

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

453. Γραφικά με H/Υ

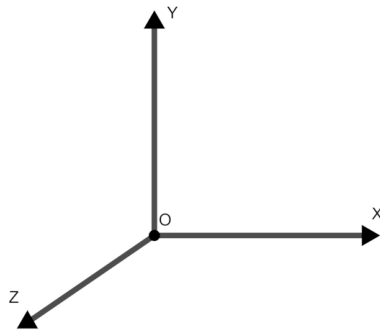
Μετασχηματισμοί στο επίπεδο & στο χώρο

Σύστημα συντεταγμένων

Για να καθορίσουμε στο επίπεδο και στο χώρο ένα σημείο, συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ορίζουμε ένα σημείο αναφοράς O σαν αρχή και σχεδιάζοντας τους αντίστοιχους ορθογώνιους άξονες με αρχή το σημείο αυτό. Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται καρτεσιανό.

Για να προσδιορίσουμε ένα σημείο στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων του επιπέδου, αρκεί ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ τότε το (x, y) είναι το σημείο που τέμνονται οι κάθετες που θα φέρουμε από τους άξονες Ox και Oy στα σημεία x και y . Όμοια για τον καθορισμό της θέσης ενός σημείου στο χώρο αρκεί μια τριάδα αριθμών. Ειδικότερα για την εργασία, σε ότι αφορά το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων των τριών διαστάσεων, θα κάνουμε χρήση του δεξιόστροφου συστήματος.



Σχήμα 1: Δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων

Συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Στα γραφικά είναι συχνά απαραίτητο να προβούμε σε αλλαγές των συντεταγμένων ενός σχήματος, για παράδειγμα αν θέλουμε να το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές σε μια εικόνα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Ορισμός: Συσχετισμένος συνδυασμός σημείων $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^3$, είναι ένα σημείο $P \in \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως

$$P = \sum_{i=0}^n a_i P_i$$

με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $\sum_{i=0}^n a_i = 1$

Ειδικότερα κάνουμε χρήση συσχετισμένων μετασχηματισμών, οι οποίοι διατηρούν τις βασικές ιδιότητες των σχημάτων, όπως τους λόγους των αποστάσεων την παραλληλία, τους συσχετισμένους συνδυασμούς, τις ευθείες γραμμές και τους λόγους αναλογιών.

Ορισμός: Συσχετισμένος μετασχηματισμός, είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί του συσχετισμένους συνδυασμούς. Δηλαδή $\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ είναι συσχετισμένος αν για $P = \sum_{i=0}^n a_i P_i$ συσχετισμένο συνδυασμό τότε $\Phi(P) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi(P_i)$.

Η ιδιότητα αυτή των συσχετισμένων μετασχηματισμών, μας δίνει την δυνατότητα, αν θέλουμε για παράδειγμα να εφαρμόσουμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό σε ένα τρίγωνο, αντί να πρέπει να τον εφαρμόσουμε σε κάθε σημείο του, να τον εφαρμόσουμε μόνο στις

κορυφές του. Και επομένως να μειώσουμε το κόστος υπολογισμού για να βρούμε το μετασχηματισμού κάθε σημείου του.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τους βασικούς συσχετισμένους μετασχηματισμούς για τις δύο και τις τρεις διαστάσεις. Τους λέμε βασικούς, γιατί οποιοδήποτε άλλος μετασχηματισμός προκύπτει από την σύνθεση τους. Για να μπορούμε να επιτυγχάνουμε εύκολα την σύνθεση μετασχηματισμών, θα χρησιμοποιούμε μια επιπλέον διάσταση σε σχέση με τον χώρο που θα βρισκόμαστε κάθε φορά. Με τη χρήση ομογενών συντεταγμένων μπορούμε να εκφράσουμε όλους τους βασικούς μετασχηματισμούς με πίνακες ίδιας διάστασης.

Ορισμός: Ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ για κάθε $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ονομάζεται η $(n+1)$ -αδα $(x_1z, x_2z, \dots, x_nz, z)$

Ορισμός: Το σημείο $P = (x, y)$ του $\mathbb{R}^2$ σε ομογενείς συντεταγμένες θα το γράφουμε

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Ενώ το σημείο $P = (x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ σε ομογενείς συντεταγμένες θα το γράφουμε $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T$.

Οι χρήση ομογενών συντεταγμένων μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε τους μετασχηματισμούς σε πίνακες ίδιας διάστασης και έτσι να μπορούμε να ορίσουμε και την σύνθεση τους σαν έναν απλό πολλαπλασιασμό πινάκων.

Μετασχηματισμοί στο επίπεδο

Ορισμός: Γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι μια 1-1 και επί συνάρτηση που το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της είναι σημεία.

