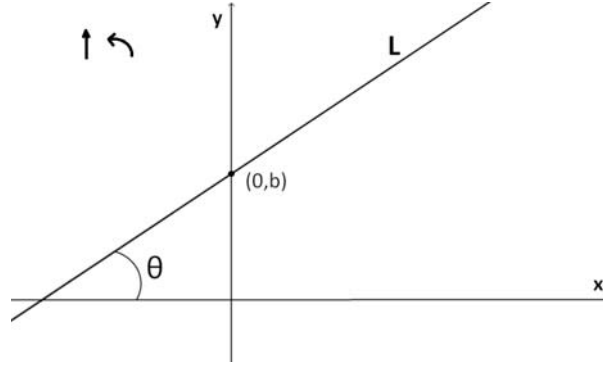


Παράδειγμα: Υπολογίστε τον μετασχηματισμό M_L που βρίσκει το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς μια ευθεία L , που τέμνει τον άξονα y στο $(0, b)$ και σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ .

Αν θεωρήσουμε σαν θετική φορά για την γωνία, την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Και όταν μιλάμε για τα διανύσματα, σαν $\vec{v}$ θεωρούμε το διάνυσμα που από την αρχή των αξόνων καταλήγει στο σημείο P (Διάνυσμα OP). Αυτή την φορά μπορούμε να την θεωρήσουμε και σαν μια σπάνταρ επιλογή, στην εικόνα που ακολουθεί εμφανίζονται ποιες είναι αυτές οι επιλογές μας, σε ευκρινές σημείο. Τότε



$$M_L = T_v \cdot R_\theta \cdot M_x \cdot R_{-\theta} \cdot T_{-v}$$

Αν κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στο

$$M_L = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & x - x (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2y \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & y + y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2x \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες του σημείου που τέμνει τον άξονα y (στην περίπτωση μας $x = 0, y = b$ και θ η γωνία που σχηματίζει).

Αν όμως θεωρήσουμε σαν θετική φορά για την γωνία, την φορά των δεικτών του ρολογιού. Και όταν μιλάμε για τα διανύσματα, σαν $\vec{v}$ θεωρούμε το διάνυσμα που από το σημείο P καταλήγει στην αρχή των αξόνων (Διάνυσμα PO). Τότε

$$M1_L = T_{-v} \cdot R_{-\theta} \cdot M_x \cdot R_\theta \cdot T_v$$

Αν κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στο

$$M1_L = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & x (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - x - 2y \cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & -y - y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2x \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες μοιάζουν διαφορετικοί, όμως αυτό που πρέπει να λάβουμε πια υπόψη μας είναι ότι έχουμε διαφορετικές φορές και κατευθύνσεις, επομένως όταν θα βάλουμε τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε τα εξής.

Στην πρώτη περίπτωση αν για παράδειγμα το σημείο είναι το $x = 0, y = 4$ και η γωνία $\theta = \pi/6$. Τότε ο

$$M_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1170}{1351} & \frac{-1351}{390} \\ \frac{1170}{1351} & \frac{-1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αλλά όταν θα πάμε να αντικαταστήσουμε τις τιμές για την δεύτερη περίπτωση δεν θα βάλουμε πάλι το $x = 0, y = 4$ και γωνία $\theta = \pi/6$, αλλά $x = 0, y = -4$ και γωνία $\theta = -\pi/6$, γιατί οι φορές που έχουμε πάρει επηρεάζουν το τι τιμές πρέπει να εισάγουμε. Έτσι αν βάλουμε τις τιμές όπως πρέπει, τότε:

$$M1_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1170}{1351} & \frac{-1351}{390} \\ \frac{1170}{1351} & \frac{-1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν $(x_{\min}, y_{\min})$, $(x_{\max}, y_{\max})$ είναι η κάτω αριστερή και πάνω δεξιά κορυφή του παραθύρου αντίστοιχα και $(u_{\min}, v_{\min})$, $(u_{\max}, v_{\max})$ η κάτω αριστερή και πάνω δεξιά κορυφή αντίστοιχα του πεδίου παράστασης (σχήμα 3.19), τότε ο πίνακας μετασχηματισμού M_{wv} προκύπτει από τρία βήματα ως σύνθεση τριών βασικών μετασχηματισμών:

Βήμα 1: Μετατόπιση του παραθύρου έτσι ώστε η κορυφή $(x_{\min}, y_{\min})$ να έρθει στην αρχή των αξόνων. Πίνακας μετασχηματισμού $T(-x_{\min}, -y_{\min})$.

Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας ώστε το παράθυρο να αποκτήσει το μέγεθος του πεδίου παράστασης. Πίνακας μετασχηματισμού $S(s_x, s_y)$ όπου

$$s_x = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad \text{και} \quad s_y = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}.$$

Βήμα 3: Μετατόπιση του παραθύρου έτσι ώστε αυτό να έρθει στη θέση του πεδίου παράστασης. Πίνακας μετασχηματισμού $T(u_{\min}, v_{\min})$.

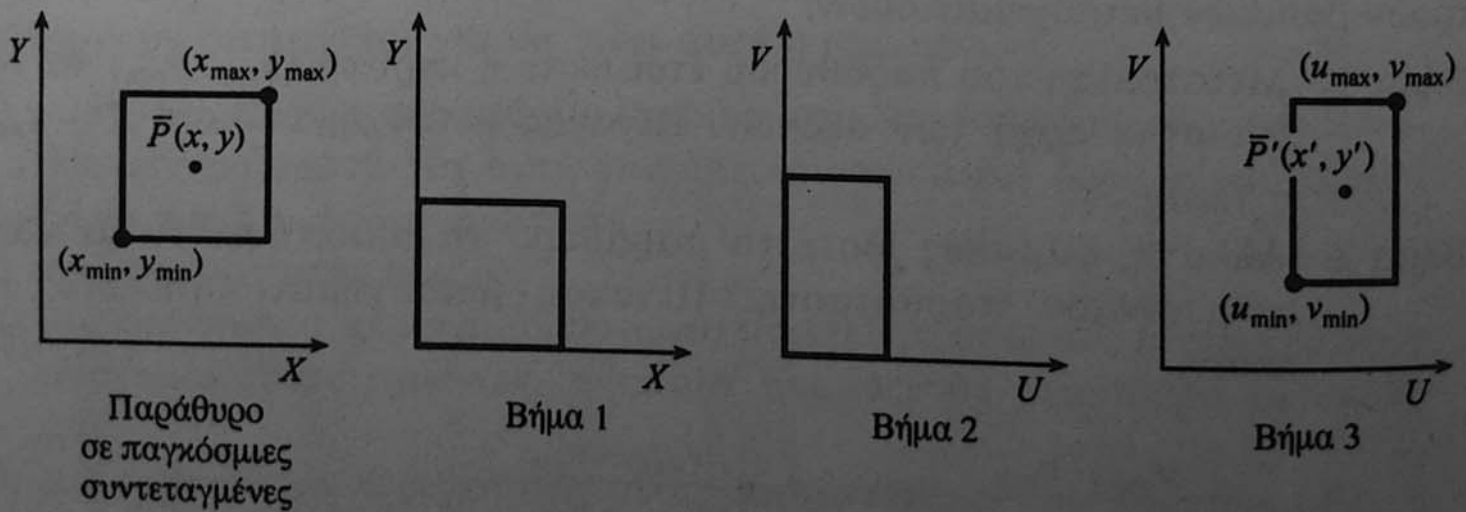
$$M_{wv} = T(u_{\min}, v_{\min}) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_{\min}, -y_{\min})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{\min} \\ 0 & 1 & v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{\min} \\ 0 & 1 & -y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & u_{\min} - s_x \cdot X_{\min} \\ 0 & s_y & v_{\min} - s_y \cdot y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} & 0 & u_{\min} - \frac{u_{\max} - u_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} X_{\min} \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & v_{\min} - \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Επομένως το σημείο $\bar{P}(x, y)$ του παράθυρου μετασχηματίζεται στο σημείο $\bar{P}'(x', y')$ του πεδίου παράστασης όπου

