

ΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

Μαριλένα Μητρούλη

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απαραίτητη για τη δημιουργία οποιασδήποτε εικόνας γραφικών είναι η εμφάνιση της καμπύλης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα μαθηματικά εργαλεία που μας χρειάζονται για το σχεδιασμό καμπυλών.

Παράσταση επίπεδων καμπυλών

Υπάρχουν βασικά δύο τρόποι στα μαθηματικά για την παράσταση καμπυλών. Ο πρώτος είναι ορισμός της καμπύλης με την βοήθεια μιας συναρτησιακής εξίσωσης της μορφής $y = f(x)$ από την οποία με την αντικατάσταση της εκάστοτε τιμής του x λαμβάνουμε την αντίστοιχη τιμή του y και κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τα σημεία της καμπύλης π.χ.:

- Πολυώνυμα : $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις : $y = \sin x, y = \cos x$
- Εξισώσεις κύκλου και έλλειψης : $r^2 = x^2 + y^2, 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις των εφαρμογών πολύ σπάνια δίνεται μία καμπύλη με τη βοήθεια κάποιας εξίσωσης. Συνήθως και αυτός είναι ο δεύτερος τρόπος, δίνονται μια σειρά από σημεία του επιπέδου με βάση τα οποία πρέπει στη συνέχεια να καθοριστεί η πορεία της καμπύλης. Υπάρχουν και εδώ δύο τρόποι:

α) Απαιτούμε όπως τα δοσμένα σημεία να είναι σημεία της καμπύλης και με βάση αυτά να κατασκευαστεί μια συναρτησιακή εξίσωση. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή μιλάμε για “μεθόδους παρεμβολής”.

β) Εδώ τα σημεία είναι απλώς θέσεις αναφοράς μιας καμπύλης και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συναρτησιακής εξίσωσης της καμπύλης. Η καμπύλη απεικονίζει όσο γίνεται καλύτερα (με βάση συγκεκριμένα κριτήρια) τη μορφή των σημείων, χωρίς υποχρεωτικά τα σημεία αυτά να είναι και σημεία της καμπύλης. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για “μεθόδους προσέγγισης”.

Προσέγγιση

Το ακόλουθο θεώρημα ορίζει τη μαθηματική έννοια της προσέγγισης.

Θεώρημα (Weierstrass) : Έστω $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. Η συνάρτηση f προσεγγίζεται από μια πολυωνυμική συνάρτηση p , εάν για $\varepsilon > 0$ ισχύει $\|f(t) - p(t)\| < \varepsilon \forall t \in [a, b]$

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε την ακόλουθη διάκριση στην έννοια της προσέγγισης.

Μαθηματική έννοια	Σχεδίαση – Μηχανολογική έννοια
1) Η γραφική παράσταση της p προσεγγίζει τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $\ f(t) - p(t)\ < \varepsilon \forall t \in [a, b]$ 2) Οι γραφικές παραστάσεις δεν είναι προσεγγιστικά οι ίδιες. Απλώς έχουμε ότι τα αντίστοιχα σημεία των δυο καμπυλών είναι κοντά. Αφού ένα πολυώνυμο μεγάλου βαθμού έχει αρκετά ακραία σημεία, η γραφική παράσταση του θα διαφέρει από την αρχική γραφική παράσταση της f.	Η γραφική παράσταση του πολυωνύμου p προσεγγίζει τη γραφική παράσταση της f εάν οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι προσεγγιστικά οι ίδιες. Π.χ. $f(t)$, $p(t)$ πολύ κοντά, και οι παράγωγοι $f'(t)$, $p'(t)$ πολύ κοντά.

Υπάρχουν διάφορες απαιτήσεις που μπορούν να τεθούν στις καμπύλες που προκύπτουν από προσέγγιση. Η ισχύς ή όχι αυτών των απαιτήσεων καθορίζει και τον χαρακτήρα των καμπυλών. Μερικές από τις απαιτήσεις αυτές είναι:

1. Στην περίπτωση που η καμπύλη αποτελείται από επιμέρους τμήματα μας ενδιαφέρει το “λείο πέραςμα” από το ένα τμήμα στο άλλο.
2. Εάν μια καμπύλη είναι μέρος μιας γενικής εικόνας και γίνει μια στροφή της εικόνας (ή εφαρμοστεί κάποιος μετασχηματισμός αξόνων) τότε η καμπύλη δεν πρέπει να αλλάξει μορφή.
3. Εάν κάθε σημείο λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό της καμπύλης τότε πιθανή αλλαγή κάποιου σημείου προκαλεί εκ νέου τον υπολογισμό της καμπύλης κάτι που μπορεί να έχει ανεπιθύμητα αποτελέσματα σε άλλες περιοχές της καμπύλης. Καλό θα είναι επομένως το εκάστοτε σημείο να επηρεάζει ένα μικρό μέρος της καμπύλης.

