Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

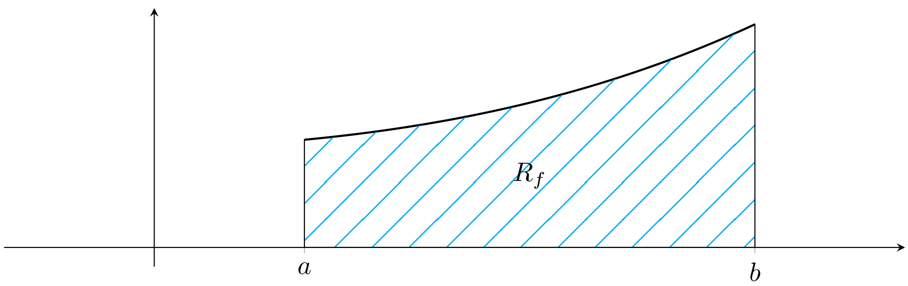
Η Θεωρία Μέτρου (και Ολοκλήρωσης) αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα και από τότε έχει γίνει κεντρικό εργαλείο για την Ανάλυση. Το κίνητρο για τη μελέτη αυτής της θεωρίας σήμερα είναι αρχικά η αντικατάσταση του ολοκληρώματος Riemann από το ολοκλήρωμα Lebesgue, το οποίο, όπως θα δούμε, αποτελεί μια πολύ γόνιμη γενίκευση του πρώτου.

Ας περιοριστούμε στο $\mathbb{R}$ για να έχουμε καλύτερη κατανόηση. Αν έχουμε μια μη αρνητική Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα Riemann της f εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f, δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx = \text{εμβαδόν}\,(R_f)$$

όπου

$$R_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ και } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$



Σχήμα 1: Γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος

Η έννοια του ολοκληρώματος κατά τον Riemann προσεγγίζεται ως εξής:

1. Επιλέγουμε μια διαμέριση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, έστω

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

   και σχηματίζουμε τις αντίστοιχες «άνω» και «κάτω» προσεγγίσεις του εμβαδού από ενώσεις ορθογωνίων, δηλαδή αν

$$m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \text{ και } M_k = \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$$

θεωρούμε τις ποσότητες

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \quad \text{και} \quad U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k).$$

2. Παρατηρούμε ότι όσο «εκλεπτύνουμε» τη διαμέριση P, οι ποσότητες $L(f,P)$ και $U(f,P)$ έρχονται όλο και πιο κοντά.

3. Αν, καθώς το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0, αυτές οι ποσότητες τείνουν να ταυτιστούν, λέμε την f Riemann ολοκληρώσιμη και την οριακή αυτή τιμή τη λέμε ολοκλήρωμα της f.

Η ιδέα του Lebesgue, βάσει της οποίας κατασκεύασε τη θεωρία που θα μελετήσουμε, ήταν η εξής:

Ξεκινάμε με μια διαμέριση του **πεδίου τιμών** της συνάρτησης. Δηλαδή, αν η f είναι φραγμένη[1] και $f([a,b]) \subseteq [m,M]$, θεωρούμε μια διαμέριση

$$Q = \{m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_t = M\}.$$

Τότε, τα αντίστοιχα «άνω» και «κάτω» αθροίσματα θα έπρεπε να έχουν τη μορφή:

$$\widetilde{L}(f,Q) = \sum_{k=0}^{t-1} y_k \ell(\{x \in [a,b] : y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}\})$$

και

$$\widetilde{U}(f,Q) = \sum_{k=1}^{t-1} y_{k+1} \ell(\{x \in [a,b] : y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}\})$$

όπου $\ell(A)$ είναι το «μήκος» ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν το A είναι διάστημα (ή έστω ένωση διαστημάτων) υπάρχει ένας μάλλον φυσιολογικός τρόπος για να οριστεί το μήκος. Για τη γενική περίπτωση όμως, στην οποία το σύνολο A μπορεί να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο, είναι σαφές ότι χρειάζονται επιπλέον ιδέες.

Απ' ότι φαίνεται λοιπόν, για να αναπτυχθεί η θεωρία Ολοκλήρωσης του Lebesgue πρέπει πρώτα να θεμελιωθεί η έννοια του «μήκους» ή όπως θα λέμε, του μέτρου. Για να γίνει αυτό στην περίπτωση του $\mathbb{R}$, παρουσιάζεται το εξής:

Πρόβλημα. Υπάρχει μια συνάρτηση $\ell : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ώστε για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$, το $\ell(I)$ να είναι το μήκος του (με τη συνήθη έννοια) και η οποία να ικανοποιεί επιπλέον κάποιες «φυσιολογικές» ιδιότητες μήκους;

Η βασική ιδιότητα που θέλουμε να ικανοποιεί μια τέτοια συνάρτηση «μέτρου» είναι η *αριθμήσιμη προσθετικότητα*: αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(A_n).$$

Προχωρώντας στη θεωρία, θα δούμε ότι προκειμένου να έχουμε μια συνάρτηση ℓ που ικανοποιεί τα παραπάνω είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε κάποιες «εκπτώσεις» είτε στις ιδιότητες που αυτή θα πληροί είτε στα σύνολα που θα μπορούμε να μετρήσουμε.

Στην προσπάθεια να θεμελιώσουμε τις ιδέες του Lebesgue θα πετύχουμε τα εξής:

[1] Αυτός ο περιορισμός ξεπερνιέται πολύ εύκολα στη θεωρία.

1. Θα κατασκευάσουμε μια πολύ γενική θεωρία μέτρησης (και κατά συνέπεια ολοκλήρωσης), δηλαδή θα μπορούμε να εισαγάγουμε την έννοια του μέτρου (και του αντίστοιχου ολοκληρώματος) για αυθαίρετα σύνολα. Ειδικότερα, παράλληλα με την έννοια του «μήκους» στο $\mathbb{R}$ θα μελετηθεί αυστηρά και η έννοια του «όγκου» στους χώρους $\mathbb{R}^k$.

2. Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ που θα μπορούμε να ολοκληρώνουμε θα είναι μια *πολύ* ευρύτερη κλάση από αυτήν των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

3. Το ολοκλήρωμα θα μπορεί πλέον να οριστεί πάνω σε μια πολύ μεγάλη κλάση συνόλων, και όχι αναγκαστικά σε διαστήματα.

4. Θα διαπιστώσουμε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue συμπεριφέρεται πολύ καλύτερα από το ολοκλήρωμα Riemann ως προς τη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Για να εξηγήσουμε αυτό το τελευταίο σημείο: Το ολοκλήρωμα Riemann είναι ιδιαίτερα «προβληματικό» ως προς τις συγκλίσεις ακολουθιών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν έχουμε μια ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]$$

δεν μπορούμε εν γένει να συμπεράνουμε ότι ισχύει και

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int f(x)dx.$$

Μάλιστα, είναι πιθανό η οριακή συνάρτηση f να μην είναι καν Riemann ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα. Έστω $\{q_n : n = 1,2,\ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών του διαστήματος $[0,1]$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n = \chi_{\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}} \quad \text{και}^{2} \quad f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο (εξηγήστε γιατί) και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει μόνο πεπερασμένες το πλήθος ασυνέχειες), ενώ η οριακή συνάρτηση f δεν είναι (αυτό μπορεί να ελεγχθεί με το Κριτήριο του Riemann, βλέπε Παράρτημα Α΄).

5. Τέλος, θα αποδείξουμε ότι πράγματι το ολοκλήρωμα Lebesgue αποτελεί μια γνήσια γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann: κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη και τότε τα δύο ολοκληρώματα ταυτίζονται.

Αυτές οι σημειώσεις είναι σχεδιασμένες ώστε να καλύπτουν τις ανάγκες ενός προπτυχιακού ή μεταπτυχιακού μαθήματος Θεωρίας Μέτρου. Τα πρώτα 6 κεφάλαια συνιστούν τη θεμελίωση της βασικής θεωρίας, δηλαδή των ιδεών του Lebesgue. Τα υπόλοιπα 5 κεφάλαια είναι ουσιαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και αφορούν πιο προχωρημένα θέματα της θεωρίας.

[2] Θυμίζουμε ότι για ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, θέτουμε $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$

Κεφάλαιο 1

σ-άλγεβρες

Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή, το σημείο από το οποίο πρέπει να αρχίσει η θεωρία είναι η θεμελίωση της έννοιας του «μέτρου». Προτού γίνει αυτό όμως, πρέπει να αποφασίσουμε ποια ακριβώς είναι τα σύνολα που θέλουμε να μετρήσουμε. Οι ιδιότητες που πρέπει να έχει μια τέτοια οικογένεια συνόλων περιέχονται στον ορισμό της σ-άλγεβρας που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

1.1 Άλγεβρες και σ-άλγεβρες

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ καλείται *άλγεβρα* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, δηλαδή αν για ένα σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \equiv X \setminus A \in \mathcal{A}$, και

(iii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις 1.1.2. (α΄) Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές και πεπερασμένες ενώσεις, δηλαδή:

(iv) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(v) Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Για το (iv) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $B^c \in \mathcal{A}$ από το (ii) και

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Το συμπέρασμα έπεται από το (iii). Για το (v) παρατηρούμε πάλι ότι $A_j^c \in \mathcal{A}$ για όλα τα j και επιπλέον

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \left(\bigcap_{j=1}^n A_j^c \right)^c$$

από τους νόμους De Morgan. □

(β΄) Η ιδιότητα (i) του Ορισμού 1.1.1 μπορεί να αντικατασταθει από μία από τις $\varnothing \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

(γ΄) Η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 1.1.1 μπορεί να αντικατασταθεί από την (v).

Όπως θα φανεί πολύ σύντομα, η έννοια της άλγεβρας δεν είναι «αρκετή» για να αναπτυχθεί επιτυχώς η θεωρία. Είναι ουσιώδες να μπορούμε να «μετρήσουμε» περισσότερα σύνολα. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.1.3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ καλείται *σ-άλγεβρα* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, δηλαδή αν για ένα σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \equiv X \setminus A \in \mathcal{A}$, και

(iii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές, δηλαδή αν $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \dots$ τότε $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις 1.1.4. (α΄) Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, θέτουμε $A_j = X \in \mathcal{A}$, για $j \geqslant n+1$ και έχουμε

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

□

(β΄) Παρόμοια με τα (β΄) και (γ΄) των Παρατηρήσεων 1.1.2 έχουμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα αν και μόνον αν $\mathcal{A} \neq \varnothing$ και η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και ως προς αριθμήσιμες τομές ή ενώσεις.

Παραδείγματα 1.1.5. (α΄) Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Τότε οι οικογένειες $\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, X\}$ και $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρες στο X. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλλη σ-άλγεβρα στο X τότε φυσικά

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_2.$$

(β΄) Έστω $X = \mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών και

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ το } A \text{ ή το } A^c \text{ είναι πεπερασμένο}\}$$

Η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι $\mathcal{A} \neq \varnothing$ και ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα (από τη συμμετρία του ορισμού της). Αν τώρα $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν όλα τα A_j είναι άπειρα, τότε όλα τα A_j^c είναι πεπερασμένα, άρα και η ένωσή τους

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)^c$$

είναι πεπερασμένη. Συνεπώς, $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Αν κάποιο A_{j_0} είναι πεπερασμένο, το ίδιο ισχύει και για την τομή $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$, αφού $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq A_{j_0}$.

Άρα, πράγματι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Δεν είναι όμως σ-άλγεβρα, αφού για τα σύνολα $A_j = \{2j\}$, $j = 1, 2, \dots$ έχουμε φυσικά $A_j \in \mathcal{A}$ (αφού είναι πεπερασμένα), αλλά εύκολα ελέγχεται ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \notin \mathcal{A}$. □

(γ′) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $X = \mathbb{R}$ η οικογένεια $\mathcal{A}$ που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι άλγεβρα αλλά όχι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, είναι άμεσο ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν I_1 και I_2 είναι δύο διαστήματα στο $\mathbb{R}$ τότε και η τομή τους $I_1 \cap I_2$ είναι διάστημα. Έτσι, αν $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$ και $B = \bigcup_{s=1}^m J_s$ είναι δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ τότε έχουμε και

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{m} (I_k \cap J_s) \in \mathcal{A}.$$

Συνεπώς, με μια απλή επαγωγή βλέπουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

Αν τώρα I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$, το συμπλήρωμά του I^c είναι είτε διάστημα είτε ένωση δύο διαστημάτων του $\mathbb{R}$, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς, αν $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$ είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{A}$, τότε

$$A^c = \bigcap_{k=1}^{n} I_k^c \in \mathcal{A},$$

από τα παραπάνω. Άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Δεν είναι όμως σ-άλγεβρα, αφού για κάθε n το $I_n = (2n, 2n+1)$ είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ ενώ η ένωση $\bigcup_{n=1}^\infty I_n$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$ (εξηγήστε γιατί). □

Έστω $\{A_n\}$ μια ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X. Η $\{A_n\}$ θα λέγεται *αύξουσα* αν $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n και *φθίνουσα* αν $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Με αυτή την ορολογία δίνουμε έναν βολικό χαρακτηρισμό των αλγεβρών που είναι επιπλέον και σ-άλγεβρες:

Πρόταση 1.1.6. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν (και μόνον αν) ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:*

(i) *Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.*

(iii) *Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, άρα αρκεί να δειχθεί ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις ή τομές. Έστω (B_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Έστω ότι ισχύει η (i). Θέτουμε $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, έχουμε $A_n \in \mathcal{A}$ και επιπλέον $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Άρα και για την ένωση ισχύει $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ από την υπόθεση. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}.$$

Αν ισχύει η (ii), θέτουμε $A_n = \bigcap_{j=1}^n B_j$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, είναι $A_n \in \mathcal{A}$ και επίσης $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Άρα και για την τομή ισχύει $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (iii). Σε αυτή την περίπτωση, θέτουμε $A_1 = B_1$ και

$$A_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j, \qquad n \geqslant 2$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n και ότι τα A_n είναι ξένα ανά δύο. Άρα, από τη υπόθεση ισχύει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}.$$

□

Πρόταση 1.1.7. *Αν $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$, δηλαδή αν $\mathcal{A}'$ είναι μια άλλη σ-άλγεβρα με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}'$ τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.*

Απόδειξη. Αρχικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αν $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια από σ-άλγεβρες του X, τότε και η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X (άσκηση).

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια σ-αλγεβρών

$$C = \{\mathcal{A} : \sigma\text{-αλγεβρα και } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Φυσικά $C \neq \varnothing$ (αφού $\mathcal{P}(X) \in C$), άρα από την παραπάνω παρατήρηση η οικογένεια (υποσυνόλων του X)

$$\mathcal{A} = \bigcap C = \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in C\}$$

είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και μάλιστα ότι η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη με αυτή την ιδιότητα. □

Ορισμός 1.1.8. Η (μοναδική) σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που προσδιορίζεται από την παραπάνω πρόταση λέγεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{F})$.

Δίνουμε τώρα το βασικότερο παράδειγμα σ-άλγεβρας που είναι άλλωστε αυτό που οδηγεί στη θεμελίωση του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους.

Ορισμός 1.1.9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος[1] και $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X. Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας που παράγει η $\mathcal{T}$ καλούνται *Borel* υποσύνολα του X. Η οικογένεια όλων των Borel υποσυνόλων του X συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$.

Θυμίζουμε τους εξής ορισμούς:

(α) Ένα $A \subseteq X$ λέγεται G_δ-σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν G_n ανοικτά, $n = 1, 2, \dots$ ώστε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

(β) Ένα $B \subseteq X$ λέγεται F_σ-σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν F_n κλειστά, $n = 1, 2, \dots$ ώστε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Προφανώς όλα τα G_δ-σύνολα και όλα τα F_σ-σύνολα είναι σύνολα Borel. Έτσι, η κλάση $\mathcal{B}(X)$ φαίνεται να περιέχει όλα τα «καλά» τοπολογικά σύνολα.

[1]Όλες οι ιδιότητες των συνόλων Borel που θα μελετήσουμε δουλεύουν και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης τις οικογένειες:*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},\\ \Delta_2 &= \{(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\},\\ \Delta_3 &= \{(a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Τότε,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{F}) \supseteq \sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και μετά, άμεσα, έχουμε ότι ισχύουν παντού ισότητες. Αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{F}$, έχουμε $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Επιπλέον, κάθε σύνολο της Δ_1 είναι κλειστό, δηλαδή $\Delta_1 \subseteq \mathcal{F}$ και έτσι έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \sigma(\Delta_1)$.

Αν τώρα $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\Delta_1),$$

δηλαδή $\Delta_2 \subseteq \sigma(\Delta_1)$ και συνεπώς $\sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2)$. Έπειτα, αν $(a, b) \in \Delta_3$, γράφουμε

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(a, b - \frac{1}{n}\Big] \in \sigma(\Delta_2)$$

και παίρνουμε τον εγκλεισμό $\Delta_3 \subseteq \sigma(\Delta_2)$ άρα και τον $\sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3)$.

Για την απόδειξη του τελευταίου εγκλεισμού, θυμόμαστε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση (ξένων) ανά δύο ανοικτών διαστημάτων[2] και έτσι, αν $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχουμε $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\Delta_3)$ και συνεπώς

$$\sigma(\Delta_3) \supseteq \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπως θέλαμε. □

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες ιδέες μπορεί να δείξει κανείς την εξής γενικότερη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση:

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $\mathcal{F}_k$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Θεωρούμε τις οικογένειες:*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Big\{\prod_{j=1}^{k}(-\infty, b_j] : b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k\Big\},\\ \Delta_2 &= \Big\{\prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j] : a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k\Big\},\\ \Delta_3 &= \Big\{\prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j) : a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k\Big\}.\end{aligned}$$

[2]βλέπε Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Π. Βαλέττας

Τότε,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathcal{F}_k) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3).$$

□

1.2 Κλάσεις Dynkin

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{D}$ καλείται *κλάση Dynkin* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) αν $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$, και

(iii) η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α′) Αν $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin τότε για κάθε $A \in \mathcal{D}$ έχουμε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{D}$, αφού $A \subseteq X$ και $A, X \in \mathcal{D}$.

(β′) Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin.

(γ′) Από το (i) της Πρότασης 1.1.6 προκύπτει εύκολα ότι αν $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές (ή ενώσεις) τότε η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ′) Το αντίστροφο του (α′) δεν ισχύει γενικά. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και A, B δυο μη κενά υποσύνολα του X με $A \cup B \subsetneq X$ για τα οποία ισχύουν οι

$$A \setminus B \neq \emptyset, \quad B \setminus A \neq \emptyset, \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

Τότε, η οικογένεια

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\}$$

είναι κλάση Dynkin στο X αλλά δεν είναι καν άλγεβρα, αφού $A, B \in \mathcal{D}$ αλλά $A \cap B \notin \mathcal{D}$.

(ε′) Όμοια με την Πρόταση 1.1.7, παρατηρούμε ότι η τομή μιας μη κενής οικογένειας κλάσεων Dynkin είναι κι αυτή κλάση Dynkin και έτσι, για κάθε οικογένεια $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin $\mathcal{D}$ που περιέχει την Δ.

Ορισμός 1.2.3. Η (μοναδική) κλάση Dynkin $\mathcal{D}$ που προσδιορίζεται από την παραπάνω παρατήρηση λέγεται η κλάση Dynkin που παράγεται από την οικογένεια Δ και συμβολίζεται με $\delta(\Delta)$.

Προφανώς, για κάθε οικογένεια $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ έχουμε

$$\delta(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta),$$

αφού η $\sigma(\Delta)$ είναι σ-άλγεβρα, άρα και κλάση Dynkin. Το επόμενο βασικό θεώρημα δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει ισότητα.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X, κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές. Τότε,*

$$\delta(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι αν η $\delta(\Delta)$ ήταν σ-άλγεβρα, τότε θα είχαμε $\sigma(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$ και συνεπώς την επιθυμητή ισότητα. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(\Delta)$ είναι μια σ-άλγεβρα ή ισοδύναμα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.2.2 (γ), ότι η $\delta(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές. Δηλαδή, πρέπει να έχουμε

$$A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } A \in \delta(\Delta) \text{ και για κάθε } B \in \delta(\Delta).$$

Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\widetilde{\delta}(\Delta) = \{A \subseteq X : \quad A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } B \in \delta(\Delta)\}.$$

Παρατηρήστε ότι πρέπει να δείξουμε τον εγκλεισμό

$$\delta(\Delta) \subseteq \widetilde{\delta}(\Delta).$$

Για να δειχθεί αυτό, είναι σαφές ότι αρκεί να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

1. Ισχύει ο εγκλεισμός $\Delta \subseteq \widetilde{\delta}(\Delta)$ και, επιπλέον,
2. Η οικογένεια $\widetilde{\delta}(\Delta)$ είναι κλάση Dynkin.

Τώρα που είδαμε το σχέδιο της απόδειξης μπορούμε να μπούμε στις λεπτομέρειες. Γενικότερα, για μια οικογένεια $P \subseteq \delta(\Delta)$ θέτουμε

$$\widetilde{P} = \{A \subseteq X : \quad A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } B \in P\}.$$

Ισχυρισμός: Η $\widetilde{P}$ είναι κλάση Dynkin.

Οι ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin επαληθεύονται ως εξής:

(i) Για $B \in P$, έχουμε $X \cap B = B \in P \subseteq \delta(\Delta)$, άρα $X \in \widetilde{P}$.

(ii) Έστω $A_1, A_2 \in \widetilde{P}$ με $A_1 \subseteq A_2$. Τότε, για $B \in P$, έχουμε

$$(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \delta(\Delta),$$

αφού $A_2 \cap B, A_1 \cap B \in \delta(\Delta)$ και $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B$. Άρα $A_2 \setminus A_1 \in \widetilde{P}$.

(iii) Έστω (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\widetilde{P}$. Τότε, για $B \in P$, έχουμε

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \delta(\Delta),$$

αφού η ακολουθία $(A_n \cap B)$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\delta(\Delta)$. Έτσι, πράγματι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{P}$.