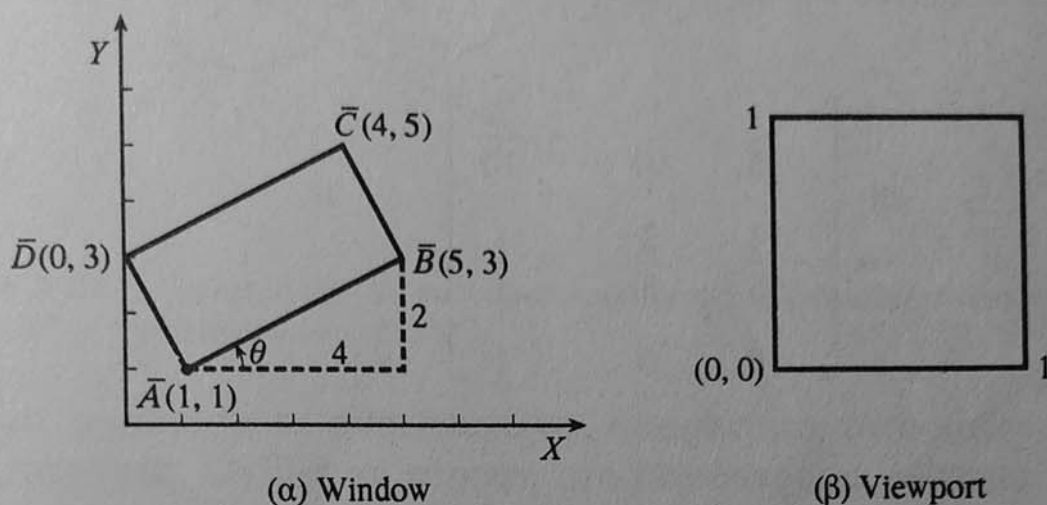
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M_{wv} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - x_{\min}) \frac{u_{\max} - u_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} + u_{\min} \\ (y - y_{\min}) \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$



Σχήμα 3.19: Μετασχηματισμός παράθυρου σε πεδίο παράστασης.

Παράδειγμα 3.10

Βρείτε τον μετασχηματισμό παράστασης N που χρησιμοποιεί το ορθογώνιο $\bar{A}(1, 1)$, $\bar{B}(5, 3)$, $\bar{C}(4, 5)$, $\bar{D}(0, 3)$ σαν παράθυρο (σχήμα 3.22α) και την κανονικοποιημένη μονάδα εμφάνισης σαν viewport (σχήμα 3.22β).



Σχήμα 3.22: Παράδειγμα 3.10.

Λύση: Επειδή οι πλευρές του παραθύρου δεν είναι παράλληλες με τους άξονες X και Y θα πρέπει να το περιστρέψουμε κατά κατάλληλη γωνία, θα πρέπει δηλαδή να προσδιορίσουμε τη γωνία στροφής θ . Η κλίση m του ευθύγραμμου τμήματος $\bar{A}\bar{B}$ ισούται με:

$$m = \frac{(3 - 1)}{(5 - 1)} = \frac{1}{2}$$

Επομένως $\tan \theta = 1/2$. Τότε:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(-\theta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos(-\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Τα βασικά βήματα του απαιτούμενου μετασχηματισμού είναι:

Βήμα 1: Στροφή του window κατά γωνία $-\theta$ διατηρώντας το σημείο $\bar{A}(1, 1)$ σταθερό. Πίνακας μετασχηματισμού: $R(-\theta, \bar{A})$ (βλέπε παράδειγμα 3.2).