Η γενική μέθοδος που χρησιμοποιούμε στην πράξη ώστε να προσεγγίσουμε μια δοσμένη καμπύλη είναι να τη διαχωρίσουμε σε μικρότερα κομμάτια και να προσεγγίζουμε το καθένα ξεχωριστά με καμπύλες τρίτου βαθμού.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις καμπύλες Bezier, που αποτελούν την πιο διαδεδομένη μέθοδο προσέγγισης δοσμένων καμπυλών.

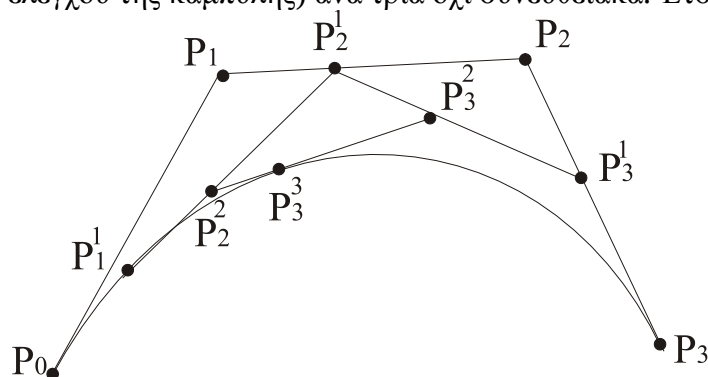
Καμπύλες Bezier

Το όνομά τους δόθηκε από τον Γάλλο μηχανικό P. Bezier της αυτοκινητοβιομηχανίας Renault. Ο Bezier ανέπτυξε τη μέθοδο του στις αρχές του 1960 όταν υπήρξε η ανάγκη δημιουργίας καμπυλών των οποίων το σχήμα έπρεπε να εξαρτάται μόνο από τις αλλαγές λίγων σημείων. Η κύρια εφαρμογή των καμπυλών Bezier ήταν η κατασκευή ικανοποιητικών επιφανειών για τον σχεδιασμό αυτοκινήτων.

Οι καμπύλες Bezier εκφράζονται σε παραμετρική μορφή η οποία είναι ανώτερη της αλγεβρικής μιας καμπύλης ($y=f(x)$) αφού οι συντεταγμένες των σημείων τους δίνονται ανεξάρτητα και εκφράζονται σαν συναρτήσεις με παραμέτρους που συνήθως ανήκουν στο σύνολο $[0,1]$.

Κυβικές καμπύλες Bezier

Υποθέτουμε ότι έχουμε τέσσερα ομοεπίπεδα σημεία P_0, P_1, P_2, P_3 , (τα σημεία ελέγχου της καμπύλης) ανά τρία όχι συνευθειακά. Έτσι έχουμε:



Από τα αρχικά σημεία κατασκευάζουμε την πρώτη γενεά ως εξής:

$$\begin{cases} P_0^1(t) = (1-t)P_0 + t \cdot P_1 \\ P_1^1(t) = (1-t)P_1 + t \cdot P_2 \\ P_2^1(t) = (1-t)P_2 + t \cdot P_3 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Προχωρούμε στην δεύτερη γενεά:

$$\begin{cases} P_0^2(t) = (1-t)P_0^1 + t \cdot P_1^1 \\ P_1^2(t) = (1-t)P_1^1 + t \cdot P_2^1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Τέλος προκύπτει το σημείο:

$$P_0^3(t) = (1-t)P_0^2 + t \cdot P_1^2 \quad t \in [0,1]$$

Συνδυάζοντας τα ανωτέρω έχουμε:

$$\begin{aligned} P_0^3(t) &= (1-t)P_0^2 + t \cdot P_1^2 = (1-t)^2 P_0 + t(1-t)P_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-t)^3 P_0 + t \cdot (1-t)^2 P_1 + t^2 (1-t)P_2 + t^3 P_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{P(t) = P_0^3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3}$$

Η $P(t)$ ονομάζεται **καμπύλη Bezier** τρίτου βαθμού. Οι συντελεστές των δοσμένων σημείων ονομάζονται συναρτήσεις βάρους.