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για $P = \delta(\Delta)$ έχουμε αποδείξει το 2. Για το 1 τώρα, παρατηρούμε ότι, αφού η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, ισχύει ο εγκλεισμός $\Delta \subseteq \widetilde{\Delta}$. Όμως η $\widetilde{\Delta}$ είναι κλάση Dynkin, άρα ισχύει επιπλέον

$$\delta(\Delta) \subseteq \widetilde{\Delta}.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $A \in \delta(\Delta)$ και $B \in \Delta$ ισχύει ότι $A \cap B \in \delta(\Delta)$, το οποίο ισοδυναμεί με τον εγκλεισμό

$$\Delta \subseteq \widetilde{\delta}(\Delta)$$

που είναι ακριβώς το 1. Έτσι, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 1.2.5. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την Πρόταση 1.1.11 γράφοντας

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \delta(\mathcal{F}_k) = \delta(\Delta_1) = \delta(\Delta_2) = \delta(\Delta_3).$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι οι οικογένειες $\mathcal{F}_k$, Δ_1, $\Delta_2 \cup \{\emptyset\}$, $\Delta_3 \cup \{\emptyset\}$ είναι κλειστές ως προς πεπερασμένες τομές. □

1.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X και $C \subseteq X$. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο C.

1.2. Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα, $f : X \to Y$ και $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο Y. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο X.

1.3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και

$$C = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Να περιγράψετε την $\sigma(C)$.

1.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\}$$

και

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}.$$

(α) Να δείξετε ότι

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ενώ αν είναι φθίνουσα

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ομάδα Β΄.

1.5. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι υπάρχει η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Αυτή λέγεται η *άλγεβρα που παράγει η* $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

1.6. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\overline{\mathcal{I}} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.7. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.8. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ-άλγεβρες στο X.

1.9. Έστω $(X,d), (Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

1.10. Έστω X μετρικός χώρος και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in X : \text{ υπάρχει το } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

1.11. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται *δακτύλιος* αν είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις και τις διαφορές. Αν επιπλέον η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, θα λέγεται σ-δακτύλιος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Οι δακτύλιοι (αντίστ. οι σ-δακτύλιοι) είναι κλειστοί ως προς πεπερασμένες (αντίστ. αριθμήσιμες) τομές.

(β) Ένας δακτύλιος (αντίστ. σ-δακτύλιος) $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.

(γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

1.12. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

1.13. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{C}$ ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, αποδείξτε το ίδιο για την $\mathcal{B}(X)$, όπου (X,d) τυχών διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Ομάδα Γ΄.

1.14. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή ως προς φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει την Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

(α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.

(β) Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Υπάρχει μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.

(δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

1.15. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του X. Να δειχθεί ότι και η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (βλ. Άσκηση 1.5) είναι αριθμήσιμη.

1.16. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X με άπειρα στοιχεία. Να δείξετε ότι:

(α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Έχοντας αναπτύξει τη βασική θεωρία για τις σ-άλγεβρες, μπορούμε τώρα να ορίσουμε το βασικό αντικείμενο αυτών των σημειώσεων, δηλαδή την έννοια του μέτρου. Ένα μέτρο θα αποδίδει σε κάθε σύνολο μιας σ-άλγεβρας έναν μη αρνητικό αριθμό, το «μήκος» του. Οι φυσιολογικές απαιτήσεις που θα είχε κανείς αρχικά είναι οι εξής:

1. Το κενό σύνολο $\varnothing$ να έχει φυσικά «μήκος» μηδέν και

2. αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια από *ξένα ανά δύο* σύνολα στην σ-άλγεβρα, (όπου προς το παρόν δεν προσδιορίζουμε τι πρέπει να ισχύει για το σύνολο δεικτών I) τότε το «μήκος» της ένωσης τους να ισούται με το άθροισμα όλων των «μηκών».

Ο ίδιος ο ορισμός της σ-άλγεβρας «επιβάλλει» το σύνολο δεικτών I στο 2 να είναι το πολύ αριθμήσιμο, ώστε να εξασφαλίζεται ότι αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in I$, τότε ισχύει ότι $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$. Αυτό μπορείτε να το δείτε και ως εξής:

Ένα «φυσιολογικό» μέτρο στο $\mathbb{R}$ θα απέδιδε σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ το μήκος του, δηλαδή $b - a$. Έτσι, κάθε μονοσύνολο θα είχε μήκος μηδέν. Αν το I στο 2 παραπάνω μπορούσε να είναι υπεραριθμήσιμο, γράφοντας

$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$$

θα είχαμε ότι κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει μηδενικό μήκος, άρα ο ορισμός θα ήταν κενός νοήματος.

2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται *μέτρο* αν:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ και

(ii) το μ είναι *αριθμήσιμα προσθετικό* (ή σ-προσθετικό), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας, ένα τέτοιο μέτρο πολλές φορές αναφέρεται και ως *αριθμήσιμα προσθετικό* (ή σ-προσθετικό) μέτρο.

Επίσης, το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται *μετρήσιμος χώρος*, η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *χώρος μέτρου* και λέμε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ ή απλά στο X. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται και $\mathcal{A}$-μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός 2.1.2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται *πεπερασμένα προσθετικό μέτρο* αν:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ και

(ii) το μ είναι *πεπερασμένα προσθετικό*, δηλαδή αν $(A_j)_{j=1}^n$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Είναι σαφές ότι κάθε μέτρο είναι και πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Παραδείγματα 2.1.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.

(α′) Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε
$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το } A \text{ έχει } n \text{ το πλήθος στοιχεία} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το μ είναι μέτρο:

Απόδειξη. Προφανώς $\mu(\emptyset) = 0$ και για να επαληθεύσουμε την (ii) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $A_n \neq \emptyset$ για άπειρους το πλήθος δείκτες n τότε καταλήγουμε στη σχέση $\infty = \infty$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση έχουμε μια πεπερασμένη ξένη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Οπότε και πάλι ισχύει το ζητούμενο. □

Το μέτρο μ λέγεται *μέτρο απαρίθμησης*.

(β′) Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε
$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το ν είναι επίσης μέτρο:

Απόδειξη. Έχουμε $\nu(\emptyset) = 0$ και για την (ii) παρατηρούμε ότι αν ισχύει $A_n = \emptyset$ για κάθε n τότε καταλήγουμε σε ταυτολογία της μορφής $0 = 0$, ενώ αν για κάποιο n έχουμε $A_n \neq \emptyset$ τότε καταλήγουμε στην $\infty = \infty$. □

(γ′) Για $x \in X$ και $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Το δ_x είναι μέτρο (άσκηση) και λέγεται *μέτρο Dirac στο x*.

Αν μ, ν είναι δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $\mu + \nu$ και $a \cdot \mu$, όπου $a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, που ορίζονται από τις σχέσεις
$$(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad (a \cdot \mu)(A) = a \cdot \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύουν οι $\nu(A) < \infty$ και $\nu(A) \leqslant \mu(A)$, τότε και το $\mu - \nu$ είναι μέτρο.

Εκτός από αυτές τις απλές πράξεις, υπάρχει και ο εξής τρόπος να κατασκευάζουμε καινούργια μέτρα από παλιά:

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $C \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ θέτοντας

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \text{ για } A \in \mathcal{A}.$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι το μ_C είναι μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Θα λέμε ότι το μ_C είναι ο *περιορισμός* του μ στο C.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.*

(i) *Το μ είναι μονότονο, δηλαδή αν για κάποια $A, B \in \mathcal{A}$ ισχύει $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

(ii) *Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

και παρατηρούμε ότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα μεταξύ τους. Έτσι, από την προσθετικότητα του μ έχουμε

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Άρα, πράγματι $\mu(B) \geqslant \mu(A)$ και αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$ τότε

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

□

Παρατηρήστε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Παρατήρηση 2.1.5. Το (ii) της παραπάνω πρότασης δεν έχει νόημα αν $\mu(A) = \infty$. Τότε θα έχουμε $\mu(B) = \infty$ από το (i) ενώ το $\mu(B \setminus A)$ μπορεί να είναι πεπερασμένος αριθμός ή το άπειρο:

Για παράδειγμα, θεωρήστε το μέτρο απαρίθμησης μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και τα σύνολα $A = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$ και $A_m = \{m+1, m+2, \ldots\}$. Τότε $A, A_m \subseteq \mathbb{N}$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mu(\mathbb{N} \setminus A) = \infty, \quad \mu(\mathbb{N} \setminus A_m) = m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μ είναι σ-υποπροσθετικό (ή αριθμήσιμα υποπροσθετικό), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Μιμούμαστε, σε γενικές γραμμές, την απόδειξη της Πρότασης 1.1.6. Θέτουμε $B_1 = A_1$ και

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Τότε κάθε $B_n \in \mathcal{A}$, τα B_n είναι ξένα ανά δύο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $B_n \subseteq A_n$, και

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Συνεπώς:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

λόγω της αριθμήσιμης προσθετικότητας και της μονοτονίας του μ. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μέτρο μ είναι «συνεχές» με τις εξής δύο έννοιες:*

(i) *Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και επιπλέον $\mu(A_1) < \infty$, τότε*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τα σύνολα

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(όπου έχουμε θέσει $A_0 = \varnothing$) τα οποία είναι ξένα ανά δύο και παρατηρούμε ότι, για κάθε n,

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j,$$

άρα και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \lim_{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \lim_{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_{n} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(ii) Θεωρούμε τα σύνολα

$$C_n = A_1 \setminus A_n \text{ για } n = 1, 2, \dots$$

Τότε, η $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Από το (i) έπεται τώρα ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_n \mu(C_n)$, δηλαδή

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n).$$

Έτσι, από την Πρόταση 2.1.4 (ii) έχουμε

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n)$$

άρα και το ζητούμενο, αφού $\mu(A_1) < \infty$. □

Η υπόθεση $\mu(A_1) < \infty$ στο (ii) της παραπάνω πρότασης είναι απαραίτητη:

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το μέτρο απαρίθμησης μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και τη φθίνουσα ακολουθία $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ με $A_m = \{m, m+1, \ldots\}$ τότε $\mu(A_m) = \infty$ για κάθε m, ενώ $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \mu(\emptyset) = 0$.

Μάλιστα, οι ιδιότητες της Πρότασης 2.1.7 χαρακτηρίζουν εκείνα τα πεπερασμένα προσθετικά μέτρα που είναι και αριθμήσιμα προσθετικά, σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.8. *Έστω μ ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Το μ είναι μέτρο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) *Για κάθε αύξουσα ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ισχύει ότι*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

(ii) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(A_n)n \in \mathbb{N}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ισχύει ότι*

$$\lim_n \mu(A_n) = 0.$$

Απόδειξη. Το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο, άρα μένει να δειχθεί μόνο η αριθμήσιμη προσθετικότητα. Θεωρούμε λοιπόν ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.

Έστω ότι ισχύει το (i). Θέτουμε τότε

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n, η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και επιπλέον

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Έτσι, έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$
$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

λόγω της ιδιότητας (i) για τα A_n και της πεπερασμένης προσθετικότητας του μ για τα B_n.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει το (ii). Θέτουμε τότε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n, η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και επιπλέον

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

(επειδή τα B_k είναι ξένα, κάθε $x \in X$ ανήκει σε ένα το πολύ από αυτά, άρα για μεγάλα n έχουμε $x \notin \cup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$). Για κάθε n όμως, έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup A_n$$

και από την πεπερασμένη προσθετικότητα του μ βλέπουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) + \mu(A_n).$$

Στέλνοντας το n στο άπειρο, παίρνουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

αφού από το (ii) έχουμε $\lim_n \mu(A_n) = 0$. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με τον ορισμό εκείνων των κλάσεων μέτρων που θα μας είναι πιο χρήσιμες στα επόμενα.

Ορισμός 2.1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μέτρο μ λέγεται:

(i) *πεπερασμένο* αν $\mu(X) < \infty$,

(ii) *μέτρο πιθανότητας* αν $\mu(X) = 1$ και

(iii) *σ-πεπερασμένο* αν υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$

Αντίστοιχα, λέμε ότι ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πεπερασμένος, χώρος πιθανότητας ή χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Παρατηρήσεις 2.1.10. (α΄) Αν το μ είναι πεπερασμένο, τότε έχουμε $\mu(A) < \infty$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, από τη μονοτονία του μέτρου.

(β΄) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, για κάθε $C \in \mathcal{A}$ μπορούμε να γράψουμε

$$C = X \cap C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C),$$

με $\mu(A_n \cap C) \leqslant \mu(A_n) < \infty$.

(γ΄) Τα σύνολα A_n στον ορισμό του σ-πεπερασμένου μέτρου μπορούν να επιλεγούν και ξένα, αν θέσουμε $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ (όπως έχουμε ξανακάνει).

(δ΄) Προφανώς ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\text{μέτρο πιθανότητας} \implies \text{πεπερασμένο μέτρο} \implies \text{σ-πεπερασμένο μέτρο},$$

αλλά καμία από αυτές δεν αντιστρέφεται:

Το διπλάσιο ενός μέτρου πιθανότητας είναι φυσικά πεπερασμένο, αλλά όχι μέτρο πιθανότητας. Επίσης, το μέτρο απαρίθμησης στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ είναι σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο (εξηγήστε γιατί).

(ε΄) Υπάρχουν μέτρα που δεν είναι σ-πεπερασμένα όπως, για παράδειγμα, το μέτρο ν του Παραδείγματος 2.1.3 (β): για $X \neq \emptyset$ έχουμε $\nu(A) = \infty$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $A \neq \emptyset$.

2.2 Μοναδικότητα

Δύο μέτρα μ και ν σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγονται ίσα αν για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu(A) = \nu(A)$. Όμως αυτή η συνθήκη είναι εν γένει δύσκολο να ελεγχθεί. Είναι λοιπόν φυσιολογικό να ρωτήσει κανείς: μήπως αν τα μ και ν ταυτίζονται σε μια «κατάλληλη» υποοικογένεια της $\mathcal{A}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ταυτίζονται και παντού; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, για μέτρα που είναι αρκετά καλά, μας δίνει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.2.1 (θεώρημα μοναδικότητας). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, για την οποία ισχύει ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{A}$. Αν μ και ν είναι δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε*

$$\mu(D) = \nu(D), \quad \text{για κάθε } D \in \Delta$$

και ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες, τότε $\mu = \nu$:

(i) *Τα μ και ν είναι πεπερασμένα και $\mu(X) = \nu(X)$.*

(ii) *Τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα και ειδικότερα υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην Δ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ και $\mu(D_n) = \nu(D_n) < \infty$ για κάθε n.*

Απόδειξη. (i) Είναι σημαντικό να κατανοήσετε αυτή την απόδειξη αφού η τεχνική που χρησιμοποιείται είναι πολύ συνηθισμένη στη Θεωρία Μέτρου. Παρατηρήστε αρχικά, ότι αφού η Δ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.4 έχουμε

$$\delta(\Delta) = \sigma(\Delta) = \mathcal{A}.$$

Θεωρούμε την οικογένεια
$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \ \mu(A) = \nu(A)\}.$$
Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $\mathcal{D} = \mathcal{A}$. Από την υπόθεση έχουμε σίγουρα τον εγκλεισμό
$$\Delta \subseteq \mathcal{D}.$$
Αφού λοιπόν $\mathcal{A} = \delta(\Delta)$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin, διότι τότε θα έχουμε
$$\mathcal{A} = \delta(\Delta) \subseteq \mathcal{D},$$
άρα και τη ζητούμενη ισότητα $\mu = \nu$. Οι ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin ελέγχονται ως εξής:

(α΄) Ισχύει ότι $X \in \mathcal{D}$ από την υπόθεση (i).

(β΄) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $B \subseteq A$ τότε
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B).$$
(Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε ξανά σε αυτό το σημείο το γεγονός ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα.) Έτσι, $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(γ΄) Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$. Τότε,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$
σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.7. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Άρα, πράγματι η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(ii) Για $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε τα μέτρα $\mu_n, \nu_n : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με
$$\mu_n(A) = \mu(A \cap D_n), \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap D_n), \quad \text{για } A \in \mathcal{A},$$
δηλαδή τους περιορισμούς στο D_n των μέτρων μ και ν αντίστοιχα. Αν $D \in \Delta$, τότε
$$\mu_n(D) = \mu(D \cap D_n) = \nu(D \cap D_n) = \nu_n(D)$$
αφού η Δ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και συνεπώς $D \cap D_n \in \Delta$. Επίσης,
$$\mu_n(X) = \mu(X \cap D_n) = \mu(D_n) = \nu(D_n) = \nu(X \cap D_n) = \nu_n(X) < \infty.$$
Έτσι, για τα μ_n και ν_n ικανοποιούνται οι υποθέσεις του (i) και συνεπώς $\mu_n = \nu_n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Αν τώρα A είναι τυχόν σύνολο στην $\mathcal{A}$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $X = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ και η $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$

είναι αύξουσα, γράφουμε

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)\right) = \lim_n \mu(A \cap D_n) = \lim_n \mu_n(A) = \lim_n \nu_n(A)$$
$$= \lim_n \nu(A \cap D_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)\right) = \nu(A),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\mu = \nu$. □

Εφαρμογή 2.2.2. Έστω μ και ν δύο πεπερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τέτοια ώστε $\mu((-\infty, b]) = \nu((-\infty, b])$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$. Τότε $\mu = \nu$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\Delta = \{(-\infty, b] : \ b \in \mathbb{R}\}$. Η Δ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Πρόταση 1.1.10). Επίσης,

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_n \mu((-\infty, n]) = \lim_n \nu((-\infty, n]) = \nu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι $\mu = \nu$. □

Εύκολα βλέπουμε βέβαια ότι οι υποθέσεις (i) και (ii) είναι απαραίτητες για την ισχύ του συμπεράσματος. Για παράδειγμα, αν μ είναι το μέτρο απαρίθμησης στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ και $\nu = 2\mu$, αυτά τα δύο μέτρα συμπίπτουν στην οικογένεια Δ αλλά δεν είναι ίσα.

2.3 Πλήρωση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε σταθεροποιήσει κάποιο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αν N είναι τυχόν υποσύνολο του A, δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι $N \in \mathcal{A}$: αυτό εξαρτάται από την επιλογή της σ-άλγεβρας. Παρ' όλα αυτά, αν ίσχυε ότι $N \in \mathcal{A}$ τότε σίγουρα θα είχαμε $\mu(N) = 0$. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: μπορούμε να επεκτείνουμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ώστε να περιέχει όλα αυτά τα «αμελητέα» σύνολα; Θα δείξουμε παρακάτω ότι η απάντηση είναι καταφατική.

Ορισμός 2.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $N \subseteq X$. Το N καλείται *μ-μηδενικό σύνολο* αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $N \subseteq A$ και $\mu(A) = 0$.

Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται *πλήρης* (και το μ *πλήρες μέτρο*) αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Ορισμοί 2.3.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε τότε:

(i) την οικογένεια

$$\mathcal{A}_\mu = \{A \subseteq X : \ \text{υπάρχουν } E, F \in \mathcal{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}.$$

(Παρατηρήστε ότι τότε $\mu(E) = \mu(F)$.)

(ii) τη συνάρτηση $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ που ορίζεται από τη σχέση $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$, με το E όπως παραπάνω. (Παρατηρούμε ότι για $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ έχουμε $\mu(B) \leqslant \mu(F) = \mu(E)$, άρα

$$\overline{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, \ B \subseteq A\}.$$

Έτσι, η $\overline{\mu}$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.)

Η οικογένεια $\mathcal{A}_\mu$ καλείται *πλήρωση* της $\mathcal{A}$, η συνάρτηση $\overline{\mu}$ *πλήρωση* του μ και η τριάδα $(X, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ λέγονται $\overline{\mu}$-μετρήσιμα σύνολα. Είναι άμεση απόρροια του παραπάνω ορισμού ότι κάθε μ-μηδενικό σύνολο είναι και $\overline{\mu}$-μετρήσιμο. Κάπως διαισθητικά, τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ είναι εκείνα τα υποσύνολα του X που απέχουν «μ-αμελητέα απόσταση» (δηλαδή διαφέρουν κατά ένα μ-μηδενικό σύνολο) από στοιχεία της $\mathcal{A}$.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε η πλήρωση $(X, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα στο X και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$.*

(ii) *Τό $\overline{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A}_\mu)$ και ο περιορισμός του στην $\mathcal{A}$ είναι το μ, δηλαδή $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

(iii) *Το $\overline{\mu}$ είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ με $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

(iv) *Το μ είναι πλήρες μέτρο αν και μόνο αν $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$ (και συνεπώς $\overline{\mu} = \mu$).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν $A \in \mathcal{A}$, παίρνοντας $E = F = A$ στο (i) του Ορισμού 2.3.2, βλέπουμε ότι $A \in \mathcal{A}_\mu$ και $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$. Επομένως, πράγματι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ και $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Για τους υπόλοιπους ισχυρισμούς:

(i) Ισχύει φυσικά ότι $\mathcal{A}_\mu \neq \emptyset$. Αν τώρα $A \in \mathcal{A}_\mu$ βρίσκουμε $E, F \in \mathcal{A}$ ώστε

$$E \subseteq A \subseteq F$$

και $\mu(F \setminus E) = 0$. Έχουμε όμως επιπλέον $E^c, F^c \in \mathcal{A}$ και ισχύουν οι εγκλεισμοί:

$$F^c \subseteq A^c \subseteq E^c.$$

Αφού

$$E^c \setminus F^c = E^c \cap (F^c)^c = F \cap E^c = F \setminus E$$

έπεται ότι $\mu(E^c \setminus F^c) = 0$, άρα $A^c \in \mathcal{A}_\mu$, δηλαδή η $\mathcal{A}_\mu$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

Τέλος, αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}_\mu$, βρίσκουμε ακολουθίες $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ με

$$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$$

και $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Έτσι, έχουμε επίσης

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty F_n,$$

με $\bigcup_{n=1}^\infty E_n, \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{A}$. Από τον εγκλεισμό

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (F_n \setminus E_n)$$

έχουμε

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (F_n \setminus E_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Έπεται λοιπόν ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$ και συνεπώς η $\mathcal{A}_\mu$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα.

