπο την $f(\cdot, t)$ στο διάστημα $(-l, 0)$ και στη συνέχεια περιοδικά με περίοδο $2l$ στην πραγματική ευθεία. Συμβολίζουμε με $f_{\text{επεκ.}}$ τη συνάρτηση που προκύπτει. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με $u_{\text{επεκ.}}$ την συνάρτηση που προκύπτει με επέκταση με τον ίδιο τρόπο της άγνωστης συνάρτησης u . Οι $f_{\text{επεκ.}}(\cdot, t)$ και $u_{\text{επεκ.}}(\cdot, t)$ είναι περιττές συναρτήσεις.

Έχουμε τότε

$$u_{\text{επεκ.}}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.31)$$

$$f_{\text{επεκ.}}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.32)$$

με συντελεστές Fourier

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.33)$$

$$B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.34)$$

αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι η u να είναι αρκετά ομαλή, γεγονός που εξασφαλίζεται όταν η f υποτεθεί ομαλή. Βλέπουμε εύκολα ότι ο συντελεστής Fourier της $u_t(\cdot, t)$ είναι $b'_n(t)$. Αντίστοιχα, ο συντελεστής Fourier της $u_{xx}(\cdot, t)$ είναι $-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t)$, όπως προκύπτει από τους ακόλουθους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l u_{xx}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{2}{l} \left\{ u_x(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{n\pi}{l} \int_0^l u_x(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= -\frac{2}{l} \frac{n\pi}{l} \left\{ u(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{n\pi}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= -\frac{2}{l} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 b_n(t). \end{aligned}$$

Άρα, από τις (7.31)-(7.34) η $u_t = u_{xx} + f$ γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[b'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 b_n(t) - B_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

συνεπώς πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$b'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 b_n(t) = B_n(t), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.35)$$

Η αρχική συνθήκη $u(x, 0) = 0$ συνεπάγεται τις σχέσεις

$$b_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.36)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές Fourier b_n υπολογίζονται από τους γνωστούς συντελεστές Fourier B_n λύνοντας τα ΠΑΤ (7.35)-(7.36). Έτσι έχουμε

$$b_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k(t-s)} B_n(s) ds, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.37)$$

Η λύση u του προβλήματος (7.30) δίνεται ως

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k(t-s)} B_n(s) ds \right] \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (7.38)$$

όπου οι συναρτήσεις B_n δίνονται από την (7.34).

Στην περίπτωση που η σειρά (7.38) είναι πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή όταν το πλήθος των μη μηδενικών συναρτήσεων B_n είναι πεπερασμένο ή με άλλα λόγια όταν η $f(\cdot, t)$ είναι περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο $2l$ ως προς την πρώτη της μεταβλητή, διαπιστώνουμε ότι η u που δίνεται από την (7.38) ικανοποιεί τη ΜΔΕ $u_t = ku_{xx} + f$ και αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ (7.30).

Στην γενική περίπτωση, για να ολοκληρωθεί αυτή η μελέτη θα έπρεπε να αποδείξουμε ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας της f , η u που δίνεται από την (7.38) είναι αρκετά ομαλή ώστε οι παράγωγοι u_t και u_{xx} να υπολογίζονται παραγωγίζοντας της σειρά Fourier της $u(\cdot, t)$ όρο προς όρο.

Ανάλογα επιλύουμε το ΠΑΣΤ για τη μη ομογενή εξίσωση διάχυσης-θερμότητας με συνοριακές συνθήκες Neumann.

Παράδειγμα 7.7. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (7.39)$$

με μη ομογενή όρο $f : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, t) := e^t \sin x + 2t \sin(3x)$.

Οι μόνοι μη μηδενικοί συντελεστές Fourier $B_n(t)$ της συνάρτησής $f(\cdot, t)$ είναι οι $B_1(t) = e^t$ και $B_3(t) = 2t$. Άρα, από την (7.37) οι μόνοι μη μηδενικοί συντελεστές Fourier $b_n(t)$ της λύσης $u(\cdot, t)$ είναι οι $b_1(t)$ και $b_3(t)$. Από την (7.37) για $k = 2$, $l = \pi$ έχουμε

$$b_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-s)} e^s ds = e^{-2t} \int_0^t e^{3s} ds = \frac{1}{3} (e^t - e^{-2t})$$

και

$$b_3(t) = \int_0^t e^{-18(t-s)} 2s ds = 2e^{-18t} \int_0^t e^{18s} ds = \frac{1}{9} \left[t + \frac{1}{18} (e^{-18t} - 1) \right].$$

Επομένως, από τις (7.37)-(7.38) η ζητούμενη λύση του ΠΑΣΤ (7.39) είναι

$$u(x, t) = \frac{1}{3} (e^t - e^{-2t}) \sin x + \frac{1}{9} \left[t + \frac{1}{18} (e^{-18t} - 1) \right] \sin(3x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

7.3 Αρχή μεγίστου

Μια από τις σπουδαίες ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας

$$u_t = ku_{xx} \quad (7.40)$$

είναι η ιδιότητα της αρχής μεγίστου (και ελαχίστου), η οποία ωστόσο ισχύσει και για τη διαφορική ανισότητα (διάχυσης-θερμότητας)

$$u_t \leq ku_{xx}. \quad (7.41)$$

Θεώρημα 7.8. (Αρχή του μεγίστου) Έστω $l, T > 0$ και $u : [0, l] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, λύση της (7.41) στο $(0, l) \times (0, T]$. Τότε

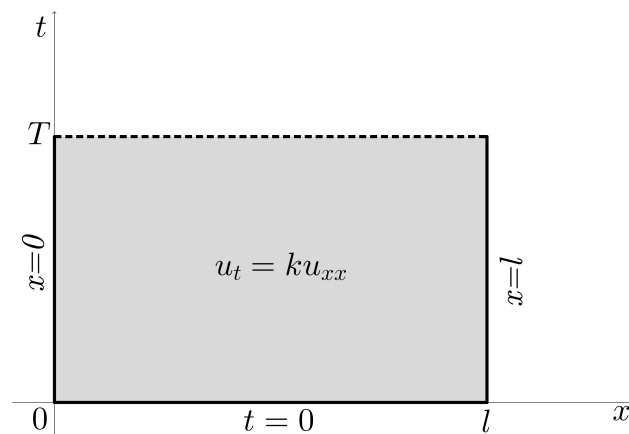
(i) Η $u(x, t)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο, δηλαδή στο

$$(\{0\} \times [0, T]) \cup (\{l\} \times [0, T]) \cup ([0, l] \times \{0\}).$$

(Ασθενής αρχή μεγίστου)

(ii) Αν η $u(x, t)$ δεν λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο, τότε είναι σταθερή.
(Ισχυρή αρχή μεγίστου)

Αντίστοιχα ισχύουν για το ελάχιστο.



Σχήμα 7.2: Οι λύσεις της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους στο παραβολικό σύνορο του ορθογωνίου $[0, l] \times [0, T]$, δηλαδή σε μία από τις τρεις πλευρές του ορθογωνίου που σχεδιάστηκαν με συνεχή γραμμή. Αν η λύση δεν λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο, τότε είναι μια σταθερή συνάρτηση.

Παρατήρηση 7.9. Η αρχή του «ελαχίστου» έπεται αμέσως από την αρχή του μεγίστου, αφού όταν η u είναι λύση της (7.40), τότε και η $-u$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. Έτσι η απόδειξη του ελαχίστου είναι αντίστοιχη με αυτήν του μεγίστου, αλλά για $-u$.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη λύσης των ΠΑΣΤ στις προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου, ουσιαστικά με κατασκευή λύσης, αποδεικνύουμε τώρα την μοναδικότητα και την ευστάθεια της λύσης (βλ. Παράγραφο 1.3).

Μοναδικότητα

Θα μελετήσουμε τώρα την μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΣΤ για τη μη ομογενή εξίσωση διάχυσης θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0, \\ u(l, t) = h(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.42)$$

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει δύο λύσεις u_1 και u_2 . Από γραμμικότητα της ΜΔΕ η $v = u_1 - u_2$ είναι λύση του ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (7.43)$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση του προβλήματος (7.42) μοναδική, αρκεί να δείξουμε ότι $u_1 \equiv u_2$ ή ισοδύναμα ότι η λύση του προβλήματος (7.43) $v \equiv 0$.

Θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης με δύο τρόπους.

1ος τρόπος (Αρχή του μεγίστου)

Μια πρώτη εφαρμογή της αρχής του μεγίστου είναι η μοναδικότητα ομαλής λύσης ενός ΠΑΣΤ. Σύμφωνα με την αρχή μεγίστου, για τυχόν $T > 0$ και για κάθε λύση v του προβλήματος (7.43) ισχύει

$$v(x, t) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.44)$$

Ομοίως, από την αρχή «ελαχίστου» έχουμε

$$v(x, t) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.45)$$

Άρα, $v(x, t) = 0$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, και επειδή το T είναι τυχαίος θετικός αριθμός, προκύπτει ότι $v \equiv 0$ στο $[0, l] \times [0, \infty)$.

2ος τρόπος (Μέθοδος ενέργειας)

Πολλαπλασιάζοντας την ΜΔΕ του προβλήματος (7.43) επί τη λύση v και ολοκληρώνοντας στο $[0, l]$ έχουμε

$$\int_0^l v_t(x, t) v(x, t) dx = k \int_0^l v_{xx}(x, t) v(x, t) dx.$$

Ολοκληρώνοντας τώρα το δεξιό μέλος κατά μέρη και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις συνοριακές συνθήκες $v(0, t) = v(l, t) = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \left[(v(x, t))^2 \right]_t dx &= k \left\{ v_x(x, t) v(x, t) \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (v_x(x, t))^2 dx \right\} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (v(x, t))^2 dx &= -k \int_0^l (v_x(x, t))^2 dx. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Συμβολίζουμε τώρα με $\|\cdot\|$ την L^2 νόρμα στο διάστημα $[0, l]$ (βλ. Παρατήρηση 5.25)

$$\|w\| := \left(\int_0^l |w(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

και έτσι γράφουμε την (7.46) στη μορφή

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|^2 = -k \|v_x(\cdot, t)\|^2, \quad t > 0.$$

Η έκφραση $\frac{1}{2} \|v(\cdot, t)\|^2$ συμβολίζει την ενέργεια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t . Συνεπώς, από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η παράγωγος της ενέργειας είναι μη θετική, οπότε η ενέργεια φθίνει. Επομένως, έχουμε

$$\|v(\cdot, t)\| \leq \|v(\cdot, 0)\| = 0, \quad t \geq 0, \quad (7.47)$$

απ' όπου προκύπτει ότι $v \equiv 0$ στο $[0, l] \times [0, \infty)$.

Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα

Στις παραπάνω αποδείξεις εκτός από μοναδικότητα δείξαμε και συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα όταν $u(x, 0) = 0$. Αν στο πρόβλημα (7.43) θεωρήσουμε $u(x, 0) = \phi(x)$, τότε από την μέθοδο της ενέργειας βλέπουμε από τη σχέση (7.47) ότι η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα, και η σχέση αυτή παίρνει τώρα τη μορφή

$$\|v(\cdot, t)\| \leq \|\phi\|, \quad t \geq 0.$$

Αντίστοιχα από την αρχή μεγίστου έχουμε, για $t \geq 0$,

$$v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi(x)|.$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν την εκτίμηση τις v και ϕ με τις $-v$ και $-\phi$, αντίστοιχα, παίρνουμε

$$-v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi(x)|.$$

Άρα, έχουμε τελικά

$$\max_{0 \leq x \leq l} |v(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi(x)|, \quad t \geq 0.$$

Παρατήρηση 7.10. (Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τον μη ομογενή όρο) Θεωρούμε τώρα το ΠΑΣΤ (7.43) για την μη ομογενή εξίσωση διάχυσης-θερμότητας:

$$v_t = kv_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Θέτουμε τώρα

$$M := \max_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq t \leq T}} |f(x, t)|,$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x, t) := v(x, t) - Mt$. Βλέπουμε ότι η v παίρνει μη θετικές τιμές στο παραβολικό σύνορο και ικανοποιεί την ανίσωση

$$w_t - kw_{xx} = f(x, t) - M \leq 0.$$

Άρα $w(x, t) \leq 0$ (βλ. Θεώρημα 7.8), δηλαδή $v(x, t) \leq Mt$. Αντίστοιχα παίρνουμε $-v(x, t) \leq Mt$ και συμπεραίνουμε έτσι τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από το μη ομογενή όρο:

$$\max_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq t \leq T}} |v(x, t)| \leq T \max_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq t \leq T}} |f(x, t)|.$$

Παράδειγμα 7.11. Θεωρούμε το ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (7.48)$$

(i) Να δείξετε ότι $0 < u(x, t) < 1$ για κάθε $t > 0$ και $0 < x < 1$.

(ii) Να δείξετε ότι $u(x, t) = u(1-x, t)$ για κάθε $t \geq 0$ και $0 \leq x \leq 1$.

Λύση:

(i) Από την αρχή μεγίστου η λύση u του προβλήματος λαμβάνει τη μέγιστη/ελάχιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο. Έστω $\phi(x) = 4x(1-x)$. Τότε

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

και

$$\phi''(x) = -8 < 0.$$

Άρα η ϕ είναι κοίλη και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x = \frac{1}{2}$, που είναι η τιμή $\phi(1/2) = 1$. Αντίστοιχα, για το ελάχιστο έχουμε από την αρχή «ελαχίστου» ότι η u παίρνει την ελάχιστη τιμή της στα σύνορα, επομένως αφού

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

έχουμε

$$0 < u(x, t) < 1 \quad \text{για κάθε } t > 0 \text{ και } 0 < x < 1.$$

(ii) Η $u(1-x, t)$ πρέπει να επαληθεύει το ΠΑΣΤ. Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας βλέπουμε εύκολα ότι η $u(1-x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $u_t = u_{xx}$ για $0 < 1-x < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ και $t > 0$. Επιπλέον, ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$u(1-0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(1-1, t) = u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

και την αρχική συνθήκη

$$u(1-x, 0) = 4(1-x)(1-1+x) = 4x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Συνεπώς, από μοναδικότητα της λύσης ισχύει ότι $u(x, t) = u(1-x, t)$.

Παρατήρηση 7.12. (Η εξίσωση διάχυσης-θερμότητας σε μη φραγμένα διαστήματα) Για να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών σε μη φραγμένο διάστημα εφαρμόζουμε μια επέκταση των σειρών *Fourier*, το ολοκλήρωμα *Fourier* ή μετασχηματισμό *Fourier*. Η μέθοδος *Fourier* χρησιμοποιείται στις γραμμικές εξισώσεις.

Επιπλέον, αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο, όπως στην περίπτωση της πραγματικής ευθείας, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να έχει περισσότερες λύσεις. Για να ισχύει η αρχή του μεγίστου και η μοναδικότητα λύσης απαιτούνται επιπλέον συνθήκες.

Κεφάλαιο 8

Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις που περιγράφουν ταλαντούμενα συστήματά (χορδή στη μία διάσταση, μεμβράνη στις δύο διαστάσεις και ελαστικό στερεό στις τρεις διαστάσεις) και διάδοση κυμάτων. Εδώ, εστιάζουμε τη μελέτη μας στο πρότυπο αυτών των εξισώσεων, την κυματική εξίσωση (*wave equation*), στη μία (χωρική) διάσταση.

8.1 Η κυματική εξίσωση

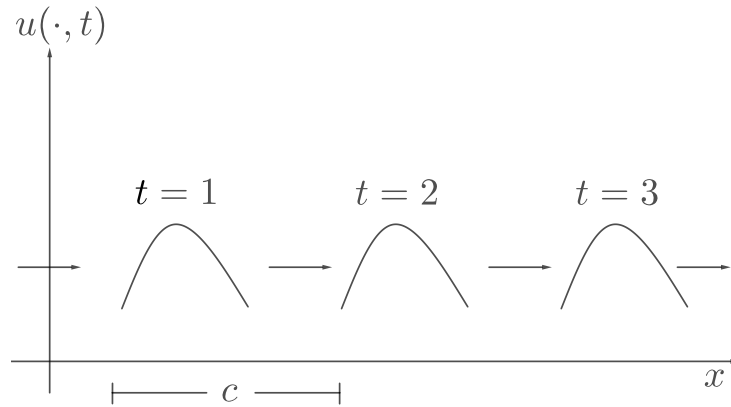
Στο Κεφάλαιο 3 αναφερθήκαμε στην κυματική διάδοση, δίνοντας παραδείγματά κυμάτων σε διάφορους τομείς και περιγράφοντας την απλούστερη εξίσωση κυματικής διάδοσης, την εξίσωση μεταφοράς $u_t(x, t) \pm cu_x(x, t) = 0$, όπου η λύση της είναι της μορφής $u(x, t) = f(x \mp ct)$ και παριστάνει ένα οδεύον κύμα που κινείται προς τα δεξιά ($f(x - ct)$)/αριστερά ($f(x + ct)$) με σταθερή ταχύτητα c (βλ. για παράδειγμα οδεύοντα κύματα που κινούνται προς τα δεξιά στα Σχήματα 3.1 και 8.1).