Εάν αναπτύξουμε την έκφραση του $P(t)$ που μόλις βρήκαμε έχουμε την εξής μορφή:

$$P(t) = P_0 + t(-3P_0 + 3P_1) + t^2(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) + t^3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Η οποία μπορεί να γραφτεί και στη μορφή γινομένου πινάκων ως εξής:

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

Έστω P_0, P_1, P_2, P_3 ομοεπίπεδα αλλά ανά τρία όχι συνευθειακά σημεία ελέγχου.

1^η Ιδιότητα: Ολόκληρη η καμπύλη είναι μέσα στο χαρακτηριστικό πολύγωνο που καθορίζεται από τα P_0, P_1, P_2, P_3 (αφού το άθροισμα των συναρτήσεων βάρους σε κάθε σημείο ισούται με 1).

2^η Ιδιότητα: Η καμπύλη Bezier περνά από τα σημεία P_0, P_3 (ξεκινά από το P_0 αφού $P(0) = P_0$ και καταλήγει στο P_3 αφού $P(1) = P_3$).

3^η Ιδιότητα: Η καμπύλη ξεκινά εφαπτομενικά στο ευθύγραμμο τμήμα $P_1 - P_0$ και καταλήγει εφαπτομενικά στο ευθύγραμμο τμήμα $P_3 - P_2$. (αφού $dP(t)/dt$ για $t=0$ και $t=1$ είναι αντίστοιχα $3(P_1 - P_0)$ και $3(P_3 - P_2)$).

4^η Ιδιότητα: Τα πιο σημαντικά σημεία της καμπύλης είναι $t=1/3$ και $t=2/3$. Για $n=3$ οι συναρτήσεις βάρους θα είναι:

$$(1-t)^3$$

$$3t(1-t)^2$$

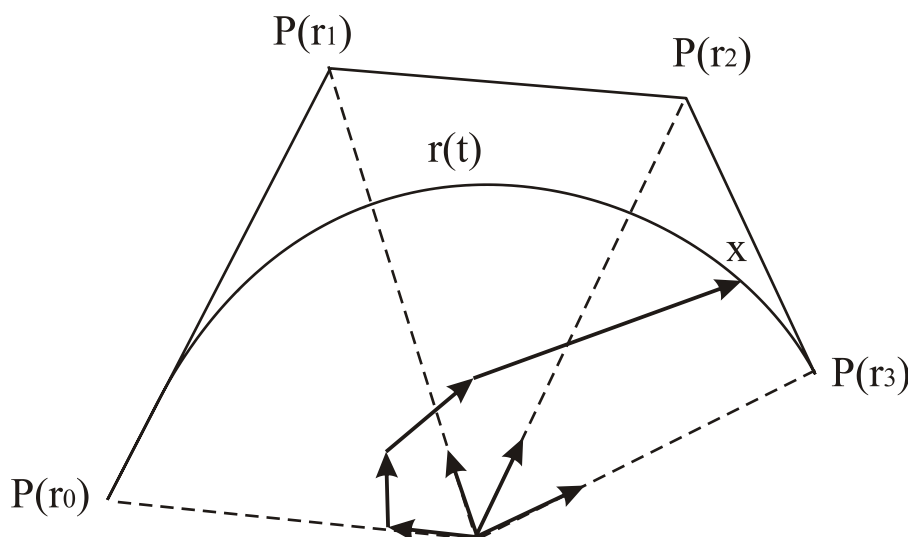
$$3t^2(1-t)$$

$$t^3$$

Αυτές παίρνουν μέγιστη τιμή για $t=0, 1/3, 2/3$ και 1 αντίστοιχα.

Βασική διαδικασία κατασκευής μιας καμπύλης Bezier

Δίνονται τα σημεία ελέγχου $P(r_0), P(r_1), P(r_2), P(r_3)$, ορίζουμε τα τέσσερα τοπικά διανύσματα r_0, r_1, r_2, r_3 και σχεδιάζουμε το χαρακτηριστικό πολύγωνο.