(ii) Είναι άμεσο ότι $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}_\mu$, θεωρώντας τα σύνολα E_n του ορισμού έχουμε, με βάση την απόδειξη του (i) παραπάνω, ότι

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

και αφού τα E_n είναι ξένα (εξηγήστε γιατί) παίρνουμε τελικά:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Άρα,

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι το $\overline{\mu}$ είναι πράγματι μέτρο. Επιπλέον το $\overline{\mu}$ είναι πλήρες:

Αν A είναι ένα $\overline{\mu}$-μηδενικό σύνολο, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\mu$ με

$$A \subseteq B \text{ και } \overline{\mu}(B) = 0.$$

Από τον ορισμό του $\overline{\mu}$ βρίσκουμε $F \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq F$ και $\mu(F) = 0$. Θέτοντας $E = \emptyset$, έχουμε

$$E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = \mu(F) = 0.$$

Επομένως, $A \in \mathcal{A}_\mu$.

(iii) Έστω ν ένα μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ ώστε $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Τότε, για $A \in \mathcal{A}_\mu$ βρίσκουμε $E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και έχουμε:

$$\mu(E) = \nu(E) \leqslant \nu(A) \leqslant \nu(F) = \mu(F).$$

Αφού όμως $\mu(E) = \mu(F)$ έπεται ότι $\nu(A) = \mu(E)$, δηλαδή $\nu(A) = \overline{\mu}(A)$. Επομένως, $\nu = \overline{\mu}$.

(iv) ($\Longleftarrow$) Αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ τότε από το (ii) έχουμε ότι $\overline{\mu} = \mu$ και το $\overline{\mu}$ είναι πλήρες. Άρα και το μ είναι πλήρες.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι το μ είναι πλήρες και $A \in \mathcal{A}_\mu$. Θα δείξουμε ότι $A \in \mathcal{A}$. Βρίσκουμε και πάλι

$$E, F \in \mathcal{A} \ \text{ με } \ E \subseteq A \subseteq F \ \text{ και } \ \mu(F \setminus E) = 0.$$

Άρα το $A \setminus E \subseteq F \setminus E$ είναι μ-μηδενικό σύνολο και από την υπόθεση $A \setminus E \in \mathcal{A}$. Τώρα συμπεραίνουμε ότι

$$A = E \cup (A \setminus E) \in \mathcal{A}.$$

□

Παραδείγματα 2.3.4. (α΄) Το μέτρο απαρίθμησης μ σε οποιονδήποτε μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ είναι πλήρες, αφού το μοναδικό μ-μηδενικό σύνολο είναι το $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(β΄) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $x \in X$ ώστε $\{x\} \in \mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$. Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο Dirac $\mu = \delta_x$ δεν είναι πλήρες.

Απόδειξη. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{P}(X)$. Πράγματι, αν $A \subseteq X$ μπορούμε να γράψουμε

$$A = (A \cap \{x\}) \cup (A \cap \{x\}^c).$$

Έχουμε ότι $A \cap \{x\} = \emptyset$ ή $\{x\}$, άρα το $A \cap \{x\}$ ανήκει στην $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$, και το $A \cap \{x\}^c$ είναι μ-μηδενικό αφού περιέχεται στο $\{x\}^c$ που έχει μέτρο $\mu(\{x\}^c) = 0$, άρα $A \cap \{x\}^c \in \mathcal{A}_\mu$. Έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Έτσι, $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) = \mathcal{A}_\mu$ και από την Πρόταση 2.3.3 (iv) βλέπουμε ότι το μ δεν είναι πλήρες. □

2.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $C \in \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$.

2.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι

$$\mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$$

και ότι, αν επιπλέον $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) < \infty$, τότε

$$\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_n A_n).$$

2.3. (1ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty.$$

Να δείξετε ότι $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

2.4. Έστω $A \neq \emptyset$ και $a : A \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Θέτουμε

$$\sum_{x\in A} a(x) = \sup\left\{\sum_{x\in F} a(x) : F \subseteq A,\ F \neq \emptyset \text{ και } F \text{ πεπερασμένο}\right\}.$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x\in\emptyset} a(x) = 0$. Έστω $X \neq \emptyset$ και μια συνάρτηση $a : X \to [0, \infty]$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x\in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. *Υπόδειξη:*

$$J = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

(β) Η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x\in A} a(x)$$

ορίζει ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η *σημειακή κατανομή που επάγεται από την* a και ο $a(x)$ είναι η *μάζα* του x.

2.5. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $A\in\mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A)\leqslant\mu_{n+1}(A)$. Για $A\in\mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$.

2.6. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathcal{A})$. Να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ με

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A),\quad A\in\mathcal{A}$$

είναι μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$.

(β) Αν επιπλέον κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, δείξτε ότι η συνάρτηση $\nu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ με

$$\nu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(A),\quad A\in\mathcal{A}$$

είναι επίσης μέτρο πιθανότητας.

2.7. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στον χώρο $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A\in\mathcal{A}$ και $B\subseteq X$ έχουμε $A\triangle B\in\mathcal{A}$ και $\mu(A\triangle B)=0$, να δείξετε ότι $B\in\mathcal{A}$ και $\mu(A)=\mu(B)$.

Ομάδα Β΄.

2.9. Δώστε παράδειγμα σ-πεπερασμένου μέτρου μ στον χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((a,b))=\infty$ για κάθε $a<b\in\mathbb{R}$.

2.10. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $E\in\mathcal{A}$ το σύνολο $J_E=\{i\in I:\mu(E\cap A_i)>0\}$ είναι αριθμήσιμο.

2.11. Έστω $\mathcal{F}$ άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο X και μ πεπερασμένο μέτρο στον χώρο $(X,\sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A\in\sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $F\in\mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A\triangle F)<\varepsilon,$$

όπου $A\triangle F=(A\setminus F)\cup(F\setminus A)$.

2.12. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\mu(A_n)\geqslant\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n)>0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{k_n}\neq\varnothing.$$

2.13. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται *ημιπεπερασμένο* αν για κάθε $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)=\infty$ υπάρχει $B\subseteq A$ με $B\in\mathcal{A}$ και $0<\mu(B)<\infty$. Να δείξετε ότι αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι ένας χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)=\infty$, τότε για κάθε $M>0$ υπάρχει $B\in\mathcal{A}$ με $B\subseteq A$ και $M<\mu(B)<\infty$.

Ομάδα Γ΄.

2.14. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ με

$$\mu_0(A)=\sup\{\mu(F):F\subseteq A \text{ και } \mu(F)<\infty\},\quad A\in\mathcal{A}.$$

Να δείξετε ότι:

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το *ημιπεπερασμένο μέρος* του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

2.15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(α) Για δύο σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ γράφουμε $A \sim B$ αν $\mu(A \triangle B) = 0$. Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{A}$.

(β) Για $A, B \in \mathcal{A}$ ορίζουμε $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι πλήρης μετρική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{A}/\sim$.

2.16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $E \subseteq X$ λέγεται *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X : \ E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Να δείξετε ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ τότε ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *κορεσμένος* χώρος μέτρου.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.

(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ με $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ για $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ για $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

2.17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ με γνήσια θετικό μ-μέτρο.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει επιτυχώς την έννοια του μέτρου και έχουμε αποδείξει μερικές βασικές του ιδιότητες. Παρ' όλα αυτά, τα παραδείγματα μέτρων που έχουμε κατασκευάσει είναι αρκετά στοιχειώδη και όχι τόσο ενδιαφέροντα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε πρώτα έναν «μηχανισμό» κατασκευής μέτρων μέσω του θεωρήματος του Καραθεοδωρή. Η πορεία αυτής της κατασκευής είναι με λίγα λόγια η εξής:

1. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ η οποία ικανοποιεί κάποιες ασθενέστερες ιδιότητες από αυτές ενός μέτρου (άρα είναι ευκολότερο να κατασκευαστεί). Μια τέτοια συνάρτηση θα τη λέμε *εξωτερικό μέτρο*.

2. Περιορίζουμε την φ σε κατάλληλη σ-άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ώστε ο περιορισμός αυτός να είναι μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$.

Σαν εφαρμογή αυτής της διαδικασίας θα κατασκευάσουμε το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* στον $\mathbb{R}^k$ που θα μας οδηγήσει αργότερα στη γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann.

Τέλος, θα παρουσιάσουμε το *θεώρημα επέκτασης* του Καραθεοδωρή που δίνει μια ουσιαστικά αντίστροφη διαδικασία κατασκευής μέτρων. Πιο συγκεκριμένα:

1. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση μ που «μοιάζει με μέτρο» και ορίζεται σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$.

2. Επεκτείνουμε αυτή τη συνάρτηση σε μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγει η $\mathcal{A}_0$.

Η τελευταία αυτή τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Είναι για παράδειγμα δομικό εργαλείο για τη θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

3.1 Ορισμός και το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Ορισμός 3.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται *εξωτερικό μέτρο* αν:

(i) $\varphi(\varnothing) = 0$,

(ii) η φ είναι *μονότονη*, δηλαδή αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$, και

(iii) η φ είναι *αριθμήσιμα υποπροσθετική* (ή σ-υποπροσθετική), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου είναι σαφές ότι κάθε μέτρο είναι και εξωτερικό μέτρο.

Παραδείγματα 3.1.2. (α΄) Η συνάρτηση $\varphi_1 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\varphi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι εξωτερικό μέτρο:

Απόδειξη. Οι συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού ικανοποιούνται προφανώς. Για την (iii) τώρα, αν $A_n = \varnothing$ για κάθε n τότε ισχύει προφανώς η ισότητα $0 = 0$, ενώ αν κάποιο A_{n_0} είναι μη κενό, τότε $\varphi_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(A_n) \geqslant \varphi_1(A_{n_0}) = 1$, όπως θέλαμε. □

Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι αν $|X| \geqslant 2$ τότε η φ_1 δεν είναι μέτρο.

(β΄) Η συνάρτηση $\varphi_2 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\varphi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι εξωτερικό μέτρο:

Απόδειξη. Η συνθήκη (i) ικανοποιείται αφού φυσικά το $\varnothing$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για την (ii), αν $A \subseteq B$ και το B είναι υπεραριθμήσιμο, τότε έχουμε $\varphi_2(A) \leqslant \varphi_2(B) = 1$, αφού η φ_2 λαμβάνει μόνο τις τιμές 0 και 1. Αν πάλι το B είναι αριθμήσιμο, τότε και το A είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi_2(A) = \varphi_2(B) = 0$. Για την (iii), αν κάποιο A_{n_0} είναι υπεραριθμήσιμο, τότε η ανισότητα ισχύει προφανώς όπως και στο (ii). Αν πάλι όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα, τότε και η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα

$$\varphi_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(A_n).$$

Άρα, πράγματι, η φ_2 είναι εξωτερικό μέτρο. □

Ερώτημα: Είναι η φ_2 μέτρο;

3.1.1 Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ^* στο $\mathbb{R}$. Είναι φυσιολογικό, αν $I = (a,b)$ είναι ένα ανοικτό διάστημα να θέλουμε να ισχύει

$$\lambda^*(I) = b - a.$$

Θεωρούμε και το κενό σύνολο ως ανοικτό διαστημα θέτοντας $(a,a) = \varnothing$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αν τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ τυχόν, μπορούμε πάντα να καλύψουμε το A από αριθμήσιμα το πλήθος ανοικτά διαστήματα, δηλαδή μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $I_n = (a_n, b_n)$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μήκος» του A, άρα είναι λογικό να ζητήσουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \text{ για οποιαδήποτε τέτοια } \textit{κάλυψη } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ του } A.$$

Οδηγούμαστε λοιπόν φυσιολογικά στον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.1.3. Το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \; a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n \leqslant b_n \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\},$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$.

Οι βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4. (i) *Η απεικόνιση $\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$.*

(ii) *Για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leqslant b$ έχουμε*

$$\lambda^*([a, b]) = \lambda^*([a, b)) = \lambda^*((a, b]) = \lambda^*((a, b)) = b - a.$$

(iii) *Αν I είναι ένα μη φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda^*(I) = \infty$.*

Απόδειξη. (i) Οι ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου ελέγχονται ως εξής:

(α΄) Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\varnothing \subsetneq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Έτσι, με βάση τον ορισμό του λ^* (θέτουμε $a_1 = -\varepsilon, b_1 = \varepsilon$ και $a_n = b_n$ για κάθε $n \geqslant 2$) παίρνουμε

$$\lambda^*(\varnothing) \leqslant 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lambda^*(\varnothing) = 0$.

(β΄) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, τότε κάθε ακολουθία διαστημάτων που καλύπτει το B θα καλύπτει και το A. Έτσι, το $\lambda^*(A)$ θα είναι μικρότερο αφού παίρνουμε infimum πάνω από περισσότερα σύνολα. Πιο τυπικά, αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, τότε έχουμε επίσης $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Δηλαδή

$$\left\{((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\} \subseteq \left\{((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\},$$

άρα

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\} \geqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}.$$

Έτσι, $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$, δηλαδή το λ^* είναι μονότονο.

(γ΄) Έστω τώρα ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)=\infty$, το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)<\infty$. Τότε $\lambda^*(A_n)<\infty$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon>0$. Από τον ορισμό του λ^*, για κάθε $n\geqslant 1$ βρίσκουμε ακολουθία $(I_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ με $I_{n,j}=(a_{n,j},b_{n,j})$ ώστε

$$A_n\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{n,j}$$

και

$$\sum_{j=1}^{\infty}(b_{n,j}-a_{n,j})<\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τότε, η οικογένεια $(I_{n,j})_{(n,j)}$ είναι αριθμήσιμη (αφού το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο) και ισχύει

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n,j=1}^{\infty}I_{n,j}.$$

Άρα,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n,j}(b_{n,j}-a_{n,j})=\sum_n\left(\sum_j(b_{n,j}-a_{n,j})\right)\leqslant\sum_n\left(\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_n\lambda^*(A_n)+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

Άρα, πράγματι, το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(ii) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a\leqslant b$. Θα δείξουμε ότι $\lambda^*([a,b])=b-a$. Έστω $\varepsilon>0$. Έχουμε $[a,b]\subseteq\left(a-\frac{\varepsilon}{2},b+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, άρα $\lambda^*([a,b])\leqslant b-a+\varepsilon$. Αφού ξεκινήσαμε με τυχόν $\varepsilon>0$, έπεται ότι

$$\lambda^*([a,b])\leqslant b-a.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $I_n=(a_n,b_n)$, $n=1,2,\dots$ με $[a,b]\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\geqslant b-a.$$

Το διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές σύνολο, άρα το ανοικτό κάλυμμα $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε $[a,b]\subseteq\bigcup_{n=1}^{m}(a_n,b_n)$.

Ισχυρισμός. $\sum_{n=1}^{m}(b_n-a_n)\geqslant b-a$.

Θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς m. Για $m=1$ ο ισχυρισμός είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m=k$ και για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{n=1}^{k+1}(a_n,b_n).$$

Τότε υπάρχει $1\leqslant i\leqslant k+1$ ώστε $a\in(a_i,b_i)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $i=1$, δηλαδή ότι $a_1<a<b_1$. Αν $b_1\geqslant b$, τότε $(a,b)\subseteq(a_1,b_1)$, άρα

$$b-a<b_1-a_1\leqslant\sum_{n=1}^{k+1}(b_n-a_n).$$

Αν πάλι $b_1 < b$, τότε

$$[b_1, b] \subseteq \bigcup_{n=2}^{k+1}(a_n, b_n)$$

άρα, από την επαγωγική υπόθεση,

$$b - b_1 \leqslant \sum_{n=2}^{k+1}(b_n - a_n).$$

Έτσι, έχουμε

$$b - a < b - a_1 = (b_1 - a_1) + (b - b_1) \leqslant \sum_{n=1}^{k+1}(b_n - a_n),$$

όπως θέλαμε. Πράγματι λοιπόν ο ισχυρισμός αληθεύει.

Από τον ισχυρισμό έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \geqslant \sum_{n=1}^{m}(b_n - a_n) \geqslant b - a$, και τελικά $\lambda^*([a, b]) = b - a$.

Για το ανοικτό διάστημα (a, b) τώρα, αν $a < b$ τότε $a + \frac{1}{n} \leqslant b - \frac{1}{n}$ για μεγάλες τιμές του n. Έτσι, $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$ και από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου

$$\lambda^*\left(\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]\right) = b - a - \frac{2}{n} \leqslant \lambda^*((a, b)) \leqslant b - a.$$

Στέλνοντας το n στο ∞ έχουμε λοιπόν $\lambda^*((a, b)) = b - a$. Από τη μονοτονία του λ^* τώρα, είναι άμεσες και οι άλλες δύο ισότητες.

(iii) Κάθε μη φραγμένο διάστημα I περιέχει φραγμένα διαστήματα οσοδήποτε μεγάλου μήκους, δηλαδή για κάθε φυσικό n υπάρχει $a_n \in \mathbb{R}$ ώστε $(a_n, a_n + n) \subseteq I$. Έτσι $\lambda^*(I) \geqslant n$ για κάθε $n \geqslant 1$ και έπεται το ζητούμενο. □

Με τις ίδιες ιδέες, αλλά λίγο περισσότερο κόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε και το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$. Ένα *ανοικτό φραγμένο διάστημα* στον $\mathbb{R}^k$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$I = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$$

όπου $a_j \leqslant b_j \in \mathbb{R}$. Ο *όγκος* του διαστήματος I είναι ο αριθμός

$$\mathrm{v}(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_k - a_k).$$

Γενικότερα, ένα *διάστημα* στον $\mathbb{R}^k$ είναι ένα σύνολο της μορφής $I = \prod_{j=1}^{k} I_j$, όπου $I_1, I_2, \ldots, I_k$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και ο όγκος του είναι το γινόμενο των μηκών των διαστημάτων I_j (όπου κάνουμε τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$). Γενικεύοντας λοιπόν τον Ορισμό 3.1.3 διατυπώνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.1.5. Το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* $\lambda_k^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_k^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) : \ I_n \subseteq \mathbb{R}^k \text{ ανοικτό φραγμένο διάστημα } \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\},$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$.

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $\lambda_1^* = \lambda^*$. Μερικές φορές, χάριν απλότητας, γράφουμε και $\lambda_k^* = \lambda^*$.

Για να αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του λ_k^* (δηλαδή το ανάλογο της Πρότασης 3.1.4) θα χρειαστούμε το ακόλουθο γεωμετρικό λήμμα:

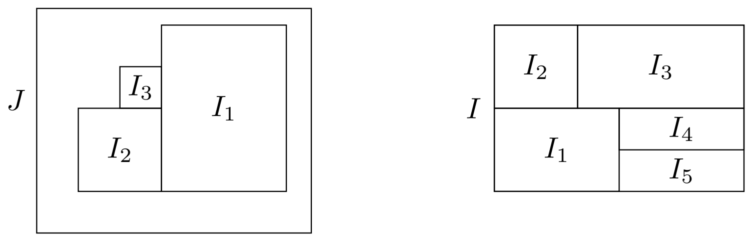
Λήμμα 3.1.6. (i) *Η οικογένεια Δ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ που γράφονται ως πεπερασμένες ξένες ενώσεις διαστημάτων είναι μια άλγεβρα στον $\mathbb{R}^k$.*

(ii) *Έστω I_j, $j = 1, 2, \dots, n$ ξένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$ η ένωσή τους και J ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ ώστε $I \subseteq J$. Τότε*

$$\sum_{j=1}^n \nu(I_j) \leqslant \nu(J)$$

και αν επιπλέον το I είναι διάστημα τότε ισχύει ισότητα:

$$\sum_{j=1}^n \nu(I_j) = \nu(I).$$



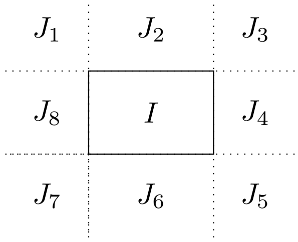
Σχήμα 3.1: Λήμμα 3.1.6 (ii)

Απόδειξη. (i) Είναι εμφανές ότι $\Delta \neq \varnothing$. Έστω $A, B \in \Delta$. Τότε, γράφουμε $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ και $B = \bigcup_{j=1}^m J_j$, όπου $(I_i)_i$ και $(J_j)_j$ οικογένειες ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}^k$. Γράφουμε

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} I_i \cap J_j,$$

όπου η $(I_i \cap J_j)_{(i,j)}$ είναι επίσης οικογένεια ξένων διαστημάτων στον $\mathbb{R}^k$. Έτσι, $A \cap B \in \Delta$, δηλαδή η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.

Για τα συμπληρώματα τώρα, παρατηρούμε ότι αν I είναι ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ τότε $I^c \equiv \mathbb{R}^k \setminus I \in \Delta$.



Σχήμα 3.2: Για κάθε διάστημα I είναι $I^c \in \Delta$.

Έτσι, $A^c = \bigcap_{i=1}^n I_i^c \in \Delta$ από τα παραπάνω. Άρα, πράγματι, η Δ είναι άλγεβρα.

Παρατήρηση 3.1.7. Έστω $\Delta' \supseteq \Delta$ η οικογένεια των πεπερασμένων ενώσεων διαστημάτων στον $\mathbb{R}^k$ (όχι αναγκαστικά ξένων). Τότε $\Delta = \Delta'$, διότι η Δ είναι άλγεβρα που περιέχει τα διαστήματα απ' όπου έπεται ότι $\Delta' \subseteq \Delta$. Έτσι, κάθε πεπερασμένη ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$ μπορεί να γραφεί και ως πεπερασμένη *ξένη* ένωση διαστημάτων.