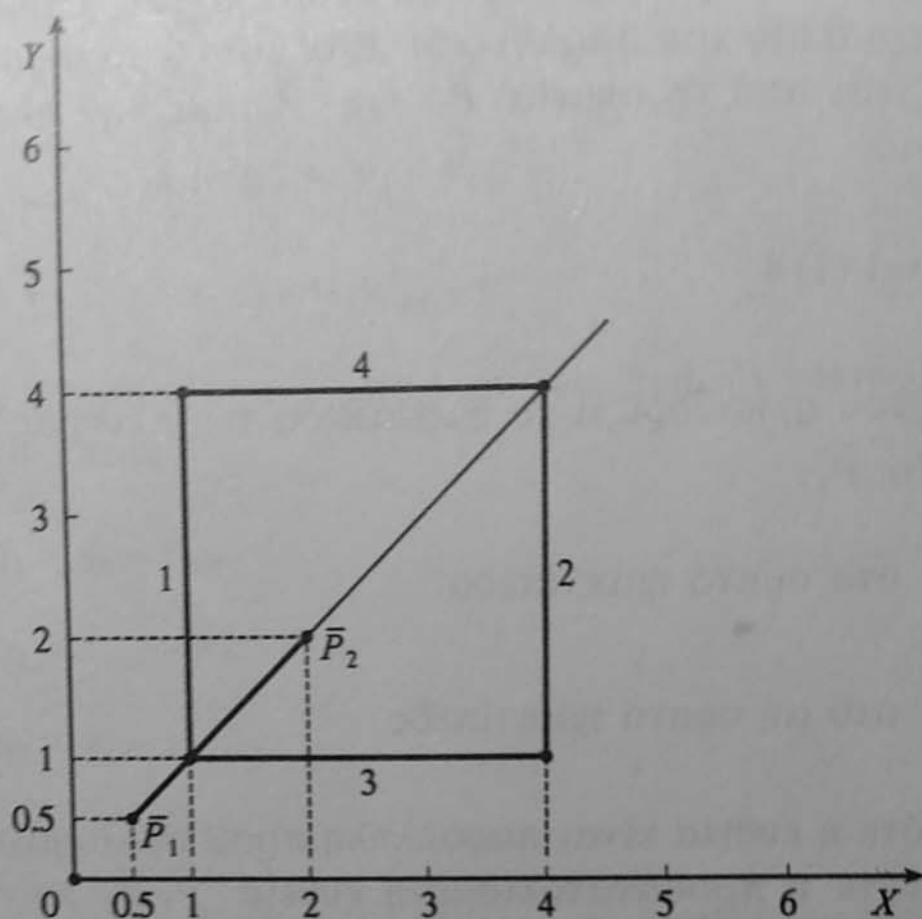
Βήμα 2: Αντιστοιχούμε το window στο συγκεκριμένο viewport μέσω του μετασχηματισμού M_{wv}

Ο τελικός μετασχηματισμός N δίνεται από την σχέση:

$$N = M_{wv} \cdot R(-\theta, \bar{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4.1



Σχήμα 4.7: Παράδειγμα αλγόριθμου Liang–Barsky.

Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{P_1 P_2}$ με $P_1(0.5, 0.5)$ και $P_2(2, 2)$ για να αποκοπεί με το παράθυρο $x_{\min} = y_{\min} = 1$, $x_{\max} = y_{\max} = 4$ (σχήμα 4.7).

Λύση: Ισχύει:

$$\Delta x = \Delta y = 1.5$$

$p_1 = -1.5 \Rightarrow$ Η προσανατολισμένη ευθεία $\overrightarrow{P_1 P_2}$ περνάει από το μη ορατό στο ορατό ημιεπίπεδο της πλευράς 1.

$q_1 = -0.5 \Rightarrow$ Το P_1 βρίσκεται στο μη ορατό ημιεπίπεδο της πλευράς 1.

$p_2 = 1.5 \Rightarrow$ Η προσανατολισμένη ευθεία $\overrightarrow{P_1 P_2}$ περνάει από το ορατό στο μη ορατό ημιεπίπεδο της πλευράς 2.

$q_2 = 3.5 \Rightarrow$ Το P_2 βρίσκεται στο ορατό ημιεπίπεδο της πλευράς 2.

$$p_3 = -1.5, \quad p_4 = 1.5$$

$$q_3 = -0.5, \quad q_4 = 3.5$$

$$t_1 = \max \left(\left\{ \frac{q_1}{p_1}, \frac{q_3}{p_3} \right\} \cup \{0\} \right) = 0.33$$

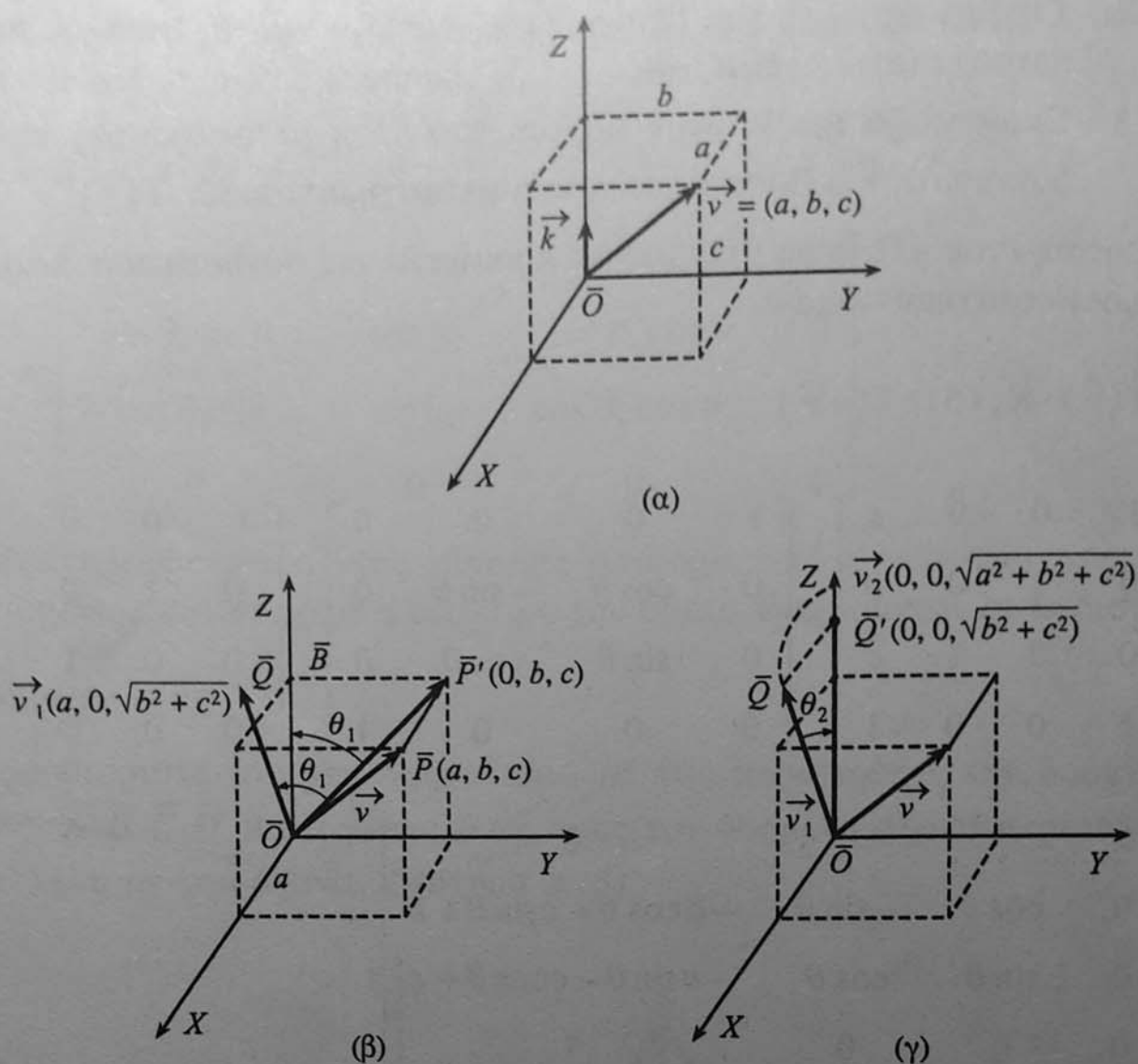
$$t_2 = \min \left(\left\{ \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_4}{p_4} \right\} \cup \{1\} \right) = 1$$