Η καμπύλη Bezier θα ξεκινήσει από το σημείο $P(r_0)$ και προχωρά εφαπτομενικά κατά μήκος της $P(r_0)P(r_1)$ και καταλήγει στο $P(r_3)$ εφαπτομενικά κατά μήκος της

$P(r_2)P(r_3)$. Ολόκληρη η καμπύλη κινείται μέσα στο χαρακτηριστικό πολύγωνο των σημείων ελέγχου.

Αλλάζοντας κάθε φορά τα εσωτερικά σημεία $P(r_1), P(r_2)$ αλλάζει η μορφή της καμπύλης Bezier. Η αλλαγή έστω και ενός από τα τέσσερα σημεία επηρεάζει παντού την πορεία της καμπύλης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις βάρους σε ολόκληρη την παραμετρική περιοχή $0 < t < 1$ είναι διάφορες του μηδενός. Έχουμε λοιπόν «ολικό έλεγχο» της καμπύλης Bezier από τις κορυφές του χαρακτηριστικού πολυγώνου.

Καμπύλη Bezier n βαθμού

Εάν έχουμε $n+1$ σημεία με αντίστοιχα τοπικά διανύσματα $r_i, i = 0, 1, \dots, n$ το γενικό διάνυσμα “καμπύλης Bezier n βαθμού” είναι :

$$r(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot r_i, t \in [0,1]$$

όπου

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

είναι τα πολυώνυμα “Bernstein” που ονομάζονται και συναρτήσεις βάρους.

Βασικά χαρακτηριστικά των καμπυλών Bezier n βαθμού

- Ο βαθμός της καμπύλης Bezier καθορίζεται σύμφωνα με τον αριθμό των δοθέντων σημείων. Δοσμένων $n+1$ σημείων $r_i, i = 0, 1, \dots, n$ προκύπτει “καμπύλη Bezier n βαθμού”
- Η καμπύλη Bezier πάντα περνά από το αρχικό $P(r_0)$ και από το τελικό $P(r_n)$
- Η καμπύλη στην αρχή και στο τέλος του χαρακτηριστικού πολυγώνου εφάπτεται αντίστοιχα στα διανύσματα $r_1 - r_0$ και $r_n - r_{n-1}$.
- Για κάθε ζευγάρι $(i,n), i = 0, 1, \dots, n$ καθορίζονται οι συναρτήσεις βάρους ως συναρτήσεις του t .
- Όπως μπορούμε να δούμε από τον ορισμό του πολυωνύμου Bernstein ($B_{i,n}(t) \neq 0 \forall t \in (0,1)$) κάθε σημείο $P(r_i)$ επηρεάζει για κάθε $t \in [0,1]$ ολόκληρη την καμπύλη Bezier. Έτσι, η καμπύλη είναι απόλυτα ελεγχόμενη. Τοπικές αλλαγές δεν μπορούν να γίνουν σε μια καμπύλη Bezier.
- Σύμφωνα με το γεγονός ότι $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ και αφού $B_{i,n}(t) > 0 \forall t \in (0,1)$ μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις βάρους δεν επηρεάζουν πολύ την πορεία της καμπύλης. Έτσι η καμπύλη είναι μέσα στο κυρτό πολύγωνο των τοπικών $r_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Για μεγαλύτερες τιμές του n το κόστος της αξιολόγησης είναι αρκετά μεγαλύτερο. Για αυτό τον λόγο διαχωρίζουμε τα σύνολα των δοθέντων σημείων σε αρκετά μικρότερα υποσύνολα και θεωρούμε το πρόβλημα της κατασκευής μιας καμπύλης Bezier σε ένα πρόβλημα ενοποίησης περισσότερων της μιας καμπύλης βαθμού μικρότερου του n . Φυσικά σε αυτή την περίπτωση το τελευταίο σημείο κάθε χαρακτηριστικού πολυγώνου (εκτός του τελευταίου) πρέπει να συμπίπτει με το πρώτο του επόμενου γειτονικού χαρακτηριστικού πολυγώνου. Είναι προφανές ότι χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εφαπτομένων των καμπυλών Bezier, μπορούμε να πετύχουμε ένα “ομαλότερο” πέρασμα από καμπύλη σε καμπύλη εάν υποθέσουμε ότι το ενωμένο σημείο των δυο καμπυλών είναι ευθυγραμμισμένο με τα δυο γειτονικά σημεία που αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά πολύγωνα.