Πίνακες βασικών μετασχηματισμών στο επίπεδο

Οι ακόλουθοι είναι οι βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο σε μορφή 3×3 πινάκων.

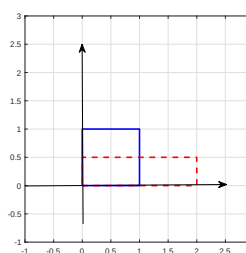
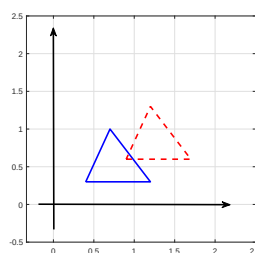
- Μεταφορά κατά το διάνυσμα

$$\vec{v} = (x, y)$$

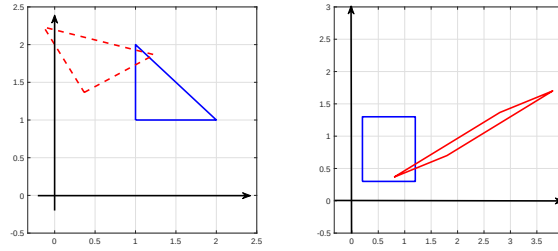
$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αλλαγή κλίμακας (Scaling) ως προς την αρχή των αξόνων, με παράγοντες αλλαγής κλίμακας a, b αντίστοιχα για τον άξονα x και y

$$S_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 2: Μεταφορά και Scaling. Με μπλε το αρχικό σχήμα



Σχήμα 3: Στροφή και Shearing. Με μπλε το αρχικό σχήμα

- Στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Στρέβλωση (Shearing) ως προς την αρχή των αξόνων, με παράγοντες στρέβλωσης a, b κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα

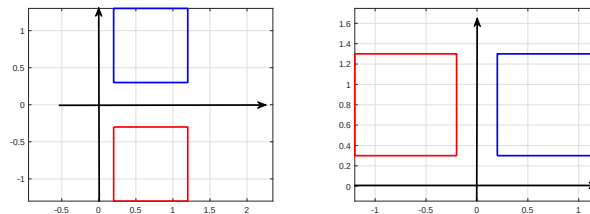
$$Sh = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Συμμετρία ως προς τον άξονα x

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Συμμετρία ως προς τον άξονα y

$$M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4: Συμμετρία ως προς τον άξονα x και τον y . Με μπλε το αρχικό σχήμα

Μετασχηματισμοί στο χώρο

Όπως στο επίπεδο έτσι και στο χώρο, κάνουμε χρήση ομογενών συντεταγμένων. Επομένως οι πίνακες των μετασχηματισμών σε αυτή την περίπτωση είναι 4×4 . Οι διαφορές που παρατηρούμε εκτός από την διάσταση, είναι ότι οι συμμετρίες σε αυτή τη περίπτωση είναι ως προς τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες. Όπως και η στρέβλωση γίνεται κατά μήκος των αξόνων των επιπέδων. Τέλος έχουμε 3 πίνακες στροφής, αφού αυτή γίνεται γύρω από άξονα και όχι από το O .

Πίνακες βασικών μετασχηματισμών στο χώρο

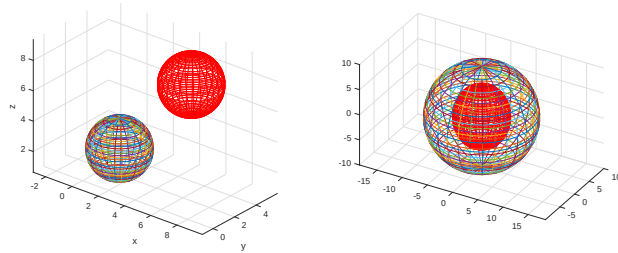
- Μεταφορά κατά το διάνυσμα

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αλλαγή κλίμακας (Scaling), με παράγοντες αλλαγής κλίμακας a, b, c αντίστοιχα για τους άξονες x, y και z .

$$S_{a,b,c} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5: Μεταφορά και Scaling. Με κόκκινο το νέο σχήμα

- Στροφή γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ

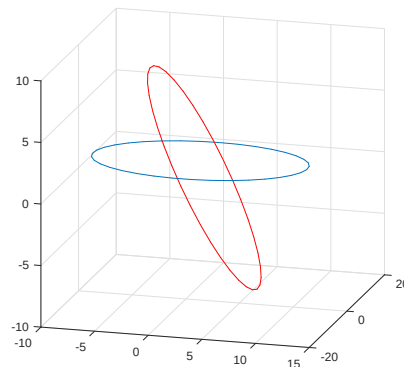
$$R_{\theta,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Στροφή γύρω από τον άξονα y κατά γωνία θ

