

Ηλεκτρομαγνητισμός Τυπολόγιο

Μαθηματικά:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{r}$$

Για $\triangle ABC$, με a απέναντι από A , b απέναντι από B και c απέναντι από C , με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R :

$$\text{Νόμος των ημιτόνων: } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$\text{Νόμος των συνημιτόνων: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Ηλεκτροστατική:

$$\text{Δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σημειακών φορτίων: } \vec{F}_{q_1, q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\text{Για σημειακό φορτίο } Q \text{ στο } O: \vec{E}_Q = \frac{\vec{F}_{Q, q}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\text{Για γραμμική κατανομή φορτίου } \lambda \text{ σε καμπύλη } C: dq(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) d\ell, \vec{r} \in C$$

$$\text{Για επιφανειακή κατανομή φορτίου } \sigma \text{ σε επιφάνεια } S: dq(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) dS, \vec{r} \in S$$

$$\text{Για χωρική κατανομή φορτίου } \rho \text{ σε χωρίο } V: dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) dV, \vec{r} \in V$$

$$\text{Για κατανομή φορτίου: } d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\text{Ηλεκτρική ροή: } \Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

$$\text{Απόκλιση ηλεκτρικού πεδίου: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS}{|\Delta V|}$$

$$\text{Κάθετη συνιστώσα στροβιλισμού ηλεκτρικού πεδίου: } (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma(\Delta S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{|\Delta S|}$$

$$\text{Θεώρημα Stokes για ηλεκτρικό πεδίο: } \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Gamma(S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{Θεώρημα Gauss για ηλεκτρικό πεδίο: } \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oiint_{S(V)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

$$\text{Νόμος ηλεκτρικής ροής: } \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oiint_{S(V)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Δυναμικό: $\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ($\vec{r}_0$ αυθαίρετο, $\phi(\vec{r}_0) = 0$, ϕ συνεχής, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$)

Αν $\phi(\vec{r}) \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0$, τότε:

Για σημειακό φορτίο Q στο O : $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$

Για κατανομή φορτίου: $d\phi(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$\vec{E}$ διατηρητικό (το $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C), $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Έργο που καταναλώνουν οι δυνάμεις του ηλεκτρικού πεδίου για τη μεταφορά φορτίου $A \xrightarrow{C} B$:

$$W_{A \xrightarrow{C} B} = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi(B) - \phi(A)$$

Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου (ενέργεια που καταναλώθηκε για να μεταφερθούν τα φορτία στις θέσεις τους):

$$\text{Για διακριτή κατανομή φορτίων: } W = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$\begin{aligned} \text{Για συνεχή κατανομή φορτίων: } W &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) dV = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) \phi(\vec{r}) dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} w(\vec{r}) dV, \end{aligned}$$

$$\text{όπου } w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

Η εξίσωση $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ έχει μοναδική λύση σε χωρίο στο σύνορο του οποίου είναι γνωστό το ϕ ή το $\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n}$

Στο εσωτερικό αγωγού: $Q = 0, \vec{E} = 0$

Στην επιφάνεια αγωγού: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n}$ ($= \mp \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}$, αν $\hat{n} = \pm \hat{r}, r = |\vec{r}|, \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$), ϕ σταθερό

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{Χωρητικότητα αγωγού: } C = \frac{Q}{V}$$

Πυκνωτής: Αγωγός (1) με φορτίο $Q > 0$ και σε δυναμικό V_1 , αγωγός (2) με φορτίο $-Q$ και σε δυναμικό V_2

$$\text{Χωρητικότητα πυκνωτή: } C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Είδωλο φορτίου Q σε απόσταση z_0 από το κέντρο αγωγίμου σφαιρικού φλοιού: $Q' = -\frac{QR}{z_0}, z'_0 = \frac{R^2}{z_0}$