Παράδειγμα

Δίνονται τέσσερις κορυφές του χαρακτηριστικού πολυγώνου

$$P_0 = (0,2), P_1 = (6,5), P_2 = (8,1), P_3 = (4,-2)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα τέσσερα σημεία της καμπύλης Bezier για $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ και 1. Στην συνέχεια σχεδιάζουμε την καμπύλη

Λύση

Για $n=3$ οι συναρτήσεις βάρους θα είναι:

$$B_{0,3}(t) = \frac{3!}{0!3!} t^0 (1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = \frac{3!}{1!2!} t^1 (1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = \frac{3!}{2!1!} t^2 (1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = \frac{3!}{3!0!} t^3 (1-t)^0 = t^3$$

Στον επόμενο πίνακα δίνουμε τις τιμές της συνάρτησης $B_{i,3}(t)$ για διάφορες τιμές του t .

$B_{i,3}(t) t$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$B_{0,3}$	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}$	0
$B_{1,3}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
$B_{2,3}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0
$B_{3,3}$	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

Από την γενική μορφή της καμπύλης Bezier τρίτου βαθμού

$$r(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) r_i \text{ για } t \in [0,1]$$

Υπολογίζουμε τα τέσσερα σημεία της καμπύλης

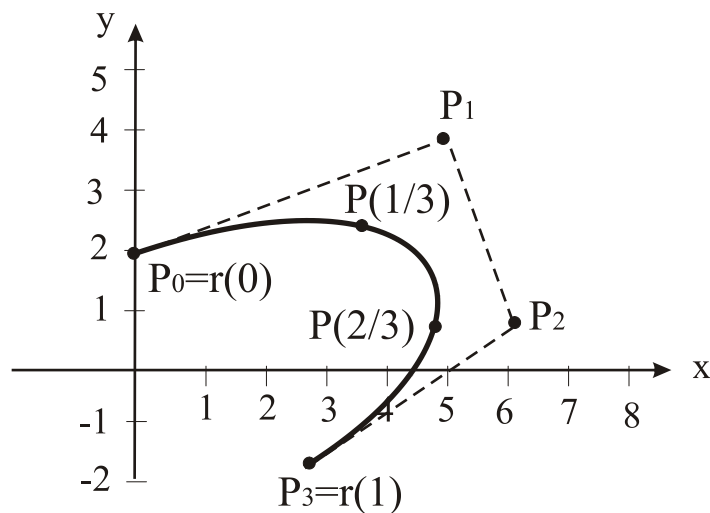
$$r(0) = 1 \cdot r_0 = 1 \cdot P_0 = (0,2) \Rightarrow P(0) = (0,2)$$

$$r\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27} P_0 + \frac{4}{9} P_1 + \frac{2}{9} P_2 + \frac{1}{27} P_3 \text{ ή}$$

$$r_x\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \frac{14}{27} = 4.59, r_y\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \frac{26}{27} = 2.96 \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}\right) = (4.59, 2.96)$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = (6.07, 1.04) \text{ και } P(1) = (4, -2)$$