Επειδή $t_1 < t_2$ θα υπάρχει μέρος του ευθυγράμμου τμήματος $\bar{P}_1 \bar{P}_2$ εντός του παράθυρου και βρίσκεται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_1 + 0.33 \cdot \Delta x = 0.5 + 0.33 \cdot 1.5 = 1 \\ y' &= y_1 + 0.33 \cdot \Delta y = 0.5 + 0.33 \cdot 1.5 = 1 \end{aligned} \right\} \bar{P}'$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x_1 + 1 \cdot \Delta x = 0.5 + 1.5 = 2 \\ y'' &= y_1 + 1 \cdot \Delta y = 0.5 + 1.5 = 2. \end{aligned} \right\} \bar{P}''$$

Άρα $\bar{P}' \bar{P}'' = \bar{P}' \bar{P}_2$ είναι η αποκοπή του $\bar{P}_1 \bar{P}_2$ από το παράθυρο.



Σχήμα 3.26: Παράδειγμα 3.13.

Βήμα 1: Περιστροφή γύρω από τον άξονα X κατά γωνία θ_1 έτσι ώστε το $\vec{v}$ να πέφτει στο θετικό μέρος του επιπέδου XZ (διάνυσμα $\vec{v}_1$, σχήμα 3.26(β)). Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_x(\theta_1)$.

Βήμα 2: Περιστροφή του διανύσματος $\vec{v}_1$ γύρω από τον άξονα των Y κατά γωνία θ_2 έτσι ώστε το $\vec{v}_1$ να πέσει πάνω στο θετικό μέρος του άξονα των Z (διάνυσμα $\vec{v}_2$, σχήμα 3.26(γ)). Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_y(\theta_2)$.

Ο ζητούμενος πίνακας θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών αφού όμως πρώτα προσδιοριστούν οι γωνίες θ_1 και θ_2 .

Προσδιορισμός των γωνιών θ_1 και θ_2 : Από το σχήμα 3.26(β) παρατηρούμε ότι η ζητούμενη γωνία θ_1 θα προσδιοριστεί από τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του $\vec{v}$ στο επίπεδο YZ με τον άξονα των Z (υποθέτουμε ότι b και c δεν είναι και τα δύο μηδέν). Από το τρίγωνο $\bar{O}\bar{P}'\bar{B}$ προκύπτει:

$$\sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Ο πίνακας περιστροφής $R_x(\theta_1)$ ισούται με:

$$R_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επιδρώντας με αυτόν τον πίνακα στο διάνυσμα $\vec{v}(a, b, c)$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του $\vec{v}_1(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = R_x(\theta_1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a \\ y &= 0 \\ z &= \sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Για τον προσδιορισμό της γωνίας θ_2 από το τρίγωνο $\overline{O} \overline{Q} \overline{Q}'$ (σχήμα 3.26(γ)) προκύπτει:

$$\sin(\theta_2) = - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{και}$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Τελικά ο ζητούμενος μετασχηματισμός $A(\vec{v})$ θα ισούται με $A(\vec{v}) = R_y(\theta_2) \cdot R_x(\theta_1)$. Αν αντικαταστήσουμε τις προηγούμενες γωνίες στους πίνακες $R_y(\theta_2)$, $R_x(\theta_1)$ και θέτοντας $\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$ προκύπτει:

$$A(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & \frac{-ab}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{-ac}{\lambda|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{v}|} & \frac{b}{|\vec{v}|} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Έστω $P_0(0,4)$, $P_1(3,-1)$, $P_2(6,0)$, $P_3(8,6)$

Να προσδιορίσετε τη συσχετισμένη μ'αυτά καμπ. Bezier

Για $t = \frac{1}{3}$, $i=1,2$ να υπολογιστούν 2 σημεία της καμπύρας με τη βοήθεια του αλγορίθμου De Casteljau και να σχεδιαστεί.