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Στροφή γύρω από τον άξονα z κατά γωνία θ

$$R_{\theta,z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 6: Στροφή γύρω από άξονα. Με κόκκινο το νέο σχήμα

- Συμμετρία ως προς το επίπεδο xy

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Συμμετρία ως προς το επίπεδο xz

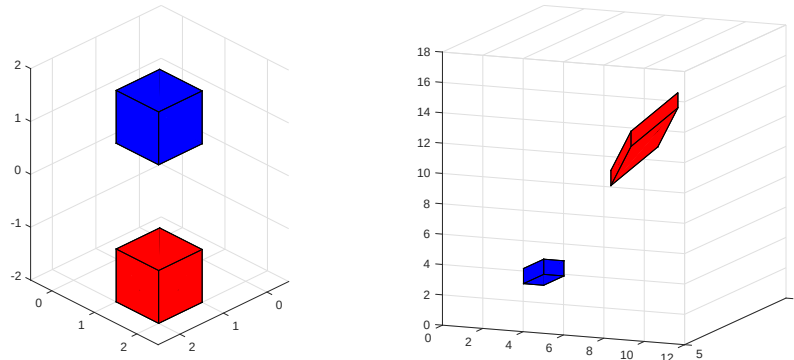
$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Συμμετρία ως προς το επίπεδο yz

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Στρέβλωση (Shearing), με παράγοντες στρέβλωσης (yx, zx) , (xy, zy) και (xz, yz) κατά μήκος των αξόνων των επιπέδων xy , xz και yz

$$Sh = \begin{bmatrix} 1 & yx & zx & 0 \\ xy & 1 & zy & 0 \\ xz & yz & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 7: Συμμετρία και Shearing. Με κόκκινο το νέο σχήμα

Σύνθεση μετασχηματισμών

Όπως είναι προφανές ένας χρήσιμος μετασχηματισμός για μια διεργασία, σπάνια θα είναι απλά ένας από τους βασικούς, αλλά συνήθως θα προκύπτει από μια αλληλουχία αυτών.

Θα εκμεταλλευτούμε την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων και θα υπολογίσουμε τον πίνακα του σύνθετου μετασχηματισμού που προκύπτει από το γινόμενό τους, και αυτόν θα εφαρμόσουμε. Επειδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό στους πίνακες, η σειρά που κάνουμε τις πράξεις έχει σημασία.

Ορισμός: Σαν σύνθετο μετασχηματισμό M , ορίζουμε τον μετασχηματισμό που προκύπτει από την διαδοχική εφαρμογή των βασικών μετασχηματισμών $M_1, \dots, M_n$ Όπου M_i ο μετασχηματισμός που εφαρμόστηκε στο i -στο βήμα. Τότε

$$M = \prod_{i=1}^n M_{n-i+1} = M_n * M_{n-1} * \dots * M_2 * M_1$$

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να στρέψουμε κατά γωνία θ ένα αντικείμενο, όχι ως προς την αρχή των αξόνων αλλά ως προς ένα δεδομένο σημείο $P = (h, k)$. Για να βρούμε τον πίνακα αυτού του μετασχηματισμού θα χρειαστούμε 3 βήματα.

Βήμα 1: Θα μεταφέρουμε το σημείο $P = (h, k)$ κατά διάνυσμα $\vec{v}_1 = (-h, -k)$ έτσι ώστε αυτό να βρεθεί στην αρχή των αξόνων. Αυτό γίνεται με τον πίνακα μετασχηματισμού

$$T_{v1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2: Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε στροφή ως προς την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ . Αυτό γίνεται με τον πίνακα μετασχηματισμού

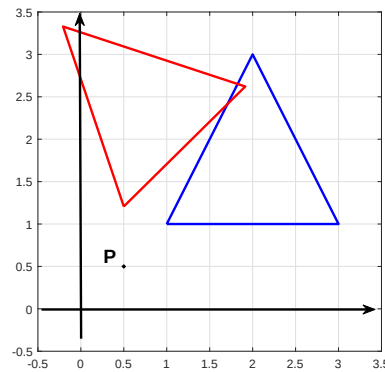
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3: Τέλος θα μεταφέρουμε ξανά το σημείο $P = (h, k)$ κατά διάνυσμα $\vec{v}_2 = (h, k)$ έτσι ώστε να βρεθεί στην αρχική του θέση. Αυτό γίνεται με τον πίνακα μετασχηματισμού

$$T_{v2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο ζητούμενος πίνακας προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{P\theta} &= T_{v2} * R_\theta * T_{v1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & h - h\cos\theta + k\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & k - h\sin\theta - k\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Σχήμα 8: Στροφή 45° γύρω από το σημείο $P = (0.5, 0.5)$, με μπλε χρώμα το αρχικό σχήμα