(ii) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = m$ και θα το αποδείξουμε για $n = m + 1$. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τον $\mathbb{R}^k$ σε δύο ημιχώρους, ώστε η τομή του I με καθέναν από αυτούς να είναι ένωση m διαστημάτων, αντί για $m + 1$, και να εφαρμόσουμε εκεί την επαγωγική υπόθεση.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_j \neq \varnothing$ για κάθε j, αφού στην αντίθετη περίπτωση βρισκόμαστε στην περίπτωση $n = m$. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m + 1$ γράφουμε

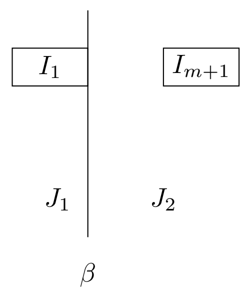
$$I_j = \prod_{\lambda=1}^{k} I_{j,\lambda},$$

όπου $I_{j,\lambda}$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$. Τότε,

$$I_1 \cap I_{m+1} = \left(\prod_{\lambda=1}^{k} I_{1,\lambda} \right) \cap \left(\prod_{\lambda=1}^{k} I_{m+1,\lambda} \right) = \prod_{\lambda=1}^{k} (I_{1,\lambda} \cap I_{m+1,\lambda}) = \varnothing.$$

Άρα, υπάρχει $1 \leqslant \lambda_0 \leqslant k$ ώστε $I_{1,\lambda_0} \cap I_{m+1,\lambda_0} = \varnothing$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το I_{1,λ_0} είναι «αριστερά» του I_{m+1,λ_0}. Αν β είναι το δεξιό άκρο του I_{1,λ_0}, θέτουμε

$$H_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ x_{\lambda_0} \leqslant \beta\} \text{ και } H_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ x_{\lambda_0} > \beta\}.$$



Σχήμα 3.3: Τα I_1 και I_{m+1} διαχωρίζονται από το υπερεπίπεδο $x_{\lambda_0} = \beta$.

Τότε, αφού $H_1 \cap I_{m+1} = \varnothing$ έχουμε

$$H_1 \cap I = \bigcup_{j=1}^{m} (H_1 \cap I_j) \subseteq H_1 \cap J$$

και όμοια, αφού $H_2 \cap I_1 = \varnothing$,

$$H_2 \cap I = \bigcup_{j=2}^{m+1} (H_2 \cap I_j) \subseteq H_2 \cap J.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε τις σχέσεις

$$\sum_{j=1}^{m} \nu(H_1 \cap I_j) \leqslant \nu(H_1 \cap J) \quad \text{και} \quad \sum_{j=2}^{m+1} \nu(H_2 \cap I_j) \leqslant \nu(H_2 \cap J),$$

άρα

$$\begin{aligned}
\nu(J) &= \nu(H_1 \cap J) + \nu(H_2 \cap J) \\
&\geqslant \sum_{j=1}^{m} \nu(H_1 \cap I_j) + \sum_{j=2}^{m+1} \nu(H_2 \cap I_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} \nu(H_1 \cap I_j) + \sum_{j=1}^{m+1} \nu(H_2 \cap I_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} (\nu(H_1 \cap I_j) + \nu(H_2 \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{m+1} \nu(I_j),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\nu(\varnothing) = 0$ και την ισότητα

$$\nu(K) = \nu(K \cap H_1) + \nu(K \cap H_2)$$

που ισχύει για κάθε διάστημα K του $\mathbb{R}^k$.

Αν τώρα το I είναι διάστημα, τότε το ίδιο ισχύει για τα $H_1 \cap I$ και $H_2 \cap I$. Έτσι, πάλι από την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{m} \nu(H_1 \cap I) = \nu(H_1 \cap I) \quad \text{και} \quad \sum_{j=2}^{m+1} \nu(H_2 \cap I_j) = \nu(H_2 \cap I).$$

Αθροίζοντας όπως παραπάνω, βλέπουμε ότι $\nu(I) = \sum_{j=1}^{m+1} \nu(I_j)$, και έπεται το ζητούμενο.

□

Χρησιμοποιώντας αυτό το (τεχνικό) λήμμα, παίρνουμε το εξής ανάλογο της Πρότασης 3.1.4:

Πρόταση 3.1.8. (i) *Η $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο στον $\mathbb{R}^k$.*

(ii) *Για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}^k$ ισχύει $\lambda^*(I) = \nu(I)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτή διαφέρει από την απόδειξη της Πρότασης 3.1.4 μόνο στον ισχυρισμό, που τώρα διαμορφώνεται ως εξής:

Ισχυρισμός. Έστω $K = \prod_{\lambda=1}^{k} [a_\lambda, b_\lambda]$ συμπαγές διάστημα στον $\mathbb{R}^k$. Αν $I_1, I_2, \ldots, I_n$ είναι ανοικτά φραγμένα διαστήματα με $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, τότε

$$\nu(K) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \nu(I_j).$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού, θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.6 (i) ώστε να «σπάσουμε» το $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ σε ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων και έπειτα το (ii) ώστε να πάρουμε το ζητούμενο.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα σύνολα

$$E_j = I_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} I_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

και παρατηρούμε ότι είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της Δ (αφού η Δ είναι άλγεβρα), $E_j \subseteq I_j$ για κάθε j, και επιπλέον ισχύει ότι $\bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{j=1}^n I_j$. Έτσι, από το Λήμμα 3.1.6 (i), κάθε E_j γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$. Έστω J_t, $t = 1, 2, \dots, m$ μια αρίθμηση όλων αυτών των διαστημάτων. Τότε, τα J_t είναι ξένα ανά δύο (εξηγήστε γιατί) και

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{t=1}^m J_t.$$

Έτσι, έχουμε $K = \bigcup_{t=1}^m (K \cap J_t)$, όπου τα $K \cap J_t$ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα. Τότε, από το (ii) του προηγούμενου λήμματος βλέπουμε ότι

$$\nu(K) = \sum_{t=1}^m \nu(K \cap J_t) \leqslant \sum_{t=1}^m \nu(J_t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\{t : J_t \subseteq I_j\}} \nu(J_t) = \sum_{j=1}^n \nu(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^n \nu(I_j),$$

όπως θέλαμε.

□

Πρόταση 3.1.9. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\lambda^*(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \prod_{\lambda=1}^k \left(x_n(\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

και συνεπώς, από τον ορισμό του λ^*,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \prod_{\lambda=1}^k \left(\left(x_n(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) - \left(x_n(\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(2\varepsilon)^k}{2^{nk}} = \frac{\varepsilon^k}{1 - 1/2^k}.$$

Αφού ξεκινήσαμε με τυχόν $\varepsilon > 0$ έχουμε πράγματι $\lambda^*(A) = 0$. □

3.1.2 Κατασκευή εξωτερικών μέτρων

Η ιδέα της κατασκευής του εξωτερικού μέτρου Lebesgue είναι ουσιαστικά να καλύψουμε κάθε σύνολο με μια αριθμήσιμη ένωση «καλών» συνόλων (διαστημάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση) των οποίων γνωρίζουμε το «μέτρο» και στη συνέχεια να δούμε πόσο καλή μπορεί να γίνει αυτή η προσέγγιση. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί ώστε να μας δώσει έναν «μηχανισμό» κατασκευής εξωτερικών μέτρων. Χρειαζόμαστε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός 3.1.10. Έστω $X \neq \varnothing$. Μια οικογένεια $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ υποσυνόλων του X λέγεται *σ-κάλυψη* του X αν

(i) $\varnothing \in C$, και

(ii) υπάρχουν $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{C}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Θεώρημα 3.1.11 (κατασκευή εξωτερικών μέτρων). *Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C}$ μια σ-κάλυψη του X και $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση με $\tau(\emptyset) = 0$. Η συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με*

$$\varphi(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \; C_n \in \mathcal{C} \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\}$$

για $A \subseteq X$ είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος, παρατηρήστε ότι, αφού η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη, η συνάρτηση φ είναι καλά ορισμένη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 3.1.4 (i) και είναι καλό να προσπαθήσετε να την κάνετε ως άσκηση. Την συμπληρώνουμε για λόγους πληρότητας.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 ελέγχονται ως εξής:

(i) Για το κενό σύνολο έχουμε $\emptyset \subseteq \bigcup_n \emptyset$, άρα $\varphi(\emptyset) \leqslant \sum_n \tau(\emptyset) = 0$. Συνεπώς, $\varphi(\emptyset) = 0$.

(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε, κάθε κάλυψη του B από στοιχεία της $\mathcal{C}$ είναι και κάλυψη του A, δηλαδή

$$\left\{(C_n)_n : C_n \in \mathcal{C} \text{ και } B \subseteq \bigcup_n C_n\right\} \subseteq \left\{(C_n)_n : C_n \in \mathcal{C} \text{ και } A \subseteq \bigcup_n C_n\right\}.$$

Συνεπώς, πράγματι $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$ (εξηγήστε γιατί).

(iii) Μένει να δείξουμε την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα της φ. Έστω $(A_n)_n$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Θα δείξουμε ότι $\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \varphi(A_n)$.

Αν $\sum_n \varphi(A_n) = \infty$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \varphi(A_n) < \infty$, οπότε έχουμε $\varphi(A_n) < \infty$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n βρίσκουμε ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{C}$, $(C_{n,j})_j$ ώστε $A_n \subseteq \bigcup_j C_{n,j}$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,J}) \leqslant \varphi(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τότε $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_{n,j} C_{n,j}$, άρα (αφού το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο) ισχύει ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,j})\right) \leqslant \sum_n \varphi(A_n) + \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

3.2 Μετρήσιμα σύνολα

Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, αναζητούμε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X ώστε ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{A}}$ να είναι μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$. Μια τέτοια σ-άλγεβρα υπάρχει πάντα (η τετριμμένη $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$), όμως θα θέλαμε να βρούμε μία αρκετά πιο «πλούσια» από αυτήν. Ο επόμενος ορισμός των *φ-μετρήσιμων συνόλων* σε συνδυασμό με το θεώρημα του Καραθεοδωρή 3.2.3 μας δίνει έναν «μηχανισμό» για να το πετύχουμε.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο σε ένα μη κενό σύνολο X. Ένα $B \subseteq X$ λέγεται *φ-μετρήσιμο* αν «κόβει σωστά» κάθε άλλο υποσύνολο του X, δηλαδή

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B),$$

για κάθε $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_\varphi$ την οικογένεια όλων των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Παρατηρήσεις 3.2.2. (α΄) Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου, η σχέση $\varphi(A) \leqslant \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c)$ ισχύει πάντα. Έτσι, για να δείξουμε ότι ένα $B \subseteq X$ είναι φ-μετρήσιμο αρκεί να ελέγξουμε την ανισότητα

$$\varphi(A) \geqslant \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B), \quad \text{για κάθε} \quad A \subseteq X.$$

Επιπλέον, η ανισότητα αυτή είναι προφανής στην περίπτωση που $\varphi(A) = \infty$. Συνεπώς, αρκεί να κοιτάξουμε μόνο εκείνα τα $A \subseteq X$ για τα οποία $\varphi(A) < \infty$.

(β΄) Από το (α΄) προκύπτει ότι κάθε $B \subseteq X$ με $\varphi(B) = 0$ είναι φ-μετρήσιμο, αφού από τη μονοτονία της φ έχουμε $\varphi(A \cap B) = 0$ και $\varphi(A \setminus B) \leqslant \varphi(A)$.

Θεώρημα 3.2.3 (Καραθεοδωρή). *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ της φ στην $\mathcal{M}_\varphi$ είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι άλγεβρα.

Για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε

$$\varphi(A \cap X) + \varphi(A \setminus X) = \varphi(A) + \varphi(\varnothing) = \varphi(A).$$

Άρα $X \in \mathcal{M}_\varphi$.

Αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ τότε για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) = \varphi(A \cap B^c) + \varphi(A \cap (B^c)^c),$$

συνεπώς $B^c \in \mathcal{M}_\varphi$.

Θεωρούμε τώρα $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ και θα δείξουμε ότι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$. Έστω $A \subseteq X$. Αφού $B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ έχουμε

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_1^c)$$

και αφού $B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$

$$\varphi(A \cap B_1) = \varphi(A \cap B_1 \cap B_2) + \varphi(A \cap B_1 \cap B_2^c).$$

Όμως, $(B_1 \cap B_2^c) \cup B_1^c = B_1^c \cup B_2^c = (B_1 \cap B_2)^c$, άρα η υποπροσθετικότητα της φ μας δίνει

$$\varphi(A \cap B_1 \cap B_2^c) + \varphi(A \cap B_1^c) \geqslant \varphi(A \cap [(B_1 \cap B_2^c) \cup B_1^c]) = \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c).$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)) + \varphi(A \cap B_1 \cap B_2^c) + \varphi(A \cap B_1^c) \\ &\geqslant \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)) + \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c). \end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 3.2.2 (α΄) έπεται ότι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$.

Βήμα 2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ είναι ξένα φ-μετρήσιμα σύνολα και $A \subseteq X$, τότε

$$\varphi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_2).$$

Ειδικότερα, η $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο, δηλαδή για ξένα $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ ισχύει ότι

$$\varphi(B_1 \cup B_2) = \varphi(B_1) + \varphi(B_2).$$

Χρησιμοποιώντας τις $B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ και $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\varphi(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \varphi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \varphi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c)\\ &= \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_2).\end{aligned}$$

Το δεύτερο συμπέρασμα έπεται αν θέσουμε $A = X$.

Παρατήρηση 3.2.4. Από το παραπάνω βήμα, έπεται με απλή επαγωγή ότι

$$\varphi\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(A \cap B_j)$$

για ξένα ανά δύο $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{M}_\varphi$ και κάθε $A \subseteq X$.

Βήμα 3. Η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα και η $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι μέτρο.

Σύμφωνα με το (iii) της Πρότασης 1.1.6, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(B_n)_n$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{M}_\varphi$ και $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ τότε $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και επιπλέον

$$\varphi(B) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(B_n). \tag{3.2.1}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(A \cap B_n) + \varphi(A \setminus B). \tag{3.2.2}$$

Από την πρώτη ισότητα έπεται ότι $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και από τη δεύτερη, θέτοντας $A = B$, παίρνουμε την (3.2.1).

Εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 3.2.4 για τα σύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ και $\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)^c$ που είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{M}_\varphi$ με ένωση το X βλέπουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύουν οι

$$\begin{aligned}\varphi(A) = \varphi(A \cap X) &= \sum_{j=1}^n \varphi(A \cap B_j) + \varphi\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)^c\right)\\ &\geqslant \sum_{j=1}^n \varphi(A \cap B_j) + \varphi(A \cap B^c).\end{aligned}$$

Στέλνοντας το n στο ∞ παίρνουμε

$$\varphi(A) \geqslant \sum_{j=1}^\infty \varphi(A \cap B_j) + \varphi(A \setminus B) \geqslant \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B) \geqslant \varphi(A),$$

όπου για τις τελευταίες ανισότητες χρησιμοποιήσαμε την σ-υποπροσθετικότητα της φ. Άρα τελικά ισχύει η πρώτη ζητούμενη ισότητα, δηλαδή $B \in \mathcal{M}_\varphi$. Θέτοντας $A = B$ στην τελευταία σχέση παίρνουμε και την (3.2.1).

Βήμα 4. Η $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι πλήρες μέτρο.

Έστω $B \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει $C \in \mathcal{M}_\varphi$ με $B \subseteq C$ και $\varphi(C) = 0$. Τότε, από τη μονοτονία της φ έπεται ότι $\varphi(B) = 0$ και συνεπώς $B \in \mathcal{M}_\varphi$ από την Παρατήρηση 3.2.2 (β′). □

Ορισμός 3.2.5. Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ λέγονται *Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.*

Εν γένει, το να ελεγχθεί κατά πόσον κάποιο δοσμένο σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Προς το παρόν, τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που γνωρίζουμε είναι μόνο το $\mathbb{R}^k$ και τα «αμελητέα», δηλαδή εκείνα που έχουν εξωτερικό μέτρο μηδέν. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η οικογένεια $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι ιδιαίτερα πλούσια.

Πρόταση 3.2.6. *Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$\Delta = \left\{ \prod_{j=1}^{k} (-\infty, b_j] : \ b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

γνωρίζουμε (από την Πρόταση 1.1.11) ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Συνεπώς, αφού η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι σ-άλγεβρα, για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Θεωρούμε λοιπόν ένα σύνολο $B = \prod_{j=1}^k (-\infty, b_j] \in \Delta$ και θα δείξουμε ότι είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή ότι

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B), \text{ για κάθε } A \subseteq \mathbb{R}^k \text{ με } \lambda^*(A) < \infty.$$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(A) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του λ^*, βρίσκουμε ακολουθία (I_n) ανοικτών φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$ ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Για κάθε n το $I_n \cap B$ είναι φραγμένο διάστημα (όχι απαραίτητα ανοικτό) ενώ το $I_n \setminus B$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση φραγμένων διαστημάτων από το Λήμμα 3.1.6 (i), δηλαδή

$$I_n \setminus B = \bigcup_{j=1}^{k_n} I_{n,j}, \text{ όπου } \ I_{n,j}, \ j = 1, 2, \ldots, k_n \text{ ξένα φραγμένα διαστήματα.}$$

Είναι εμφανές, ότι για κάθε φραγμένο διάστημα I του $\mathbb{R}^k$ μπορούμε να βρούμε ένα ανοικτό φραγμένο διάστημα J ώστε $I \subseteq J$ και η διαφορά $\mathrm{v}(J) - \mathrm{v}(I)$ να είναι οσοδήποτε μικρή. Βρίσκουμε λοιπόν ανοικτά και φραγμένα διαστήματα J_n και $J_{n,j}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $j = 1, 2, \ldots, k_n$ ώστε

$$I_n \cap B \subseteq J_n \quad \text{και} \quad I_{n,j} \subseteq J_{n,j}$$

και

$$\mathrm{v}(J_n) + \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(J_{n,j}) < \mathrm{v}(I_n \cap B) + \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(I_{n,j}) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \mathrm{v}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.6 (ii). Τότε όμως

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{και} \quad A \setminus B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} J_{n,j}$$

και συνεπώς

$$\lambda^*(A \cap B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(J_n) \quad \text{και} \quad \lambda^*(A \setminus B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \nu(J_{n,j}).$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu(J_n) + \sum_{j=1}^{k_n} \nu(J_{n,j}) \right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) + \varepsilon \\ &< \lambda^*(A) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ με το οποίο ξεκινήσαμε ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση του $\mathbb{R}$, δηλαδή για $k = 1$, το $I_n \setminus B$ είναι φραγμένο διάστημα, άρα η απόδειξη απλουστεύεται αρκετά.

Ορισμός 3.2.7. Ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ_k^* στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda_k^*}$ λέγεται *μέτρο Lebesgue* και συμβολίζεται με λ_k ή απλά με λ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το λ είναι πλήρες μέτρο. Μερικές φορές, ο περιορισμός του λ_k^* στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ θα λέγεται κι αυτός μέτρο Lebesgue.

Μια περιγραφή του εξωτερικού μέτρου Lebesgue με βάση τον περιορισμό του στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.8. *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), B \supseteq A\} = \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό με } G \supseteq A\}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $B \supseteq A$ έχουμε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B) = \lambda(B)$. Συνεπώς

$$\lambda^*(A) \leqslant \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), B \supseteq A\} \leqslant \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό με } G \supseteq A\}.$$

Έτσι, αν $\lambda^*(A) = \infty$ τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Θεωρούμε λοιπόν A με $\lambda^*(A) < \infty$ και τυχόν $\varepsilon > 0$, και θα βρούμε $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό με

$$\lambda^*(G) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Από τον ορισμό του λ^* βρίσκουμε ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και $\sum_n \nu(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon$. Θέτουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το G είναι ανοικτό, περιέχει το A και επιπλέον

$$\lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n \right) \leqslant \sum_n \nu(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Έτσι, $\inf\{\lambda(G) : G$ ανοικτό με $G \supseteq A\} \leqslant \lambda^*(A) + \varepsilon$ και για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

3.3 Εσωτερικό και εξωτερικό μέτρο

Το αποτέλεσμα της τελευταίας πρότασης μας δίνει την εξής κατάσταση: το εξωτερικό μέτρο ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^k$ ταυτίζεται με την «από πάνω» προσέγγιση του από το μέτρο συνόλων Borel και ανοικτών συνόλων. Η ιδέα αυτή οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για $A \subseteq X$ τυχόν ορίζουμε:

(i) το *εξωτερικό μέτρο του A ως προς μ*:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ και } B \supseteq A\}$$

(ii) το *εσωτερικό μέτρο του A ως προς μ*:

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ και } B \subseteq A\}.$$

Είναι άμεσο από τη μονοτονία του μ ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$ και αν επιπλέον $A \in \mathcal{A}$, τότε $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το εξωτερικό μέτρο μ^* του μ έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ και $\mu^*(A) = \mu(B)$.*

(ii) *Η συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ είναι πράγματι εξωτερικό μέτρο, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1.*

Απόδειξη. (i) Αν $\mu^*(A) = \infty$ τότε $\mu(X) = \infty$ (από τον ορισμό του μ^*), άρα για $B = X$ έχουμε το ζητούμενο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\mu^*(A) < \infty$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε $B_n \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B_n$ και

$$\mu(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \bigcap_n B_n \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι $A \subseteq B$, συνεπώς $\mu^*(A) \leqslant \mu(B)$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $B \subseteq B_n$, άρα $\mu(B) \leqslant \mu(B_n) \leqslant \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Έτσι,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(B) \leqslant \mu^*(A) + \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

και παίρνοντας $n \to \infty$ έχουμε πράγματι ότι $\mu(B) = \mu^*(A)$.

(ii) Οι ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 ελέγχονται ως εξής:

(α΄) Προφανώς $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(β΄) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}$ που καλύπτει το A_2 καλύπτει και το A_1, άρα $\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(A_2)$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό δείχνει ότι το μ^* είναι μονότονο.

(γ΄) Μένει να δείξουμε ότι το μ^* είναι υποπροσθετικό. Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X θα δείξουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Για κάθε n βρίσκουμε, σύμφωνα με το (i), σύνολο $B_n \in \mathcal{A}$ με $A_n \subseteq B_n$ και $\mu^*(A_n) = \mu(B_n)$. Τότε $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_n B_n\right) \leqslant \sum_n \mu(B_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n),$$

όπως θέλαμε.

