

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

453. Γραφικά με Η/Υ

Απεικονίσεις Χώρου Σε επίπεδο

Προβολές

Τα μοντέλα που καλείται κάποιος να διαχειριστεί στα γραφικά, είναι καταβάση τρισδιάστατα. Καλούμαστε λοιπόν να τα αποτυπώσουμε σε δισδιάστατες οθόνες ή σε άλλες μορφές εξόδου. Για να το πετύχουμε αυτό εφαρμόζουμε μια κατηγορία συναρτήσεων που παίρνουν σημεία του $\mathbb{R}^3$ και τα μετατρέπουν σε σημεία του $\mathbb{R}^2$.

Δύο είναι οι κύριες κατηγορίες που μας απασχολούν, και ο διαχωρισμός τους γίνεται με βάση της απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής.

1. **Προοπτική προβολή**, για πεπερασμένη απόσταση.
2. **Παράλληλη προβολή**, για άπειρη απόσταση.

Προοπτική (Κεντρική) προβολή

Στην προοπτική ή αλλιώς κεντρική προβολή, όπως αναφέραμε, το κέντρο προβολής **K** βρίσκεται σε πεπερασμένη απόσταση από το επίπεδο προβολής **Π**. Αν θέλουμε να προβάλουμε το σημείο **P** στο **Π** αρκεί να φέρουμε την ευθεία **KP** και να βρούμε το σημείο που τέμνει αυτή το **Π**. Αυτή θα είναι η εικόνα του **P** στο **Π**.

Ο προοπτικός μετασχηματισμός δεν είναι γραμμικός, αυτό δεν μας επιτρέπει να δουλέψουμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο με τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς.

Έστω το κέντρο προβολής **K** βρίσκεται στο κέντρο των αξόνων $K=(0,0,0)$ και το επίπεδο προβολής **Π** είναι κάθετο στον αρνητικό άξονα **z** σε απόσταση **d** από το **K**. Το σημείο $P = [x \ y \ z]^T$ προβάλεται στο $P' = [x' \ y' \ d]^T$

Αν θεωρήσουμε τον πίνακα προοπτικής προβολής

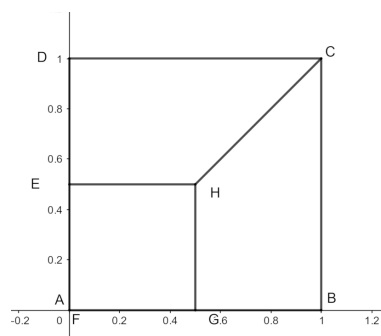
$$P_{pr} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και τον εφαρμόσουμε στο $P = [x \ y \ z \ 1]^T$ θα έχουμε

$$P' = P_{pr} * P = [xd \ yd \ zd \ z]^T$$

Παρατηρούμε ότι η ομογενή συντεταγμένη δεν είναι πια 1, διαιρώντας κάθε συντεταγμένη με **z** παίρνουμε την τελική τιμή για το P' .

$$P' = \begin{bmatrix} \frac{xd}{z} & \frac{yd}{z} & d & 1 \end{bmatrix}^T$$



Σχήμα 1: Προοπτική προβολή μοναδιαίου κύβου $d=1$

Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε προοπτικές απεικονίσεις από όλες τις δυνατές κατευθύνσεις και σε διαφορετικά επίπεδα, με τις αντίστοιχες συνθέσεις γεωμετρικών μετασχηματισμών και του πίνακα της προβολής μας.

Μειονεκτήματα Κεντρικής Προβολής

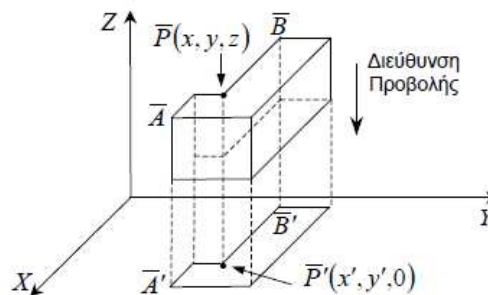
- Σχήματα ανόμοιου μεγέθους, μπορεί να έχουν την ίδια κεντρική προβολή.
- Παράλληλες ευθείες προβαλλόμενες εμφανίζονται να τέμνονται.

Η προοπτική προβολή προσομοιάζει καλά τον τρόπο που αντιλαμβάνεται το βάθος το ανθρώπινο μάτι. Όμως σε πολλές εφαρμογές θέλουμε να διατηρήσουμε τις αποστάσεις αναλλοίωτες. Τότε καταφεύγουμε στην παράλληλη προβολή.