Ηλεκτρικό πεδίο οριζόντιου κυκλικού βρόχου κέντρου O και ακτίνας R με σταθερή γραμμική πυκνότητα

$$\text{φορτίου } \lambda_0, \text{ πάνω στον άξονά του: } \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\lambda_0 R z \hat{k}}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Μαγνητοστατική:

Δύναμη Lorentz για φορτίο q με ταχύτητα $\vec{v}$ σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$: $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$

Για σημειακό φορτίο Q στο O με ταχύτητα $\vec{v}$ όταν $0 < |\vec{v}| \ll c$ και $\frac{|\frac{d\vec{v}}{dt}|}{|\vec{v}|} \ll \frac{|\vec{r}|}{c}$: $\vec{B}_Q(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}, \left[\left| \vec{J} \right| \right] = \frac{Cb}{\text{sec} \cdot m^2} = \frac{A}{m^2}$$

Για διατομή S του αγωγού: $I = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS (= SJ, \text{ αν } \vec{J} \text{ σταθερό, } S \text{ επίπεδη και } \vec{J} \perp S), [I] = A$

$$dQ = \rho dV \implies \vec{v} dQ = \rho \vec{v} dV = \vec{J} dV$$

$$\text{Νόμος Biot-Savart: } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dQ(\vec{r}') \frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$$\text{Σε βρόχο } C: \vec{J} dV = I d\vec{l} \implies \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{Νόμος Ampère: } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa\lambda}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{H} = \mu \vec{B}$$

$$\text{Μαγνητική ροή: } \Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Μαγνητικό πεδίο στη θέση $\vec{r} = \rho \cos \varphi \hat{i} + \rho \sin \varphi \hat{j} + z \hat{k}$ όταν ο άξονας $z'z$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης I :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\varphi = (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j})' = \hat{k} \times (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

Μαγνητικό πεδίο οριζόντιου κυκλικού βρόχου κέντρου O και ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I ,

$$\text{πάνω στον άξονά του: } \vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f),$$

$\forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A}$$

Συνάρτηση δ του Dirac: $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0, & \text{αν } \vec{r} - \vec{r}' \neq 0 \\ \infty, & \text{αν } \vec{r} - \vec{r}' = 0 \end{cases}, \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV = \vec{J}(\vec{r}),$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Μαγνητική ροπή: $\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV$ ($= \frac{I}{2} \oint_C \vec{r}' \times d\vec{l} = IS\hat{n}$, για επίπεδο βρόχο που περικλείει εμβαδόν S),

ανεξάρτητη από τους άξονες

$$\text{Για } |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|: \vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Όταν } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \text{ υπάρχει και βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό: } \phi_M(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \text{ δηλαδή } \vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_M(\vec{r}) = \\ &= -\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Δύναμη Ampère (μαγνητική δύναμη λόγω εξωτερικού μαγνητικού πεδίου): } d\vec{F} &= \vec{v} \times \vec{B}_{\text{εξ}} dq = \vec{J} \times \vec{B}_{\text{εξ}} dV = \\ &= I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{εξ}} \end{aligned}$$

$$\text{Δύναμη Ampère από το αντικείμενο 2 στο αντικείμενο 1: } \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{l}_1 \times \left(d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} (\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} dV_1 dV_2$$

$$\text{Ενέργεια μαγνητικού πεδίου: } W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{B}|^2 dV$$

Συντελεστής αυτεπαγωγής: L

$$\Phi = LI$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής: $M_{12} = M_{21}$

$$\Phi_1 = M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Ηλεκτρεγερτική Δύναμη:

Ηλεκτρεγερτική δύναμη: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (το $-$ προκύπτει από τον νόμο του Lenz)

$I = \frac{|\varepsilon|}{R}$ (η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που επάγεται από το ρεύμα που προκαλεί είναι τέτοια ώστε να αντιστέκεται στη μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου)

Εξισώσεις Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Διάνυσμα του Poynting: $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

Θεώρημα του Poynting: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 \right) dV + \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dl = - \oint_{S(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS$