

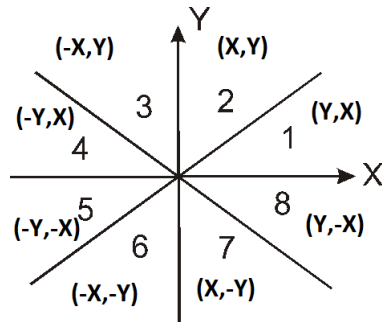
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

453. Γραφικά με Η/Υ

Σχεδιασμός Βασικών Σχημάτων
Κύκλος και Έλλειψη

Σχεδιασμός του Κύκλου

Ο κύκλος είναι ένα συμμετρικό σχήμα. Κάθε αλγόριθμος για τη σχεδίαση ενός κύκλου μπορεί να εκμεταλλευτεί αυτή τη συμμετρία για να σχεδιάσει 8 σημεία υπολογίζοντας μόνο ένα. Αυτό αποτελεί τη λεγόμενη συμμετρία των 8 δρόμων.



Σχήμα 1: Συμμετρία των 8 δρόμων

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε το 2ο οκταμόριο ενός κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r . Εάν υπολογίσουμε όλα τα σημεία αυτού του οκταμορίου τα υπόλοιπα μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τη συμμετρία των 8 δρόμων.

Καθορισμός της μεταβλητής απόφασης

Εάν φωτιστεί το pixel (x_i, y_i) στο 2ο οκταμόριο, Τα επόμενα δυνατά προς φωτισμό pixel θα είναι τα (x_{i+1}, y_i) ή $(x_{i+1}, y_i - 1)$. Θα πρέπει να καθορίσουμε μια μεταβλητή απόφασης ανάλογα με την οποία να επιλέγουμε εάν η συντεταγμένη y θα παραμείνει ίδια ή θα ελαττωθεί, δεδομένου ότι η συντεταγμένη x σταθερά θα αυξάνεται κατά 1.

Εάν η συντεταγμένη x_{i+1} αντιστοιχεί σε κάποιο y ανάμεσα στις τιμές y_i και y_{i-1} τότε το y ικανοποιεί τη σχέση.

$$y^2 = r^2 - x_{i+1}^2$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες διαφορές d_1 και d_2

$$d_1 = y_i^2 - y^2 = y_i^2 - r^2 + x_{i+1}^2$$
$$d_2 = y^2 - y_{i-1}^2 = r^2 - x_{i+1}^2 - (y_i - 1)^2$$

Εάν θέσουμε $e_i = d_1 - d_2$ τότε αυτή αποτελεί μεταβλητή απόφασης ανάλογα με το πρόσημο της οποίας μπορούμε να επιλέξουμε το επόμενο προς φωτισμό σημείο. Παρατηρούμε ότι

e_i	Επόμενο προς φωτισμό pixel
< 0	$(x_i + 1, y_i)$
≥ 0	$(x_i + 1, y_i - 1)$

Δημιουργία αναδρομικού τύπου

Η μεταβλητή απόφασης e_i μπορεί να υπολογισθεί ως εξής :

$$e_i = d_1 - d_2 = 2x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_{i-1}^2 - 2r^2$$

Επομένως

$$e_{i+1} = e_i + 4x_i + 6 + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2(y_{i+1} - y_i)$$

Ανάλογα λοιπόν με το πρόσημο της μεταβλητής e_i έχουμε :

e_i	e_{i+1}
< 0	$e_i + 4(x_i + 1) + 2$
≥ 0	$e_i + 4(x_i + 1) + 2 - 4(y_i - 1)$

Επιλογή αρχικής τιμής

Επειδή στη σχεδίαση του 2ου οκταμορίου ξεκινάμε από το $(x_i, y_i) = (0, r)$, η αρχική μεταβλητή απόφασης e_1 είναι :

$$e_1 = 2 + r^2 + (r - 1)^2 - 2r^2 = 3 - 2r$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στον παρακάτω αλγόριθμο χρησιμοποιώντας και την συμμετρία των 8 δρόμων.

