

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ BERNSTEIN

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Ιδιότητες πολυωνύμων Bernstein

(I) Συμμετρική Ιδιότητα

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

(II) Η παράγωγος ενός πολυωνύμου Bernstein ισούται με τη διαφορά δύο τέτοιων πολυωνύμων

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n \cdot (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))$$

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\frac{d}{dt} (t^i (1-t)^{n-i}) \right]$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[i t^{i-1} (1-t)^{n-i} + t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1} \right]$$

$$= n \cdot \left[\underbrace{\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i}}_{B_{i-1,n-1}(t)} - \underbrace{\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1}}_{B_{i,n-1}(t)} \right]$$

$$= n \cdot [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]$$

Καμπύλες Bezier n-βαθμού

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0, 1]$$

$$P_i = 0, 1, \dots, n$$

δομένα σημεία

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad \begin{array}{l} \text{Πολλαπλασια} \\ \text{"Bernstein"} \end{array}$$

Βασικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 1^η: Ολοκληρώνει η καμπύλη μέσα στο χαρακτηριστικό πολύγωνο

$$\text{Επειδή } (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$$

για $a=t$ και $b=1-t$ προκύπτει

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = (t + (1-t))^n = 1$$

Ιδιότητα 2^η: Η καμπύλη περνά από το αρχικό και το τελικό σημείο

$$\begin{aligned} \text{Για } t=0, \quad B_{i,n}(t) &= 0 \quad \forall i=0, 1, \dots, n \Rightarrow \\ B_{0,n}(t) &= 0^0 = 1 \Rightarrow P(0) = P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } t=1, \quad B_{n,n}(1) &= 1 \text{ και } B_{i,n}(1) = 0 \text{ για } i=0, \dots, n-1 \\ \Rightarrow P(1) &= P_n \end{aligned}$$

Ιδιότητα 3ⁿ: Τα πιο σημαντικά σημεία της καμπύλης είναι τα $t = \frac{i}{n}, i=1, 2, \dots, n-1$

Για να προσδιορίσουμε τα σημαντικά σημεία αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές της παραμέτρου t για τις οποίες

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = 0$$

Από τη διαφορά των παραγώγων έχουμε ότι θα πρέπει

$$B_{i-1,n-1}(t) = B_{i,n-1}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1-t}{n-i} = \frac{t}{i} \Rightarrow nt - it = i - it \Rightarrow$$

$$t = \frac{i}{n}, i=1, 2, \dots, n-1$$

Ιδιότητα 4^η : Εφαρμομενική Ιδιότητα

(I) Στα άκρα P_0 και P_n του χαρακτηριστικού πολυωνόμου, η καμπύλη Bezier τρέχει εφαπτομενικά στις ακμές P_0P_1 και $P_{n-1}P_n$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

$$P'(t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} P_i \right]$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[\frac{n!}{i!(n-i)!} \left\{ i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1} \right\} P_i \right]$$

$$= -\binom{n}{0} \cdot n (1-t)^{n-1} P_0 + \binom{n}{n} n \cdot t^{n-1} P_n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left[i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) t^i (1-t)^{n-i-1} \right] P_i$$

Παρατηρούμε ότι

$$P'(0) = -n P_0 + n P_1 = n \cdot (P_1 - P_0)$$

$$P'(1) = n P_n - n P_{n-1} = n \cdot (P_n - P_{n-1})$$

III) Στα άκρα P_0 και P_n οι δεύτερες παράγωγοι
εξαρτώνται από τις 3 κοντινότερες ηχώρες

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot [i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1}]$$

$$\parallel$$

$$B'_{i,n}(t)$$

$$B''_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \left[i(i-1) t^{i-2} (1-t)^{n-i} - i t^{i-1} (n-i) (1-t)^{n-i-1} \right. \\ \left. - i t^{i-1} (n-i) (1-t)^{n-i-1} + t^i (n-i)(n-i-1) (1-t)^{n-i-2} \right]$$

Η καμπύλη Bezier $P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i(t)$

$$P''(t) = B''_{0,n}(t) P_0 + B''_{n,n}(t) P_n + B''_{1,n-1}(t) P_1 + B''_{n-1,n-1}(t) P_{n-1} \\ + B''_{2,n-2}(t) P_2 + B''_{n-2,n-2}(t) P_{n-2} + \sum_{i=3}^{n-3} B''_{i,n-3}(t) P_i(t)$$

Παρατηρούμε ότι

$$B''_{0,n}(t) = n(n-1) (1-t)^{n-2}$$

$$B''_{n,n}(t) = n(n-1) t^{n-2}$$

$$B''_{1,n-1}(t) = n \left[-2(n-1) (1-t)^{n-2} + t \cdot (n-1)(n-2) (1-t)^{n-3} \right]$$

$$B_{n-1, n-1}''(t) = n \left[(n-1)(n-2) t^{n-3} (1-t) - 2(n-1) t^{n-2} \right]$$

$$B_{2, n-2}''(t) = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \left[2(1-t)^{n-2} - 2 \cdot 2 \cdot t(n-2)(1-t)^{n-3} + t^2(n-2)(n-3) \cdot (1-t)^{n-4} \right]$$

$$B_{n-2, n-2}''(t) = \frac{n(n-1)}{2} \left[(n-2)(n-3) t^{n-4} (1-t)^2 - 2 \cdot (n-2) t^{n-3} \cdot 2(1-t) + t^{n-2} \cdot 2 \right]$$