Παράλληλη προβολή

Στη παράλληλη προβολή θεωρούμε ότι το κέντρο προβολής βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το επίπεδο προβολής. Για να την ορίσουμε χρειαζόμαστε το επίπεδο προβολής και να την κατεύθυνση προβολής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη παράλληλων προβολών. Αυτές που η κατεύθυνση προβολής είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής και τις λέμε Ορθογραφικές και τις υπόλοιπες που τις λέμε πλάγιες.

Ορθογραφική προβολή



Σχήμα 2: Ορθογώνια Παράλληλη Προβολή

Συνήθως χρησιμοποιούμε σαν επίπεδο προβολής ένα από τα κύρια επίπεδα του χώρου, σαν επίπεδο προβολής για να την ορίσουμε και σαν κατεύθυνση προβολής αυτή που έχει φορά προς το επίπεδο προβολής και είναι κάθετη σε αυτό. Για να ορίσουμε τον πίνακα προβολής θα θεωρήσουμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι το επίπεδο είναι το xy , αφού όποιο άλλο και να διαλέγαμε θα μπορούσαμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να καταλήξουμε στο ίδιο. Ο πίνακας που την ορίζει είναι ο

$$P_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πλάγια προβολή

Όπως είδαμε στην περίπτωση πλάγιας προβολής, η κατεύθυνση προβολής δεν είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής. Έστω ότι αυτή ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{v} = (x_p, y_p, z_p)$ τότε ο πίνακας προβολής ορίζεται

$$P_{pl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{x_p}{z_p} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y_p}{z_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός παράστασης

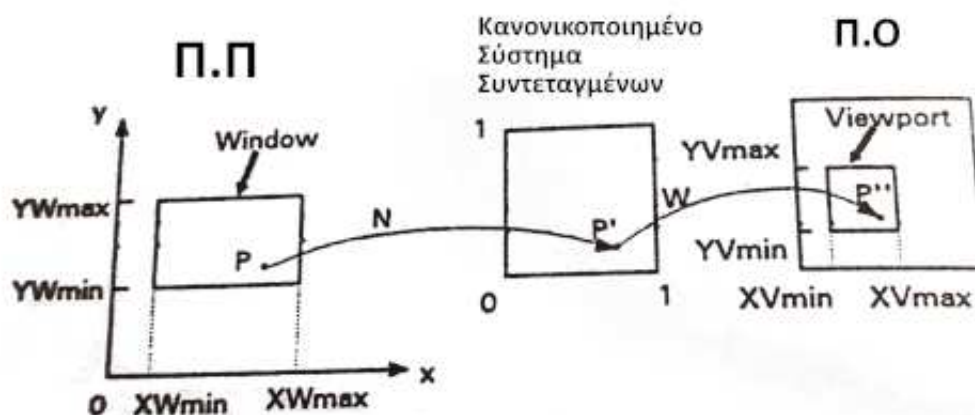
Ένα από τα θεμελιώδη ζητήματα στο χώρο των υπολογιστών, είναι να καταφέρουμε να κάνουμε την μετάβαση από τον άπειρο πραγματικό μας κόσμο στον πεπερασμένο κόσμο ενός μηχανήματος. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται όταν θέλουμε να εκφράσουμε κάποιον αριθμό του σύνολου των πραγματικών σε αριθμό μηχανής, εμφανίζεται και όταν θέλουμε να εμφανίσουμε ένα αντικείμενο από τον πραγματικό κόσμο στην οθόνη του υπολογιστή. Την διαδικασία για να μεταφέρουμε αντικείμενα από τον πραγματικό κόσμο, στον κόσμο της οθόνης μας, τη καθορίζει ο μετασχηματισμός παράστασης.

Πριν αναλύσουμε την διαδικασία, θα εισάγουμε για ευκολία τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 0.1 Πάνω στο επίπεδο που έχει ορίσει ο παρατηρητής και έχει προβάλει σε αυτό αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, με την χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών προβολής, ορίζουμε **Παράθυρο Παρατηρητή (ΠΠ)** το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που καθορίζεται είτε από το κέντρο του και την απόστασή του από τις πλευρές του είτε από τις συντεταγμένες των κάτω αριστερά και άνω δεξιά κορυφών του.

Ότι αντικείμενα πάνω στο επίπεδο προβολής βρίσκονται εντός του **ΠΠ** είτε πλήρως είτε μερικώς θα είναι και αυτά που θα μεταφερθούν τελικώς στην οθόνη μας. Με τη βοήθεια μεθόδων αποκοπής θα καθοριστούν πλήρως τα μέρη των αντικειμένων που θα βρίσκονται εντός του **ΠΠ**.