Αλγόριθμος Bresenham για κύκλο

Για να σχεδιάσουμε κάποιο κύκλο με διαφορετικό κέντρο, αρκεί να παρατηρήσουμε αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό μεταφοράς, ότι ένα σημείο της περιφέρειας ενός τέτοιου κύκλου μπορεί να σχεδιαστεί αν μεταφέρουμε τον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ κατά διάνυσμα με συντεταγμένες το κέντρο του κύκλου. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος υλοποιημένος σε Matlab

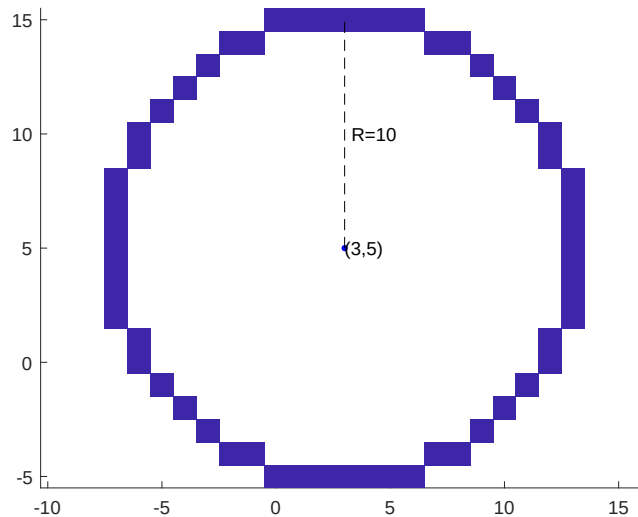
```
function brescircle(xc,yc,r)
x = 0; y = r;
sfalma = 3 - 2 * r;
hold on
while x <= y
    image(x+xc,y+yc,0)
    image(x+xc,-y+yc,0)
    image(-x+xc,y+yc,0)
    image(-x+xc,-y+yc,0)
    image(y+xc,x+yc,0)
    image(-y+xc,x+yc,0)
    image(y+xc,-x+yc,0)
    image(-y+xc,-x+yc,0)
    x = x + 1;
    if sfalma >= 0
        y = y - 1;
        sfalma = sfalma - 4 * y;
```

```

end
sfalma = sfalma + 4 * x + 2;
end
axis equal

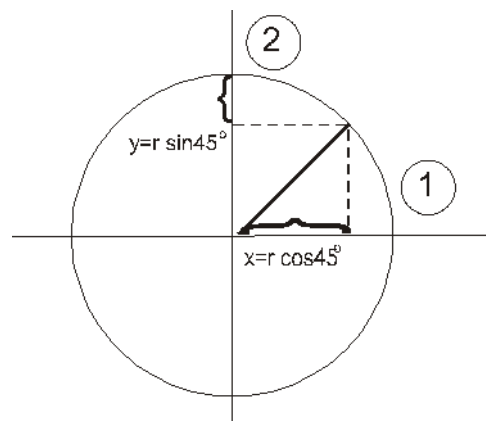
```

Σημείωση: Στο Matlab με την εντολή image δημιουργούμε την ψευδαίσθηση φωτισμού του pixel, δημιουργώντας ένα τετράγωνο με κέντρο τις συντεταγμένες του. Η τρίτη συνιστώσα έχει να κάνει με τον χρωματισμό.



Σχήμα 2: Παράδειγμα κύκλου, με κέντρο (3,5) και ακτίνα $R = 10$

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα



Σχήμα 3: Κύκλος με κέντρο το (0,0)

Στο 2ο οκταμόριο ισχύει : $0 \leq x \leq r \cos 45^\circ$, $r \sin 45^\circ \leq y \leq r$. Στην x κατεύθυνση γίνονται $r \cos 45^\circ$ βήματα που αντιστοιχούν σε $r(1 - \sin 45^\circ)$ βήματα στην y κατεύθυνση. Συνολικά σχεδιάζονται (υπολογίζονται) $r \cos 45^\circ$ σημεία.

Μέσος όρος βημάτων :

$$\left(\frac{r \frac{\sqrt{2}}{2} + r - r \frac{\sqrt{2}}{2}}{r \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \sqrt{2}$$

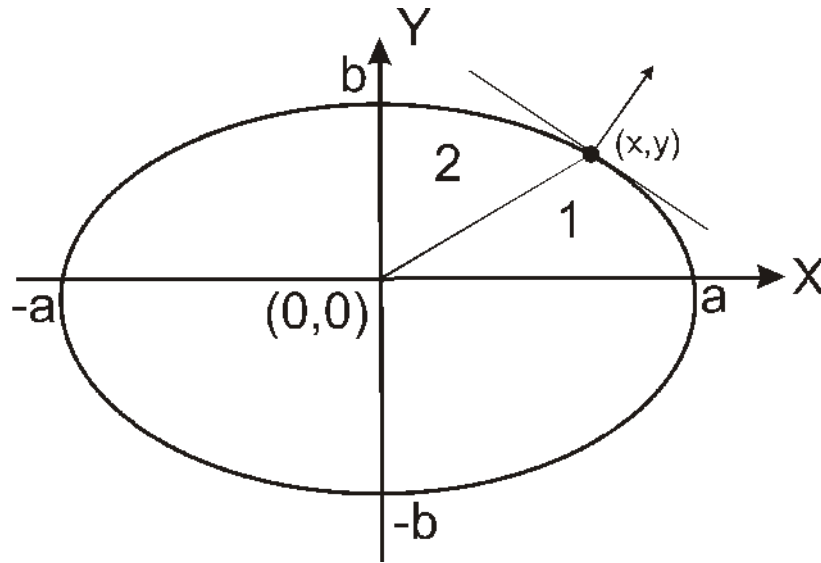
Η εντολή $er = er + 4x + 2$ περιλαμβάνει 2 προσθέσεις, 1 shift πράξη (πολλαπλασιασμός με 2). Τελικά κατά μέσο όρο έχουμε $4\sqrt{2}$ προσθέσεις, $\sqrt{2}$ shift και $\sqrt{2}$ increments (αυξήσεις) ανά σχεδίαση σημείου του κύκλου.

Αν οι πράξεις εντός του while απαιτούν 1 κύκλο hardware, τότε για το 2ο οκταμόριο απαιτούνται $\sqrt{2}$ κύκλοι ανά σημείο. Για ολόκληρο κύκλο $(7 + \sqrt{2})/8$ κύκλοι ανά σημείο $= 1.05$

Παρατήρηση: Τα συνολικά σημεία που σχεδιάζονται στον κύκλο είναι : $8r \cos 45^\circ = 4r\sqrt{2}$ Συγκρινόμενα με την περίμετρο $2\pi r$ είναι 10% λιγότερα.

Σχεδιασμός Έλλειψης

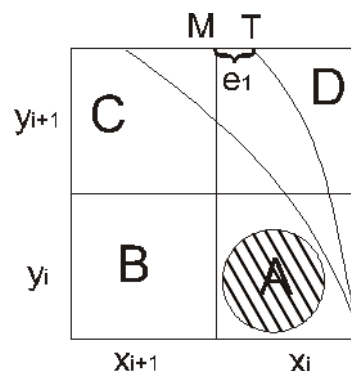
Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$ και άξονες με διάμετρο $2a$ και $2b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Η έλλειψη χαρακτηρίζεται από 4πλή συμμετρία



Σχήμα 4: Έλλειψη

Ο διαχωρισμός σε περιοχή 1 και περιοχή 2 γίνεται εκεί όπου

$$\frac{dy}{dx} = -1$$



Σχήμα 5: Περιοχή 1

Περιοχή 1: Έστω ότι έχει φωτισθεί το pixel (x_i, y_i) . Επειδή βρισκόμαστε στην περιοχή 1 το επόμενο προς φωτισμό pixel θα είναι το (x_i, y_{i+1}) ή το (x_{i-1}, y_{i+1}) . Παρατηρούμε ότι αυξάνεται κατά 1 η y συντεταγμένη και χρειαζόμαστε ένα κριτήριο

απόφασης για το αν θα φωτισθεί η x_i ή x_{i-1} θέση. Έστω M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος CD . Οι συντεταγμένες του μέσου M θα είναι

$$f(M) = \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, y_i + 1 \right) = \left(x_i - \frac{1}{2}, y_i + 1 \right)$$

Εάν T είναι το σημείο τομής της έλλειψης με το ευθύγραμμο τμήμα CD και e_i η απόσταση από το μέσο M , τότε αυτό ικανοποιεί την εξίσωση της έλλειψης και θα ισχύει :

$$f\left(x_i - \frac{1}{2} + e_1, y_i + 1\right) = b^2\left(x_i - \frac{1}{2} + e_1\right)^2 + a^2(y_i + 1)^2 - a^4b^2 = 0$$

Αναπτύσσοντας την προηγούμενη έκφραση έχουμε ότι :

$$f\left(x_i - \frac{1}{2}, y_i + 1\right) + 2b^2\left(x_i - \frac{1}{2}\right)e_1 + b^2e_1^2 = 0$$

Εάν ονομάσουμε μεταβλητή απόφασης για την περιοχή 1, $f_{(mid1)}$ τις συντεταγμένες του μέσου M θα έχουμε :

$$f_{(mid1)} = f(M) = -\left(2b^2\left(x_i - \frac{1}{2}\right)e_1 + b^2e_1^2\right)$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της έκφρασης του $f(M)$ καθορίζει την επιλογή του επόμενου σημείου. Συγκεκριμένα :

