

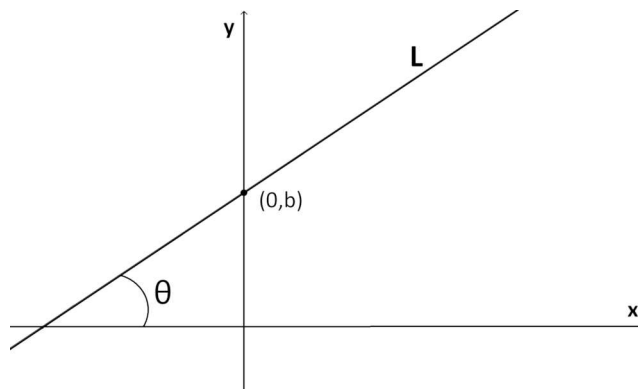
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

453. Γραφικά με Η/Υ

Παραδείγματα

Μετασχηματισμοί

Παράδειγμα 1: Υπολογίστε τον μετασχηματισμό M_L που βρίσκει το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς μια ευθεία L , που τέμνει τον άξονα y στο $(0, b)$ και σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ .



Λύση:

Ανάλυση Κίνησης

Για να κάνουμε χρήση των γνωστών μας, βασικών μετασχηματισμών, θα πρέπει να ταυτίσουμε την L με τον άξονα x . Θα την μεταφέρουμε έτσι ώστε το σημείο $(0, b)$ να ταυτιστεί με το $(0, 0)$. Στη συνέχεια θα στρέψουμε την ευθεία κατά γωνία $-\theta$. Τότε θα είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε συμμετρία ως προς τον άξονα x . Και τέλος θα επαναφέρουμε την L στην αρχική της θέση

Βήμα 1^ο: Μεταφορά της L κατά το διάνυσμα $\vec{v} = 0 \cdot \vec{e}_1 - b \cdot \vec{e}_2$, όπου $e_i, i = 1, 2$ η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2^ο: Στροφή κατά γωνία $-\theta$

$$R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3^ο: Αφού η L έχει ταυτιστεί με τον άξονα x εφαρμόζουμε συμμετρία ως προς τον x .

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4°: Στροφή κατά γωνία θ για να έχουμε πάλι την αρχική μας γωνία.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 5°: Μεταφορά της L κατά το διάνυσμα $-\vec{v} = 0 \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$, για να επανέλθει η ευθεία L στην αρχική της θέση.

$$T_{-v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός Ζητούμενου Μετασχηματισμού

Από όσα γνωρίζουμε για την σύνθεση μετασχηματισμών, ο πίνακας για τον ζητούμενο μετασχηματισμό, προκύπτει από τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$M_L = T_{-v} \cdot R_\theta \cdot M_x \cdot R_{-\theta} \cdot T_v$$

Αν κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στο

$$M_L = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & -b \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & b \cos 2\theta + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Εάν υποθέσουμε ότι αντί για την γωνία θ που σχηματίζει η ευθεία L με τον άξονα x , και το σημείο που τέμνει τον άξονα y , μας έδιναν μόνο τον τύπο της $f(x) = s \cdot x + p$, η ανάλυση που κάναμε πιο πάνω, παραμένει η ίδια. Απλά καταλήγουμε στον ίδιο πίνακα όπου τα θ και b είναι άγνωστα αλλά μπορούμε να τα υπολογίσουμε εύκολα.

$$b = f(0) = s \cdot 0 + p \Rightarrow b = p$$

$$s = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

Άρα ο M_L μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$M_L = \begin{bmatrix} \frac{1-s^2}{s^2+1} & \frac{2s}{s^2+1} & \frac{-2ps}{s^2+1} \\ \frac{2s}{s^2+1} & \frac{s^2-1}{s^2+1} & \frac{2p}{s^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2: Ορίζουμε ως **Καμπή**, την περιστροφή γύρω από τον άξονα x και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα y . Βρείτε τον πίνακα καμπής T_K .

Λύση:

Ανάλυση Κίνησης

Βήμα 1^ο: Στροφή κατά γωνία θ_x ως προς τον άξονα x

$$R_{\theta_x, x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2^ο: Στροφή κατά γωνία θ_y ως προς τον άξονα y

$$R_{\theta_y, y} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός Ζητούμενου Μετασχηματισμού

$$T_K = R_{\theta_y, y} \cdot R_{\theta_x, x} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \cdot \cos \theta_x & \sin \theta_y \cdot \sin \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ -\sin \theta_y & \cos \theta_y \cdot \sin \theta_x & \cos \theta_y \cdot \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σχεδιασμός Βασικών Σχημάτων

Παράδειγμα 1: Δίνονται τα σημεία $P_1(1, 2)$, $P_2(8, 6)$ Θεωρώντας ότι το σημείο P_1 φωτίζεται στην οθόνη, εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Bresenham για τον υπολογισμό των 2 αμέσως επόμενων pixels που θα φωτισθούν κατά τη σχεδίαση του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 .