Ορισμός 0.2 Παράθυρο Οθόνης (ΠΟ) ορίζουμε το ορθογώνιο που καθορίζει τον χώρο της οθόνης μας που μπορούμε να προβάλλουμε τα γραφικά μας. Θεωρούμε ότι το κάτω αριστερό του άκρο είναι η αρχή των αξόνων και το άνω δεξιά άκρο καθορίζεται από την ανάλυση της οθόνης μας ανάλογα.



Σχήμα 3: Ανάλυση των βημάτων

Η μετατροπή από το ΠΠ στο ΠΟ γίνεται σε δύο βήματα.

Βήμα 1: Εφαρμόζουμε κατάλληλο μετασχηματισμό έτσι ώστε η κάτω αριστερή κορυφή του ΠΠ να βρεθεί στο (0,0) και η άνω δεξιά στο (1,1). Αυτό γίνεται αν εφαρμόσουμε μεταφορά και μετά scaling.

Έστω ότι το ΠΠ ορίζεται από τις ακόλουθες συντεταγμένες των κορυφών του: (Wx_{min}, Wy_{min}) για την κάτω αριστερά και (Wx_{max}, Wy_{max}) για την άνω δεξιά. Και οι κατάλληλοι παράγοντες αλλαγής κλίμακας είναι οι :

$$WS_x = \frac{1}{Wx_{max} - Wx_{min}}$$

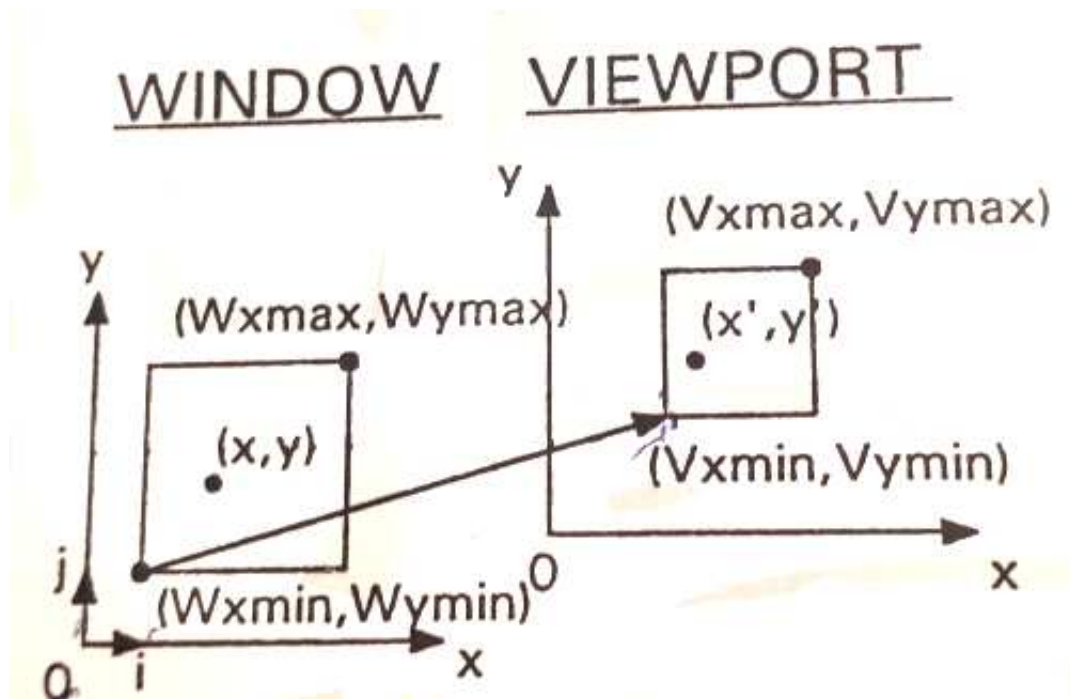
$$WS_y = \frac{1}{Wy_{max} - Wy_{min}}$$

Βήμα 2: Εφαρμόζουμε πάλι μετασχηματισμό αλλαγής κλίμακας έτσι ώστε η άνω δεξιά κορυφή του ορθογωνίου μας να ταυτιστεί με την αντίστοιχη κορυφή του ΠΟ αυτή την φορά. Αν η κορυφή αυτή έχει τις εξής συντεταγμένες (Vx_{max}, Vy_{max}) .

Οι παράγοντες αλλαγής κλίμακας θα είναι οι : $VS_x = Vx_{max}$ και $VS_y = Vy_{max}$

Τότε ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο

$$\begin{aligned} M_{view} &= \begin{bmatrix} VS_x & 0 & 0 \\ 0 & VS_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WS_x & 0 & 0 \\ 0 & WS_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Wx_{min} \\ 0 & 1 & -Wy_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} VS_x * WS_x & 0 & -Wx_{min} \\ 0 & VS_y * WS_y & -Wy_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Σχήμα 4: Μετασχηματισμός Παρατήρησης