$f(M)$	Επιλογή σημείου
< 0	$e_1 > 0 \Rightarrow$ Το T δεξιότερα του M , επιλογή του σημείου D
≥ 0	$e_1 \leq 0 \Rightarrow$ Το T αριστερότερα του M , επιλογή του σημείου C

Αναδρομικός υπολογισμός των f_{mid1} και f_{mid2}

Είναι απαραίτητο να υπάρχει μια σχέση σύνδεσης ανάμεσα στις δύο μεταβλητές απόφασης. Έχουμε ότι Περιοχή 1

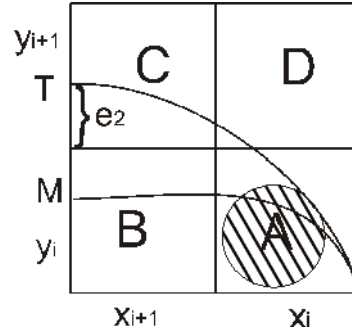
$$f_{mid1,i+1} = f\left(x_{i+1} - \frac{1}{2}, y_{i+1} + 1\right) = b^2\left(x_{i+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2(y_{i+1} + 1)^2 - a^4b^2$$

Στην περιοχή 1 ισχύει ότι $y_{i+1} = y_i + 1$, έτσι προκύπτει

$f_{mid1,i+1}$	Επιλογή Σημείου
$f_{mid1,i} + 2a^2y_{i+1} + a^2$	D
$f_{mid1,i} + 2a^2y_{i+1} + a^2 - 2b^2x_{i+1}$	C

Επιλογή αρχικής τιμής για την f_{mid1} . Για $(x_1, y_1) = (0, 0)$ προκύπτει ότι

$$f_{mid1,1} = f(x_1 - \frac{1}{2}, y_1 + 1) = a^2 - b^2a + \frac{b^2}{4}$$



Σχήμα 6: Περιοχή 2

Αντίστοιχη διαδικασία ισχύει και για την περιοχή 2. Συγκεκριμένα προκύπτει ότι

$f_{mid2,i+1}$	Επιλογή Σημείου
$f_{mid2,i} - b^2x_{i+1} + b^2$	B
$f_{mid2,i} - 2b^2x_{i+1} + b^2 - 2a^2x_{i+1}$	D

Καθορισμός συνόρου μεταξύ της περιοχής 1 & 2

Επειδή η αλλαγή της περιοχής γίνεται στο σημείο όπου η κλίση της εφαπτομένης ισούται με -1 υπολογίζουμε την παράγωγο της εξίσωσης της έλλειψης.

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2b^2x}{2a^2y}$$

$$\frac{dy}{dx} > -1 \Rightarrow 2a^2y > 2b^2x$$

όταν λοιπόν $2a^2y > 2b^2x$ έχουμε περάσει από την περιοχή 1 στη περιοχή 2. Για την ανάπτυξη του αλγορίθμου της έλλειψης θα ήταν επιθυμητό να χρησιμοποιήσουμε μόνο μια μεταβλητή απόφασης f_{mid} παρατηρούμε ότι η f_{mid2} κατά το πέρασμα από το σύνορο μπορεί να υπολογισθεί με βάση την f_{mid1} . Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι:

$$f_{mid2} - f_{mid1} = (b^2x_i + a^2y_i) + \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$$

$$\text{Τελικά } f_{mid2} = f_{mid1} - \frac{(2b^2x_i + 2a^2y_i)}{2} + 0.75(b^2 - a^2)$$

Αλγόριθμος Έλλειψης

```
function elipsis(a,b,color)
hold on
x = a;
y = 0;
asqr = a^2;
bsqr = b^2;
a22 = 2 * asqr;
b22 = 2 * bsqr;
xslope = b22 * a;
yslope = 0;
fmid = bsqr * (0.25-x) + asqr;
% Area 1
while (xslope > yslope)
    image(x,y,color)
    image(-x,-y,color)
    image(x,-y,color)
    image(-x,y,color)
    y = y + 1;
    yslope = yslope + a22;
    if fmid >= 0
        x = x - 1;
        xslope = xslope - b22;
        fmid = fmid - xslope;
    end
    fmid = fmid + yslope + asqr;
end
% Border
fmid = fmid - (yslope + xslope)/2 + 0.75*(bsqr - asqr);
% Area 2
while(x >= 0)
    image(x,y,color)
    image(-x,-y,color)
    image(x,-y,color)
    image(-x,y,color)
    x = x - 1;
    xslope = xslope - b22;
    if fmid <= 0
        y = y + 1;
        yslope = yslope + a22;
        fmid = fmid + yslope;
    end
    fmid = fmid - xslope + bsqr;
end
```