Λύση:

Το $P_1(1, 2)$ μας δίνει τα $x_1 = 1, y_1 = 2$ και το $P_2(8, 6)$ τα $x_2 = 8, y_2 = 6$. Υπολογίζουμε τώρα τις ποσότητές:

$$dx = x_2 - x_1 = 8 - 1 = 7, dy = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι $0 \leq \frac{dy}{dx} < 1$ και επομένως θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο για το 1^ο οκταμόριο. Δηλαδή σε κάθε βήμα θα έχουμε να επιλέξουμε αν θα φωτισθεί το $(x+1, y)$ ή $(x+1, y+1)$

$$c_1 = 2 \cdot dy = 8$$

$$e_1 = 2 \cdot dy - dx = 8 - 7 = 1,$$

$$c_2 = e_1 - dx = 1 - 7 = -6$$

Αφού $e_1 > 0$ το επόμενο pixel που θα φωτισθεί θα είναι το $(2, 3)$ και επομένως το $e_2 = e_1 + c_2 = 1 - 6 = -5$. Άρα αφού $e_2 < 0$ το δεύτερο από τα pixel που ζητάμε να βρούμε θα είναι το $(3, 3)$

Παράδειγμα 2: Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(3, 5)$ και ακτίνα $r = 7$. Ποιό είναι το πρώτο pixel που θα φωτίσει ο αλγόριθμός σχεδιασμού κύκλου του Bresenham για το 2^ο οκταμόριο; Ποιό το αμέσως επόμενο; Στην συνέχεια υπολογίστε και τα pixels που θα φωτισθούν από την εφαρμογή της συμμετρίας των 8 δρόμων.

Λύση:

Ο Αλγόριθμός που έχουμε δουλεύει για κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$. Σε μια τέτοια περίπτωση το πρώτο pixel που θα φωτιζόταν με βάση τον αλγόριθμό θα ήταν το $(0, r) = (0, 7)$

Αφού υπολογίζαμε τη μεταβλητή απόφασης: $e_1 = 3 - 2 \cdot r = 3 - 14 = -11 < 0$

το επόμενο pixel θα ήταν το $(1, 7)$. Όμως εμείς έχουμε κέντρο το $(3, 5)$. Η σωστή απάντηση προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε κατάλληλο μετασχηματισμό μεταφοράς, έτσι ώστε το κέντρο από το $(0, 0)$ να μεταφερθεί στο $(3, 5)$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι πρέπει να προσθέσουμε τις συντεταγμένες του κέντρου που επιθυμούμε στις τιμές που έχουμε.

Επομένως στην περίπτωση μας το πρώτο pixel θα είναι το $(3, 12)$ και το δεύτερο το $(4, 12)$.

Τώρα σε ότι έχει να κάνει με τα υπόλοιπα σημεία. Την συμμετρία των 8 δρόμων, πρέπει να την εφαρμόσουμε στα αρχικά σημεία που υπολογίσαμε και όχι σε αυτά που προέκυψαν μετά την μεταφορά. Και αφού τα υπολογίσουμε θα τα μεταφέρουμε και εκείνα με τον ίδιο τρόπο. Επομένως έχουμε τα ακόλουθα σημεία στο τέλος:

Για το πρώτο έχουμε τα ακόλουθα $(3, -2), (10, 5), (-4, 5)$, παρατηρούμε ότι ειδικά για το πρώτο προκύπτουν μόνο 3 διαφορετικά συμμετρικά, αφού ανά 2 είναι τα ίδια.

Ενώ για το δεύτερο έχουμε άλλα 7 διαφορετικά να προκύπτουν:

$(4, -2), (2, 12), (2, -2), (10, 6), (-4, 6), (10, 4), (-4, 4)$.

Μετασχηματισμός Παράστασης

Παράδειγμα : Προσδιορίστε το μετασχηματισμό που απεικονίζει το παράθυρο με κάτω αριστερή κορυφή το σημείο $(1, 1)$ και με πάνω δεξιά κορυφή το σημείο $(3, 5)$ σε Κανονικοποιημένο Σύστημα Συντεταγμένων (NDCS).

Λύση:

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε να το λύσουμε με 2 τρόπους. Είτε να κάνουμε απευθείας χρήση του τύπου

$$M_{view} = \begin{bmatrix} WS_x & 0 & -Wx_{min} \\ 0 & WS_y & -Wy_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου

$$WS_x = \frac{1}{Wx_{max} - Wx_{min}}, WS_y = \frac{1}{Wy_{max} - Wy_{min}}$$

Στη περίπτωση μας $WS_x = \frac{1}{2}$ και $WS_y = \frac{1}{4}$

Επομένως

$$M_{view} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είτε με παραδοσιακές τεχνικές από τους μετασχηματισμούς. Δηλαδή θα μεταφέρουμε κατάλληλα το σχήμα μας έτσι ώστε η κάτω αριστερή κορυφή να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε Scaling και ως προς τους δύο άξονες έτσι ώστε το τελικό μας σχήμα να έχει κάτω αριστερή κορυφή το $(0, 0)$ και πάνω δεξιά κορυφή το $(1, 1)$.