□

Παρατήρηση 3.3.3. Έστω λ το μέτρο Lebesgue στον χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$. Τότε, το εξωτερικό μέτρο που ορίζει το λ σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 ταυτίζεται με το γνωστό μας εξωτερικό μέτρο Lebesgue (Ορισμός 3.1.5).

Πρόταση 3.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < \infty$. Τότε,*

$$A \in \mathcal{A}_\mu \iff \mu_*(A) = \mu^*(A).$$

Απόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Από τον ορισμό της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_\mu$ υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$ ώστε $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$. Τότε

$$\mu(E) \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu(F)$$

που μαζί με τη σχέση $\mu(E) = \mu(F)$ δίνει τη ζητούμενη ισότητα: $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

$(\Longleftarrow)$ Υποθέτουμε τώρα ότι $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$. Τότε, συνδυάζοντας τους δύο Ορισμούς 3.3.1, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε σύνολα $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ με $E_n \subseteq A \subseteq F_n$ και

$$\mu(F_n) - \mu(E_n) = \mu(F_n \setminus E_n) < \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τα σύνολα $E = \bigcup_n E_n$ και $F = \bigcap_n F_n$ και παρατηρούμε ότι $E \subseteq A \subseteq F$ και επιπλέον, για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\mu(F \setminus E) \leqslant \mu(F_n \setminus E_n) < \frac{1}{n}$$

από τη μονοτονία του μ. Έτσι, $\mu(F \setminus E) = 0$, άρα $A \in \mathcal{A}_\mu$. □

Παρατήρηση 3.3.5. Από την απόδειξη της τελευταίας πρότασης, προκύπτει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}_\mu$ έχουμε $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \overline{\mu}(A)$.

3.4 Το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, το θεώρημα επέκτασης μας δίνει μια διαδικασία κατασκευής μέτρων ουσιαστικά αντίστροφη από αυτήν του Θεωρήματος 3.2.3 του Καραθεοδωρή. Δίνουμε πρώτα τον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.4.1. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_0$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Μια συνάρτηση $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ λέγεται *προμέτρο* στο σύνολο X αν:

(i) $\mu_0(\varnothing) = 0$, και

(ii) αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}_0$ για τα οποία επιπλέον ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$, τότε

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Ειδικότερα, κάθε προμέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$.

Θεώρημα 3.4.2 (θεώρημα επέκτασης). *Έστω X μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}_0$ μια άλγεβρα στο X, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ η σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{A}_0$ και μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}_0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A_n \in \mathcal{A}_0 \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

για $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) *Η μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X.*

(ii) *Για κάθε $A \in \mathcal{A}_0$ ισχύει ότι $\mu^*(A) = \mu_0(A)$.*

(iii) *Αν $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων συνόλων τότε*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}. \tag{3.4.1}$$

Συνεπώς το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ είναι ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, το οποίο επεκτείνει το μ_0. Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα μοναδικότητας:

(iv) *Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, δηλαδή αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}_0$ με $X = \bigcup_n F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε n, τότε το μ είναι το μοναδικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που επεκτείνει το μ_0.*

Απόδειξη. (i) Είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.1.11 (κατασκευής εξωτερικών μέτρων).

(ii) Έστω $A \in \mathcal{A}_0$. Είναι σαφές ότι $\mu^*(A) \leqslant \mu_0(A)$, αφού η ακολουθία $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ είναι μια κάλυψη του A από στοιχεία της $\mathcal{A}_0$. Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε μια ακολουθία $(A_n)_n$ στην $\mathcal{A}_0$ με $A \subseteq \bigcup_n A_n$ και θα δείξουμε ότι

$$\mu_0(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Τότε $B_n \in \mathcal{A}_0$ για κάθε n, τα B_n είναι ξένα ανά δύο, $B_n \subseteq A_n$ για κάθε n και $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Άρα:

$$\mu_0(A) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n),$$

όπως θέλαμε. Άρα, πράγματι $\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$.

(iii) Γνωρίζουμε (από το Θεώρημα 3.2.3 του Καραθεοδωρή) ότι η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Επομένως, αφού $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$, για να δείξουμε τον εγκλεισμό (3.4.1) αρκεί να δείξουμε ότι

$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Έστω λοιπόν $A \in \mathcal{A}_0$ και $B \subseteq X$ με $\mu^*(B) < \infty$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mu^*(B) \geqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε μια ακολουθία (B_n) στην $\mathcal{A}_0$ με $B \subseteq \bigcup_n B_n$ και επιπλέον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Αφού όμως το μ_0 είναι προμέτρο, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap A^c) \geqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),$$

διότι $B_n \cap A, B_n \cap A^c \in \mathcal{A}_0$ για κάθε n. Άρα τελικά

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon$$

και για $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

(iv) Για τη μοναδικότητα, θεωρούμε ένα μέτρο ν στον χώρο $(X, \mathcal{A})$ με $\nu|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$ και χρησιμοποιούμε το θεώρημα μοναδικότητας (Πρόταση 2.2.1) για να δείξουμε ότι $\nu = \mu$. Η οικογένεια $\mathcal{A}_0$ είναι άλγεβρα, άρα είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, επίσης έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$ από την υπόθεση. Από την $\nu|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$ έχουμε $\nu(A) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}_0$. Τέλος, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}_0$ με $X = \bigcup_n F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε n, και έχουμε $\nu(F_n) = \mu(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο επίσης δείχνει ότι τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα. Από την Πρόταση 2.2.1 συμπεραίνουμε ότι $\nu = \mu$. □

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A^\circ \neq \varnothing$. Να δείξετε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

3.2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi_j : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, 3, 4$ με

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ 1, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases}, \quad \phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ \infty, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases},$$

$$\phi_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_4(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα και να βρείτε τις $\mathcal{M}_{\phi_j}$.

3.3. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\phi(A) = \limsup_n \frac{1}{n}|\{A \cap \{1, \dots, n\}|$, όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A. Εξετάστε αν η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο.

3.4. Θεωρούμε την οικογένεια C που αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\varnothing) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in C$. Η C είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(A)$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε τα μ^*-μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{N}$.

3.5. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue ίσο με μηδέν.

3.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

3.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι υπάρχει $A_0 \in \mathcal{A}$ με $A_0 \subseteq A$ και $\mu_*(A) = \mu(A_0)$.

3.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε ότι αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X τότε

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

Ομάδα Β΄.

3.9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Να δείξετε ότι για το $A' = \{x^2 : x \in A\}$ ισχύει ότι $\lambda(A') = 0$.

3.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X).$$

3.12. Δείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\lambda^*((a,b)) = \lambda^*((a,b) \cap A) + \lambda^*((a,b) \setminus A), \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

3.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ και $\alpha \in (0,1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(A \cap I) > \alpha\lambda(I).$$

3.14. Να δείξετε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I.

3.15. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι $\sigma-$πεπερασμένο, τότε στο (β) δεν χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

3.16. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται *$\phi-$μετρήσιμο κάλυμα* του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{M}_\phi \ \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν G_1 και G_2 είναι δύο $\phi-$μετρήσιμα καλύματα του ίδιου $E \subseteq X$, τότε

$$\mu(G_1 \triangle G_2) = 0.$$

(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G) < \infty$, τότε το G είναι $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα του E.

3.17. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_n \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει υπακολουθία (A_{k_n}) της (A_n) ώστε

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) > \alpha.$$

Ομάδα Γ΄.

3.18. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \Big).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

3.19. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) < \infty$ και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του A ώστε $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάποιο $c > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

3.20. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $a > 0$, το σύνολο $\{x \in A : |x| > a\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο χωρίς σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο,} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο με σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{M}_\phi = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Είναι σωστό ότι κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ϕ−μετρήσιμο κάλυμα;

3.21. Έστω Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε κάποιους τρόπους κατασκευής εξωτερικών μέτρων και μέτρων, με ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^k$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue και θα το χαρακτηρίσουμε μέσω αυτών. Στη συνέχεια θα στραφούμε στη μελέτη των εγκλεισμών

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$$

που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ιδιαίτερα «παθολογικά» σύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμα και Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel.

4.1 Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Ορισμός 4.1.1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X ώστε $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(X)$ και μ ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Το μ λέγεται *κανονικό μέτρο* αν:

(i) $\mu(K) < \infty$ για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.

(ii) Το μ ικανοποιεί τη συνθήκη *εξωτερικής κανονικότητας*, δηλαδή

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \text{ ανοικτό στο } X \text{ και } G \supseteq A\}, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

(iii) Το μ ικανοποιεί τη συνθήκη *εσωτερικής κανονικότητας*, δηλαδή

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq G\}, \text{ για κάθε } G \subseteq X \text{ ανοικτό.}$$

Η συνθήκη κανονικότητας ενός μέτρου μ, όταν ικανοποιείται, εκφράζει το γεγονός ότι το μ είναι συμβιβαστό με τη δομή του X ως μετρικού χώρου (ουσιαστικά, με την τοπολογία του).

Πρόταση 4.1.2. *Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό μέτρο. Επιπλέον, ισχύει ότι*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$$

(όχι μόνο για τα ανοικτά σύνολα).

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.6 ισχύει ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Κατά συνέπεια, έχει νόημα να ελέγξουμε τις ιδιότητες (i)-(iii) του Ορισμού 4.1.1:

(i) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^k$ συμπαγές σύνολο. Τότε, μπορούμε να βρούμε ένα μεγάλο φραγμένο διάστημα J του $\mathbb{R}^k$ ώστε $K \subseteq J$. Τότε, από τη μονοτονία του λ, έχουμε

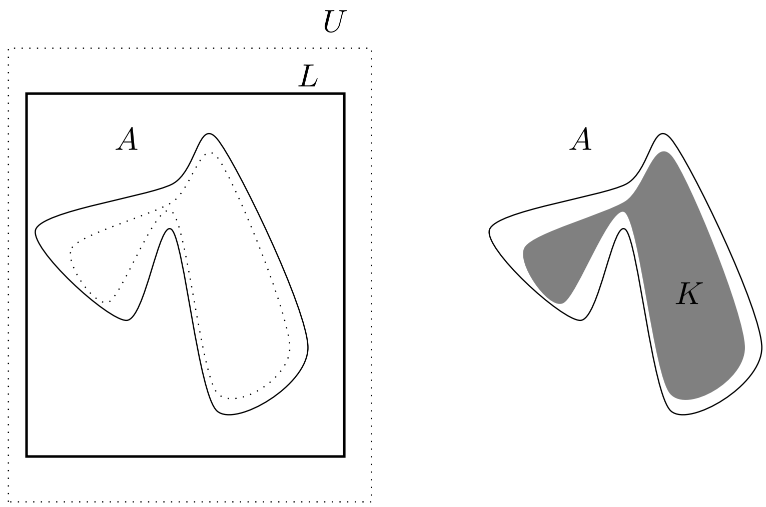
$$\lambda(K) \leqslant \lambda(J) = \nu(J) < \infty.$$

(ii) Αυτή είναι ακριβώς η ιδιότητα που αποδείξαμε στην Πρόταση 3.2.8, την οποία εδώ ζητάμε μόνο για τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(iii) Για την εσωτερική κανονικότητα, λόγω της μονοτονίας του λ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda(A) \leqslant \sup\{\lambda(K) : \ K \subseteq A \text{ συμπαγές}\}.$$

Θα υποθέσουμε αρχικά ότι το A είναι φραγμένο. Για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ανισότητα ψάχνουμε ένα κλειστό[1] σύνολο K μεσα στο A που να είναι «πολύ κοντά» στο A. Ισοδύναμα, ψάχνουμε ένα ανοικτό σύνολο G μεγαλύτερο από το A^c που να είναι πάλι «πολύ κοντά» στο A^c (ουσιαστικά $G = K^c$). Όμως, το A είναι φραγμένο οπότε αντί να βρούμε ένα τέτοιο ανοικτό σύνολο G μας αρκεί να περιοριστούμε σε ένα μεγάλο συμπαγές σύνολο L με $L \supseteq A$, να βρούμε ένα ανοικτό U «λίγο μεγαλύτερο» από τη διαφορά $L \setminus A$ και στη συνέχεια να θέσουμε K εκείνο το τμήμα του A που δεν τέμνει το U. Αυτό θα είναι αναγκαστικά «κοντά» στο A.



Σχήμα 4.1: Απόδειξη της εσωτερικής κανονικότητας για φραγμένα σύνολα

Γράφοντας τα παραπάνω πιο τυπικά, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε L συμπαγές με $L \supseteq A$ και U ανοικτό με $L \setminus A \subseteq U$ και επιπλέον

$$\lambda(U \setminus (L \setminus A)) < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $K = A \setminus U$. Παρατηρούμε ότι $K \subseteq A$ και $K = L \setminus U$ (εξηγήστε γιατί), συνεπώς το K είναι κλειστό. Επιπλέον, $A \setminus K \subseteq U \setminus (L \setminus A)$ και συνεπώς

$$\lambda(A \setminus K) \leqslant \lambda(U \setminus (L \setminus A)) < \varepsilon.$$

[1] Αφού το A είναι φραγμένο, θα είναι αυτόματα συμπαγές.

Στη γενική περίπτωση τώρα (όπου το A δεν είναι απαραίτητα φραγμένο), θέτουμε

$$A_n = A \cap B(0,n), \text{όπου } B(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 < n\}, \ n = 1, 2, \dots$$

Τότε, η ακολουθία (A_n) είναι αύξουσα και κάθε A_n είναι φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) = \sup_n \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A_n \text{ συμπαγές}\} \\ &= \sup\{\lambda(K) : \ K \subseteq A \text{ συμπαγές}\}.\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^k$ περιέχεται στο A αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subseteq A_n$. □

Χρησιμοποιώντας την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue είμαστε σε θέση να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση του χώρου $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ με τον χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda)$. Αποδείξαμε στην Πρόταση 3.2.6 ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$, αλλά στην πραγματικότητα ισχύει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.1.3. *Το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$.*

Απόδειξη. Ουσιαστικά μιλάμε για το ίδιο μέτρο στη μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$, δηλαδή με βάση τον Ορισμό 2.3.2 αρκεί να δείξουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχουν } E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \lambda(F \setminus E) = 0.$$

$(\Longrightarrow)$ Έστω $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\lambda(A) < \infty$. Τότε, από την Πρόταση 4.1.2 μπορούμε να βρούμε ακολουθίες (K_n), (G_n) με τα K_n συμπαγή και τα G_n ανοικτά, ώστε $K_n \subseteq A \subseteq G_n$ και

$$\lambda(G_n) - \lambda(K_n) = \lambda(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε (όπως έχουμε ξανακάνει) $E = \bigcup_n K_n$ και $F = \bigcap_n G_n$. Τότε, $E \subseteq A \subseteq F$, $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και

$$\lambda(F \setminus E) \leqslant \lambda(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Άρα $\lambda(F \setminus E) = 0$, δηλαδή $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$.

Αν τώρα το $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι τυχόν, γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{όπου } A_n = A \cap B(0,n).$$

Τότε, κάθε A_n είναι μετρήσιμο και φραγμένο, άρα $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ από τα παραπάνω. Αφού όμως η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ και έχουμε δείξει την $(\Longrightarrow)$.

$(\Longleftarrow)$ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ για το οποίο υπάρχουν $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\lambda(F \setminus E) = 0$. Γράφουμε $A = E \cup (A \setminus E)$. Τότε, $\lambda(A \setminus E) = 0$ από τη μονοτονία του λ, άρα $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και επιπλέον $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Έπεται ότι $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$. □

Στην πραγματικότητα αποδείξαμε τις εξής ισχυρότερες και πολύ χρήσιμες ισοδυναμίες:

Πρόταση 4.1.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε,*

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \iff \text{υπάρχει } E \supseteq A \;\; G_\delta \text{ σύνολο με } \lambda(E \setminus A) = 0$$

και

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \iff \text{υπάρχει } F \subseteq A \;\; F_\sigma \text{ σύνολο με } \lambda(A \setminus F) = 0.$$

Ορισμός 4.1.5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Κάθε μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B}(X))$ λέγεται *μέτρο Borel* στον X.

Πρόταση 4.1.6. *Το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ που ικανοποιεί την*

$$\lambda(I) = \mathrm{v}(I), \text{ για κάθε } I \text{ διάστημα στον } \mathbb{R}^k.$$

Απόδειξη. Πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος μοναδικότητας (Πρόταση 2.2.1). Θεωρούμε την οικογένεια

$$\Delta = \{I \subseteq \mathbb{R}^k : I \text{ διάστημα}\}.$$

Η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και έχουμε δει ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Αν μ είναι ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ με $\mu(I) = \mathrm{v}(I)$ για κάθε $I \in \Delta$, τότε $\mu(I) = \lambda(I)$ για κάθε $I \in \Delta$. Επιπλέον $\mathbb{R}^k = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n]^k$, όπου η $([-n, n]^k)_n$ είναι αύξουσα ακολουθία στην Δ και $\mu([-n, n]^k) = \lambda([-n, n]^k) = (2n)^k < \infty$ για κάθε n. Έτσι, από την Πρόταση 2.2.1 συμπεραίνουμε ότι $\lambda = \mu$. □

Παρατήρηση 4.1.7. Παρατηρήστε ότι κάθε πρόταση της μορφής

«Το λ είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα (P)»

συνεπάγεται την αντίστοιχη

«Το λ είναι το μοναδικό μέτρο στον χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα (P)».

Πράγματι, αν μ είναι ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα (P), τότε ο περιορισμός του μ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ έχει την (P), άρα $\mu\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)} = \lambda\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}$. Από τη μοναδικότητα της πλήρωσης (Πρόταση 2.3.3 (iii)) έπεται ότι $\mu = \lambda$ στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$.

Άρα, όταν στα επόμενα μια πρόταση μας εξασφαλίζει ότι το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα θα γνωρίζουμε ότι αυτόματα έχουμε και την αντίστοιχη μοναδικότητα στον χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα αποτέλεσμα που εντάσσεται στις λεγόμενες «τρεις αρχές του Littlewood»[2]. Το αποτέλεσμα αυτό λέει «χοντρικά» ότι

Κάθε μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ είναι σχεδόν ίσο με πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Φυσικά, μένει να διευκρινιστεί τι σημαίνει «σχεδόν ίσο». Η αυστηρή διατύπωση είναι η εξής:

Πρόταση 4.1.8. *Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα $J_1, J_2, \ldots, J_m$ ώστε*

$$\lambda(A \triangle (J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m)) < \varepsilon.$$ [3]

[2] Οι άλλες δύο είνα τα θεωρήματα του Egorov και του Luzin και θα αποδειχθούν στα Κεφάλαια 7 και 8 αντίστοιχα.

[3] Υπενθυμίζουμε ότι η *συμμετρική διαφορά* $\triangle$ δυο συνόλων X και Y ορίζεται ως

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, βρίσκουμε ακολουθία $(I_n)_n$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η σειρά των $\nu(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \nu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \setminus A \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \setminus A.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right)\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \nu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \setminus A\right) \leqslant \lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Όμως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.6 (i) μπορούμε να βρούμε ακολουθία ξένων ανά δύο διαστημάτων $J_1, J_2, \ldots, J_m$ ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{N} I_n = \bigcup_{n=1}^{m} J_m$$

και επιπλέον, αφού

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m} J_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{m} J_n^{\circ}\right)\right) = 0,$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $J_1, J_2, \ldots, J_m$ με τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή,

$$\lambda(A \triangle (J_1^{\circ} \cup J_2^{\circ} \cup \ldots \cup J_m^{\circ})) = \lambda\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right)\right) + \lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \setminus A\right) < \varepsilon.$$

□

4.2 Μέτρο Lebesgue και μετασχηματισμοί

Για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ορίζουμε

$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\},$$

το *άθροισμα* των A, B. Αν $B = \{x\}$, γράφουμε $A + x$ αντί του $A + \{x\}$, δηλαδή

$$A + x = \{a + x : a \in A\}$$

για τη μεταφορά του A κατά x. Για $x \in \mathbb{R}^k$ θεωρούμε την απεικόνιση $T_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ με $T_x(y) = y + x$, $y \in \mathbb{R}^k$. Η T_x είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη την T_{-x}. Από τη σχέση $A + x = T_x(A)$, συμπεραίνουμε τα εξής:

(i) $(\bigcup_n A_n) + x = \bigcup_n (A_n + x)$,

(ii) $(\bigcap_n A_n) + x = \bigcap_n (A_n + x)$ (αφού η T_x είναι 1-1),

(iii) $(A \setminus B) + x = (A + x) \setminus (B + x)$ και

(iv) $B^c + x = (B + x)^c$.

Επιπλέον, η T_x είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ το A είναι ανοικτό αν και μόνον αν το $A + x$ είναι ανοικτό.