Υπάρχουν πολλά φαινόμενα που περιγράφονται από κυματικές διαδικασίες. Το κύμα είναι μια χωρική διαταραχή, που ταξιδεύει στον χρόνο με πεπερασμένη ταχύτητα, μεταφέροντας ενέργεια, χωρίς απαραίτητα να μεταφέρεται ταυτόχρονα μάζα. Στην Φυσική, αυτό που συνήθως ονομάζουμε κύμα, είναι το αποτέλεσμα δύο αντιμαχομένων τάσεων όπου κάθε μια προσπαθεί να κυριαρχήσει επάνω στην άλλη, χωρίς καμία να επικρατεί τελικά, δημιουργώντας έτσι μια περιοδικότητα μεταξύ των τιμών των αντιμαχομένων μεγεθών. Όταν η μια μεγιστοποιείται, η άλλη μηδενίζεται. Για παράδειγμα στη μηχανική, οι δύο αυτές τάσεις είναι η δύναμη της επαναφοράς και η αδράνεια. Η δύναμη επαναφοράς είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση της δυναμικής ενέργειας, ενώ η αδράνεια για την εμφάνιση της κινητικής ενέργειας. Έτσι, σε κάθε κυματικό κύκλο παρατηρείται μια συνεχής ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα σε δυναμική και κινητική ενέργεια, με αποτέλεσμά η ολική ενέργεια να παραμένει αναλλοίωτη στον χρόνο για κυματικά φαινόμενα που δεν παρουσιάζουν απόσβεση ή κάποια εξωτερική δύναμη προσφοράς ενέργειας (όπου στις περιπτώσεις αυτές η ενέργεια είναι συνάρτησή φθίνουσα ή αύξουσα, αντίστοιχα, ως προς τον χρόνο). Ένα άλλο παράδειγμα δίνεται από τον Ηλεκτρομαγνητισμό, όπου οι δύο αντιμαχομένες τάσεις είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, με την μεταβολή του ενός να γεννά το άλλο. Η εξέλιξη του φαινομένου αυτού περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell.

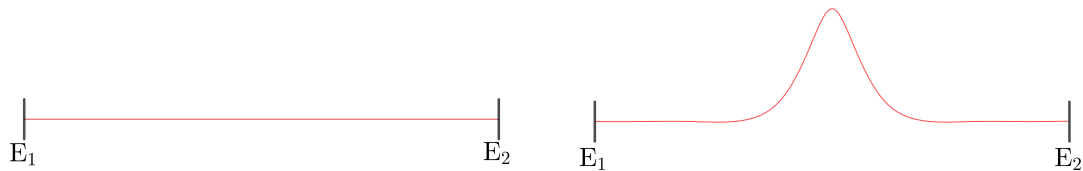
8.1.1 Το πρόβλημα παλλόμενης χορδής

Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, όπως αυτή ενός μουσικού οργάνου, μελετήθηκε από τους Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli και Joseph-Louis Lagrange. Το 1746, ο d'Alembert ανακάλυψε τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση (ταλαντούμενη χορδή), και μέσα σε δέκα χρόνια ο Euler ανακάλυψε την τριδιάστατη κυματική εξίσωση. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε λοιπόν μια συνοπτική περιγραφή της φυσικής προέλευσης της κυματικής εξίσωσης.

Θεωρούμε μια πολύ λεπτή, εντελώς εύκαμπτη χορδή. Σε κατάσταση ισορροπίας η χορδή βρίσκεται σε οριζόντια θέση πάνω σε μια ευθεία γραμμή (άξονας των x). Σταθεροποιούμε την τεταμένη χορδή στα σταθερά άκρα E_1 και E_2 με $E_1 < E_2$ (βλ. Σχήμα 8.2), όπως για παράδειγμα συμβαίνει στις χορδές των μουσικών οργάνων. Την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τη χορδή με ένα ελαφρύ αρχικό κτύπημα, το οποίο προσδίδει σε κάθε σημείο της μια προκαθορισμένη αρχική ταχύτητα να ταλαντωθεί ελεύθερα. Η κλίση της χορδής είναι μικρή, οπότε μπορεί να δείχθει ότι η οριζόντια μετατόπιση είναι τόσο μικρή που μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι, η ταλάντωση της χορδής είναι μόνο εγκάρσια, δηλαδή κάθετη στον άξονα των x . Συμβολίζουμε με $u(x, t)$ τη μετατόπιση ενός σημείου x της χορδής κατά τη χρονική



Σχήμα 8.1: Οδεύον κύμα που ταξιδεύει δεξιά με σταθερή ταχύτητα c , χωρίς να αλλάζει το σχήμα του.



(α) Κατάσταση ισορροπίας.

(β) Διαταραχή που ταξιδεύει μέσα στη χορδή.

Σχήμα 8.2: Λεπτή, εύκαμπτη και τεντωμένη χορδή σταθεροποιημένη στα σταθερά άκρα E_1 και E_2 με $E_1 < E_2$.

στιγμή t , από τη θέση ισορροπίας του. Τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου x κατά τη χρονική στιγμή t θα είναι $u_t(x, t)$ και $u_{tt}(x, t)$, αντίστοιχα.

Ιδιαίτερα η αρχική μετατόπιση και η αρχική ταχύτητα θα είναι $u(x, 0)$ και $u_t(x, 0)$, αντίστοιχά. Στην περίπτωση που $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [E_1, E_2]$ και $u_t(x, 0) \neq 0$, γενικά, η χορδή είναι σε κατάσταση ισορροπίας κατά την αρχική στιγμή και τίθεται σε ταλάντωση με ένα αρχικό κτύπημα. Ενώ, στην περίπτωση που $u(x, 0) \neq 0$ και $u_t(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [E_1, E_2]$, γενικά, η χορδή είναι σε κατάσταση ηρεμίας κατά την αρχική στιγμή, με την έννοια ότι η ταχύτητα της είναι μηδέν, αν και εξασκούνται δυνάμεις στη χορδή, που την διατηρούν μετατοπισμένη από την κατάσταση ισορροπίας της, και αφήνεται ελεύθερη να ταλαντωθεί χωρίς κανένα κτύπημα. και τίθεται σε ταλάντωση με ένα αρχικό κτύπημα.

Έστω ρ η πυκνότητα της χορδής¹ σε κατάσταση ισορροπίας, και T η τάση της τεντωμένης χορδής. Επειδή από την υπόθεση η χορδή δεν παρουσιάζει αντίσταση στην κάμψη, η τάση είναι εφαπτόμενη προς τη χορδή σε κάθε σημείο.

Θεωρούμε τώρα στοιχειώδες τμήμα $[x, x + h]$ της χορδής σε κατάσταση ισορροπίας με $h > 0$ πολύ μικρό (βλ. Σχήμα 8.3). Στη κατάσταση αυτή, σε κάθε σημείο της χορδής δρουν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις $T_1 = T_2 = T$, όπου T η τάση της τεντωμένης χορδής. Η μάζα του τμήματος αυτού της χορδής είναι ρh , είτε σε κατάσταση ισορροπίας είτε κατά την ταλάντωση, αφού κάθε σημείο μετατοπίζεται μόνο κάθετα στον άξονα των x . Για αρκετά μικρό h μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επιτάχυνση κάθε σημείου αυτού του στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι $u_{tt}(x, t)$. Αν F η κινούσα δύναμη σε αυτό το τμήμα της χορδής, τότε από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η F θα ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση του στοιχειώδους τμήματος της χορδής, οπότε θα έχουμε

$$\rho h u_{tt}(x, t) = F. \quad (8.1)$$

Η κινούσα δύναμη, F , δηλαδή η δύναμη που ασκείται στο τμήμα αυτό της χορδής εγκάρσια στον άξονα

¹ $\rho = \frac{\text{μάζα χορδής}}{\text{μονάδα μήκους}}$

των x είναι η συνισταμένη $T \sin \phi - T \sin \theta$ των κατακόρυφων συνιστωσών $T \sin \phi$ και $T \sin \theta$ της τάσης στα άκρα του στοιχειώδους τμήματος της χορδής, όπου $T \tan \phi$ και $T \tan \theta$ είναι οι κλίσεις της χορδής στο δεξιό και στο αριστερό άκρο του στοιχειώδους τμήματος, αντίστοιχα. Για μικρές γωνίες ϕ και θ η (8.1) γίνεται

$$\rho h u_{tt}(x, t) = T \sin \phi - T \sin \theta \approx T \tan \phi - T \tan \theta = T [u_x(x + h, t) - u_x(x, t)]. \quad (8.2)$$

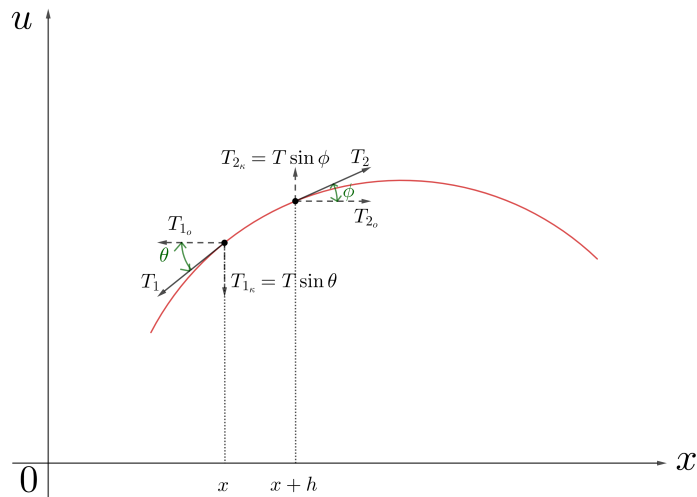
Αναπτύσσοντας τώρα τον όρο $u_x(x + h, t)$ κατά Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} u_x(x + h, t) - u_x(x, t) &= [u_x(x, t) + h u_{xx}(x, t) + \dots] - u_x(x, t) \\ &= h u_{xx}(x, t) + \text{όροι μεγαλύτερης τάξης ως προς } h. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Αντικαθιστώντας την (8.3) στην (8.2) και παίρνοντας $h \rightarrow 0$ προκύπτει η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad E_1 < x < E_2, \quad t > 0, \quad (8.4)$$

με $c^2 = \frac{T}{\rho}$.



Σχήμα 8.3: Κινούσα δύναμη F ενός στοιχειώδους τμήματος μιας ταλαντευόμενης χορδής, ως συνισταμένη των κατακόρυφων συνιστωσών $T_{2\kappa} = T \sin \phi$ και $T_{1\kappa} = T \sin \theta$ των τάσεων στα άκρα του, $F = T \sin \phi - T \sin \theta$.

Ας δώσουμε τώρα την κυματική εξίσωση σε υψηλότερες διαστάσεις ορίζοντας τον διαφορικό τελεστή d'Alembert.

Ορισμός 8.1. Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή d'Alembert ως

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

και έτσι η κυματική εξίσωση γράφεται

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{x}, t) = \square u(\mathbf{x}, t) = 0.$$

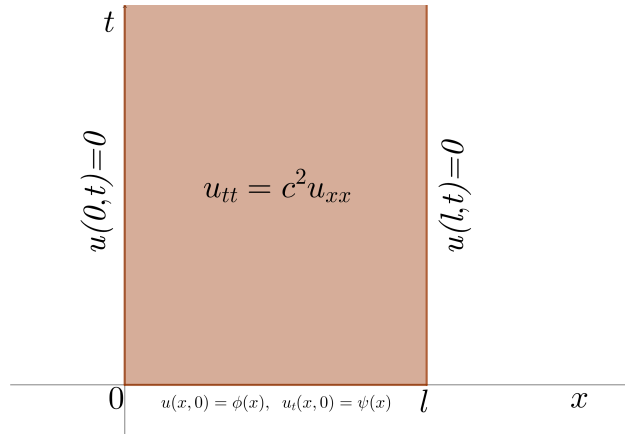
8.2 Πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών σε φραγμένο διάστημα - Χωρισμός μεταβλητών

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (ΠΑΣΤ) για την κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα. Για την επίλυση του θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας για τις σειρές Fourier για να επιλύσουμε το ΠΑΣΤ με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, και θα οδηγηθούμε στη λύση του ΠΑΣΤ ανάλογα με τα προηγούμενα δύο κεφάλαια.

Θεωρούμε λοιπόν το ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε ένα φραγμένο διάστημα:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (8.5)$$

όπου $\phi \in C^2([0, l])$ και $\psi \in C^1([0, l])$.



Σχήμα 8.4: Η κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα $[0, l]$ όπως ορίζεται στο ΠΑΣΤ (8.5).

Κατά τα γνωστά θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

και από αυτές θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια τη λύση του αρχικού ΠΑΣΤ (8.5). Εφαρμόζουμε πάλι τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, δηλαδή προσπαθούμε να βρούμε μη μηδενικές λύσεις v του (8.6) της μορφής

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (8.7)$$

Για μια v της μορφής (8.7) η ΜΔΕ στο (8.6) γράφεται ως

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Διαιρώντας την τελευταία σχέση δια $c^2 X(x)T(t)$ έχουμε κατά τα γνωστά

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{σταθερά.}$$

Καταλήγουμε έτσι στη ΣΔΕ

$$T''(t) = -\lambda c^2 T(t), \quad t \geq 0, \quad (8.8)$$

και το πρόβλημα

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (8.9)$$

Το πρόβλημα (8.9) το έχουμε επιλύσει ήδη στα προηγούμενα κεφάλαια (βλ. Σχέση (6.7), καθώς και Παράδειγμα 5.44 της Ενότητας 5.3.2):

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.10)$$

Τώρα, για $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, οι λύσεις της (8.8) δίνονται ως

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8.11)$$

όπου A_n, B_n αυθαίρετες σταθερές.

Από τις (8.7), (8.10) και (8.11) παίρνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n του (8.6):

$$v_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8.12)$$

όπου A_n, B_n αυθαίρετες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο ΠΑΣΤ (8.5). Για λόγους συμβατότητας των δεδομένων υποθέτουμε ότι $\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0$. Μελετάμε τώρα σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (8.5) ως πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων v_1, \dots, v_N , $N \in \mathbb{N}$, που δίνονται από την (8.12). Για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}$ η u_N :

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + \tilde{b}_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.13)$$

ικανοποιεί τόσο τη ΜΔΕ όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (8.5). Μένει λοιπόν να δούμε αν και σε ποιες περιπτώσεις μια συνάρτηση u_N της μορφής (8.13) ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$u_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.14)$$

Υπολογίζουμε τώρα την πρώτη χρονική παράγωγο της u_N που δίνεται από την (8.13):

$$u_{N_t}(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{n\pi c}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi ct}{l} + \tilde{b}_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.15)$$

από όπου έχουμε

$$u_{N_t}(x, 0) = c \sum_{n=1}^N \frac{n\pi}{l} \tilde{b}_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.16)$$

Από τις (8.14) και (8.16) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση του προβλήματος (8.5) είναι της μορφής (8.13) αν και μόνο αν οι αρχικές τιμές ϕ και ψ είναι περιττά τριγωνομετρικά πολυώνυμα με περίοδο $2l$. Θεωρούμε κατά τα γνωστά ότι οι ϕ και ψ ορίζονται ως τριγωνομετρικά πολυώνυμα σε όλο τον \mathbb{R} . Σε αυτή την περίπτωση, όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια, τα a_n είναι οι συντελεστές Fourier της ϕ . Όσον αφορά τα \tilde{b}_n παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\psi(x) = c \sum_{n=1}^N \frac{n\pi}{l} \tilde{b}_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

(βλ. την (8.16)), δίνει

$$\int_0^x \psi(s) ds = C - c \sum_{n=1}^N \tilde{b}_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

δηλαδή τα $-\tilde{b}_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, είναι ίσα με τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης Ψ :

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(s) ds,$$

διαιρεμένοι δια c , δηλαδή $-\tilde{b}_n = \frac{b_n}{c}$.

Συνηθίζουμε να γράφουμε την (8.13) στη μορφή

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} - \frac{1}{c} b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.13')$$

ώστε τα a_n και b_n να είναι τώρα οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων ϕ και Ψ , αντίστοιχα.

Στην γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τις ϕ και ψ κατά περιττό τρόπο στο διάστημα $(-l, 0)$ και στη συνέχεια σε όλη την ευθεία περιοδικά με περίοδο $2l$. Συμβολίζουμε με $\phi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ τις συναρτήσεις που λαμβάνουμε κατ'αυτόν τον τρόπο. Από το γεγονός ότι οι ϕ και ψ είναι δύο φορές και μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχά, συμπεραίνουμε ότι οι $\phi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ είναι δύο φορές και μια

φορά συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχά. Επιπλέον, οι $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ είναι περιττές συναρτήσεις. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x) := \int_0^x \psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(s) ds \quad x \in \mathbb{R}.$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ είναι άρτια συνάρτηση. Επιπλέον, από το γεγονός ότι

$$\int_a^{a+2l} \psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(s) ds = \int_{-l}^l \psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(s) ds,$$

διαπιστώνουμε ότι η $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ είναι περιοδική με περίοδο $2l$. Θεωρούμε τώρα τις σειρές Fourier των συναρτήσεων $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$, οι οποίες είναι προφανώς σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων, αντίστοιχα. Από την ομαλότητα των $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$, έχουμε κατά τα γνωστά ότι οι σειρές αυτές συγκλίνουν ομοιόμορφα (βλ. Θεώρημα 5.37):

$$\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.17)$$

$$\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.18)$$

όπου a_n και b_n οι συντελεστές Fourier των $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου η σειρά Fourier της $\psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την $\psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και δίνεται ως

$$\psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.18')$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τις (8.10), (8.11), (8.17) και (8.18), ισχυριζόμαστε ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας, η λύση u του προβλήματος (8.5) δίνεται ως

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} - \frac{1}{c} b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.19)$$

όπου a_n και b_n όπως στις (8.17) και (8.18)-(8.18'), δηλαδή οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$, αντίστοιχα. Για τη συνάρτηση u που δίνεται από την (8.19) ισχύει προφανώς

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (8.17) ισχύει

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Παραγωγίζοντας τώρα τη σειρά στην (8.19) ως προς t και λαμβάνοντας υπ'όψιν την ομαλότητα των $\phi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ και $\Psi_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$, βλέπουμε ότι η νέα σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η u είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi c}{l} a_n \sin \frac{n\pi ct}{l} - \frac{n\pi}{l} b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

οπότε σύμφωνα με την (8.18') ισχύει

$$u_t(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Όσον αφορά τη ΜΔΕ, ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι οι δεύτερες παράγωγοι της u που δίνεται από την (8.19) λαμβάνονται παραγωγίζοντας τη σειρά όρο προς όρο. Τότε, από το γεγονός ότι οι u_n που δίνονται στην (8.12) ικανοποιούν την κυματική εξίσωση, διαπιστώνουμε ότι και η u ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Αν οι ϕ'' και ψ' είναι συνεχείς και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.37 διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι δεύτερες παράγωγοι λαμβάνονται πράγματι με παραγωγή της σειράς όρο προς όρο.