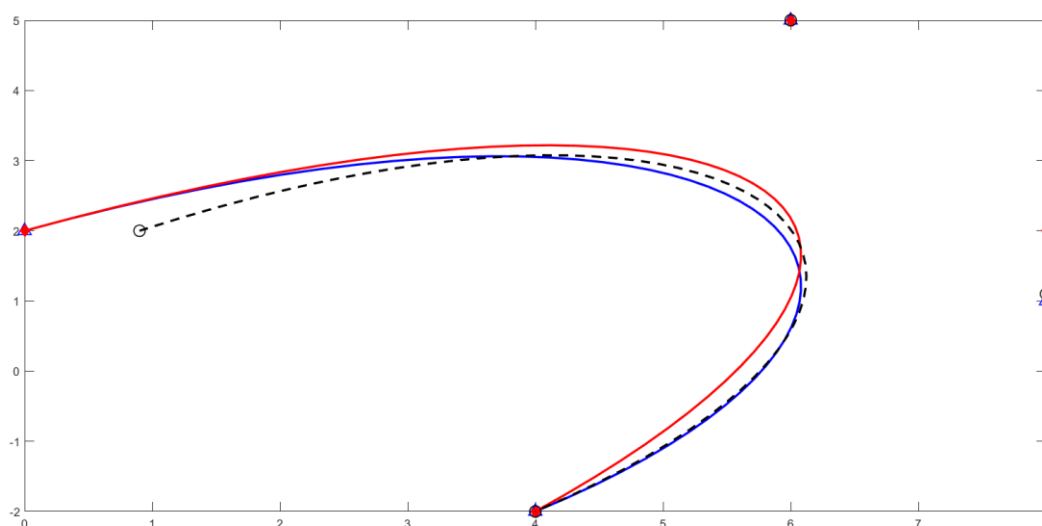
Ακολουθεί γραφική αναπαράσταση της καμπύλης.



Ψευδο-τοπικός έλεγχος της καμπύλης

Επειδή οι συντελεστές βάρους ορίζονται σε όλο το εύρος της παραμέτρου t , οι καμπύλες Bezier δεν έχουν τοπικό έλεγχο. Παρόλα αυτά επειδή κάθε συντελεστής βάρους έχει μόνο ένα μέγιστο και αυτό εμφανίζεται στην τιμή $t=i/n$, μία αλλαγή σε κάποιο σημείο ελέγχου P_i θα έχει αντίκτυπο στην καμπύλη κυρίως στην περιοχή γύρω από την τιμή της παραμέτρου i/n . Έτσι αλλαγές στα σημεία ελέγχου μίας καμπύλης Bezier έχουν αρκετά προβλέψιμο αποτέλεσμα στην καμπύλη.

Στο παρακάτω γράφημα της Bezier η καμπύλη του προηγούμενου παραδείγματος απεικονίζεται με μπλε χρώμα, και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου της $P_0=(0,2), P_1=(6,5), P_2=(8,1), P_3=(4,-2)$ είναι τριγωνάκια με μπλε χρώμα



Με κόκκινο είναι μια άλλη καμπύλη Bezier με σημεία ελέγχου $P_0=(0,2), P_1=(6,5), P_2=(8,2), P_3=(4,-2)$, δηλαδή έχει αλλάξει μόνο το σημείο P_2 , έχοντας προσθέσει +1 στην y συντεταγμένη του. Αυτά τα σημεία ελέγχου εμφανίζονται σαν κόκκινοι ρόμβοι στο γράφημα.

Με μαύρο χρώμα και διακεκομμένη γραμμή είναι μια τρίτη καμπύλη Bezier με σημεία ελέγχου $P_0=(0.9,2), P_1=(6,5), P_2=(8,1.1), P_3=(4,-2)$, Τώρα έχει γίνει μια μικρή αλλαγή της τάξης του 10% στην x συντεταγμένη του P_0 και άλλο 10% στη y του P_2 . Αυτά τα σημεία ελέγχου εμφανίζονται με μαύρα κυκλάκια στο γράφημα.

Παρατηρούμε ότι έτσι αλλάζοντας τα σημεία ελέγχου μπορούμε να δοκιμάσουμε διάφορες μορφές που μπορεί να παίρνει η καμπύλη Bezier. Αυτό αποτελεί τη βάση του Computer Aided Design (CAD).

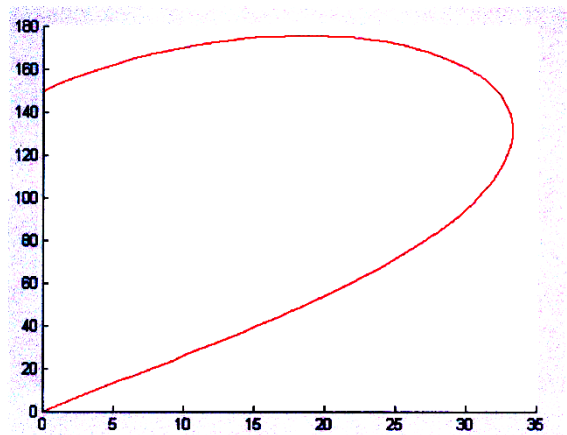
Μειονεκτήματα των καμπυλών Bezier.