Παρατήρηση 4.2.1. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \iff A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε μόνο τη συνεπαγωγή ($\Longrightarrow$), αφού $A = (A + x) - x$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στην $\mathcal{F}$ και από τις σχέσεις (i)-(iv) εύκολα βλέπει κανείς ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. □

Πρόταση 4.2.2. (i) *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, δηλαδή για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε*

$$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A).$$

(ii) *Το μέτρο Lebesgue λ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, δηλαδή:*

(α′) *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε*

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \iff A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$$

και

(β′) *για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε*

$$\lambda(A + x) = \lambda(A).$$

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε αρχικά ότι αν I είναι ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ τότε οι μεταφορές $I \pm x$ του I είναι επίσης ανοικτά και φραγμένα διαστήματα με $\nu(I) = \nu(I \pm x)$. Έτσι, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A + x) &= \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) : I_n \text{ ανοικτό φραγμένο διάστημα}, A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big\} \\
&= \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n - x) : I_n - x \text{ ανοικτό φραγμένο διάστημα}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n - x)\Big\} \\
&= \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(J_n) : J_n \text{ ανοικτό φραγμένο διάστημα}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\Big\} \\
&= \lambda^*(A).
\end{aligned}$$

(ii) Για το (α΄), θεωρούμε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^k$ και για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}^k$ θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap (A + x)) + \lambda^*(B \setminus (A + x)).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda^*(B) = \lambda^*(B - x) &= \lambda^*((B - x) \cap A) + \lambda^*((B - x) \setminus A)\\ &= \lambda^*((B \cap (A + x)) - x) + \lambda^*((B \setminus (A + x)) - x)\\ &= \lambda^*(B \cap (A + x)) + \lambda^*(B \setminus (A + x)),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε αρκετές φορές το (i). Άρα πράγματι $A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Το (β΄) προκύπτει τώρα άμεσα από το (i) και το (α΄). □

Από την Πρόταση 4.2.2 (i) και την Παρατήρηση 3.2.1 είναι άμεσο ότι το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ είναι επίσης αναλλοίωτο ως προς μεταφορές. Πολύ ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι το λ είναι *ουσιαστικά* το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ που έχει αυτή την ιδιότητα. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα που είναι ένα ανάλογο της πρότασης:

Κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Λήμμα 4.2.3. *Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων της μορφής:*

$$\Delta(n, p_1, p_2, \ldots, p_k) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \frac{p_i}{2^n} \leqslant x_i < \frac{p_1 + 1}{2^n}, i = 1, 2, \ldots, k\right\}, \tag{4.2.1}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό. Θα γράψουμε το G ως αριθμήσιμη ξένη ένωση συνόλων της μορφής (4.2.1). Για $n \in \mathbb{N}$ σταθερό θεωρούμε την οικογένεια Δ_n υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ με

$$\Delta_n = \{\Delta(n, p_1, p_2, \ldots, p_k) : p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Τα στοιχεία της Δ_n ορίζουν ένα «πλέγμα» στον $\mathbb{R}^k$ που επάγει μια διαμέριση του χώρου σε k-διάστατους κύβους όγκου $1/2^{nk}$. Επίσης, αν $n < m$ τότε η διαμέριση Δ_m είναι *λεπτότερη* από την Δ_n, με την εξής έννοια: αν $A \in \Delta_n$ και $B \in \Delta_m$ με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $B \subseteq A$ (εξηγήστε γιατί).

Θα «εξαντλήσουμε» το σύνολο G από μέσα με τέτοιους κύβους. Ξεκινάμε με τους μεγαλύτερους ($n = 1$): θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E}_1 = \{A \in \Delta_1 : A \subseteq G\}.$$

Η $\mathcal{E}_1$ είναι σίγουρα αριθμήσιμη (αφού περιέχεται στην Δ_1), αλλά ενδέχεται να είναι κενή. Στη συνέχεια, ψάχνουμε τους αμέσως μικρότερους κύβους ($n = 2$) που περιέχονται στο G, αλλά δεν τέμνουν αυτούς που βρήκαμε πριν (θυμηθείτε ότι θέλουμε ξένη ένωση). Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\mathcal{E}_2 = \{A \in \Delta_2 : A \subseteq G \text{ και } A \cap B = \emptyset \text{ για κάθε } B \in \mathcal{E}_1\}.$$

Γενικά, αν οι $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ έχουν οριστεί, θεωρούμε την οικογένεια των αμέσως μικρότερων κύβων

$$\mathcal{E}_{n+1} = \left\{ A \in \Delta_{n+1} : A \subseteq G \text{ και } A \cap B = \varnothing \text{ για κάθε } B \in \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \right\}.$$

Κάθε $\mathcal{E}_n$ είναι φυσικά αριθμήσιμη και $\mathcal{E}_n \subseteq \Delta_n$, συνεπώς

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Έτσι, η $\mathcal{E}$ αποτελείται από αριθμήσιμα το πλήθος ξένα διαστήματα της μορφής (4.2.1) που περιέχονται στο G. Θα δείξουμε ότι

$$G = \bigcup \mathcal{E} = \bigcup \{A : A \in \mathcal{E}\}.$$

Έστω $x \in G$. Το G είναι ανοικτό, άρα υπάρχει μπάλα κέντρου x που περιέχεται στο G, συνεπώς μπορούμε να βρούμε σύνολα $C \in \bigcup_n \Delta_n$ ώστε $C \subseteq G$ και $x \in C$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε τον ελάχιστο φυσικό n_0 για τον οποίο υπάρχει $A \in \Delta_{n_0}$ με $A \subseteq G$ και $x \in A$. Τότε έχουμε $A \in \mathcal{E}_{n_0}$, διότι αν υπήρχαν $l < n_0$ και $B \in \Delta_l$ ώστε $A \cap B \neq \varnothing$ τότε θα είχαμε $A \subseteq B$ και συνεπώς $x \in B$, το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του n_0. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $x \in \bigcup \mathcal{E}_{n_0} \subseteq \bigcup \mathcal{E}$. Άρα, πράγματι ισχύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές διαστημάτων, δηλαδή*

$$\mu(I + x) = \mu(I), \text{ για κάθε } I \text{ διάστημα και } x \in \mathbb{R}^k$$

και ότι $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε υπάρχει $a \geqslant 0$ ώστε $\mu = a \cdot \lambda$, δηλαδή

$$\mu(A) = a \cdot \lambda(A), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν υποθέσουμε ότι ισχύει το ζητούμενο, τότε για το σύνολο

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leqslant x_i < 1, i = 1, 2, \dots, k\}$$

έχουμε $\mu(D) \leqslant \mu(\overline{D}) < \infty$ (αφού το $\overline{D}$ είναι συμπαγές) και $\mu(D) = a \cdot \lambda(D) = a \geqslant 0$. Θέτουμε λοιπόν $a = \mu(D) < \infty$.

Αν $a = 0$, τότε $\mu(\mathbb{R}^k) = 0$, αφού ο $\mathbb{R}^k$ γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μεταφορών του D. Έπεται ότι $\mu = 0$ από τη μονοτονία του μέτρου.

Αν $a > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ με $\nu(A) = \frac{1}{a} \cdot \mu(A)$ για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Εύκολα βλέπουμε ότι το ν είναι μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ που είναι επιπλέον αναλλοίωτο ως προς μεταφορές διαστημάτων. Θα δείξουμε ότι $\nu = \lambda$. Για $n \in \mathbb{N}$, το $[-n, n)^k$ γράφεται ως ξένη ένωση $(2n)^k$ το πλήθος μεταφορών του D, άρα από την υπόθεση παίρνουμε

$$\nu([-n, n)^k) = (2n)^k \nu(D) = (2n)^k = \lambda([-n, n)^k)$$

και συνεπώς, από το θεώρημα μοναδικότητας (Πρόταση 2.2.1) αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(G) = \lambda(G)$ για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό. Με βάση το Λήμμα 4.2.3, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\nu(\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k)) = \lambda(\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$. Για $n \in \mathbb{N}$ και $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$ το $\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k)$ είναι μια μεταφορά του $\Delta(n, 0, 0, \dots, 0)$, άρα

$$\nu(\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k)) = \nu(\Delta(n, 0, 0, \dots, 0)).$$

Όμως, το D γράφεται ως ξένη ένωση 2^{nk} αντιτύπων του του $\Delta(n, 0, 0, \dots, 0)$, άρα

$$1 = \nu(D) = 2^{nk} \nu(\Delta(n, 0, 0, \dots, 0)).$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\nu(\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k)) = \frac{1}{2^{nk}} = \lambda(\Delta(n, p_1, p_2, \dots, p_k)),$$

όπως θέλαμε. □

Για $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $\rho \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho \cdot A = \{\rho \cdot a : a \in A\}.$$

Γι' αυτή την πράξη ισχύουν όλες οι ιδιότητες (i)-(iv) που αναφέραμε για το άθροισμα δύο συνόλων. Μπορούμε επίσης να δείξουμε, ακριβώς όπως πριν, ότι οι σ-άλγεβρες $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ διατηρούνται αναλλοίωτες από αυτή την πράξη (άσκηση).

Πρόταση 4.2.5. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $\rho \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει η σχέση*

$$\lambda^*(\rho \cdot A) = |\rho|^k \cdot \lambda^*(A).$$

Απόδειξη. Για $\rho = 0$ η ισότητα είναι προφανής. Για $\rho \neq 0$, παρατηρούμε ότι για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_k, b_k)$$

έχουμε

$$\rho \cdot I = (|\rho| a_1, |\rho| b_1) \times (|\rho| a_2, |\rho| b_2) \times \ldots \times (|\rho| a_k, |\rho| b_k),$$

άρα $\mathrm{v}(\rho \cdot I) = |\rho|^k \mathrm{v}(I)$. Η συνέχεια είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.2 (i). □

Γενικότερα, αν $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, αποδεικνύεται ότι $T(A) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (αφήνεται ως άσκηση). Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας του T: αν $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leqslant x_i < 1, i = 1, 2, \dots, k\}$ τότε

$$\mathrm{v}(T(D)) = |\det(T)|.$$

Η απλή αυτή ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 4.2.6. *Αν $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, τότε*

$$\lambda(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda(A).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\det(T) \neq 0$ και θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μοναδικότητας 4.2.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ με $\mu(A) = \lambda(T(A))$. Εύκολα βλέπουμε ότι το μ είναι μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ και επιπλέον για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$\mu(A + x) = \lambda(T(A + x)) = \lambda(T(A) + T(x)) = \lambda(T(A)) = \mu(A)$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταφορές και τη γραμμικότητα του T. Από το Θεώρημα 4.2.4 έπεται ότι

$$\mu(A) = a \cdot \lambda(A),$$

όπου $a = \mu(D) = \lambda(T(D)) = |\det(T)|$. Έτσι, έχουμε το ζητούμενο.

Αν τώρα $\det(T) = 0$, θα δείξουμε ότι $\mu = 0$ ή ισοδύναμα ότι $\lambda(T(\mathbb{R}^k)) = 0$. Αφού $\det(T) = 0$, ο T δεν είναι επί και από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι υπάρχει $m < k$ ώστε (χωρίς βλάβη της γενικότητας κάνουμε αλλαγή βάσης)

$$T(\mathbb{R}^k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0) : x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

όπου

$$J_n = [-n, n] \times [-n, n] \times \dots \times [-n, n] \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

Άρα,

$$\lambda(T(\mathbb{R}^k)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(J_n) = 0,$$

όπως θέλαμε. Αυτό δείχνει ότι $\mu = 0$. $\square$

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα θεώρημα που δίνει πληροφορίες για τη δομή των συνόλων θετικού μέτρου Lebesgue. Η πρώτη εντύπωση που ίσως έχει κανείς είναι ότι ένα σύνολο θετικού μέτρου Lebesgue αναγκαστικά περιέχει μια ανοικτή μπάλα, το οποίο φυσικά είναι λάθος (ένα παράδειγμα μας δίνει το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$). Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ισχύει κάτι ασθενέστερο αλλά παρ' όλα αυτά ιδιαίτερα χρήσιμο.

Θεώρημα 4.2.7 (Steinhaus). *Αν A είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$B(0, \delta) \subseteq A - A.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$. Στην περίπτωση που ισχύει $\lambda(A) = \infty$ μπορούμε να βρούμε (από την εσωτερική κανονικότητα για παράδειγμα) $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ με $B \subseteq A$ και $0 < \lambda(B) < \infty$. Έτσι, αν για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει $B(0, \delta) \subseteq B - B$ θα έχουμε σίγουρα και $B(0, \delta) \subseteq A - A$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \lambda(A) < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue. Έστω $0 < \varepsilon < \lambda(A)$. Από την Πρόταση 4.1.2, υπάρχουν $K \subseteq \mathbb{R}^k$ συμπαγές και $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό ώστε $K \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon, \quad \lambda(K) > \lambda(A) - \varepsilon.$$

Έχουμε $K \cap G^c = \varnothing$, το K είναι συμπαγές και το G^c κλειστό, άρα η απόσταση των δύο συνόλων είναι γνήσια θετική:

$$\delta := \mathrm{dist}(K, G^c) > 0.$$

Έτσι, για κάθε $z \in K$ έχουμε $B(z,\delta) \subseteq G$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι το δ που ψάχνουμε. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ με $\|x\| < \delta$ γράφεται ως διαφορά δύο στοιχείων του A. Θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο:

Ισχυρισμός. $B(0,\delta) \subseteq K - K$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^k$ με $\|x\| < \delta$. Θα βρούμε $z_1, z_2 \in K$ ώστε $x = z_1 - z_2$. Ισοδύναμα, ψάχνουμε $z \in K$ τέτοιο ώστε $x + z \in K$. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο z, τότε $K \cap (K + x) = \varnothing$ και συνεπώς

$$\lambda(K \cup (K + x)) = \lambda(K) + \lambda(K + x) = 2\lambda(K) > 2\lambda(A) - 2\varepsilon$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταφορές. Όμως $K \subseteq G$ και επιπλέον $K + x \subseteq G$, αφού αν $y \in K + x$, υπάρχει $z \in K$ ώστε $\|y - z\| = \|x\| < \delta$ το οποίο συνεπάγεται ότι $y \in G$. Άρα,

$$\lambda(K \cup (K + x)) \leqslant \lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Τελικά, έχουμε

$$2\lambda(A) - 2\varepsilon < \lambda(A) + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda(A) < 3\varepsilon.$$

Εφ' όσον το $\varepsilon > 0$ με το οποίο ξεκινήσαμε ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda(A) = 0$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση. □

4.3 Μη μετρήσιμα σύνολα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ και είδαμε τους εγκλεισμούς

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k).$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτή την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου. Η κατασκευή βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής. *Έστω $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο X_a. Δηλαδή, υπάρχει* **συνάρτηση επιλογής** *$f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.*

Σημείωση. Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θεώρημα 4.3.1 (Vitali). *Υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathbb{R}^k$ ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^k.$$

Η $\sim$ χωρίζει τον $\mathbb{R}^k$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}^k\}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}^k$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}^k$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}^k$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.

2. $\mathbb{R}^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^k$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}^k$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E).$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το Θεώρημα Steinhaus, το $E - E$ περιέχει ανοικτή μπάλα $B(0, \delta)$ για κάποιον $\delta > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι υπάρχουν μη μηδενικά ρητά σημεία $q \in \mathbb{Q}^k \cap B(0, \delta)$ και το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό σημείο διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. □

Παρατήρηση 4.3.2. Μιμούμενοι αυτή την απόδειξη μπορούμε να δείξουμε το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με θετικό μέτρο υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subsetneq A$.

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Μπορούμε, με παρόμοιο τρόπο, να αποδείξουμε π.χ. την ύπαρξη μη μετρήσιμου $E \subsetneq [0, 1]$, αποφεύγοντας την χρήση του Θεωρήματος Steinhaus.

Δεύτερη απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0, 1]$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1, 1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0, 1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0, 1] \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset [0, 1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ και την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. $E_n \subseteq [-1, 2]$.

2. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$.

3. $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in [0, 1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Υποθέτουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$1 = \lambda([0, 1]) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E) \leqslant 3,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι είτε ίσο με 0 (αν $\lambda(E) = 0$) είτε με $+\infty$ (αν $\lambda(E) > 0$). Συνεπώς, το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

4.4 Μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνήσιος, δηλαδή ότι υπάρχουν μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις γι' αυτόν τον ισχυρισμό, μια συνολοθεωρητική που χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των διατακτικών αριθμών και μια κατασκευαστική που βασίζεται στη συνάρτηση Cantor-Lebesgue που ορίζουμε στην Παράγραφο 4.4.2. Και για τις δύο αυτές αποδείξεις χρειαζόμαστε μερικές βασικές ιδιότητες του συνόλου του Cantor το οποίο θα κατασκευάσουμε.

4.4.1 Το σύνολο του Cantor

§1. Κατασκευή του συνόλου του Cantor

Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $(1/3, 2/3)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1/3]$ και $[2/3, 1]$ σε τρία ίσα διαστήματα και, από καθένα από αυτά, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μια ακολουθία (C_n) κλειστών συνόλων με τις εξής ιδιότητες:

1. $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

2. Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το *σύνολο του Cantor* είναι το σύνολο
$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Σημείωση. Τα διαστήματα της μορφής $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

§2. Ιδιότητες του συνόλου του Cantor

Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. □

(2) *Το C έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με* 0.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,
$$\lambda^*(C) \leqslant \lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda^*(C) = 0$. □

Παρατήρηση. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο
$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\}.$$

Το $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτή την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^\infty \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n=1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x)=[0,1/3]$ (δηλαδή, αν $x\in[0,1/3]$) και $\alpha_1^x=2$ αν $I_1(x)=[2/3,1]$ (δηλαδή, αν $x\in[2/3,1]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x)=[k/3^n,(k+1)/3^n]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $[k/3^n,(k/3^n)+(1/3^{n+1})]$, $[(k/3^n)+(2/3^{n+1}),(k+1)/3^n]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x=0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x=2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x\neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x)\neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x-y|\leqslant \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x)\neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x\neq\alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^\infty$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^\infty$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi: C\to\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x)=(\alpha_n^x)_{n=1}^\infty$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^\infty$ με $I_1\supset I_2\supset\cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n=1$: Θέτουμε $I_1=[0,1/3]$ αν $\alpha_1=0$ ή $I_1=[2/3,1]$ αν $\alpha_1=2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1}=0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1}=2$.

Αφού τα μήκη των κιβωτισμένων διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^\infty I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n\subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x\in C$. Επίσης, $I_n(x)=I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^\infty=(\alpha_n^x)_{n=1}^\infty=\Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Ειδικότερα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. □

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

§3. Τριαδική παράσταση αριθμού

Αν $(a_n)_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία με $a_n\in\{0,1,2\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x\in[0,1]$. Αν $x=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{3^n}$ με $a_n\in\{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^\infty$) λέγεται *τριαδική παράσταση* του x. Γράφουμε $x=(a_1,a_2,\ldots)$ αντί της $x=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^\infty$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1=\begin{cases}0, & x\in[0,1/3]\\ 1, & x\in(1/3,2/3)\\ 2, & x\in[2/3,1].\end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{a_1}{3}+\frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0,1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leqslant x \leqslant \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε τη δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leqslant k \leqslant 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

§4. Υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού χρειαζόμαστε το εξής συνολοθεωρητικό λήμμα:

Λήμμα 4.4.2. *Αν X είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε $|\mathcal{B}(X)| \leqslant \mathfrak{c}$, όπου $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ το συνεχές. Πιο συγκεκριμένα, αν $X = \mathbb{R}$, έχουμε $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ στο X. Τότε, η οικογένεια

$$C = \{B(x_n, q_m) : n, m = 1, 2, \dots\},$$

όπου $\{q_m : m = 1, 2, \dots\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X, δηλαδή κάθε ανοικτό σύνολο στο X γράφεται ως ένωση στοιχείων της C (εξηγήστε γιατί). Κατά συνέπεια, κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στην $\sigma(C)$, άρα $\mathcal{B}(X) = \sigma(C)$. Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό α ορίζουμε υποοικογένεια $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}(X)$ ως εξής: $\mathcal{B}_0 = C$,

$$\mathcal{B}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{B}_\alpha$$

για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό β και $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων και των συμπληρωμάτων στοιχείων της $\mathcal{B}_\alpha$. Αποδεικνύεται τότε ότι κάθε $\mathcal{B}_\alpha$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το συνεχές και ότι

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \text{ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός}\}.$$

Επομένως, πράγματι, η $\mathcal{B}(X)$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το συνεχές, δηλαδή $|\mathcal{B}(X)| \leqslant \mathfrak{c}$.

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ τώρα, η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\phi(x) = (-\infty, x)$ είναι $1-1$, άρα $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leqslant |\mathcal{B}(\mathbb{R})|$. Η ισότητα $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ έπεται τώρα από το Θεώρημα Schröder-Bernstein. □

Πρόταση 4.4.3. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι Borel.*

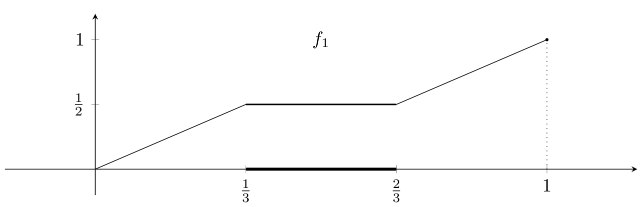
Απόδειξη. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, από την πληρότητα του λ και τη σχέση $\lambda(C) = 0$ συμπεραίνουμε ότι

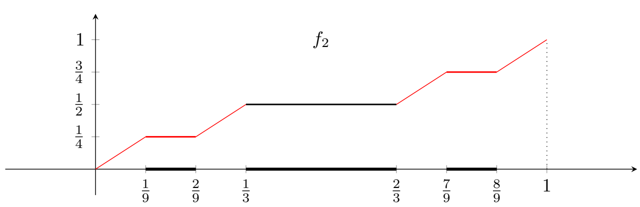
$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}.$$

Συνεπώς, $|\mathcal{M}_{\lambda^*}| \geqslant |\mathcal{P}(C)| > |C| = \mathfrak{c}$. Ο ζητούμενος γνήσιος εγκλεισμός έπεται από το προηγούμενο λήμμα: θυμηθείτε ότι $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$. □

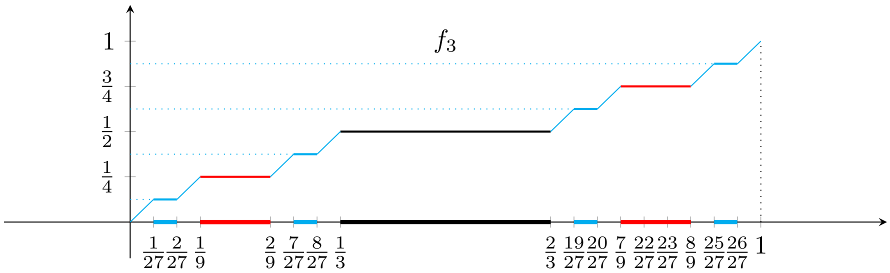
4.4.2 Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \dots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.





Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3, 2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0) = 0$ και $f(1/3) = 1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3) = 1/2$ και $f(1) = 1$.



Σχήμα 4.2: Κατασκευή της συνάρτησης Cantor-Lebesgue

Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1]\setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0)=0$ και $f_2(1)=1$.