Παράδειγμα 8.2. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & \text{στο } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, \pi], \end{cases} \quad (8.20)$$

με αρχικά δεδομένα $\phi, \psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := 2 \sin x - 3 \sin(2x) + 4 \sin(5x)$ και $\psi(x) := 3 \sin(2x) + \sin(3x) - 2 \sin(6x)$.

Παρατηρούμε ότι τα αρχικά μας δεδομένα ϕ και ψ είναι περιττά τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ έξι. Συνεπώς, για $c = 2$ και $l = \pi$ έχουμε από τη σχέση (8.13) ότι η συνάρτηση u της μορφής

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 [a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)] \sin(nx), \quad (8.21)$$

με αυθαίρετες σταθερές a_n, b_n , ικανοποιεί τόσο την την ΜΔΕ όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (8.20). Επομένως, το μόνο που απομένει είναι να επιλέξουμε κατάλληλους συντελεστές στην (8.21) ώστε να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες.

Θέλουμε να ισχύει

$$u(x, 0) = \phi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^6 a_n \sin(nx) = 2 \sin x - 3 \sin(2x) + 4 \sin(5x),$$

οπότε $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = 4$ και $a_6 = 0$.

Επίσης, από την (8.15) έχουμε

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^6 2n [-a_n \sin(2nt) + b_n \cos(2nt)] \sin(nx),$$

οπότε θέλουμε να ισχύει

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^6 2nb_n \sin(nx) = 3 \sin(2x) + \sin(3x) - 2 \sin(6x),$$

από όπου οδηγούμαστε στις σχέσεις $4b_2 = 3$, $6b_3 = 1$, $12b_6 = -2$ και $b_1 = b_4 = b_5 = 0$.

Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 2 \cos(2t) \sin x - 3 \cos(4t) \sin(2x) + 4 \cos(10t) \sin(5x) \\ & + \frac{3}{4} \sin(4t) \sin(2x) + \frac{1}{6} \sin(6t) \sin(3x) - \frac{1}{6} \sin(12t) \sin(6x), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 8.3. Η επίλυση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών για την ομογενή κυματική εξίσωση με συνοριακές συνθήκες *Neumann*, καθώς και η επίλυση του ΠΑΣΤ για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann*, είναι ανάλογη με αυτήν της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας (βλ. Ενότητες 7.2.3 και 7.2.2).

8.3 Η κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την κυματική εξίσωση σε όλη την πραγματική ευθεία. Αν και τα πραγματικά φυσικά φαινόμενα λαμβάνουν συνήθως χώρα σε φραγμένα διαστήματα, η μελέτη της κυματικής εξίσωσης σε όλη την ευθεία είναι απλούστερη από μαθηματικής άποψης αφού απαλλασσόμαστε από τις συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον, οι πιο βασικές ιδιότητες των ΜΔΕ εμφανίζονται ήδη στην περίπτωση που τις εξετάζουμε σε όλο τον χώρο, και η πρακτική αυτή ακολουθείται σε μεγάλο βαθμό και στην έρευνα στην περιοχή αυτή στην παρούσα φάση. Αλλά και από φυσικής άποψης έχει νόημα η μελέτη της κυματικής εξίσωσης σε όλη την ευθεία, γιατί τα κύματα διαδίδονται σχετικά «αργά» και έτσι μακριά από το σύνορο η λύση δεν επηρεάζεται από τις συνοριακές συνθήκες για μικρά χρονικά διαστήματα (αρχή διάδοσης κυμάτων).

Γράφουμε λοιπόν την κυματική εξίσωση στη μορφή

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (8.22)$$

με $c > 0$.

8.3.1 Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης

Θα δώσουμε τώρα τη γενική λύση της κυματικής εξίσωσης που είναι μια επαλληλία δύο κυμάτων που κινούνται το ένα προς τα αριστερά και το άλλο προς τα δεξιά με την ίδια ταχύτητα.

Πρόταση 8.4. Οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (8.22) είναι άθροισμα δύο οδοντών κυμάτων που ταξιδεύουν με ταχύτητα c προς τα αριστερά και προς τα δεξιά, αντίστοιχα, δηλαδή δίνονται ως

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (8.23)$$

όπου F, G αυθαίρετες C^2 συναρτήσεις.

Απόδειξη. Για καλύτερη κατανόηση του θέματος θα δώσουμε την απόδειξη με δύο τρόπους.

Πρώτος τρόπος: (Με διάσπαση του διαφορικού τελεστή σε γινόμενο.)

Η (8.22) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή²

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0. \quad (8.24)$$

Έστω τώρα $v := u_t + cu_x$. Τότε, από την (8.24) η v ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς

$$v_t - cv_x = 0. \quad (8.25)$$

Ξέρουμε (βλ. Κεφάλαια 2-3) ότι η λύση της εξίσωσης μεταφοράς (8.25) δίνεται ως

$$v(x, t) = h(x + ct), \quad (8.26)$$

όπου h αυθαίρετες C^1 συνάρτηση.

Από τον ορισμό της v και την (8.26) έχουμε

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = h(x + ct). \quad (8.27)$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (8.27) είναι η

$$u_1(x, t) = G(x - ct).$$

Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι μια ειδική λύση u_2 της (8.27) είναι

$$u_2(x, t) = F(x + ct),$$

όπου F τέτοια ώστε $F' = \frac{1}{2c}h$. Η γενική λύση της (8.27) είναι τότε $u_1 + u_2$, οπότε η γενική λύση της (8.22) δίνεται πράγματι από την (8.23).

Δεύτερος τρόπος: (Με αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών: Μέθοδος των χαρακτηριστικών.) Αφού η κυματική εξίσωση (8.22) είναι μια υπερβολική εξίσωση μπορούμε να την μετατρέψουμε στην κανονική της μορφή ώστε να βρούμε τη γενική λύση της (βλ. μεθοδολογία στην Ενότητα 4.2 και Παρατήρηση 4.5). Η (8.22) έχει χαρακτηριστικές γραμμές τις $x \pm ct = C$ (βλ. Σχήμα 8.5). Εισάγουμε επομένως τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η ως

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct. \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \quad \text{και} \quad \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta.$$

Άρα

$$\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi \quad \text{και} \quad \partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta.$$

Οπότε η (8.24) γίνεται³

$$(-2c\partial_\eta)(2c\partial_\xi)u = 0 \stackrel{c \neq 0}{\Rightarrow} u_{\eta\xi} = 0,$$

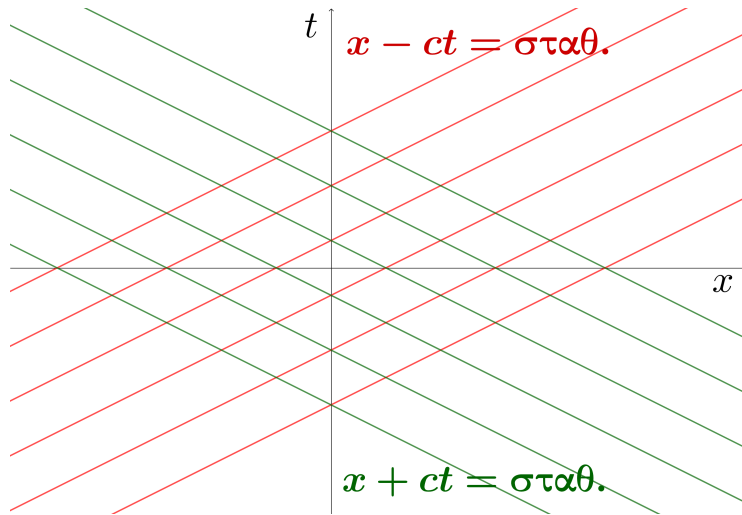
Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

με F και G αυθαίρετες C^2 συναρτήσεις. Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές x, t παίρνουμε την (8.23). \square

²Ο διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2$ είναι «διαφορά τετραγώνων» $(\partial_t)^2 - (c\partial_x)^2$ διαφορικών τελεστών.

³Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια γράφουμε u αντί του \tilde{u} για απλούστερη μορφή των υπολογισμών.



Σχήμα 8.5: Οικογένειες χαρακτηριστικών γραμμών για την κυματική εξίσωση.

8.3.2 Το πρόβλημα αρχικών τιμών-Ο τύπος του d'Alembert

Θα λύσουμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση σε όλη την ευθεία. Για δεδομένες ομαλές συναρτήσεις $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΤ:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.28)$$

Πρόταση 8.5. (Λύση του ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση) Έστω $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση, και $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση u του προβλήματος (8.28) η οποία είναι C^2 και δίνεται από τον τύπο

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (8.29)$$

Η παράσταση αυτή της λύσης του ΠΑΤ (8.28) αναφέρεται ως τύπος του d'Alembert.⁴

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι η κυματική εξίσωση $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ έχει γενική λύση

$$u(x, t) = F(x-ct) + G(x+ct),$$

όπου $F, G \in C^2$ αυθαίρετες συναρτήσεις. Από τη σχέση αυτή και τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = \phi(x), \quad (8.30)$$

$$u_t(x, 0) = F'(x) - cG'(x) = \psi(x). \quad (8.31)$$

Διαιρώντας την (8.31) δια c και ολοκληρώνοντας της ως προς x έχουμε

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + A, \quad (8.32)$$

όπου A αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις (8.30) και (8.32) παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{1}{2} A \\ G(x) &= \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{1}{2} A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F(x+ct) &= \frac{1}{2} \phi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2} A \\ G(x-ct) &= \frac{1}{2} \phi(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(s) ds - \frac{1}{2} A \end{aligned} \right\}$$

και από την (8.23) προκύπτει η (8.29). □

⁴Αποδείχθηκε από τον d'Alembert το 1746.

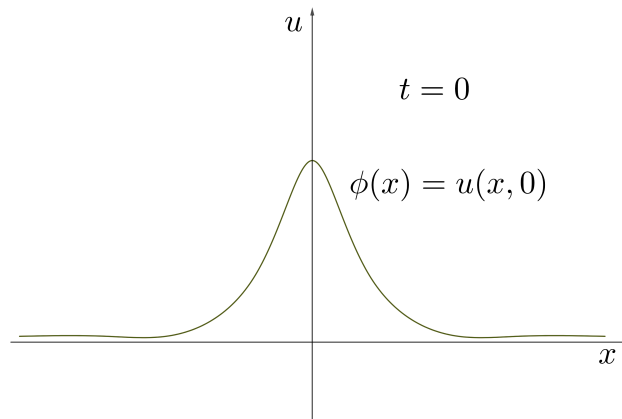
Παρατήρηση 8.6. (Ερμηνεία σχέσης (8.29)) Μπορούμε να κατανοήσουμε αρκετά πράγματα για τη λύση της κυματικής εξίσωσης, που δίνεται από τον τύπο του d'Alembert, εξετάζοντας ένα απλό ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

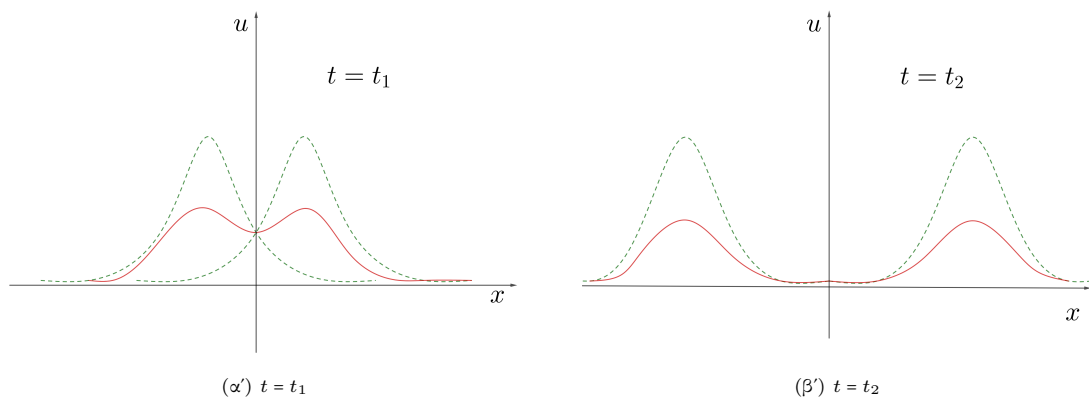
Από την (8.29) το πρόβλημα έχει λύση

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)].$$

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό «σήμα» $\phi(x)$ έχει τη γραφική παράσταση του Σχήματος (8.6). Παρατηρούμε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t > 0$, η $u(x, t)$ είναι ίση με το ημίθροισμα των $\phi(x + ct)$ και $\phi(x - ct)$, δηλαδή με το μέσο όρο των δύο σημάτων που προκύπτουν αν μετατοπίσουμε την $\phi(x)$ προς τα δεξιά κατά ct μονάδες και προς τα αριστερά κατά ct μονάδες. Τα δύο στιγμιότυπα κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2$ στο Σχήμα 8.7 μας δείχνουν πως το αρχικό σήμα διασπάται σε δύο σήματα, τα οποία κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα c το καθένα και πως ο μέσος όρος των $\phi(x + ct)$ και $\phi(x - ct)$ παράγει την u . Το σήμα που κινείται προς τα αριστερά διαδίδεται πάνω στις χαρακτηριστικές $x + ct = \text{σταθ.}$, ενώ το σήμα που κινείται προς τα δεξιά διαδίδεται πάνω στις χαρακτηριστικές $x - ct = \text{σταθ.}$, υπάρχουν επομένως, όπως είδαμε ήδη, δύο οικογένειες χαρακτηριστικών κατά μήκος των οποίων διαδίδονται οι διαταραχές.



Σχήμα 8.6: Αρχικό «σήμα» $\phi(x)$.



Σχήμα 8.7: Χρονικά στιγμιότυπα που δείχνουν την $u(x, t)$ (κόκκινη συνεχής γραμμή) ως μέσο όρο της $\phi(x + ct)$ και $\phi(x - ct)$ (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).

Παράδειγμα 8.7. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του u του ΠΑΤ (8.28) για $\phi(x) = \sin x$

και $\psi(x) = \cos x$. Από την (8.29) η λύση του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\sin(x+ct) + \sin(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(s) ds \\ &= \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{2c} [\sin(x+ct) - \sin(x-ct)] \\ &= \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{c} \cos(x) \sin(ct). \end{aligned}$$

Εξάρτηση και Επιρροή

Βλέπουμε από την (8.29) ότι η τιμή $u(x, t)$ της λύσης του ΠΑΤ (8.28) εξαρτάται μόνο από τις τιμές των αρχικών δεδομένων το διάστημα $[x-ct, x+ct]$. Συγκεκριμένα, από το μέσο όρο των τιμών της ϕ στα άκρα του διαστήματος και από τη μέση τιμή της ψ στο διάστημα αυτό, αφού ο όρος $\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο του t επί

$$\frac{1}{2ct} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Αν συμβολίσουμε με Ψ μια παράγουσα της ψ , $\Psi(x) := \int_a^x \psi(s) ds$, με $a \in \mathbb{R}$, τότε η (8.29) γράφεται και στη μορφή

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} [\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)]. \quad (8.29')$$

Από τις παραστάσεις (8.29) και (8.29') προκύπτει η ομαλότητα της λύσης u της κυματικής εξίσωσης. Έτσι, αν η ϕ είναι C^2 και η ψ είναι C^1 (αφού η ψ αντιστοιχεί στην u_t , έχουμε δηλαδή ήδη παραγωγίσει μια φορά), οπότε η παράγουσα Ψ θα είναι C^2 , τότε η u είναι C^2 .

Από τα παραπάνω μπορούμε να συνάγουμε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα για τη λύση του ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία.