- Ο αριθμός των κορυφών καθορίζει τον βαθμό της καμπύλης. Μία κυβική καμπύλη καθορίζεται από ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές. Ένα πολύγωνο με έξι κορυφές πάντα παράγει καμπύλη Bezier 5ου βαθμού. Για να μειώσουμε τον βαθμό της καμπύλης πρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των κορυφών.
- Η συνάρτηση Bernstein καθορίζει εξολοκλήρου την καμπύλη.

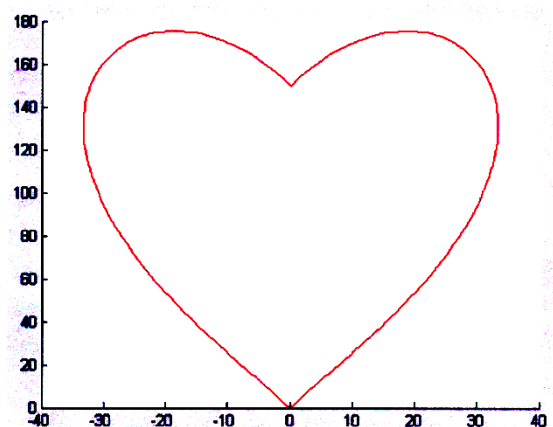
Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή που μπορεί να επιτευχθεί με καμπύλες Bezier.

Σχεδιασμός τρισδιάστατου μοντέλου με χρήση καμπυλών Bezier.

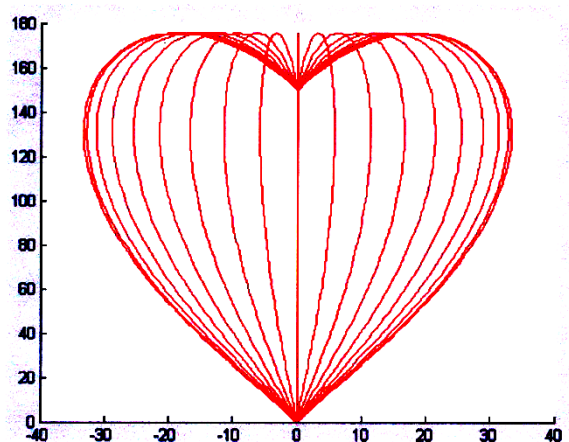
Δεδομένων έξι σημείων ελέγχου κατασκευάζουμε την καμπύλη Bezier 5^{ου} βαθμού.



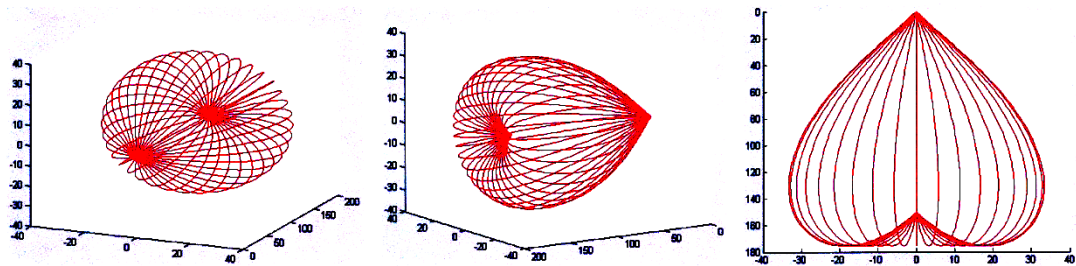
Παρόμοια κατασκευάζεται η συμμετρική ως προς τον άξονα y καμπύλη Bezier.



Περιστροφή (στο συγκεκριμένο παράδειγμα 18 φορές) του τελικού σχήματος γύρω από τον άξονα y και σχηματισμός ενός τρισδιάστατου μοντέλου.



Τρισδιάστατη πλοήγηση γύρω από το μοντέλο που κατασκευάσαμε.



Βιβλιογραφία

1. Θεοχάρης Θ. Μπεμ Α., “Γραφικά, Αρχές & Αλγόριθμοι”, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999.
2. Hearn D. Baker P., “Computer Graphics”, Prentice Hall International Editions, U.S.A. 1986.
3. MATLAB - The Language Of Technical Computing

<http://www.mathworks.com/products/matlab/>