Πρόταση 4.4.4. *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C))=1$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$.

2. Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και
$$f_n\equiv f_{n+1}\equiv f_{n+2}\equiv\cdots$$
στο J_k^n.

3. Ισχύει
$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^n},\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m>n$ τότε
$$\|f_m-f_n\|_\infty\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\|f_{k+1}-f_k\|_\infty\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$$
όταν $m,n\to\infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n\to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C)=[0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y\in[0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x\in C$. Από την $f(C)=[0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C))=1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1]\setminus C)=1$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x\notin C$. Πράγματι, αν $x\notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x) = 0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 4.4.5. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$, το $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 4.4.6. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1] \setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \sum \lambda(J) = 1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 4.4.5 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

4.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

4.1. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

4.2. Δώστε παράδειγμα Lebesgue μετρήσιμου υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $\pi_1(A)$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμο, όπου $\pi_1(x,y) = x$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη).

4.3. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $\frac{1}{4} \in C$, παρόλο που το $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα διαστήματα που ορίζουν το σύνολο του Cantor.

4.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \geqslant \delta$.

Ομάδα Β΄.

4.5. Έστω E, F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = a$.

4.6. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

(β) Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{m}$ ανοικτών διαστημάτων με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad \text{ισχύει} \quad \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n) \geqslant 1.$$

4.7. Έστω $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει $B \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$ να έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $|x - q_n| \geqslant 1/n^2$.

4.8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(ii) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

4.9. Έστω G μη κενό, φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.

(α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών η οποία καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

4.10. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

4.11. Αν C είναι το σύνολο του Cantor δείξτε ότι $C - C = [-1,1]$ και συνεπώς δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus.

4.12. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

4.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Ομάδα Γ΄.

4.14. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Το όριο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x)=0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Έστω $0<\alpha<1$. Κατασκευάστε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0)=\alpha$.

4.15. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)<\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n).$$

4.16. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(E)<\infty$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\lambda(E\cap(E+t))=\lambda(E).$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχουν $x,s\in\mathbb{R}$ ώστε

$$x,x+s,x+2s,\dots,x+(k-1)s\in E.$$

4.17. Έστω μ ένα μη αρνητικό μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R})=1$. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F)=1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(F)<1$.

4.18. Έστω E, F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E)>0$ και $\lambda(F)>0$. Δείξτε ότι το $E+F$ περιέχει διάστημα.

4.19. Δείξτε ότι: αν $\lambda(E)>0$ και για κάθε $x,y\in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x+y)\in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

4.20. Έστω E το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι $\lambda(E)=0$.

4.21. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A=\{t\in[0,1]:\ \text{υπάρχει } x\in[0,1] \text{ ώστε } f(x+t)=f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα και μετρήσιμο.

(β) Αν $B=\{t\in[0,1]:\ 1-t\in A\}$, δείξτε ότι $A\cup B=[0,1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\lambda(A)\geqslant 1/2$.

4.22. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\right)=0.$$

4.23. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$ ισχύει ότι

$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Σε κάθε κλάδο των Μαθηματικών, εκτός από τα διάφορα αντικείμενα που μελετάμε ασχολούμαστε και με τις «καλές» συναρτήσεις μεταξύ αυτών, δηλαδή εκείνες τις συναρτήσεις που σέβονται τη δομή των αντικειμένων. Στην Τοπολογία αυτές είναι οι συνεχείς συναρτήσεις, στη Διαφορική Γεωμετρία οι διαφορίσιμες συναρτήσεις, στη Θεωρία Ομάδων οι ομομορφισμοί ομάδων κ.ο.κ. Το αντίστοιχο αντικείμενο στη Θεωρία Μέτρου είναι οι *μετρήσιμες συναρτήσεις*. Οι μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αυτές για τις οποίες θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Θυμηθείτε, από την Εισαγωγή, ότι η βασική ιδέα του Lebesgue ήταν να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_X f$ μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα σύνολο X από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{t-1} y_k \mu(\{x \in X : y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}\})$$

όπου $\{y_0 < y_1 < \cdots < y_t\}$ είναι μια διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Για μια τέτοια συνάρτηση λοιπόν, καταλαβαίνουμε ότι απαιτούνται τα εξής:

1. Η f θα πρέπει να ορίζεται σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και να λαμβάνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$.
2. Τα σύνολα
$$B_k = \{x \in X : y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}\}$$
πρέπει να είναι μετρήσιμα (για οποιαδήποτε επιλογή των y_k, y_{k+1}), δηλαδή στοιχεία της $\mathcal{A}$.

Φυσικά, στη συνέχεια, όταν θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θα απαιτούμε και την ύπαρξη ενός μέτρου μ στο $(X, \mathcal{A})$ για να ορίζονται καλά τα παραπάνω αθροίσματα, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο προς το παρόν.

5.1 Πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος.

(i) Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *μετρήσιμη ως προς* $\mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$-μετρήσιμη) αν

$$[f \leqslant b] := f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leqslant b\} \in \mathcal{A}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

(ii) Αν μ είναι ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$ τότε η f λέγεται *μ-μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη.

(iii) Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{R}^k$, κάθε λ-μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται *Lebesgue μετρήσιμη*.

(iv) Αν ο X είναι μετρικός χώρος και η f είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη, τότε η f λέγεται *Borel μετρήσιμη*.

Μερικοί απλοί χαρακτηρισμοί της μετρησιμότητας δίνονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*

(ii) $[f < b] = \{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $[f \geqslant b] = \{x \in X : f(x) \geqslant b\} \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

(iv) $[f > b] = \{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $b \in \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$[f < b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[f \leqslant b - \frac{1}{n} \right]$$

αφού, για $x \in X$ έχουμε $f(x) < b$ αν και μόνον αν υπάρχει n ώστε $f(x) \leqslant b - \frac{1}{n}$. Άρα $[f < b] \in \mathcal{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$[f \geqslant b] = [f < b]^c,$$

άρα $[f \geqslant b] \in \mathcal{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Όπως και στην απόδειξη της πρώτης συνεπαγωγής, για $b \in \mathbb{R}$ γράφουμε

$$[f > b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[f \geqslant b + \frac{1}{n} \right]$$

και συνεπώς $[f > b] \in \mathcal{A}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$[f \leqslant b] = [f > b]^c,$$

άρα $[f \leqslant b] \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. □

Παραδείγματα 5.1.3. (α΄) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $B \subseteq X$. Η συνάρτηση $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ με

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$$

λέγεται *χαρακτηριστική ή δείκτρια συνάρτηση* του συνόλου B. Η χ_B είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $B \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι

$$[\chi_B \leqslant b] = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } b < 0 \\ B^c, & \text{αν } 0 \leqslant b < 1 \\ X, & \text{αν } b \geqslant 1. \end{cases}$$

□

(β΄) Αν $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ τότε

$$f \text{ συνεχής} \implies f \text{ Borel μετρήσιμη} \implies f \text{ Lebesgue μετρήσιμη.}$$

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής, τότε για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $[f \leqslant b] = f^{-1}((-\infty, b])$ είναι κλειστό σύνολο (αφού το $(-\infty, b]$ είναι κλειστό) άρα και σύνολο Borel. (Παρατηρήστε ότι αυτό προκύπτει και από το Λήμμα 4.4.5 σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση.) Η δεύτερη συνεπαγωγή έπεται άμεσα από τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. □

(γ΄) Αν I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση, τότε η f είναι Borel μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το $[f \leqslant b]$ είναι διάστημα: αν $s < r < t$ και $s, t \in [f \leqslant b]$ τότε $r \in I$ διότι το I είναι διάστημα, και $f(r) \leqslant f(t) \leqslant b$, δηλαδή $r \in [f \leqslant b]$. Συνεπώς, το $[f \leqslant b]$ είναι Borel σύνολο.

Για μια πιο ακριβή περιγραφή του $[f \leqslant b]$ θέτουμε

$$a = \sup[f \leqslant b] = \sup\{x \in I : f(x) \leqslant b\}.$$

Αφού η f είναι αύξουσα, αν $t, s \in I$ με $f(t) \leqslant b$ και $s < t$ τότε έχουμε επίσης $f(s) \leqslant b$. Συνεπώς,

$$[f \leqslant b] = \begin{cases} I \cap (-\infty, a], & \text{αν } a \in I \text{ και } f(a) \leqslant b \\ I \cap (-\infty, a), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση το $[f \leqslant b]$ είναι Borel υποσύνολο του I. □

Φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για φθίνουσες συναρτήσεις.

Γενικά, για να μελετήσουμε τους περιορισμούς μετρήσιμων συναρτήσεων χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.1.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $C \subset X$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{A}_C$ είναι μια σ-άλγεβρα στο C (άσκηση) που λέγεται *ίχνος* (ή περιορισμός) της $\mathcal{A}$ στο C.

Μια συνάρτηση $f : C \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_C$-μετρήσιμη, δηλαδή αν

$$[f \leqslant b] \in \mathcal{A}_C, \quad \text{για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Αν όμως $C \in \mathcal{A}$, παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}_C = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq C\}$, άρα

$$f \text{ μετρήσιμη} \iff [f \leqslant b] \in \mathcal{A}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$.*

(i) *Αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και $C \subseteq X$ τότε και η $f|_C$ είναι $\mathcal{A}_C$-μετρήσιμη.*

(ii) *Αν (C_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, τότε*

$$f \ \mathcal{A}\text{–μετρήσιμη} \iff f|_{C_n} \ \mathcal{A}_{C_n}\text{–μετρήσιμη για κάθε } n.$$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$[f|_C \leqslant b] = \{x \in C : f(x) \leqslant b\} = C \cap [f \leqslant b] \in \mathcal{A}_C.$$

Άρα η $f|_C$ είναι πράγματι μετρήσιμη.

(ii) Αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$[f \leqslant b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap [f \leqslant b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f|_{C_n} \leqslant b] \in \mathcal{A},$$

δηλαδή η f είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 5.1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *$\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{B}(Y)$, και*

(ii) *Αν μια $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι Borel μετρήσιμη τότε και η $f|_Y : Y \to [-\infty, \infty]$ είναι Borel μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \cap Y \in \mathcal{B}(Y)\}.$$

Εύκολα δείχνει κανείς (άσκηση) ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X (αν $G \subseteq X$ ανοικτό τότε το $G \cap Y$ είναι ανοικτό στο Y άρα $G \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$). Άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, το οποίο δείχνει ότι $\mathcal{B}(X)_Y \subseteq \mathcal{B}(Y)$ από τον ορισμό της $\mathcal{A}$.

Αντίστροφα, παρατηρούμε ότι αν U ανοικτό στο Y τότε $U = G \cap Y$ για κάποιο G ανοικτό στο X, άρα $U \in \mathcal{B}(X)_Y$. Έτσι, η $\mathcal{B}(X)_Y$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά του Y και έπεται ότι $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X)_Y$.

(ii) Σύμφωνα με το (i) της Πρότασης 5.1.5, η $f|_Y$ είναι $\mathcal{B}(X)_Y$ μετρήσιμη και από το (i) που μόλις δείξαμε είναι και Borel μετρήσιμη. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μερικές ακόμη ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων που θα οδηγήσουν αργότερα σε έναν αρκετά γενικότερο ορισμό της μετρησιμότητας.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Για μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $G \subseteq \mathbb{R}$ *ανοικτό.*

(iii) $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $F \subseteq \mathbb{R}$ *κλειστό.*

(iv) $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *για κάθε* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Η απόδειξη αυτού αφήνεται ως άσκηση. Οι προτάσεις (i)-(iv) έχουν τις εξής ισοδύναμες:

(i)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$.

(ii)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(iii)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(iv)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Όμως, επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$, τα ανοικτά σύνολα και τα κλειστά σύνολα και επιπλέον η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα, πράγματι η (iv)′ είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις (i)′-(iii)′ όπως θέλαμε. □

5.2 Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Ξεκινάμε τώρα να μελετάμε τις πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων συμπεριφέρεται «φυσιολογικά» ως προς τις συνήθεις πράξεις καθώς και τα όρια ακολουθιών.

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) $[f < g] = \{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$,

(ii) $[f \leqslant g] = \{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\} \in \mathcal{A}$ *και*

(iii) $[f = g] = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. (i) Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι: για ένα $x \in X$

$$f(x) < g(x) \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ με } f(x) < q < g(x).$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$[f < g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} ([f < q] \cap [g > q])$$

το οποίο είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ αφού οι f, g είναι μετρήσιμες και το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Είναι
$$[f \leqslant g] = [g < f]^c$$
το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο από το (i).

(iii) Είναι
$$[f = g] = [f \leqslant g] \setminus [f < g]$$
το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο από τα (i) και (ii). □

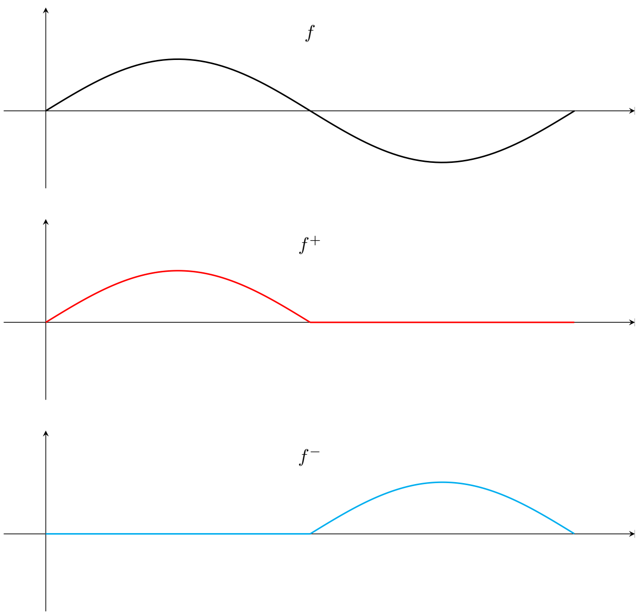
Πρόταση 5.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

(i) *Οι συναρτήσεις $f \vee g = \max\{f, g\}$ και $f \wedge g = \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$ είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$[f \vee g \leqslant b] = [f \leqslant b] \cap [g \leqslant b] \in \mathcal{A}$$
και
$$[f \wedge g \leqslant b] = [f \leqslant b] \cup [g \leqslant b] \in \mathcal{A}.$$
Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έπεται άμεσα από το (i) αφού οι 0 και $-f$ είναι μετρήσιμες. □



Σχήμα 5.1: Οι συναρτήσεις f^+ και f^-

Παρατήρηση 5.2.3. Οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι ιδιαίτερα σημαντικές και θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στη συνέχεια. Είναι το θετικό και το αρνητικό μέρος της συνάρτησης f. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύουν οι εξής σχέσεις:
$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

η απόδειξη των οποίων αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 5.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι

$$[\sup_n f_n \leqslant b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n \leqslant b] \in \mathcal{A}$$

και

$$[\inf_n f_n < b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n < b] \in \mathcal{A}$$

και έτσι το ζητούμενο έπεται.

(ii) Γνωρίζουμε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία αριθμών τότε

$$\limsup_n a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} a_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geqslant n} a_k \right),$$

άρα

$$\limsup_n f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} f_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geqslant n} f_k \right).$$

Συνεπώς, από το (i) οι $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(iii) Αν $f = \lim_n f_n$, τότε $f = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$ η οποία είναι μετρήσιμη από το (ii). □

Η τελευταία ιδιότητα της Πρότασης 5.2.4 είναι εξαιρετικά σημαντική. Σύμφωνα με αυτήν, αν έχουμε μια ακολουθία από μετρήσιμες συναρτήσεις η οποία συγκλίνει κατά σημείο, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το κατά σημείο όριο τους. Θυμηθείτε ότι αυτή είναι μια ιδιότητα που δεν ίσχυε για τις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, άρα έχουμε ένα πρώτο δείγμα της γενικότητας στην οποία εφαρμόζεται η θεωρία ολοκλήρωσης του Lebesgue.

Ορισμός 5.2.5. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *Baire-1 συνάρτηση* αν υπάρχει ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχών συναρτήσεων ώστε η f να είναι το κατά σημείο όριο των f_n.

Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *Baire-2 συνάρτηση* αν είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Baire-1 συναρτήσεων και γενικότερα για $n \geqslant 2$ λέγεται *Baire-n συνάρτηση* αν είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Baire-$(n-1)$ συναρτήσεων.

Με επαγωγή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι Borel μετρήσιμες και την Πρόταση 5.2.4 (iii), βλέπουμε ότι κάθε Baire-n συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη.

Εφαρμογή 5.2.6. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} n(f(x+1/n)-f(x))$$

από την αρχή της μεταφοράς. Αυτό δείχνει ότι η f' είναι Baire-1 συνάρτηση, άρα είναι Borel μετρήσιμη. □

Επιστρέφουμε στις πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων και αποδεικνύουμε τα εξής:

Πρόταση 5.2.7. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και $a > 0$. Τότε:*

(i) *Η $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

(ii) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$[af \leqslant b] = \left[f \leqslant \frac{b}{a}\right] \in \mathcal{A}$$

άρα η $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ βλέπουμε ότι

$$[f + g < b] = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} ([f < q] \cap [g < b - q])$$

σκεπτόμενοι ακριβώς όπως στο (i) της Πρότασης 5.2.1. Άρα, πράγματι η $f + g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Πρόταση 5.2.8. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $a \in \mathbb{R}$. Τότε:*

(i) *Η συνάρτηση $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $f + g$ και $f - g$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Οι συναρτήσεις f^2 και $f \cdot g$ είναι μετρήσιμες.*

(iv) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Εάν $a = 0$ τότε η $a \cdot f$ είναι η μηδενική συνάρτηση, η οποία είναι προφανώς μετρήσιμη. Στην περίπτωση $a > 0$ η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν του (i) της Πρότασης 5.2.7. Στην περίπτωση $a < 0$ παρατηρούμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$[a \cdot f \leqslant b] = \left[f \geqslant \frac{b}{a}\right] \in \mathcal{A},$$

άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Αποδεικνύεται ακριβώς όπως το (ii) της Πρότασης 5.2.7, αφού και η $-g$ είναι μετρήσιμη.

(iii) Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό για την f^2. Αν $b \leqslant 0$ τότε

$$[f^2 < b] = \varnothing$$

ενώ αν $b > 0$ έχουμε

$$[f^2 < b] = [f < \sqrt{b}] \cap [f > -\sqrt{b}] \in \mathcal{A}.$$

Άρα, πράγματι η f^2 είναι μετρήσιμη. Για την $f \cdot g$ τώρα, γράφουμε

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

και από τα παραπάνω έπεται ότι η $f \cdot g$ είναι κι αυτή μετρήσιμη.

(iv) Λόγω του (iii) αρκεί να δειχθεί ότι η $1/g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το σύνολο $A = [g > 0] \in \mathcal{A}$ και για $b \in \mathbb{R}$ γράφουμε

$$\left[\frac{1}{g} \leqslant b\right] = ([bg \geqslant 1] \cap A) \cup ([bg \leqslant 1] \cap A^c) \in \mathcal{A},$$

αφού η $b \cdot g$ είναι μετρήσιμη. Άρα, η $1/g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(v) Γράφουμε

$$|f| = f^+ + f^-$$

(θυμηθείτε την Παρατήρηση 5.2.3) και συμπεραίνουμε ότι η $|f|$ είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 5.2.2 και το (ii). □

5.3 Απλές συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες απλές συναρτήσεις που έχουν στη θεωρία ολοκλήρωσης του Lebesgue τη θέση που είχαν οι κλιμακωτές συναρτήσεις στην ολοκλήρωση κατά Riemann. Ξεκινάμε με τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *απλή* αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Κάθε απλή συνάρτηση γράφεται στη μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

όπου $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι μια οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του X και $a_j \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, είναι εμφανές ότι κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής είναι απλή.

Φυσικά, δεν υπάρχει μοναδική τέτοια παράσταση της s, αλλά μπορούμε να «ξεχωρίσουμε» μία. Αν θέσουμε $s(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ με $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ και στη συνέχεια $A_j = \{x \in X : s(x) = a_j\}$ τότε η $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι μια διαμέριση του X σε μη κενά σύνολα και ισχύει ότι

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}.$$

Η τελευταία αυτή παράσταση της s θα λέγεται *κανονική μορφή* της s και είναι μοναδική.

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου (Θεώρημα 5.3.3) δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι το κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών συναρτήσεων. Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.*

(i) *Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο P του $[0, \infty)$ με $0 \in P$, ας πούμε*

$$P = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\},$$

θέτουμε

$$s^P = \sum_{j=0}^{n} a_j \chi_{A_j}, \tag{5.3.1}$$

όπου $A_j = [a_j \leqslant f < a_{j+1}]$ για $0 \leqslant j \leqslant n-1$ και $A_n = [f \geqslant a_n]$. Τότε η s^P είναι μια απλή συνάρτηση με $0 \leqslant s^P \leqslant f$ και για κάθε $x \in X$ με $f(x) < a_n$ ισχύει η ανισότητα

$$0 \leqslant f(x) - s^P(x) < \|P\|,$$

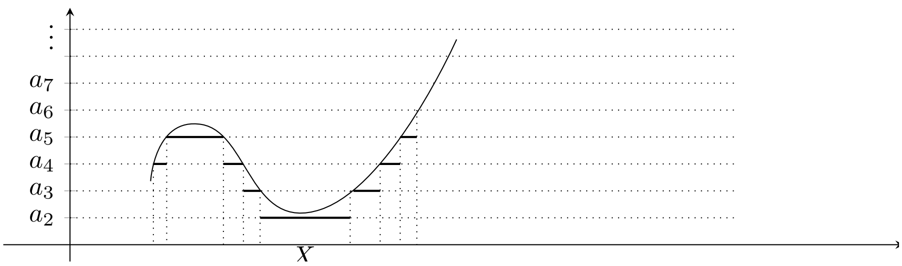
όπου $\|P\| = \max\{a_{j+1} - a_j : 0 \leqslant j \leqslant n-1\}$.