Εξάρτηση:

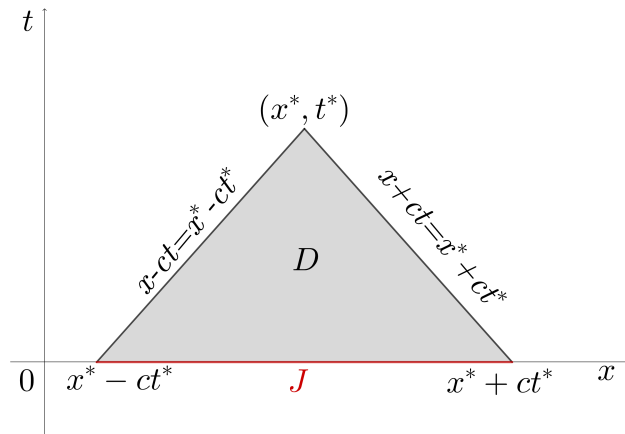
Η τιμή της λύσης σε ένα σημείο (x^*, t^*) εξαρτάται μόνο από τις τιμές της ϕ στα δύο σημεία $x^* - ct^*$ και $x^* + ct^*$, καθώς και από τις τιμές της ψ στο διάστημα $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$. Το διάστημα αυτό, που λέγεται *διάστημα ή πεδίο εξάρτησης* της u στο σημείο (x^*, t^*) , προσδιορίζεται αν επεκτείνουμε τις χαρακτηριστικές $x - ct = x^* - ct^*$, $x + ct = x^* + ct^*$ προς τα πίσω στο χρόνο μέχρι την αρχική γραμμή $t = 0$. Στο Σχήμα 8.8 μπορεί να δει κανείς το *διάστημα και την περιοχή εξάρτησης (domain of dependence)*.

Άρα, μεταβολές των ϕ και ψ έξω από το διάστημα εξάρτησης δεν γίνονται αντιληπτές στο (x^*, t^*) . Από φυσικής άποψης αυτό σημαίνει ότι μεταβολές στα αρχικά δεδομένα διαδίδονται με ταχύτητα $\leq c$ (οι μεταβολές της ϕ διαδίδονται με ταχύτητα ακριβώς c , ενώ οι μεταβολές της ψ διαδίδονται με ταχύτητα το πολύ c) τόσο προς τα δεξιά όσο και προς τα αριστερά.

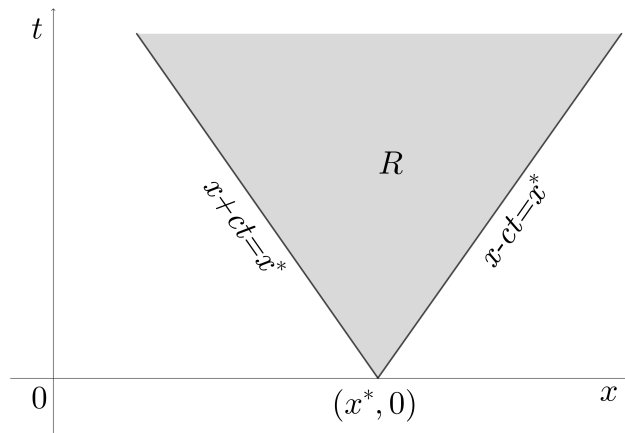
Επιρροή:

Βλέποντας τα πράγματα από μια αντίστροφη σκοπιά, μια αρχική συνθήκη σε ένα σημείο $(x^*, 0)$ μπορεί να επηρεάσει τη λύση του προβλήματος μόνο στην (άπειρη) περιοχή R που περιέχεται μεταξύ δύο χαρακτηριστικών της κυματικής εξίσωσης που διέρχονται από το σημείο $(x^*, 0)$. Η περιοχή αυτή λέγεται *πεδίο ή σύνολο επιρροής (influence region)* (βλ. Σχήμα 8.9).

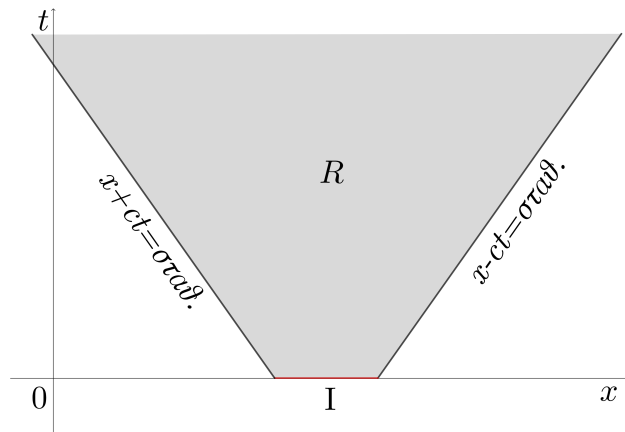
Αν τα αρχικά δεδομένα ϕ και ψ έχουν φορέα μέσα σε ένα διάστημα I του άξονα των x (δηλαδή οι ϕ και ψ είναι μηδέν εκτός του I), τότε η λύση έχει φορέα το R (σύνολο επιρροής του I), δηλαδή την περιοχή R των επιπέδων x, t στην οποία η λύση u επηρεάζεται από τις τιμές των δεδομένων στο I (βλ. Σχήμα 8.10).



Σχήμα 8.8: Περιοχή D (γκρι) και διάστημα J (κόκκινο) εξάρτησης της u σε ένα σημείο (x^*, t^*) .



Σχήμα 8.9: Πεδίο επιρροής R (γκρι) του σημείου $(x^*, 0)$.



Σχήμα 8.10: Πεδίο επιρροής R (γκρι) του διαστήματος I (κόκκινο).

Παράδειγμα 8.8. Θεωρούμε το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \end{cases}$$

(i) Να βρεθεί το διάστημα εξάρτησης των σημείων $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $B = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ στο επίπεδο xt .

(ii) Να βρεθούν οι τιμές $u\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $u\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

Λύση:

(i) Τα διαστήματα εξάρτησης των σημείων A και B είναι (βλ. Σχήμα (8.11)):

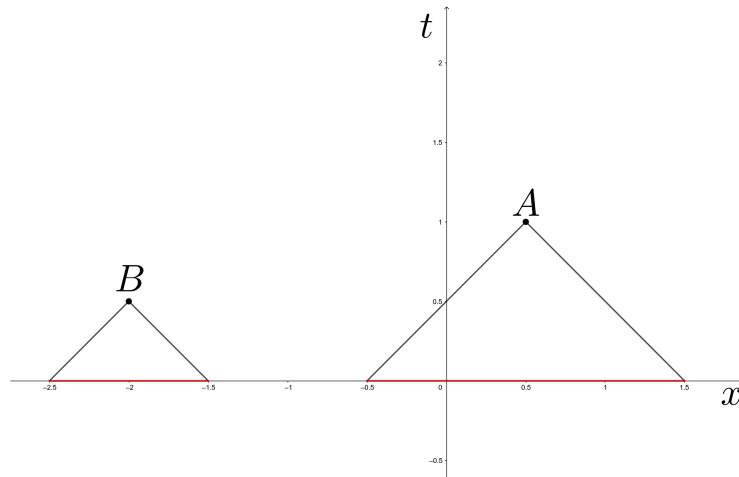
- Για το A : $(x - ct, x + ct) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- Για το B : $(x - ct, x + ct) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(ii) Από την (8.29) έχουμε

$$u\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} \left[\phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{3}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \psi(s) ds = \frac{1}{2} [1 + 0] + \frac{1}{2} \int_0^1 1 ds = 1$$

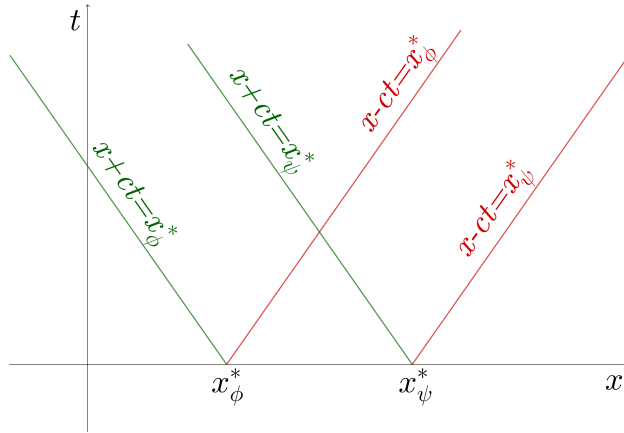
και

$$u\left(-2, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\phi\left(-\frac{5}{2}\right) + \phi\left(-\frac{3}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} \psi(s) ds = 0.$$



Σχήμα 8.11: Με κόκκινο το διάστημα εξάρτησης των σημείων A και B του Παραδείγματος 8.8.

Παρατήρηση 8.9. (Διάδοση ιδιομορφιών) Οι ιδιομορφίες των αρχικών δεδομένων ϕ και ψ διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών της κυματικής εξίσωσης που διέρχονται από τα εν λόγω σημεία (βλ. την αντίστοιχη Παρατήρηση 3.1 για την εξίσωση μεταφοράς). Δηλαδή, έστω για παράδειγμα ότι η ϕ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη παντού, εκτός από ένα σημείο x_ϕ^* . Στο x_ϕ^* υποθέτουμε η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της ϕ' , αλλά είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή $\phi''(x_\phi^* -) \neq \phi''(x_\phi^* +)$. Αντίστοιχα υποθέτουμε ότι η ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη παντού, εκτός από ένα σημείο x_ψ^* , όπου υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της ψ , αλλά είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή $\psi'(x_\psi^* -) \neq \psi'(x_\psi^* +)$. Τότε, η παράγουσα Ψ της ψ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη παντού, εκτός από το σημείο x_ψ^* , στο οποίο είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της $\Psi' = \psi$. Τότε, από την (8.29'), η λύση u του ΠΑΤ (8.28) είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, το οποίο δεν βρίσκεται επί μιας εκ των τεσσάρων χαρακτηριστικών $x_\phi^* \pm ct$, $x_\psi^* \pm ct$, $t \geq 0$ της κυματικής εξίσωσης που διέρχονται από τα σημεία x_ϕ^* και x_ψ^* (βλ. Σχήμα 8.12). Δηλαδή, οι ιδιομορφίες των αρχικών δεδομένων ϕ και ψ επηρεάζουν την ομαλότητα της λύσης μόνο σε σημεία των χαρακτηριστικών αυτών. Επί των χαρακτηριστικών αυτών η u παρουσιάζει γενικά ιδιομορφία, με την έννοια ότι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι αριστερά και δεξιά κάθε χαρακτηριστικής παρουσιάζουν ασυνέχεια επί της χαρακτηριστικής. Επομένως, αν οι συναρτήσεις ϕ και ψ παρουσιάζουν ασυνέχειες, τότε ο τύπος του d'Alembert έχει νόημα και δίνει ασθενή λύση.



Σχήμα 8.12: Οι ιδιομορφίες στα αρχικά δεδομένα του ΠΑΤ (8.28) στα σημεία x_ϕ^* και x_ψ^* διαδίδονται κατά μήκος των τεσσάρων χαρακτηριστικών της κυματικής εξίσωσης που διέρχονται από αυτά.

Παρατήρηση 8.10. (Αρνητικοί χρόνοι) Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτησή u , που δίνεται από τον τύπο (8.29), ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και για $t < 0$. Ένας άλλος τρόπος για να δει κανείς ότι το πρόβλημα (8.28) μπορεί να λυθεί και για αρνητικό t είναι η αλλαγή μεταβλητής $s := -t$. Από φυσικής άποψης αυτό σημαίνει ότι γνωρίζοντας σε μια χρονική στιγμή t_0 τη θέση του κύματος, $u(\cdot, t_0)$, και την ταχύτητα του κύματος, $u_t(\cdot, t_0)$, όχι μόνο μπορούμε να προβλέψουμε με ποιόν τρόπο θα διαδοθεί το κύμα για $t > t_0$, αλλά και να πούμε από που προήλθε αυτό το κύμα και ποια ήταν τα χαρακτηριστικά του ανά πάσα χρονική στιγμή στο παρελθόν, δηλαδή μπορούμε να μελετήσουμε την ιστορία του (κάτι που δεν ισχύει στην εξίσωση της θερμότητας).

Παρατήρηση 8.11. (Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα) Είναι προφανές (με απλή αντικατάσταση) ότι η λύση (8.29) του ΠΑΤ (8.28) που βρήκαμε είναι μοναδική. Θα δείξουμε ότι είναι και ευσταθής, δηλαδή $\forall \epsilon > 0$ και για κάθε χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$ $\exists \delta(\epsilon, t_0)$ τέτοιο ώστε

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \epsilon$$

όταν

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta \quad \text{και} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta,$$

όπου u_i , $i = 1, 2$, η λύση του ΠΑΤ (8.28) με αρχικά δεδομένα ϕ_i και ψ_i .

Χρησιμοποιώντας την (8.29) έχουμε

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\phi_1(x+ct) - \phi_2(x+ct)| + \frac{1}{2} |\phi_1(x-ct) - \phi_2(x-ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds < \epsilon \end{aligned}$$

όπου $\epsilon = \delta(1+t_0)$.

8.3.3 Μέθοδος της ενέργειας

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη μέθοδο της ενέργειας για την κυματική εξίσωση. Η ολική ενέργεια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t είναι

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2)(x, t) dx, \quad (8.33)$$

και είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $E(t) = K(t) + P(t)$, όπου K και P όπως δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις.

Κινητική ενέργεια:

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x, t) dx. \quad (8.34)$$

Δυναμική ενέργεια:

$$P(t) = \frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x, t) dx. \quad (8.35)$$

Πρόταση 8.12. Έστω u η λύση της κυματικής εξίσωσης με αρχικά δεδομένα με συμπαγή φορέα. Τότε η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται: $E(t) = E(0)$.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την (8.34) ως προς t έχουμε

$$\begin{aligned} K'(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u_t(x,t) u_{tt}(x,t) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2c^2 u_t(x,t) u_{xx}(x,t) dx \\ &= c^2 u_t(x,t) u_x(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2c^2 u_{xt}(x,t) u_x(x,t) dx \\ &\stackrel{5}{=} -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 (u_x^2(x,t))_t dx = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t) dx \right) = -P'(t), \end{aligned}$$

και έτσι

$$E'(t) = K'(t) + P'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$$

□

Παρατήρηση 8.13. Εύκολα παρατηρούμε (άσκηση) ότι αν πολλαπλασιάσουμε την $M\Delta E$ επί u_t και ολοκληρώσουμε ως προς x , βρίσκουμε την ολική ενέργεια του συστήματος που δίνεται από την (8.33).

Ασυμπτωτική ισοκατανομή της ενέργειας

Θεωρούμε το ΠΑΤ (8.28) με αρχικά δεδομένα ϕ και ψ με συμπαγή φορέα ($\text{supp}(\phi, \psi) \subset [a, b]$). Ήδη ξέρουμε ότι

$$K'(t) + P'(t) = 0,$$

δηλαδή

$$K(t) + P(t) = K(0) + P(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\psi(x))^2 + c^2 (\phi'(x))^2] dx.$$

Θα δείξουμε τώρα την ασυμπτωτική ισοκατανομή της ενέργειας, δηλαδή ότι $K(t) = P(t)$ για επαρκώς μεγάλο t .⁶

Από την (8.29) έχουμε

$$u_t(x,t) = \frac{c}{2} (\phi'(x+ct) - \phi'(x-ct)) + \frac{1}{2} (\psi(x+ct) + \psi(x-ct))$$

και

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2} (\phi'(x+ct) + \phi'(x-ct)) + \frac{1}{2c} (\psi(x+ct) - \psi(x-ct))$$

οπότε

$$\begin{aligned} u_t^2 - c^2 u_x^2 &= (u_t + cu_x)(u_t - cu_x) = (c\phi'(x+ct) + \psi(x+ct))(-c\phi'(x-ct) + \psi(x-ct)) \\ &= -c^2 \phi'(x+ct)\phi'(x-ct) + c\phi'(x+ct)\psi(x-ct) - c\psi(x+ct)\phi'(x-ct) \\ &\quad + \psi(x+ct)\psi(x-ct) = 0 \end{aligned}$$

επειδή οι ϕ και ψ έχουν συμπαγή φορέα $\text{supp}(\phi, \psi) \subset [a, b]$, τότε είτε το $x+ct$ είτε το $x-ct$ «βγαίνει έξω» από το $[a, b] \forall t > \frac{b-a}{2c}$, $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$K(t) - P(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 - c^2 u_x^2) dx = 0$$

για όλα τα «μεγάλα» t .

⁵Εκφράζοντας την $u(x,t)$ από τον τύπο του d'Alembert (8.29), παίρνουμε ότι οι u_t και u_x περιέχουν τις ϕ' και ψ που λόγω της συμπαγείας των φορέων της ϕ και της ψ μηδενίζεται για $x = \pm\infty$.

⁶Ισχύει για $x \in \mathbb{R}^n$, n : περιττός. Για $n > 1$ η απόδειξη γίνεται με μετασχηματισμό Fourier [3]

Θεώρημα μοναδικότητας

Θα αποδείξουμε τώρα με τη μέθοδο της ενέργειας ότι το ΠΑΤ (8.28) έχει το πολύ μια λύση.

Έστω λοιπόν ότι οι συ συναρτήσεις $u_1, u_2 \in C^2$ είναι λύσεις του προβλήματος (8.28). Τότε η $w := u_1 - u_2$ είναι λύση (λόγω γραμμικότητας) του προβλήματος

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Συνεπώς

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (w_t^2 + c^2 w_x^2)(x, t) dx = E_w(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (w_t^2 + c^2 w_x^2)(x, 0) dx = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη αρχική συνθήκη $w(x, 0) = 0$, που συνεπάγεται ότι $w_x(x, 0) = 0$. Άρα, $w_t(x, t) = w_x(x, t) = 0$, συνεπώς $w(x, t) = \text{σταθερή}$, και από την αρχική συνθήκη $w(x, 0) = 0$ προκύπτει ότι $w \equiv 0$, δηλαδή $u_1 \equiv u_2$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ $u_t - ku_{xx} = 0$	ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$
Ταχύτητα Διάδοσης	Άπειρη	Πεπερασμένη ($\leq c$)
Διάδοση ιδιομορφιών για $t > 0$	Εξασφαιρίζονται αμέσως	Διαδίδονται επ'άπειρο κατά μήκος των χαρακτηριστικών (με ταχύτητα $= c$)
Καλή τοποθέτηση του ΠΑΤ για $t > 0$	ΝΑΙ (τουλάχιστον για φραγμένες λύσεις)	ΝΑΙ
Καλή τοποθέτηση του ΠΑΤ για $t < 0$	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Αρχή μεγίστου	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Χρονική Αντιστρεψιμότητα	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Χρονική Εξέλιξη	Μονότονη (μη ταλαντούμενη)	Ταλαντούμενη
Συμπεριφορά των λύσεων καθώς $t \rightarrow \infty$	Φθίνουν στο 0 (για ολοκληρώσιμη $u(x, 0)$)	Δεν φθίνουν (η ενέργεια είναι σταθερή)
Πληροφορία	Χάνεται βαθμιαία	Μεταφέρεται

Παράδειγμα 8.14. Κεφαλή σφυριού με διάμετρο $2a$, χτυπά το μέσο της χορδής ενός πιάνου μήκους l , τάσης T και πυκνότητας ρ . Ένας ψύλλος κάθεται σε απόσταση $l/4$ από το ένα άκρο της χορδής (υποθέτουμε ότι $a < l/4$). Πόσο χρόνος χρειάζεται για να φθάσει η διαταραχή στον ψύλλο;

Όταν το σφυρί χτυπάει τη χορδή, δύο κύματα ξεκινούν, ένα στο $l/2 + a$, που ταξιδεύει στα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c , και ένα στο $l/2 - a$, που ταξιδεύει στα αριστερά με σταθερή ταχύτητα c (βλ. Σχήμα 8.13). Για μια χορδή η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $c^2 = T/\rho$, και επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, ο ελάχιστος χρόνος t_{min} που απαιτείται για να φθάσει η διαταραχή στον ψύλλο είναι

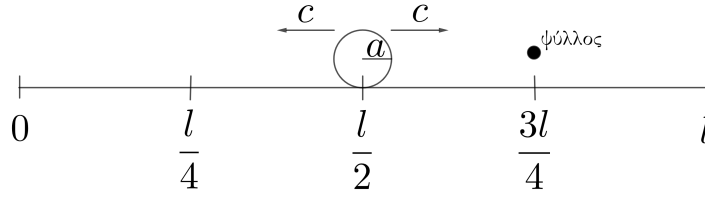
$$t_{min} = \frac{\text{απόσταση από τον ψύλλο μέχρι το σημείο που ξεκινάει το κύμα}}{\text{ταχύτητα κύματος}} = \frac{\frac{3l}{4} - \left(\frac{l}{2} + a\right)}{c} \Rightarrow$$

$$t_{min} = \left(\frac{l}{4} - a\right) \sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

8.4 Ανάκλαση κυμάτων

8.4.1 Η κυματική εξίσωση στην ημιευθεία

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το απλούστερο πρόβλημα ανάκλασης (reflection problem) κυμάτων, την περίπτωση δηλαδή που υπάρχει ένα μόνο σημείο ανάκλασης, το άκρο μιας ημιευθείας.



Σχήμα 8.13: Σχηματική περιγραφή Παραδείγματος 8.14.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών με ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet για την κυματική εξίσωση στην ημιευθεία (δηλαδή στο 1ο τεταρτημόριο). Για δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις $\phi \in C^2([0, \infty))$ και $\psi \in C^1([0, \infty))$, θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $v : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v = v(x, t)$, του ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ v(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \infty), \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, \infty). \end{cases} \quad (8.36)$$

Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε $\phi(0) = \psi(0) = 0$.

Η λύση που αναζητούμε είναι ανάλογη της (8.29). Στο πρόβλημα (8.36) ωστόσο έχουμε τη συνοριακή συνθήκη $v(0, t) = 0$ που δυσκολεύει την εύρεση λύσης. Θα ανάγουμε λοιπόν το πρόβλημα μας στο αντίστοιχο (8.28) στο $(-\infty, +\infty)$, εφαρμόζοντας την ιδέα μιας περιττής συνάρτησης (βλ. Ορισμό 5.20 και Παρατηρήσεις 5.21) ώστε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη, αφού μια περιττή συνάρτηση είναι μηδέν στο μηδέν.

Έτσι, αφού οι συναρτήσεις ϕ και ψ του προβλήματος (8.36) ορίζονται μόνο για $x \geq 0$, τις επεκτείνουμε κατά περιττό τρόπο στον αρνητικό ημιάξονα. Ορίζουμε δηλαδή τις συναρτήσεις

$$\phi_{\text{περτ}}(x) := \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \psi_{\text{περτ}}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

Έστω $u(x, t)$ η λύση της κυματικής εξίσωσης σε όλη την ευθεία, με αρχικές τιμές $\phi_{\text{περτ}}(x)$ και $\psi_{\text{περτ}}(x)$ (βλ. τις (8.28), (8.29)). Τότε, για κάθε t η $u(x, t)$ είναι περιττή συνάρτηση του x . Αυτό προκύπτει άμεσα από την (8.29):

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2} [\phi_{\text{περτ}}(-x + ct) + \phi_{\text{περτ}}(-x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-x-ct}^{-x+ct} \psi_{\text{περτ}}(s) ds \\ &\stackrel{s=-y}{=} -\frac{1}{2} [\phi_{\text{περτ}}(x - ct) + \phi_{\text{περτ}}(x + ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} \psi_{\text{περτ}}(-y) dy \\ &= -\frac{1}{2} [\phi_{\text{περτ}}(x + ct) + \phi_{\text{περτ}}(x - ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{περτ}}(y) dy = -u(x, t). \end{aligned}$$

Συνεπώς, $u(0, t) = 0$ και έτσι ικανοποιείται αυτόματα η συνοριακή συνθήκη. Τότε, η $v(x, t) := u(x, t)$ για $x \geq 0, t \geq 0$ (ο περιορισμός της u στην ημιευθεία), είναι η λύση του προβλήματος (8.36). Από την (8.29) έχουμε για $x \geq 0$

$$v(x, t) = u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{περτ}}(x + ct) + \phi_{\text{περτ}}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{περτ}}(s) ds. \quad (8.37)$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: $x > ct$ και $0 < x < ct$ ($t > 0$).

Για $x > ct$, δηλαδή για $x - ct > 0$, στο δεξιά μέλος της (8.37) εμφανίζονται τιμές των $\phi_{\text{περτ}}$ και $\psi_{\text{περτ}}$ μόνο σε μη αρνητικά σημεία, επομένως $\phi_{\text{περτ}}(x \pm ct) = \phi(x \pm ct)$ και αντίστοιχα για την ψ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η u δίνεται όπως συνήθως από τη σχέση

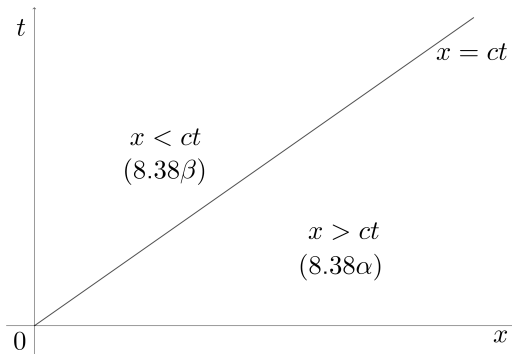
$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, \quad x > ct. \quad (8.38\alpha)$$

Για $x < ct$, δηλαδή για $x - ct < 0$, έχουμε $\phi_{\text{περτ}}(x - ct) = -\phi(ct - x)$ και αντίστοιχα για την ψ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση αλλάζουν τα πρόσημα στην (8.37), δηλαδή η u δίνεται από τη σχέση

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) - \phi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 -\psi(-s) ds.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $s \rightarrow -s$ στον τελευταίο όρο παίρνουμε

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(ct+x) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds, \quad x < ct. \quad (8.38\beta)$$



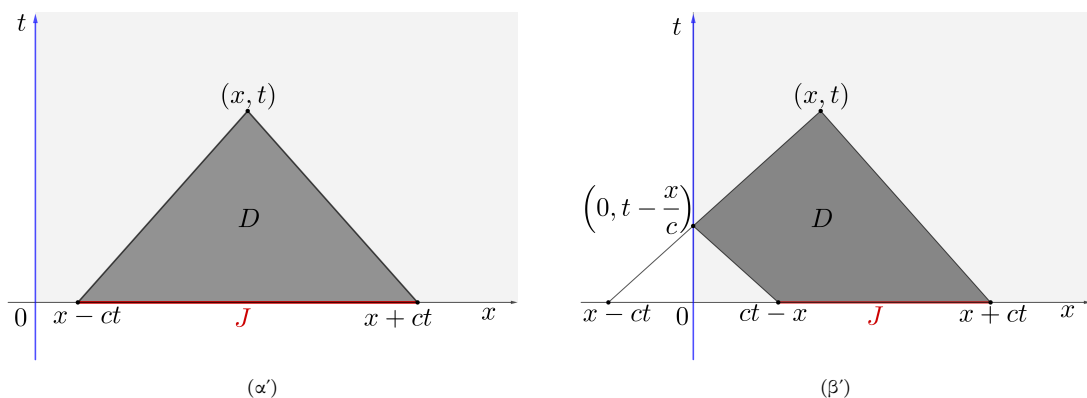
Σχήμα 8.14: Στα χωρία $x > ct$ και $x < ct$ η λύση του προβλήματος (8.36) δίνεται από τις σχέσεις (8.38α) και (8.38β), αντίστοιχα.

Επομένως, η λύση του προβλήματος (8.36) δίνεται από τις σχέσεις (8.38α) και (8.38β) στα χωρία $x > ct$ και $x < ct$, αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 8.14), και αφού έχουμε υποθέσει ότι $\phi(0) = \psi(0) = 0$, έχουμε τελικά ότι η λύση του προβλήματος (8.36) για $x \geq 0$, $t \geq 0$, δίνεται από τη σχέση

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & \text{αν } x \geq ct \\ \frac{1}{2} [\phi(ct+x) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds, & \text{αν } 0 \leq x \leq ct. \end{cases} \quad (8.38)$$

Στην περίπτωση που ένα σημείο (x, t) είναι στην περιοχή $x > ct$, οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από το σημείο αυτό τέμνουν τον άξονα των x πριν τμήσουν τον άξονα των t , όπως φαίνεται στο σχήμα 8.15α'. Τότε, ισχύει όπως είπαμε ο τύπος (8.38α) και όσα αναφέραμε για την περιοχή εξάρτησης για το ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση σε όλη την ευθεία.

Στην περίπτωση που ένα σημείο (x, t) είναι στην περιοχή $x < ct$, μια από τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από το σημείο αυτό τέμνει τον άξονα των t ($x = 0$) πριν τμήσει τον άξονα των x , όπως φαίνεται στο σχήμα 8.15β'. Η σχέση (8.38β) δείχνει ότι η ανάκλαση προκαλεί μια αλλαγή προσήμου. Η τιμή της $v(x, t)$ εξαρτάται τώρα μόνο από τις τιμές της ϕ στα σημεία $ct \pm x$ και τις τιμές της ψ στο μικρό διάστημα μεταξύ των σημείων αυτών. Βλέπουμε έτσι ότι η γκρι περιοχή στο Σχήμα 8.15β' είναι η περιοχή εξάρτησης της u στο σημείο (x, t) .



Σχήμα 8.15: Περιοχή D (γκρι) και διάστημα J (κόκκινο) εξάρτησης της λύσης v του προβλήματος (8.36) σε ένα σημείο (x, t) της περιοχής (α') $x > ct$; (β') $x < ct$.

Παρατηρήσεις 8.15. 1. Η λύση του προβλήματος με περιττά αρχικά δεδομένα περιλαμβάνει κύματα που κινούνται αριστερά και δεξιά στο άνω ημιεπίπεδο. Αυτά με $x < 0$ που κινούνται

προς τα δεξιά, έχουν την ιδιότητα ότι επί της $x = 0$ (δηλαδή επί του t -άξονα) εξουδετερώνουν τα κύματα που κινούνται προς τα αριστερά. Έτσι ερμηνεύεται το ότι ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη.

2. Μελετάμε ανάλογα το πρόβλημα (8.36) για $t \in (-\infty, +\infty)$ και εξετάζουμε τις περιπτώσεις $x > c|t|$ και $0 < x < c|t|$.
3. Μελετάμε ανάλογα (άσκηση) το αντίστοιχο πρόβλημα με συνοριακή συνθήκη Neumann στο $x = 0$ επεκτείνοντας τις συναρτήσεις ϕ και ψ κατά άρτιο τρόπο στον αρνητικό ημιάξονα.

Παράδειγμα 8.16. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = 4v_{xx}, & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ v(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = 4x, & \text{στο } [0, \infty), \\ v_t(x, 0) = 2x + 6, & \text{στο } [0, \infty). \end{cases}$$

(I) $0 < x < 2t$

Από τον τύπο (8.38β)

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [4(2t + x) - 4(2t - x)] + \frac{1}{4} \int_{2t-x}^{2t+x} (2s + 6) ds = 2xt + 7x.$$

(II) $x > 2t$

Εδώ χρησιμοποιούμε τον συνήθη τύπο του d'Alembert (8.29) και έχουμε

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [4(x + 2t) + 4(x - 2t)] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} (2s + 6) ds = 2xt + 4x + 6t.$$

(III) Εφόσον επί της χαρακτηριστικής $x = 2t$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} v(0, t) = 0$$

η λύση είναι συνεχής εκεί.

Τελικά

$$v(x, t) = \begin{cases} 2xt + 7x, & x \leq 2t \\ 2xt + 4x + 6t, & x \geq 2t \end{cases}$$

Παρατήρηση 8.17. Εφαρμόζουμε την ιδέα της περιττής επέκτασης για να λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα ανάκλασης για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ v(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \infty). \end{cases}$$

Έτσι, όπως και στην περίπτωση της κυματικής εξίσωσης, αναγάγουμε το πρόβλημα στην ημιευθεία σε πρόβλημα στην ευθεία, επεκτείνοντας την αρχική συνθήκη, μέσω ανάκλασης ως προς το σημείο $x = 0$, σε συνάρτηση σε όλη την πραγματική ευθεία με περιττή συμμετρία. Ωστόσο, η τεχνική που εφαρμόζεται στην περίπτωση της διάχυσης είναι διαφορετική και γίνεται χρήση μιας ολοκληρωτικής αναπαράστασης, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Έτσι, εξάγουμε έναν τύπο αναπαράστασης για τη λύση του προβλήματος στην ημιευθεία. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος των ειδώλων ή αρχή της ανάκλασης (reflection method/method of images/method of odd extensions).

8.4.2 Ο τύπος του d'Alembert για το πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο διάστημα

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε συνοπτικά μια αρκετά περίπλοκη διαδικασία επίλυσης του ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση με χρήση του τύπου του d'Alembert (8.29). Ωστόσο, η επίλυση του προβλήματος αυτού με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών (βλ. Ενότητα 8.2) παραμένει πιο εύχρηστη.

Θα δούμε λοιπόν σε αυτή την υποενότητα ένα πιο περίπλοκο πρόβλημα ανάκλασης κυμάτων, την περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία ανάκλασης. Θέλουμε λοιπόν, να προσδιορίσουμε τη λύση $v : [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $v = v(x, t)$, του ακόλουθου προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση σε ένα πεπερασμένο διάστημα:

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & \text{στο } (0, l) \times (0, \infty), \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, l], \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, l]. \end{cases} \quad (8.39)$$

Μοναδικότητα της λύσης: Θα αποδείξουμε ότι η ομαλή λύση του ΠΑΣΤ (8.39) είναι μοναδική με τη μέθοδο της ενέργειας. Πολλαπλασιάζοντας την κυματική εξίσωση του προβλήματος επί v_t , ολοκληρώνοντας ως προς x από 0 έως l , ολοκληρώνοντας το δεξιό μέλος κατά μέρη και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, παίρνουμε

$$\int_0^l (v_t v_{tt} + c^2 v_x v_{xt}) dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^l (v_t^2 + c^2 v_x^2)_t dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^l (v_t^2 + c^2 v_x^2) dx = 0.$$

Άρα

$$\int_0^l (v_t^2 + c^2 v_x^2) dx = \int_0^l (\psi^2 + c^2 \phi'^2) dx. \quad (8.40)$$

Αν $\phi = \psi \equiv 0$ τότε $v \equiv 0$ στο $[0, l] \times [0, \infty)$. Αν οι ϕ και ψ δεν είναι μηδενικές και v_1, v_2 λύσεις του (8.39), τότε κατά τα γνωστά, λόγω γραμμικότητα η $v = v_1 - v_2$ ικανοποιεί το (8.39) για μηδενικές αρχικές συνθήκες και από την (8.40) προκύπτει ότι $v \equiv 0$, δηλαδή $v_1 \equiv v_2$.

Αναπαράσταση της λύσης: Τα αρχικά δεδομένα $\phi(x)$ και $\psi(x)$ ορίζονται τώρα σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[0, l]$. Επεκτείνουμε τις ϕ και ψ περιττά στο διάστημα $(-l, 0)$, και στη συνέχεια περιοδικά, με περίοδο $2l$, σε όλη την ευθεία. Ορίζουμε δηλαδή τις περιοδικές, με περίοδο $2l$, συναρτήσεις $\phi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ ως

$$\begin{aligned} \phi_{\text{επεκ.}}(x) &:= \begin{cases} \phi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -\phi(-x), & -l < x < 0, \end{cases} & \text{και} & \psi_{\text{επεκ.}}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases} \\ \phi_{\text{επεκ.}}(x + 2l) &= \phi_{\text{επεκ.}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, & & \psi_{\text{επεκ.}}(x + 2l) = \psi_{\text{επεκ.}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι οι $\phi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ είναι επίσης περιττές ως προς l για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\phi_{\text{επεκ.}}(l + x) = -\phi_{\text{επεκ.}}(-l - x) = -\phi_{\text{επεκ.}}(2l - l - x) = -\phi_{\text{επεκ.}}(l - x).$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει για τη ψ .

Για λόγους συμβατότητας των δεδομένων του προβλήματος (8.39) υποθέτουμε $\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0$.

Έστω u η λύση του ΠΑΤ

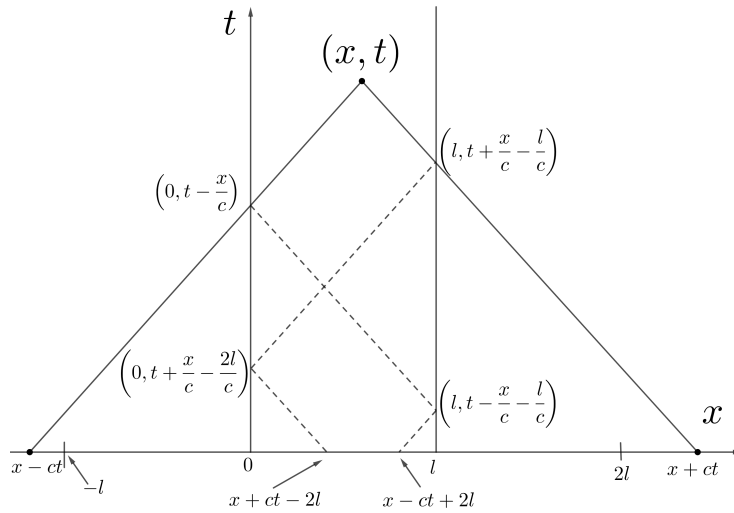
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi_{\text{επεκ.}}(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi_{\text{επεκ.}}(x), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.41)$$

Όπως και στο πρόβλημα στην ημιευθεία που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, η $u(\cdot, t)$ είναι περιττή, άρα $u(0, t) = 0$, και περιοδική με περίοδο $2l$, συνεπώς $u(l + x, t) = u(-l + x, t) = -u(l - x, t)$, οπότε $u(l, t) = 0$. Τότε, η $v(x, t) := u(x, t)$ για $(x, t) \in [0, l] \times [0, \infty)$ (ο περιορισμός της u στο διάστημα $[0, l]$), είναι η λύση του προβλήματος (8.39). Επομένως κατά τα γνωστά έχουμε

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{επεκ.}}(x + ct) + \phi_{\text{επεκ.}}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds, \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, \infty).$$

Για να εκφράσουμε το δεξιό μέλος συναρτήσει των ϕ και ψ μόνο, πρέπει να εξετάσουμε το σημείο (x, t) , αφού ο τύπος που θα πάρουμε δεν είναι ο ίδιος για κάθε σημείο (x, t) . Για παράδειγμα για ένα σημείο (x, t) του Σχήματος 8.16 έχουμε

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct - 2l) + \phi(x - ct + 2l)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x-ct}^{x-ct+2l} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds + \int_{x-ct+2l}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds \right]$$



Σχήμα 8.16: Ανάκλαση κυμάτων· σχηματική επεξήγηση του τύπου (8.42)

Από τον τρόπο που επεκτείνουμε την ψ βλέπουμε εύκολα ότι το ολοκλήρωμα της σε κάθε διάστημα μήκους $2l$ μηδενίζεται (αφού ψ περιττή ως προς l , βλ. Παρατηρήσεις 5.21). Έτσι, η τελευταία σχέση γίνεται

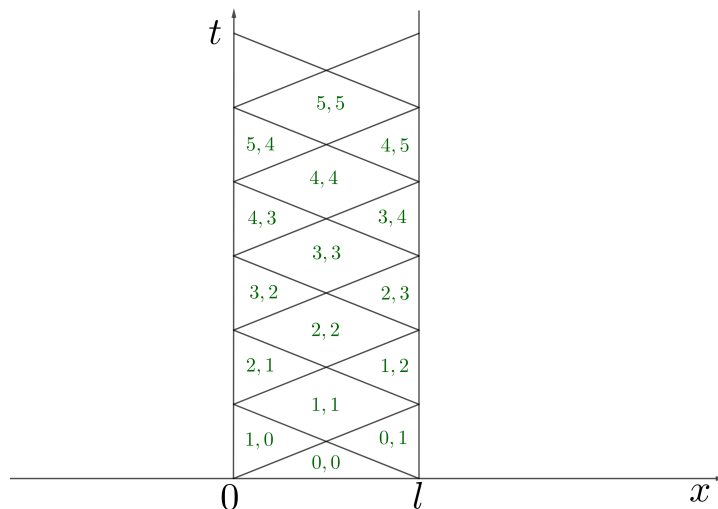
$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2} [\phi(x + ct - 2l) + \phi(x - ct + 2l)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct+2l}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x + ct - 2l) + \phi(x - ct + 2l)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x+ct-2l}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds - \int_{x+ct-2l}^{x-ct+2l} \psi_{\text{επεκ.}}(s) ds \right], \end{aligned}$$

απ'όπου τελικά έχουμε

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct - 2l) + \phi(x - ct + 2l)] - \frac{1}{2c} \int_{x+ct-2l}^{x-ct+2l} \psi(s) ds, \quad (8.42)$$

στο σημείο (x, t) του Σχήματος 8.16, που έχει δύο ανακλάσεις σε κάθε πλευρά ($x = 0, l$). Ο τύπος (8.42) ισχύει μόνο για τέτοια σημεία.

Σε κάθε άλλο σημείο (x, t) ο τύπος της λύσης χαρακτηρίζεται από τον αριθμό των ανακλάσεων σε κάθε πλευρά ($x = 0, l$). Σε κάθε έναν από τους ρόμβους και τα τρίγωνα του Σχήματος 8.17, που σχηματίζονται από τα σύνορα $x = 0$ και $x = l$ και τις χαρακτηριστικές γραμμές της κυματικής εξίσωσης, προκύπτει διαφορετική μορφή του τύπου (8.42).



Σχήμα 8.17: Σε κάθε έναν από τους ρόμβους και τα τρίγωνα προκύπτει διαφορετική μορφή του τύπου (8.42) της λύσης του ΠΑΣΤ (8.39), που χαρακτηρίζεται από τον αριθμό των ανακλάσεων i και j (βλ. (i, j) στο σχήμα) σε κάθε πλευρά $x = 0$ και $x = l$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 8.18. Θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = 9v_{xx}, & \text{στο } (0, \pi/2) \times [0, \infty), \\ v_x(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(\pi/2, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \cos x, & \text{στο } [0, \pi/2], \\ v_t(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, \pi/2], \end{cases} \quad (8.43)$$

Ακολουθώντας την μεθοδολογία που αναφέραμε παραπάνω, αναγάγουμε το πρόβλημα (8.43) με $\phi(x) = \cos x$ και $\psi(x) = 0$ σε ένα πρόβλημα σε όλη την ευθεία της μορφής

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi_{\epsilon\pi\epsilon\kappa.}(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi_{\epsilon\pi\epsilon\kappa.}(x), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Τότε από τον τύπο του *d'Alembert* η λύση του προβλήματος σε όλη την ευθεία είναι

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\epsilon\pi\epsilon\kappa.}(x+3t) + \phi_{\epsilon\pi\epsilon\kappa.}(x-3t)] - \frac{1}{2c} \int_{x+3t}^{x-3t} \psi_{\epsilon\pi\epsilon\kappa.}(s) ds = \cos x \cos 3t,$$

και η v είναι ο περιορισμός της u στο διάστημα $[0, \pi/2]$

$$v(x, t) = \cos x \cos 3t, \quad (x, t) \in (0, \pi/2) \times [0, \infty)$$

που επαληθεύει την (8.42).

8.5 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τη μη ομογενή κυματική εξίσωση. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με το πρόβλημα αρχικών τιμών για την μη ομογενή κυματική εξίσωση σε όλη την ευθεία. Έστω $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΤ:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.44)$$

Το πρόβλημα αυτό περιγράφει την ταλάντωση μιας άπειρης χορδής με δεδομένη θέση $u(x, 0)$ και ταχύτητα $u_t(x, 0)$ στη χρονική στιγμή $t = 0$, όταν η ασκούμενη εξωτερική δύναμη στο σημείο x τη χρονική στιγμή t είναι $f(x, t)$. Ο μη ομογενής όρος $f(x, t)$ στη ΜΔΕ του (8.44) αναφέρεται ως όρος *εξαναγκασμού*.

Επειδή ο τελεστής $L = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2$ της ΜΔΕ είναι γραμμικός, η λύση του προβλήματος θα είναι το άθροισμα τριών όρων. Ειδικότερα, η λύσης θα δίνεται ως το άθροισμα δύο όρων για την ϕ και την ψ , αντίστοιχα, όπως είδαμε και στις προηγούμενες ενότητες (βλ. Σχέση (8.29)), και ενός τρίτου όρου για την f , που καλούμαστε να προσδιορίσουμε.

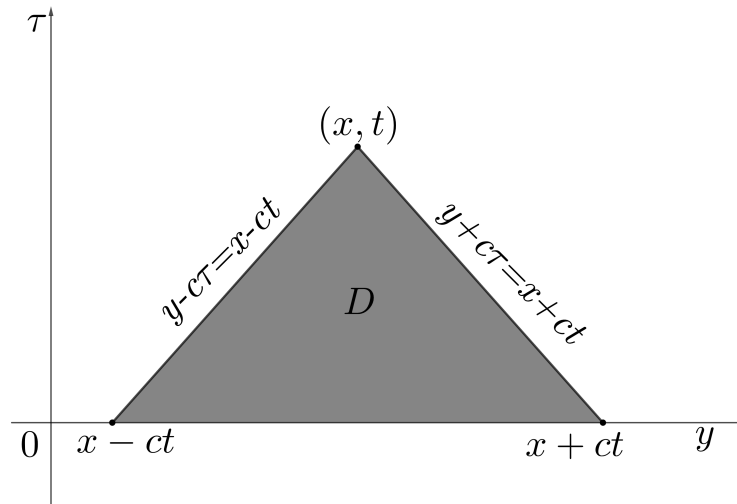
Θεώρημα 8.19. (Λύση ΠΑΤ για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση) Αν το πρόβλημα (8.44) έχει μια λύση u , τότε αυτή δίνεται από τη σχέση

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_D f, \quad (8.45)$$

όπου D το χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x, t) (βλ. Σχήμα 8.18). Η παράσταση αυτή της λύσης του ΠΑΤ (8.44) αναφέρεται ως τύπος του *Duhamel*.

Παρατήρηση 8.20. Ο μη ομογενής όρος εμφανίζεται μόνο στο διπλό ολοκλήρωμα, που γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau. \quad (8.46)$$

Σχήμα 8.18: Χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x, t) .

Απόδειξη. Όπως ξέρουμε και από τις δύο προηγούμενες ενότητες, λόγω της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή το πρόβλημα διασπάται σε δύο ειδικότερα προβλήματα:

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x), & \text{στον } \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.47)$$

και

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t), & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.48)$$

Αν v η λύση του πρώτου και w η λύση του δευτέρου ΠΑΤ, τότε η λύση u του (8.44) δίνεται από το άθροισμα τους: $u = v + w$.

Γνωρίζουμε ότι η λύση του προβλήματος (8.47) δίνεται από τον τύπο του d'Alembert

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την σχέση (8.45), συμπεραίνουμε ότι το Θεώρημα 8.19 είναι ισοδύναμο με το ότι αν το πρόβλημα (8.48) έχει μια λύση w , τότε αυτή δίνεται από την (8.46), δηλαδή

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau. \quad (8.49)$$

Θα το αποδείξουμε αυτό με δύο τρόπους.

1ος τρόπος (Με χρήση της αρχής του Duhamel)

Σύμφωνα με την αρχή του Duhamel⁷ αναζητούμε λύση τους προβλήματος (8.48) σαν μια συνεχή επαλληλία λύσεων ενός ειδικού παραμετροποιημένου προβλήματος για μια συνεχή παράμετρο τ που μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, t]$. Με άλλα λόγια θέλουμε να αναγάγουμε το πρόβλημα για τη μη ομογενή εξίσωση σε μια οικογένεια προβλημάτων για την ομογενή εξίσωση. Η διαδικασία περιγράφεται από τα ακόλουθα βήματα

1. Κατασκευή μιας οικογένειας λύσεων του ομογενούς ΠΑΤ, με μεταβλητή αρχική στιγμή $\tau > 0$ και με αρχικά δεδομένα $f(x, \tau)$.
2. Ολοκλήρωση της παραπάνω οικογένειας ως προς την παράμετρο τ για την εύρεση της w .

⁷Η αρχή του Duhamel έχει ευρεία εφαρμογή σε γραμμικές ΣΔΕ και ΜΔΕ. Παρέχει για παράδειγμα μια μέθοδο επίλυσης για τη μη ομογενή εξίσωση μεταφοράς, για την μη ομογενή εξίσωση διάχυσης-θερμότητας κ.α.

Αρχίζουμε λοιπόν συμβολίζοντας με $r(x, t; \tau)$ την τιμή στο σημείο (x, t) της λύσης του ακόλουθου ΠΑΤ για την ομογενή κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} r_{tt}(x, t; \tau) = c^2 r_{xx}(x, t; \tau), & \text{στο } \mathbb{R} \times (\tau, \infty), \\ r(x, \tau; \tau) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}, \\ r_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.50)$$

Σε αυτό το ΠΑΤ οι αρχικές συνθήκες δίνονται στη χρονική στιγμή $t = \tau$, σε αντιδιαστολή με ότι συνέβαινε μέχρι τώρα που ξεκινούσαμε πάντα από τη χρονική στιγμή μηδέν. Επίσης, ο μη ομογενής όρος υπεισέρχεται τώρα στα αρχικά δεδομένα. Διαπιστώνουμε ότι η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$r(x, t; \tau) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy.$$

(βλ. τύπο του d'Alembert (8.29)). Τότε, η λύση του ΠΑΤ (8.48) γράφεται και στη μορφή

$$w(x, t) = \int_0^t r(x, t; \tau) d\tau.$$

Πράγματι, παραγωγίζοντας την ως προς t (χρήση κανόνα Leibniz) έχουμε

$$w_t = r(x, t; t) + \int_0^t r_t(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t r_t(x, t; \tau) d\tau,$$

όπου $r(x, t; t) = 0$ αφού είναι η αρχική συνθήκη του προβλήματος (8.50). Παραγωγίζοντας ξανά ως προς t έχουμε

$$w_{tt} = r_t(x, t; t) + \int_0^t r_{tt}(x, t; \tau) d\tau = f(x, t) + \int_0^t r_{tt}(x, t; \tau) d\tau.$$

Εξάλλου

$$w_{xx} = \int_0^t r_{xx}(x, t; \tau) d\tau = \frac{1}{c^2} \int_0^t r_{tt}(x, t; \tau) d\tau.$$

Οπότε, τελικά έχουμε τον τύπο του Duhamel για τη λύση του (8.44)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

2ος τρόπος (Με διάσπαση του διαφορικού τελεστή)

Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τη λύση του ΠΑΤ (8.48). Υποθέτουμε ότι η λύση είναι αρκετά ομαλή (τουλάχιστον C^2 , βλ. Θεώρημα Clairaut-Schwarz). Μπορούμε τότε να παραγοντοποιήσουμε τον τελεστή L

$$L = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x),$$

(βλ. ανάλογη απόδειξη της Πρότασης 8.4 της ομογενούς κυματικής εξίσωσης), οπότε

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x, t) \Rightarrow (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)w = f(x, t).$$

Θέτουμε $\zeta := w_t + cw_x$, οπότε $\zeta_t - c\zeta_x = f(x, t)$. Λόγω των αρχικών συνθηκών του (8.48), τόσο η w όσο και η ζ μηδενίζονται για $t = 0$ αφού $\zeta(x, 0) = w_t(x, 0) + cw_x(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με την (3.3'), έχουμε

$$\zeta(x, \tau) = \zeta(x+c\tau, 0) + \int_0^\tau f(x+c(\tau-\sigma), \sigma) d\sigma = \int_0^\tau f(x+c(\tau-\sigma), \sigma) d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \tau \geq 0. \quad (8.51)$$

Η w ικανοποιεί την εξίσωση $w_t + cw_x = \zeta(x, t)$ και την αρχική συνθήκη $w(x, 0) = 0$, οπότε πάλι από την (3.3'), έχουμε

$$w(x, t) = \int_0^t \zeta(x-c(t-\tau), \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (8.52)$$

Αντικαθιστώντας στην (8.52) την ζ , που δίνεται στην (8.51), παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^t \int_0^\tau f(x-c(t-\tau)+c(\tau-\sigma), \sigma) d\sigma d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^\tau f(x-ct+2c\tau-c\sigma, \sigma) d\sigma d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Σε αυτή τη σχέση ολοκληρώνουμε στο τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 0)$ και (t, t) . Εισάγουμε τώρα τον μετασχηματισμό $(\tau, \sigma) \mapsto (y, s)$

$$\begin{cases} y := x - ct + 2c\tau - c\sigma, \\ s := \sigma, \end{cases} \quad (8.54)$$

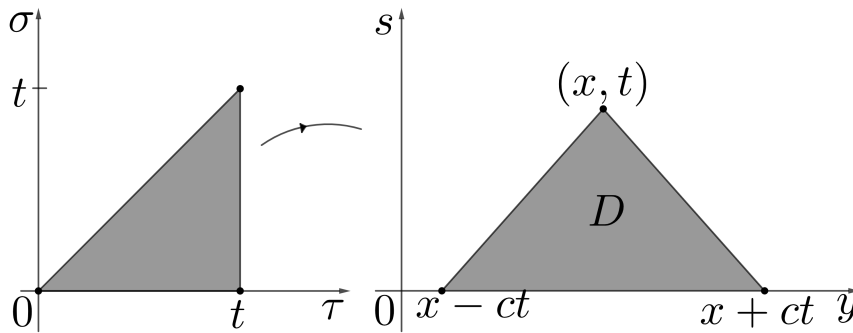
που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(t, 0)$ και (t, t) , στα σημεία $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ και (x, t) , αντίστοιχα, δηλαδή απεικονίζει το τρίγωνο στο οποίο ολοκληρώσαμε στην (8.53) στο χαρακτηριστικό τρίγωνο D του σημείου (x, t) , βλ. Σχήμα 8.19. Για την αντίστοιχη Ιακωβιανή J του μετασχηματισμού

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} & \frac{\partial s}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2c & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2c,$$

συνεπώς η (8.53) γράφεται στην επιθυμητή μορφή

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_D f(y, s) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

με D το χαρακτηριστικό τρίγωνο του (x, t) .