Επομένως για $t=0$ έχουμε

$$\begin{aligned} P''(0) &= n(n-1)P_0 - 2(n-1)P_1 \cdot n + 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot P_2 \\ &= n(n-1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \end{aligned}$$

Για $t=1$ προκύπτει

$$\begin{aligned} P''(1) &= n(n-1)P_n - 2(n-1)P_{n-1} \cdot n + 2 \frac{n(n-1)}{2} P_{n-2} \\ &= n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Οι εραπομενιμένες ιδιότητες που εξασφαλίζουν το "γέλο πέρασμα" από καμπύλη σε καμπύλη

Ορισμός:

Έστω δύο καμπύλες Bezier $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$
και $G(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Οι καμπύλες
ενώνονται με παραμετρική συνέχεια C^r στο t_1
εάν οι παράγωγοί τους r τάξης είναι ίσες στο t_1 .
 $P^{(r)}(t_1) = G^{(r)}(t_1)$

Έστω καμπύλη Bezier $P(t)$ βαθμού n , $t \in [0, 1]$
με σημεία ελέγχου $P_0, P_1, \dots, P_n$

και καμπύλη $Q(t)$ βαθμού m , $t \in [0, 1]$
με σημεία ελέγχου $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$

Συνέχεια C^0 : $P(1) = Q(0)$ δηλαδή $P_n = Q_0$
Το τελικό της πρώτης καμπύλης
" Το πρώτο της δεύτερης

Συνέχεια C^1 : $P'(1) = Q'(0) \Rightarrow$
 $n(P_n - P_{n-1}) = m(Q_1 - Q_0) \Rightarrow P_{n-1}, P_n, Q_0, Q_1$
συγγραμμικά

Εάν $n=m \Rightarrow$ Το $P_n = Q_0$ μέσω του P_{n-1}, Q_1

Συνέχεια C^2 : $P''(1) = Q''(0) \Rightarrow$
 $n(n-1)(P_{n-2} - 2P_{n-1} + P_n) = m(m-1)(Q_0 - 2Q_1 + Q_2)$

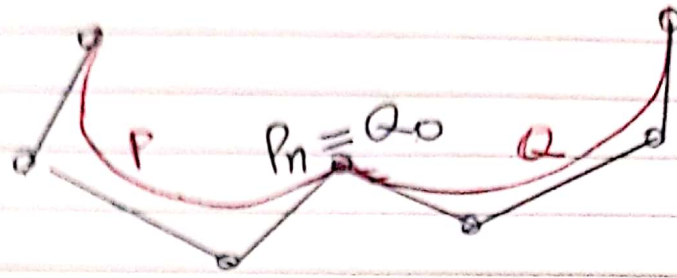
Για $n=m=3 \Rightarrow P_{n-2} - 2P_{n-1} = -2Q_1 + Q_2$ (το δεξί $= D$)

$P_{n-1} = \frac{D + P_{n-2}}{2} \Rightarrow P_{n-1}$ μέσω του D, P_{n-2}

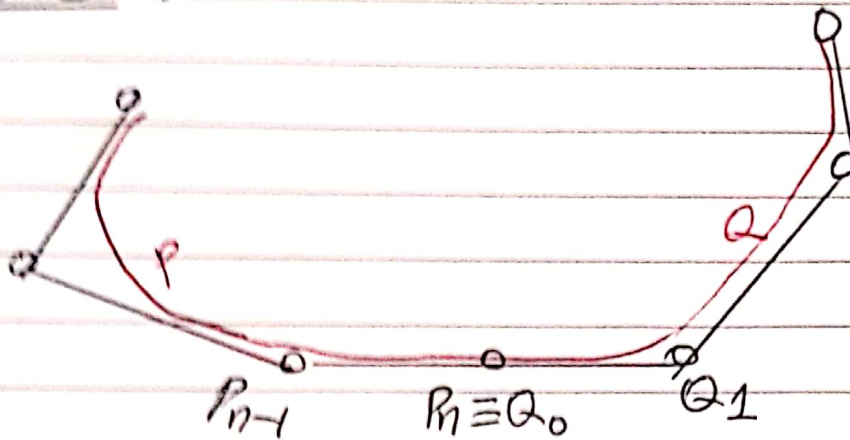
2 Όμοια Q_1 μέσω του D, Q_2

Κάθε επιλεγμένη βαθμίδα συνεχώς καθορίζει επακριβώς τη θέση ενός ακόμη σημείου ελέγχου.

Συνέχεια G^0 :



Συνέχεια C^1 :



Συνέχεια C^2 :