Θα βρω τα $r(\frac{1}{3})$, $r(\frac{2}{3})$ με το τρίγωνο De Casteljau:

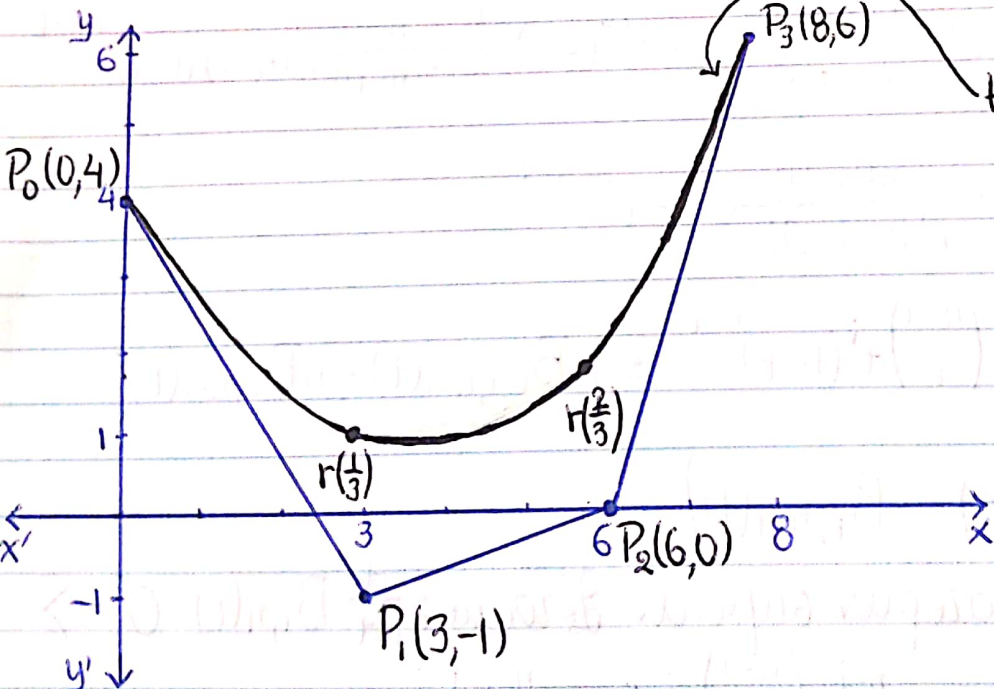
- Για $t = \frac{1}{3}$

ΑΡΧΙΚΗ ΤΕΝΕΑ	$1 - \frac{1}{3}$	$1^{\text{η}} \text{ ΤΕΝΕΑ}$	$\frac{2}{3}$	$2^{\text{η}} \text{ ΤΕΝΕΑ}$	$\frac{2}{3}$	$3^{\text{η}} \text{ ΤΕΝΕΑ}$
$(0,4)$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(1, \frac{7}{3})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(2, \frac{4}{3})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(\frac{80}{27}, \frac{26}{27}) = (2.963, 0.963)$
$(3,-1)$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(4, -\frac{2}{3})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(\frac{44}{9}, \frac{2}{9})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$= r(\frac{1}{3})$
$(6,0)$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(\frac{20}{3}, 2)$				
$(8,6)$	$\swarrow \frac{1}{3}$					

- Για $t = \frac{2}{3}$

	$1 - \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$(0,4)$	$\swarrow \frac{2}{3}$	$(2, \frac{2}{3})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(4,0)$	$\swarrow \frac{1}{3}$
$(3,-1)$	$\swarrow \frac{2}{3}$	$(5, -\frac{1}{3})$	$\swarrow \frac{1}{3}$	$(\frac{59}{9}, \frac{23}{9})$	$\swarrow \frac{1}{3}$
$(6,0)$	$\swarrow \frac{2}{3}$	$(\frac{22}{3}, 4)$			
$(8,6)$	$\swarrow \frac{2}{3}$				
					$(\frac{154}{27}, \frac{46}{27}) = (5.704, 1.704)$
					$= r(\frac{2}{3})$

Κι έχουμε και τα $r(0) = (0,4)$, $r(1) = (8,6)$.



Η ζητούμενη καμπύλη Bezie