Σχήμα 8.19: Ο μετασχηματισμός (8.54).

Αφού αποδείξαμε την ύπαρξη της λύσης που δίνεται από τον τύπο (8.45), για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα πρέπει να δείξουμε ότι η λύση του ΠΑΤ που βρήκαμε είναι μοναδική και ευσταθής, δηλαδή, όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, να δείξουμε ότι το ΠΑΤ (8.44) είναι καλά ορισμένο.

Θα αποδείξουμε πρώτα την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (8.44). Έστω u_1 και u_2 λύσει του ΠΑΤ (8.44). Τότε η $v := u_1 - u_2$ είναι προφανώς λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ακριβώς μια λύση, την τετριμμένη $v = 0$, άρα $u_1 = u_2$.

Θα δείξουμε, τέλος, ότι η λύση είναι και ευσταθής (βλ. Παρατήρηση 8.11 για την περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης), δηλαδή $\forall \epsilon > 0$ και για κάθε χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$ $\exists \delta(\epsilon, t_0)$ τέτοιο ώστε

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \epsilon$$

όταν

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta \quad \text{και} \quad |f_1(x, t) - f_2(x, t)| < \delta,$$

όπου u_i , $i = 1, 2$, η λύση του ΠΑΤ (8.44) με μη ομογενή όρο f_i και αρχικά δεδομένα ϕ_i και ψ_i .

Χρησιμοποιώντας την (8.45) έχουμε

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\phi_1(x + ct) - \phi_2(x + ct)| + \frac{1}{2} |\phi_1(x - ct) - \phi_2(x - ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds + \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} |f_1(y, \tau) - f_2(y, \tau)| dy d\tau \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

όπου $\epsilon = \delta \left(1 + t_0 + \frac{t_0^2}{2}\right)$.

Σημείωση. Εναλλακτικοί τρόποι για να δείξουμε την (8.49) είναι η μέθοδος των χαρακτηριστικών και το θεώρημα του Green (βλ. π.χ. [1] και [13]). \square

Παράδειγμα 8.21. Η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + xt, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

δίνεται από τη σχέση (8.45) ως

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} y\tau dy d\tau = \frac{1}{2c} \frac{xt^3}{3} = \frac{xt^3}{6}. \end{aligned}$$

8.5.1 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση στην ημιευθεία. Για $f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi, \psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις, θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, του ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ u(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \infty), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, \infty). \end{cases} \quad (8.55)$$

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος έπεται από την μοναδικότητά της λύσης του προβλήματος (8.36). Για την ύπαρξη ομαλής λύσης πρέπει τα δεδομένα να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβατότητας, όπως $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $c^2 \phi''(0) + f(0, 0) = 0$.

Έχοντας ήδη μελετήσει το πρόβλημα (8.36), για να λύσουμε το πρόβλημα (8.55), αρκεί να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ w(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ w(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ w_t(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, \infty). \end{cases} \quad (8.56)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η λύση του προβλήματος (8.56) δίνεται ως

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_D f(y, \tau) dy d\tau, \quad x, t \geq 0, \quad (8.57)$$

όπου D το γκρι μέρος του Σχήματος 8.15, δηλαδή η λύση του (8.56) είναι

$$w(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x > ct \\ \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|x-c(t-\tau)|}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x < ct, \end{cases} \quad (8.58)$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα προέκυψε από τη σχέση

$$\int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{c(t-\tau)-x}^{c(t-\tau)+x} f(y, \tau) dy d\tau = \int_0^t \int_{|x-c(t-\tau)|}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος (8.55) προκύπτει από τις (8.38α), (8.38β) και (8.58) ως

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x > ct \\ \frac{1}{2} [\phi(ct+x) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|x-c(t-\tau)|}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x < ct. \end{cases} \quad (8.59)$$

Παρατήρηση 8.22. Για να βρούμε τη λύση του προβλήματος (8.55) μπορούμε εναλλακτικά να επεκτείνουμε περικτά ως προς x τις ϕ, ψ (βλ. Ενότητα (8.4.1)) και την f

$$f_{\text{περτ}}(x, t) := \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, \\ -f(-x, t), & x < 0, \end{cases}$$

(η $f_{\text{περτ}}$ μπορεί να μην είναι συνεχής για $x = 0$). Τότε, η (8.57) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_D f_{\text{περτ}}(y, \tau) dy d\tau, \quad x, t \geq 0.$$

Παράδειγμα 8.23. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ του προβλήματος στο $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{στο } \Omega, \\ u(0, t) = h(t), & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \infty), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, \infty), \end{cases} \quad (8.60)$$

όπου $\phi, h \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $h(0) = \phi(0)$, $h'(0) = \psi(0)$, $h''(0) = c^2 \phi''(0)$.

Θέτουμε $v(x, t) = u(x, t) - h(t)$ και παίρνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} - h''(t), & \text{στο } \Omega, \\ v(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \tilde{\phi}(x), & \text{στο } [0, \infty), \\ v_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & \text{στο } [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \phi(0)$ και $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \psi(0)$. Αναγάγουμε έτσι το πρόβλημά μας σε ένα πρόβλημα για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση με ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet, στο πρώτο τεταρτημόριο. Συνεπώς μπορούμε να λύσουμε όπως παραπάνω και να πάρουμε τη λύση u του προβλήματος (8.60), που δίνεται από τη σχέση

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & \text{αν } x \geq ct \\ \frac{1}{2} [\phi(ct+x) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{αν } x < ct, \end{cases} \quad (8.61)$$

όπου $t - x/c$ είναι το σημείο ανάκλασης και όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.15β'.

Από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε ότι η λύση του αντίστοιχου ΠΑΣΤ για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ u(0, t) = h(t), & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, \infty), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, \infty), \end{cases} \quad (8.62)$$

αναγάγετε στο πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x, t) - h''(t), & \text{στο } (0, \infty)^2, \\ v(0, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x) - h(0), & \text{στο } [0, \infty), \\ v_t(x, 0) = \psi(x) - h'(0), & \text{στο } [0, \infty), \end{cases}$$

κι έτσι η λύση του προβλήματος (8.62) δίνεται από τη σχέση

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x > ct, \\ \frac{1}{2} [\phi(ct+x) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|x-c(t-\tau)|}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, & \text{αν } x < ct. \end{cases}$$

Παράδειγμα 8.24. Η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & \text{στο } \Omega, \\ u(0, t) = t^2, & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = x, & \text{στο } [0, \infty), \\ u_t(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \end{cases}$$

δίνεται από την (8.61) ως

$$u(x, t) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 3t \\ x + \left(t - \frac{x}{3}\right)^2, & \text{αν } x \leq 3t. \end{cases}$$

8.5.2 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό με το ΠΑΣΤ για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση σε φραγμένο διάστημα. Έστω $f: [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi, \psi: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις. Θέλουμε να βρούμε μια ομαλή συνάρτηση $u: [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, που ικανοποιεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, l) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, l]. \end{cases} \quad (8.63)$$

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος έπεται από την μοναδικότητά της λύσης του προβλήματος (8.39). Για την ύπαρξη ομαλής λύσης στο $[0, l] \times [0, \infty)$, πρέπει τα δεδομένα να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβατότητας, όπως $\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $c^2 \phi''(0) + f(0, 0) = c^2 \phi''(l) + f(l, 0) = 0$.

Έχοντας ήδη μελετήσει το πρόβλημα (8.39), για να λύσουμε το πρόβλημα (8.63), αρκεί να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, l) \times (0, \infty), \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ w(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, l], \\ w_t(x, 0) = 0, & \text{στο } [0, l]. \end{cases} \quad (8.64)$$

Η $f(x, t)$ ορίζεται τώρα στο $[0, l] \times [0, \infty)$. Επεκτείνουμε την f περιττά ως προς x στο διάστημα $(-l, 0)$, και στη συνέχεια περιοδικά, με περίοδο $2l$, σε όλη την ευθεία. Ορίζουμε δηλαδή την περιοδική,

με περίοδο $2l$, συναρτήσεις $f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}$ ως

$$f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x, t) := \begin{cases} f(x, t), & \text{στο } [0, l] \times [0, \infty), \\ -f(-x, t), & \text{στο } (-l, 0) \times [0, \infty), \\ f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x + 2l, t) = f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(x, t), & \text{στο } \mathbb{R} \times [0, \infty). \end{cases}$$

Από όσα μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια μπορούμε να δούμε ότι η λύση του προβλήματος (8.64) δίνεται από τη σχέση

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_D f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in (0, l) \times [0, \infty). \quad (8.65)$$

Επομένως η λύση του προβλήματος (8.63) δίνεται από τις (8.42) και (8.65) ως

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct - 2l) + \phi(x - ct + 2l)] - \frac{1}{2c} \int_{x+ct-2l}^{x-ct+2l} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_D f_{\varepsilon\pi\epsilon\kappa.}(y, \tau) dy d\tau, \quad (8.66)$$

στο σημείο (x, t) του Σχήματος 8.16, που έχει δύο ανακλάσεις σε κάθε πλευρά ($x = 0, l$). Όπως και στην (8.42), η (8.66) ισχύει μόνο για τέτοια σημεία.

Κλείνουμε με μια τελευταία περίπτωση, που είναι αυτή του ΠΑΣΤ για την μη ομογενή κυματική εξίσωση με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, δηλαδή το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x, t), & \text{στο } (0, l) \times (0, \infty), \\ v(0, t) = h(t), & \text{στο } [0, \infty), \\ v(l, t) = k(t), & \text{στο } [0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x), & \text{στο } [0, l], \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & \text{στο } [0, l]. \end{cases} \quad (8.67)$$

Τότε θέτοντας $w := v - \frac{1}{l} [(l-x)h(t) + xk(t)]$, λύνουμε ένα ΠΑΣΤ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet για την μη ομογενή κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t) - \frac{1}{l} [(l-x)h''(t) + xk''(t)], & \text{στο } (0, l) \times (0, \infty), \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & \text{στο } [0, \infty), \\ w(x, 0) = \phi(x) - \frac{1}{l} [(l-x)h(0) + xk(0)], & \text{στο } [0, l], \\ w_t(x, 0) = \psi(x) - \frac{1}{l} [(l-x)h'(0) + xk'(0)], & \text{στο } [0, l], \end{cases}$$

που είναι ένα πρόβλημα της μορφής (8.63). Λύνοντας όπως πριν καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής

$$\begin{aligned} v(x, t) = & h\left(t - \frac{x}{c}\right) - h\left(t + \frac{x-2l}{c}\right) + \dots \\ & + k\left(t + \frac{x-l}{c}\right) - k\left(t - \frac{x+l}{c}\right) + \dots \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 9

Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενα κεφάλαια, τα αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις (σειρές Fourier) εφαρμόζονται κυρίως σε προβλήματα φραγμένων (ως προς τον χώρο) χωρίων. Αντιθέτως, οι μέθοδοι μετασχηματισμών εφαρμόζονται συνήθως σε προβλήματα άπειρων χωρίων. Δύο θεμελιώδεις ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί είναι ο μετασχηματισμός του Laplace (*Laplace transform*), L , που συναντάμε σε εισαγωγικά μαθήματα ΣΔΕ και επεκτείνεται και σε ΜΔΕ, και το ολοκλήρωμα Fourier ή μετασχηματισμός Fourier (*Fourier transform (FT)*), F , που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς είναι ένας μετασχηματισμός με ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη ανάλυση. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο, αφού μετατρέπουν της γραμμικές ΜΔΕ σε αλγεβρικές εξισώσεις ή σε άλλες διαφορικές εξισώσεις με λιγότερες μεταβλητές.

9.1 Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Στα προηγούμενα κεφάλαια λύσαμε προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών και καταλήξαμε σε διακεκριμένες μεταξύ τους ιδιοτιμές, δηλαδή σε διακριτό φάσμα ιδιοτιμών. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, όπως στην περίπτωση ενός μη φραγμένου (συνεκτικού) χωρίου, το φάσμα των ιδιοτιμών είναι συνεχές. Τότε το αντίστοιχο ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις απαιτεί την άθροιση όχι κατά «διακριτό», αλλά κατά «συνεχή» τρόπο, δηλαδή η σειρά «μετατρέπεται» σε ολοκλήρωμα. Στην περίπτωση αυτή, το ρόλο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις αναλαμβάνει ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός.

Για να το δούμε αυτό ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο πρόβλημα Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & -l < x < l, \\ X(-l) = X(l), \\ X'(-l) = X'(l). \end{cases} \quad (9.1)$$

Λύνουμε το πρόβλημα όπως στα προηγούμενα κεφάλαια (βλ. Παράδειγμα 5.44) και έχουμε

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, & n = 0, 1, \dots \\ X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + B_n \cos \frac{n\pi x}{l}, & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (9.2)$$

όπου A_n, B_n σταθερές. Οι λύσεις του (9.1) επεκτείνονται σε $2l$ -περιοδικές συναρτήσεις. Έτσι το (9.1) είναι ισοδύναμο με το $2l$ -περιοδικό πρόβλημα ιδιοτιμών στην πραγματική ευθεία

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & x \in \mathbb{R}, \\ X(x+2l) = X(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.3)$$

Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι οι λύσεις του (9.1), που δίνονται από την (9.2), ικανοποιούν το (9.3) αφού είναι περιοδικές συναρτήσεις σε όλο τον \mathbb{R} . Αντίστροφα, οι λύσεις του (9.3) ικανοποιούν το (9.1), αφού η περιοδικότητα δίνει τις συνοριακές συνθήκες του (9.1).

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ιδιοτιμών λ_{n+1} και λ_n είναι

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = [(n+1)^2 - n^2] \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = (2n+1) \left(\frac{\pi}{l}\right)^2,$$

που μειώνεται καθώς αυξάνεται το l . Συνεπώς, το πλήθος των ιδιοτιμών $\lambda_n(l) \leq N$, όπου N αυθαίρετος, σταθεροποιημένος θετικός αριθμός, αυξάνει καθώς το l αυξάνει. Πράγματι, ισχύει

$$\lambda_n(l) \leq N \Leftrightarrow n \leq \frac{\sqrt{N}}{\pi} l.$$

Καθώς το l τείνει στο άπειρο, το διακριτό φάσμα ιδιοτιμών γίνεται συνεχές και οποιαδήποτε συνάρτησης της μορφής

$$X(x) = A(\xi) \sin(\xi x) + B(\xi) \cos(\xi x),$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $-X'' = \xi^2 X$, ενώ οι συνοριακές συνθήκες εξαφανίζονται στο όριο.

9.2 Μετασχηματισμός Fourier

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το πώς γίνεται η μετάβαση από τη σειρά Fourier στο ολοκλήρωμα Fourier θα υποθέσουμε πρώτα ότι $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με τον περιορισμό της σε κάθε διάστημα $(-a, a)$ να ανήκει στον E' , δηλαδή τον χώρο των κατά τμήματα συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων (βλ. Ενότητα (5.2)), για κάθε $a > 0$, και επιπλέον η u είναι απολύτως ολοκληρώσιμη,¹ δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx < \infty. \quad (9.4)$$

Σταθεροποιούμε έναν αυθαίρετο, θετικό αριθμό l . Γνωρίζουμε τότε από την Ενότητα 5.2 ότι η u μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in (-l, l), \quad (9.5)$$

με συντελεστές Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(s) \cos \frac{n\pi s}{l} ds, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.6)$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές Fourier (9.6) στην (9.5) και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi,$$

έχουμε

$$u(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u(s) ds + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l u(s) \cos \left(\frac{n\pi}{l} (s-x) \right) ds, \quad x \in (-l, l). \quad (9.7)$$

Σκοπός μας είναι να πάρουμε το όριο στην (9.7), καθώς το l τείνει στο άπειρο, και να οδηγηθούμε, φορμαλιστικά, σε μία ολοκληρωτική αναπαράσταση της u στο δεξιό μέλος, στη θέση της σειράς, δηλαδή στο ολοκλήρωμα Fourier. (Για μια σκιαγράφηση της απόδειξης βλ. [1] και [13].) Έτσι, ο τύπος (9.7) γίνεται

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) \cos(\xi(s-x)) ds \right) d\xi. \quad (9.8)$$

(Σημειώνεται ότι ο πρώτος όρος της (9.7) μηδενίζεται από τη σχέση (9.4).)

Χρησιμοποιώντας τώρα την ταυτότητα $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, η (9.8) γίνεται

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{i\xi(s-x)} ds d\xi + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-i\xi(s-x)} ds d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{i\xi s} ds \right) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-i\xi s} ds \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-i\xi s} ds \right) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-i\xi s} ds \right) d\xi \end{aligned}$$

Άρα

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-i\xi s} ds \right) d\xi. \quad (9.9)$$

¹Ο χώρος των απολύτως ολοκληρώσιμων συναρτήσεων συμβολίζεται ως L^1 .

Ορισμός 9.1. (Μετασχηματισμός Fourier) Αν η $u \in L^1(\mathbb{R})$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier $Fu = \hat{u}$ της u ως

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (9.10)$$

και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $F^{-1}u = \check{u}$ της u ως

$$\check{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (9.11)$$

Αφού $|e^{\pm i\xi x}| = 1$ και $u \in L^1(\mathbb{R})$, τα ολοκληρώματα (9.10) και (9.11) συγκλίνουν για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 9.2. (Θεώρημα του Plancherel) Υποθέτουμε ότι $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Τότε $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (9.12)$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier στον L^2 . Από την (9.12) μπορούμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $u \in L^2(\mathbb{R})$ ως εξής. Έστω μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ με

$$u_k \rightarrow u \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Σύμφωνα με την (9.12), $\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R})}$, άρα η $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι Cauchy ακολουθία στον $L^2(\mathbb{R})$ (βλ. ορισμό L^2 και χώρων Hilbert και Banach, Παρατηρήσεις 5.25, 5.3 και 5.7). Η ακολουθία αυτή συνεπώς συγκλίνει σε ένα όριο, που ορίζουμε να είναι ο $Fu = \hat{u}$:

$$\hat{u}_k \rightarrow \hat{u} \quad \text{στο } L^2(\mathbb{R}).$$

Ο ορισμός του \hat{u} δεν εξαρτάται από την επιλογή της προσεγγιστικής ακολουθίας $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ανάλογα ορίζουμε την \check{u} .

Θα δώσουμε τώρα κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Θεώρημα 9.3. (Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier) Έστω $u, v \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$(i) \int_{\mathbb{R}} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u} \bar{\check{v}} d\xi. \quad (\text{Αναφέρεται και ως θεώρημα του Parseval.})^2$$

$$(ii) (D^\alpha u)^\wedge = (i\xi)^\alpha \hat{u} \text{ για κάθε πολυδείκτη } \alpha \text{ τέτοιο ώστε } D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}).$$

$$(iii) \text{ Αν } u, v \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \text{ τότε } (u * v)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{u} \hat{v}.$$

$$(iv) u = (\hat{u})^\sim$$

Από την (iv) προκύπτει ότι

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (9.13)$$

όπως βλέπουμε και στη σχέση (9.9).

Παρατήρηση 9.4. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει καθιερωμένη σύμβαση για τον ορισμό (9.10) του μετασχηματισμού Fourier. Μερικοί βάζουν το συντελεστή $\frac{1}{2\pi}$ μπροστά αντί του $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Άλλοι δεν βάζουν κανένα συντελεστή, ενώ κάποιοι έχουν αρνητική δύναμη στον εκθετικό όρο, ή ακόμη και έναν συντελεστή 2π . Η δε μορφή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier εξαρτάται φυσικά από τη μορφή του συντελεστή Fourier.

Παρατήρηση 9.5. Εκτός από τον χώρο L^2 , στη θεωρία των μετασχηματισμών Fourier είναι σύνηθες να δουλεύουμε στο μικρότερο σύνολο S των συναρτήσεων που φθίνουν ταχέως³ στον \mathbb{R} και που έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης

$$S = \left\{ u \in C^\infty : \left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| = O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \text{ καθώς } |x| \rightarrow \infty, k = 0, 1, 2, \dots, \text{ για κάθε ακέραιο } N \right\}.$$

²Εύκολα βλέπουμε ότι λόγω του θεωρήματος του Parseval το θεώρημα του Plancherel γενικεύεται για $u \in L^2(\mathbb{R})$, και όχι αναγκαστικά για $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Σημειώνουμε επιπλέον ότι, λόγω της ανισότητας Hölder, όταν $|U| < \infty$, τότε $L^2(U) \subset L^1(U)$, ενώ αυτό δεν ισχύει απαραίτητα όταν $|U| = \infty$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ για $x \in (1, \infty)$ ανήκει στον $L^2((1, \infty))$, αλλά όχι στον $L^1((1, \infty))$.

³Οι ταχέως φθίνουσες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις που μαζί με όλες τις παραγώγους τους τείνουν στο μηδέν καθώς $x \rightarrow \pm\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε δύναμη του x .

Το σύνολο S λέγεται κλάση του Schwartz. Αποδεικνύεται ότι αν $u \in S$, τότε $\hat{u} \in S$, και προφανώς ισχύουν όλες οι ιδιότητες του Θεωρήματος 9.3 στο S . Επίσης, αποδεικνύεται ότι το S είναι πυκνό στον L^2 (και στον L^1 , και γενικώς στον L^p , $1 \leq p < \infty$).

Παράδειγμα 9.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) := \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της u είναι

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}\xi} \sin(a\xi).$$

Παράδειγμα 9.7. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) := \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της u είναι

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{x-i\xi x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x-i\xi x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{1-i\xi} e^{(1-i\xi)x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-1-i\xi} e^{(-1-i\xi)x} \Big|_0^{\infty} \right\} \Rightarrow \\ \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Παράδειγμα 9.8. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό:

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx, \quad a > 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς ξ και ολοκληρώνοντας παραγοντικά παίρνουμε

$$\hat{u}'(\xi) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx = -\frac{i}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx = -\frac{i}{2a} \hat{u}(\xi),$$

έχουμε δηλαδή τη ΣΔΕ $\hat{u}' = (-\xi/(2a)) \hat{u}$ ως προς \hat{u} , με γενική λύση

$$\hat{u}(\xi) = c e^{-\xi^2/4a}.$$

Η σταθερά c προσδιορίζεται από τη γνωστή σχέση

$$\hat{u}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$F(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a}. \tag{9.15}$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας Γκαουσιανής συνάρτησης είναι επίσης Γκαουσιανή, κάτι που ισχύει και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

Παράδειγμα 9.9. (Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμό Fourier) Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Να προσδιορισθεί $u \in L^2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$u'' - u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από την ιδιότητα (ii) του Θεωρήματος 9.3 μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση

$$(-i\xi)^2 \hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \hat{f}(\xi),$$

Από τη σχέση (9.14) και την ιδιότητα (iii) του Θεωρήματος 9.3 έχουμε

$$u(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|} * f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

9.3 Επίλυση ΜΔΕ σε μη φραγμένα χωρία

Η εξίσωση διάχυσης-θερμότητας στην ευθεία Επιστρέφουμε τώρα στην εξίσωση διάχυσης-θερμότητας που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 7 (για την περίπτωση του φραγμένου διαστήματος) και εξετάζουμε το πρόβλημα σε όλη την ευθεία δίνοντας έτσι τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας (*fundamental solution of diffusion-heat equation*).

Παράδειγμα 9.10. (Θεμελιώδης λύση εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας) Θεωρούμε το ΠΑΤ για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας σε όλη την ευθεία

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = \phi & \text{στο } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (9.16)$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα (9.16) θα εισάγουμε μια διαφορετική μεθοδολογία, υπολογίζοντας τον \hat{u} , το μετασχηματισμό Fourier της u ως προς τη χωρική μεταβλητή x μόνο. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -k\xi^2 \hat{u} & \text{για } t > 0, \\ \hat{u} = \hat{\phi} & \text{για } t = 0. \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-k\xi^2 t} \hat{\phi}(\xi).$$

Αντικαθιστώντας το α με $1/(4kt)$ στην (9.15), παίρνουμε

$$F\left(\sqrt{\frac{2}{4kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right) = e^{-\xi^2 kt}.$$

Έτσι από την ιδιότητα (iii) του Θεωρήματος παίρνουμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy. \quad (9.17)$$

Η κυματική εξίσωση στην ευθεία Αν και έχουμε δώσει την λύση της κυματικής εξίσωσης στην ευθεία στο Κεφάλαιο 8, εδώ θα δώσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της με τον μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 9.11. (Κυματική εξίσωση) Θεωρούμε το ΠΑΤ για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας σε όλη την ευθεία

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = \phi, \quad u_t = \psi & \text{στο } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (9.18)$$

Παίρνουμε όπως πριν το \hat{u} να είναι ο μετασχηματισμός Fourier της u ως προς τη χωρική μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -c^2 \xi^2 \hat{u} & \text{για } t > 0, \\ \hat{u} = \hat{\phi}, \quad \hat{u}_t = \hat{\psi} & \text{για } t = 0. \end{cases}$$

Έχουμε έτσι μια ΣΔΕ για κάθε σταθεροποιημένο $\xi \in \mathbb{R}$ με λύση

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{c\xi} \sin(c|\xi|t).$$

Αντιστρέφοντας έχουμε τη λύση του προβλήματος (9.18) ως

$$u(x, t) = \left[\hat{\phi}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{c\xi} \sin(c|\xi|t) \right].$$

Στην ειδική περίπτωση που $\psi \equiv 0$, έχουμε

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}(\xi)}{2} (e^{i(x+ct)|\xi|} + e^{i(x-ct)|\xi|}) d\xi.$$

Η εξίσωση Laplace στο άνω ημιεπίπεδο Ας εξετάσουμε τέλος την εξίσωση Laplace που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 6, σε ένα μη φραγμένο χωρίο.

Παράδειγμα 9.12. (Εξίσωση Laplace) Θεωρούμε το ΠΣΤ για την εξίσωση Laplace στο άνω ημιεπίπεδο

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = f & \text{στο } \mathbb{R} \times \{y = 0\}. \end{cases} \quad (9.19)$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η λύση παραμένει φραγμένη καθώς $y \rightarrow \infty$.

Παίρνουμε όπως πριν το \hat{u} να είναι ο μετασχηματισμός Fourier της u ως προς τη $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{cases} \hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0 & \text{για } y > 0, \\ \hat{u} = \hat{f} & \text{για } y = 0. \end{cases}$$

Έχουμε έτσι μια ΣΔΕ για κάθε σταθεροποιημένο $\xi \in \mathbb{R}$ με λύση

$$\hat{u}(\xi, y) = a(\xi) e^{|\xi|y} + b(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Η συνθήκη για το φραγμένο της u μας υποχρεώνει να θέσουμε $a(\xi) = 0$. Τότε, από τη συνθήκη $\hat{u} = \hat{f}$ για $y = 0$ έχουμε

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{-|\xi|y} \hat{f}(\xi).$$

Έτσι από την ιδιότητα (iii) του Θεωρήματος 9.3 παίρνουμε

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} * f = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds. \quad (9.20)$$

Παρατήρηση 9.13. Στα παραπάνω παραδείγματα, η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier μείωσε το ΠΣΤ σε ΠΑΤ για μια ΣΔΕ. Γενικά όμως στην περίπτωση των ΜΔΕ με $n > 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές, αν εφαρμόσουμε $k \leq n$ ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς, τότε προκύπτει μια εξίσωση με $(n-k)$ ανεξάρτητες μεταβλητές. Η εξίσωση αυτή παραμένει ΜΔΕ στις $(n-k)$ μεταβλητές όταν $(n-k) > 1$, ενώ μετατρέπεται σε ΣΔΕ για $(n-k) = 1$ και εκφυλίζεται σε αλγεβρική όταν $(n-k) = 0$.

Παρατήρηση 9.14. Θα επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα (9.16) για να δούμε πως προκύπτει κατά φυσιολογικό τρόπο ο μετασχηματισμός Fourier από τον χωρισμό μεταβλητών και την αρχή επαλληλίας, που είδαμε στην Ενότητα 7.2. Υποθέτουμε κατά τα γνωστά ότι η λύση του (9.16) είναι της μορφής $u(x, t) = X(x)T(t)$, και αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\xi^2,$$

όπου επιλέξαμε αρνητική σταθερά χωρισμού μεταβλητών $-\xi^2$ αφού αναμένουμε φθίνουσα λύση (βλ. Σχέσεις (6.7), (7.5) και σχέσεις που τις ακολουθούν). Έχουμε δει ότι η λύση της εξίσωσης ως προς T είναι $T(t) = c(\xi) e^{-\xi^2 kt}$, ενώ η λύση της εξίσωσης ως προς X είναι $X(x) = a(\xi) e^{i\xi x} + b(\xi) e^{-i\xi x}$. Συνεπώς, παίρνουμε μια οικογένεια λύσεων (μια λύση για κάθε επιλογή του $\xi \in \mathbb{R}$) της ΜΔΕ της μορφής

$$u(x, t; \xi) = (a(\xi) e^{i\xi x} + b(\xi) e^{-i\xi x}) e^{-\xi^2 kt}.$$

Για να ικανοποιήσουμε την αρχική συνθήκη θα χρησιμοποιήσουμε επαλληλία ορίζοντας

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(\xi) e^{i\xi x} + b(\xi) e^{-i\xi x}) e^{-\xi^2 kt} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi$$

όπου $C(\xi) \equiv a(\xi) + b(-\xi)$ απομένει να προσδιοριστεί. Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$u(x, 0) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Παρατηρούμε ότι, εκτός από πολλαπλασιασμό επί σταθερό παράγοντα η ϕ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της C , έτσι έχουμε

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\phi}(\xi).$$

Άρα

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα αυτό καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του Παραδείγματος 9.10

Η μη ομογενής εξίσωση διάχυσης-θερμότητας στην ευθεία Επιστρέφουμε τέλος στη μη ομογενή εξίσωση διάχυσης-θερμότητας που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 7 (για την περίπτωση του φραγμένου διαστήματος) και εξετάζουμε το πρόβλημα σε όλη την ευθεία.

Παράδειγμα 9.15. (Μη ομογενής εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας) Θεωρούμε το ΠΑΤ για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας σε όλη την ευθεία

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (9.21)$$

Σύμφωνα με την αρχή του *Duhamel* (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 8.19) αναζητούμε λύση του προβλήματος (9.21) σαν μια συνεχή επαλληλία λύσεων του προβλήματος

$$\begin{cases} r_t(x, t; \tau) = kr_{xx}(x, t; \tau), & \text{στο } \mathbb{R} \times (\tau, \infty), \\ r(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), & \text{στο } \mathbb{R} \times \{t = \tau\}. \end{cases}$$

Τότε, η λύση του ΠΑΤ (9.21) γράφεται και στη μορφή

$$u(x, t) = \int_0^t r(x, t; \tau) d\tau$$

και από την (9.17) παίρνουμε

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Βιβλιογραφία

- [1] Αχρίβης Γ. Δ., Αλικάκος Ν. Δ. (2017) *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η Έκδοση, Σύγχρονη Εκδοτική.
- [2] Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ. (1994) *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα.
- [3] Evans L. C. (2010) *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society.
- [4] Guenther, R. B., & Lee, J. W. (1996) *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Courier Corporation.
- [5] Haberman R. (2012) *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5th Edition, Pearson.
- [6] Logan J.D. (2013) *Applied Mathematics*, 4th Edition, WILEY.
(Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016)
- [7] Logan J.D. (2015) *Applied Partial Differential Equations*, 3rd Edition, Springer International Publishing.
- [8] Logan J.D. (2008) *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, WILEY.
- [9] Olver P. J. (2014) *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer.
- [10] Pinchover Y., Rubinstein J. (2005) *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press.
- [11] Salsa S. (2015) *Partial Differential Equations in Action*, Springer.
- [12] Στρατής Ι. Γ. *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, ανέκδοτες σημειώσεις παραδόσεων*.
- [13] Strauss W. A. (2008) *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η έκδ., Εκδόσεις Ε.Μ.Π. (2017).
- [14] Τερσένοβ Σ. Α. (1992) *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [15] Τσουμπελής Δ. (2011) *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Τόμος Α. Πανεπιστήμιο Πατρών.
- [16] Wolfram Research, Inc., (2020) Mathematica, Version 12.1, Champaign, IL.