(ii) *Για κάθε $P, Q \subseteq [0, \infty)$ πεπερασμένα με $0 \in P$ και $P \subseteq Q$ ισχύει $s^P \leqslant s^Q$.*

Απόδειξη. Πριν μπούμε στις λεπτομέρειες της απόδειξης πρέπει να καταλάβουμε την ιδέα του ορισμού των συναρτήσεων s^P. Όπως είπαμε και πριν, για δεδομένη μη αρνητική και μετρήσιμη συνάρτηση f ψάχνουμε μια αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών συναρτήσεων που να την προσεγγίζει (αναγκαστικά «από κάτω»). Οι συναρτήσεις s^P ορίστηκαν λοιπόν ως εξής:

1. Διαλέξαμε αυθαίρετη «διαμέριση»[1] $P = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ του $[0, \infty]$ και διαμερίσαμε το σύνολο X ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει η f. Έτσι ορίστηκαν τα σύνολα A_j.

2. Σε καθένα από τα σύνολα $A_j = [a_j \leqslant f < a_{j+1}]$ δώσαμε στην s^P τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει εκεί η f, δηλαδή την τιμή a_j. Έτσι, έχουμε πράγματι μια «από κάτω» προσέγγιση της f.



Σχήμα 5.2: Προσέγγιση μετρήσιμης συνάρτησης από απλές

Για την απόδειξη τώρα:

[1] Δεν είναι διαμέριση με τη γνωστή έννοια βέβαια, αφού θα έπρεπε να περιέχει και την «τιμή» ∞.

(i) Είναι εμφανές ότι η s^P είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση. Μάλιστα, αφού τα $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ συνιστούν μια διαμέριση του X είναι εκείνη η απλή συνάρτηση που στο A_j λαμβάνει την τιμή a_j. Για $x \in A_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$ έχουμε

$$s^P(x) = a_j \leqslant f(x),$$

από τον ορισμό του A_j και αν επιπλέον $j < n$ (δηλαδή $f(x) < a_n$) τότε

$$f(x) - s^P(x) = f(x) - a_j < a_{j+1} - a_j \leqslant \|P\|$$

από τον ορισμό της $\|P\|$.

(ii) Έστω ότι η s^P δίνεται από τη σχέση (5.3.1). Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $Q = P \cup \{\hat{a}\}$ για κάποιο $\hat{a} > 0$, $\hat{a} \notin P$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του $Q \setminus P$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $a_j < \hat{a} < a_{j+1}$ για κάποιο $j = 0, 1, \ldots, n-1$, τότε η παράσταση της s^Q διαφέρει από αυτήν της s^P μόνο στον όρο του αθροίσματος που περιέχει το A_j. Αντί του προσθετέου $a_j \chi_{A_j}$ εμφανίζεται το άθροισμα

$$a_j \chi_{A_j^1} + \hat{a} \chi_{A_j^2}, \quad \text{όπου } A_j^1 = [a_j \leqslant f < \hat{a}] \text{ και } A_j^2 = [\hat{a} \leqslant f < a_{j+1}].$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\chi_{A_j} = \chi_{A_j^1} + \chi_{A_j^2}$ βλέπουμε ότι

$$s^Q - s^P = a_j \chi_{A_j^1} + \hat{a} \chi_{A_j^2} - a_j \chi_{A_j} = (\hat{a} - a_j) \chi_{A_j^2} \geqslant 0,$$

όπως θέλαμε.

(β) Αν πάλι $\hat{a} > a_n$, τότε η παράσταση της s^Q διαφέρει από αυτήν της s^P μόνο στον τελευταίο όρο που περιέχει το A_n. Αντί του προσθετέου $a_n \chi_{A_n}$ εμφανίζεται το άθροισμα

$$a_n \chi_{A_n^1} + \hat{a} \chi_{A_n^2}, \quad \text{όπου } A_n^1 = [a_n \leqslant f < \hat{a}] \text{ και } A_n^2 = [f \geqslant \hat{a}].$$

Άρα

$$s^Q - s^P = a_n \chi_{A_n^1} + \hat{a} \chi_{A_n^2} - a_n \chi_{A_n} = (\hat{a} - a_n) \chi_{A_n^2} \geqslant 0.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ ώστε*

$$s_n \nearrow f.$$

Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη. Θα ορίσσουμε μια αύξουσα ακολουθία «διαμερίσεων» P_n του $[0, \infty]$ όπως στο προηγούμενο λήμμα, και σύμφωνα με αυτό η αντίστοιχη ακολουθία $\{s_n\}$ θα είναι αύξουσα και θα προσεγγίζει «καλά» την f αν $\|P_n\| \to 0$.

Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \cdots < \frac{n2^n}{2^n} = n\right\}$$

και $s_n = s^{P_n}$ όπως στο Λήμμα 5.3.2, δηλαδή

$$s_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n}\chi_{B_{n,j}} + n\chi_{C_n},$$

όπου

$$B_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n} \leqslant f < \frac{j+1}{2^n}\right], \ \ j = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \text{ και } C_n = [f \geqslant n].$$

Τότε, από το Λήμμα 5.3.2, κάθε s_n είναι απλή συνάρτηση με $0 \leqslant s_n \leqslant f$ και για κάθε $x \in X$ με $f(x) < n$ έχουμε

$$0 \leqslant f(x) - s_n(x) < \|P_n\| = \frac{1}{2^n}.$$

Επιπλέον $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n, άρα από το (ii) του Λήμματος 5.3.2 η ακολουθία (s_n) είναι πράγματι αύξουσα.

Έστω $x \in X$. Αν $f(x) < \infty$ τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει ότι $f(x) < n$, άρα $f(x) - s_n(x) < 1/2^n$. Έτσι, πράγματι, $s_n(x) \to f(x)$. Αν πάλι $f(x) = \infty$ τότε $s_n(x) = n$ για κάθε n, άρα πάλι $s_n(x) \to \infty = f(x)$.

Αν η f είναι φραγμένη, τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και $x \in X$ να ισχύει ότι $f(x) < n$, Άρα $0 \leqslant f(x) - s_n(x) < 1/2^n$ για κάθε x και $n \geqslant n_0$. Έτσι, πράγματι $s_n \to f$ ομοιόμορφα. □

Πόρισμα 5.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία $(s_n)_n$ απλών συναρτήσεων με*

$$0 \leqslant |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \cdots \leqslant |f| \tag{5.3.2}$$

και $s_n \to f$. Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.2.3 μπορούμε να γράψουμε $f = f^+ - f^-$ όπου οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες. Άρα, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $\{\sigma_n\}_n$ και $\{\tau_n\}_n$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων ώστε $\sigma_n \to f^+$ και $\tau_n \to f^-$. Αν θέσουμε $s_n = \sigma_n - \tau_n$, τότε η s_n είναι απλή και επιπλέον $s_n \to f^+ - f^- = f$.

Παρατηρήστε ότι αν $A = [f > 0]$ τότε για κάθε n έχουμε $\tau_n = 0$ στο A και $\sigma_n = 0$ στο A^c. Συνεπώς

$$|s_n| = |\sigma_n - \tau_n| = \max\{\sigma_n, \tau_n\} \leqslant \max\{\sigma_{n+1}, \tau_{n+1}\} = |s_{n+1}|,$$

και αφού $|s_n| \to |f|$ έπεται ότι $|s_n| \leqslant |f|$, δηλαδή έχουμε δείξει την (5.3.2).

Τέλος, αν η f είναι φραγμένη, τότε το ίδιο ισχύει και για τις f^+ και f^-. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.3.3 οι $\{\sigma_n\}$ και $\{\tau_n\}$ μπορούν να επιλεγούν ώστε να συγκλίνουν ομοιόμορφα σε αυτές. Έπεται ότι $s_n \to f$ ομοιόμορφα. □

5.4 Μιγαδικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Η έννοια της μετρησιμότητας που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους μπορεί να αναπτυχθεί σε πολύ πιο γενικό πλαίσιο από αυτό στο οποίο τη θέσαμε μέχρι τώρα.[2] Χωρίς επιπρόσθετη δυσκολία

[2] Βλέπε την §8.1.

όμως, μπορούμε να μελετήσουμε μετρήσιμες συναρτήσεις που παίρνουν μιγαδικές τιμές. Η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{C}$ ορίζεται να είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ τον οποίο θεωρούμε ως μετρικό χώρο με τη μετρική που επάγεται από το μέτρο $|z|$ μιγαδικού αριθμού. Μέσω του ισομετρικού ισομορφισμού $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ με $\varphi(x + iy) = (x, y)$ βλέπουμε ότι $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ αν και μόνο αν $\varphi(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Ορισμός 5.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος.

(i) Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *μετρήσιμη ως προς* $\mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$-μετρήσιμη) αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

(ii) Αν μ είναι ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$ τότε η f λέγεται *μ-μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη.

(iii) Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{R}^k$, κάθε λ-μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται *Lebesgue μετρήσιμη*.

(iv) Αν ο X είναι μετρικός χώρος και η f είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη, τότε η f λέγεται *Borel μετρήσιμη*.

Αποδεικνύεται και εδώ το ανάλογο της Πρότασης 5.1.7, δηλαδή ότι μια $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν αντιστρέφει τα ανοικτά (αντίστοιχα τα κλειστά) σύνολα σε σύνολα της $\mathcal{A}$.

Πρόταση 5.4.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ με $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. Τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι u και v είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}[u \leqslant b] &= \{x \in X : u(x) \leqslant b\} = \{x \in X : f(x) \in (-\infty, b] \times \mathbb{R}\} \\ &= f^{-1}((-\infty, b] \times \mathbb{R}) \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

αφού $(-\infty, b] \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Όμοια δείχνουμε ότι η v είναι μετρήσιμη.

($\Longleftarrow$) Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. Από το Λήμμα 3.1.7 (διάσπαση των ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^k$ σε διαστήματα) μπορούμε να βρούμε ακολουθίες (I_n) και (J_n) διαστημάτων του $\mathbb{R}$ ώστε $G = \bigcup_n (I_n \times J_n)$. Συνεπώς,

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n \times J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (u^{-1}(I_n) \cap v^{-1}(J_n)) \in \mathcal{A},$$

αφού οι u και v είναι μετρήσιμες. Έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 5.4.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Γράφουμε $f_n = u_n + iv_n$ και $f = u + iv$ όπου $u_n = \mathrm{Re} f_n$, $v_n = \mathrm{Im} f_n$, $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. Αφού $f = \lim_n f_n$ έπεται ότι $u = \lim_n u_n$ και $v = \lim_n v_n$. Έτσι, από την Πρόταση 5.2.4 οι u και v είναι μετρήσιμες και από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι το ίδιο ισχύει για την f. □

Παρατήρηση 5.4.4. Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος, $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η $\varphi \circ f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη.[3]

[3] Η ιδιότητα αυτή είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 8.1.2 που θα δούμε παρακάτω.

Απόδειξη. Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ παρατηρούμε ότι

$$(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B)),$$

το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο επειδή $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ και στη συνέχεια από τη μετρησιμότητα της f. □

Αποδεικνύεται και εδώ, όπως και στην πραγματική περίπτωση, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη. Άρα, η Παρατήρηση 5.4.4 ισχύει ειδικότερα για συνεχείς συναρτήσεις $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Πρόταση 5.4.5. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $a \in \mathbb{C}$. Τότε:*

(i) *Η συνάρτηση $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $f + g$ και $f - g$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Οι συναρτήσεις f^2 και $f \cdot g$ είναι μετρήσιμες.*

(iv) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αν γράψουμε $f = u + iv$, $g = w + iz$, όπου $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$, $w = \mathrm{Re} g$ και $z = \mathrm{Im} g$, έχουμε:

$$f + g = (u + w) + i(v + z), \;\; f \cdot g = (uw - vz) + i(uz + vw), \;\; \frac{1}{g} = \frac{w}{w^2 + z^2} + i\frac{-z}{w^2 + z^2}.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 5.2.8 και 5.4.2 βλέπουμε ότι ισχύουν τα (i)-(iv). Για το (v) παρατηρούμε ότι

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

η οποία είναι μετρήσιμη ως σύνθεση της μετρήσιμης συνάρτησης u^2+v^2 και της συνεχούς $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \sqrt{x}$. □

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των απλών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές και το αντίστοιχο θεώρημα προσέγγισης.

Ορισμός 5.4.6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *απλή* αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Παρατηρούμε ότι μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ είναι απλή αν και μόνον αν οι $\mathrm{Re} s$ και $\mathrm{Im} s$ είναι απλές συναρτήσεις (εξηγήστε γιατί). Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών απλών συναρτήσεων, κάθε απλή μιγαδική συνάρτηση s έχει μοναδική κανονική μορφή.

Πρόταση 5.4.7. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, υπάρχει ακολουθία $\{s_n\}_n$ απλών συναρτήσεων με $s_n \to f$. Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Απόδειξη. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. Από το Πόρισμα 5.3.4 βρίσκουμε ακολουθίες $\{r_n\}$ και $\{t_n\}$ απλών πραγματικών συναρτήσεων ώστε $r_n \to u$ και $t_n \to v$. Τότε, η $s_n = r_n + it_n$ είναι απλή και προφανώς έχουμε ότι $s_n \to u + iv = f$.

Αν τώρα η f είναι φραγμένη, τότε το ίδιο ισχύει για τις u και v, άρα $r_n \to u$ και $t_n \to v$ ομοιόμορφα. Έπεται ότι η σύγκλιση της (s_n) στην f είναι ομοιόμορφη. □

5.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

5.1. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty,\infty]$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $[f \leqslant q] \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

5.2. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

5.3. Έστω $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι μετρήσιμη και το σύνολο $[f \neq g]$ να είναι $\lambda-$μηδενικό. Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

5.4. Έστω $f : (a,b) \to [-\infty,\infty]$ τέτοια ώστε: για κάθε $0 < \varepsilon < b-a$ ο περιορισμός $f|_{(a,b-\varepsilon)}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

5.5. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $\{s_n\}$ ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Ομάδα Β΄.

5.6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη, ενώ οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

5.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}$ αυξουσών απλών συναρτήσεων τέτοια ώστε $s_n \nearrow f$.

5.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $\{E_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mu(\{x : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\}) = 0$. (Υπόδειξη: Θυμηθείτε το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli.)

(β) Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα με την ασθενέστερη υπόθεση $\mu(E_n) \to 0$;

5.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει ότι $\lambda(f(A)) = 0$.

5.10. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(E_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ οικογένεια συνόλων στην $\mathcal{A}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν $\alpha < \beta$ τότε $E_\alpha \subseteq E_\beta$,

(ii) $X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha$,

(iii) $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha = \varnothing$.

Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα εξής: αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leqslant \alpha$ ενώ αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geqslant \alpha$.

5.11. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε: για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ και $M > 0$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) < \varepsilon \quad \text{και για κάθε } x \in A : \sup_n |f_n(x)| \leqslant M.$$

5.12. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

5.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;
(β) Αν οι $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_n \nearrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_n} \nearrow \omega_f$.

Ομάδα Γ΄.

5.14. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \alpha\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_n f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in Z^c$.

5.15. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in Z^c$.

5.16. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ μια *χωριστά συνεχής* συνάρτηση, δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

5.17. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_n) και σύνολο $Z \subseteq [0,1]$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in Z^c.$$

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να κατασκευάσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες συναρτήσεις. Μας δίνεται λοιπόν ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και μελετάμε πραγματικές (ή μιγαδικές αργότερα) μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί το ολοκλήρωμα είναι οι εξής:

(i) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$, όπου χ_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu.$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση με $f \geqslant 0$, τότε $\int f d\mu \geqslant 0$. Λόγω της γραμμικότητας, η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με τη μονοτονία: αν f, g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $f \geqslant g$, τότε $\int f d\mu \geqslant \int g d\mu$.

Η κατασκευή θα γίνει σε τρία βήματα:

(i) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές απλές συναρτήσεις, έχοντας ως στόχο τα (i) και (ii) παραπάνω.

(ii) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσες έχοντας ως στόχο τη μονοτονία και βασιζόμενοι στην προσέγγιση τέτοιων συναρτήσεων από απλές.

(iii) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα γενικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση $f = f^+ - f^-$ και έχοντας ως στόχο τη γραμμικότητα.

Παράλληλα με αυτή τη διαδικασία, θα αποδείξουμε μερικές πολύ βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue, και ιδιαίτερα κάποια αποτελέσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος Lebesgue ως προς τη σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων.

6.1 Απλές μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

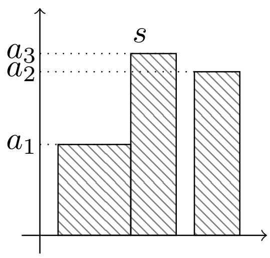
Ορισμός 6.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια απλή μη αρνητική συνάρτηση με κανονική μορφή

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου $a_j \geqslant 0$. Τότε, ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f να είναι η ποσότητα

$$\int f\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j),$$

όπου έχουμε κάνει τη σύμβαση $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.



Σχήμα 6.1: Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης

Παρατηρήσεις 6.1.2. (α′) Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι $\int f\ d\mu \geqslant 0$ και ότι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\int \chi_A d\mu = \mu(A).$$

(β′) Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε $\int f\ d\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$.

Έχοντας δώσει τον παραπάνω ορισμό, για να αποδείξουμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος χρειαζόμαστε το εξής:

Λήμμα 6.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια απλή συνάρτηση που γράφεται ως:*

$$f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$$

για κάποιους $b_1, b_2, \ldots, b_m$ και κάποια ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Τότε,

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = X$ (αλλιώς, θέτοντας $B_{m+1} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ και $b_{m+1} = 0$ παρατηρούμε ότι δεν αλλάζει κάτι). Έστω λοιπόν ότι η f έχει κανονική μορφή

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Αφού η f είναι απλή συνάρτηση, αν $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ τότε $a_i = b_j$, και επιπλέον ισχύουν οι εξής ταυτότητες:

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \quad \text{και } B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j),$$

όπου και οι δύο ενώσεις είναι ξένες. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο απλές μη αρνητικές συναρτήσεις και $a \geqslant 0$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το ολοκλήρωμα είναι «ομογενές»:*

$$\int af\, d\mu = a\int f\, d\mu.$$

(ii) *Το ολοκλήρωμα είναι «προσθετικό»:*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

(iii) *Το ολοκλήρωμα είναι «μονότονο»:*

$$\text{αν} \quad f \leqslant g \text{ στο } X \quad \text{τότε} \quad \int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu.$$

Απόδειξη. Έστω

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \quad \text{και} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$$

οι κανονικές μορφές των f και g.

(i) Τότε, η $af = \sum_{i=1}^{n} aa_i\chi_{A_i}$ είναι η κανονική μορφή της af, άρα

$$\int af\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} aa_i\mu(A_i) = a\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = a\int f\, d\mu.$$

(ii) Η οικογένεια $(A_i \cap B_j)_{(i,j)}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα και αφού

$$f + g = \sum_{i,j} (a_i + b_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

(επαληθεύστε το) σύμφωνα με το Λήμμα 6.1.3 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \sum_{i,j}(a_i + b_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j\mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j)\\ &= \int f\, d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

(iii) Η $(g - f)$ είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση και συνεπώς, από το (ii),

$$\int g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int (g - f)\, d\mu \geqslant \int f\, d\mu,$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 6.1.5. Χρησιμοποιώντας τα (i) και (ii) της Πρότασης 6.1.4 βλέπουμε ότι το συμπέρασμα του Λήμματος 6.1.3 ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι τα B_j είναι ξένα, αφού:

$$\int \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

6.2 Μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 5.3.3 ότι για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με

$$s_n \nearrow f.$$

Επιπλέον, για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leqslant s \leqslant f$ στο X, θα θέλαμε, έχοντας ως στόχο τη μονοτονία του ολοκληρώματος, να ισχύει ότι

$$\int s\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu,$$

με τον ορισμό που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για το $\int s d\mu$. Εφόσον μπορούμε να βρούμε απλές μετρήσιμες s οσοδήποτε κοντά στην f «από κάτω», οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το *ολοκλήρωμα* της f να είναι η ποσότητα

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{\int s\, d\mu : \ s \text{ απλή συνάρτηση με } 0 \leqslant s \leqslant f\right\}.$$

Φυσικά, ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1.1 του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, αφού αν η f είναι απλή τότε το supremum υλοποιείται για την $s = f$ από τη μονοτονία του ολοκληρώματος για απλές μη αρνητικές συναρτήσεις (βλ. Πρόταση 6.1.4 (iii)).

Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\int_A f\, d\mu = \int f\chi_A\, d\mu,$$

το *ολοκλήρωμα της f στο A*. Είναι φανερό ότι $\int_A f\, d\mu \in [0, \infty]$, και επίσης

$$\int_X f\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f, g : X \to [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $A, B \in \mathcal{A}$ και $a \geqslant 0$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το ολοκλήρωμα είναι «ομογενές»:*

$$\int af\, d\mu = a \int f\, d\mu$$

(ii) *Το ολοκλήρωμα είναι «μονότονο»:*

$$\text{Αν } f \leqslant g \text{ στο } X \text{ τότε } \int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu.$$

(iii) *Αν $A \subseteq B$ τότε*

$$\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu.$$

(iv) *Αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f = 0$ στο A, τότε*

$$\int_A f\, d\mu = 0.$$

Απόδειξη. (i) Αν $a = 0$ τότε η ζητούμενη ισότητα είναι προφανής. Αν $a > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int af\, d\mu &= \sup\left\{\int s\, d\mu : s \text{ απλή με } 0 \leqslant s \leqslant af\right\}\\ &= \sup\left\{a\int \frac{s}{a}\, d\mu : \frac{s}{a} \text{ απλή με } 0 \leqslant \frac{s}{a} \leqslant f\right\}\\ &= a\sup\left\{\int t\, d\mu : t \text{ απλή με } 0 \leqslant t \leqslant f\right\}\\ &= a\int f\, d\mu.\end{aligned}$$

(ii) Αυτό προκύπτει εύκολα από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε το ολοκλήρωμα: αν s είναι μια απλή συνάρτηση με $0 \leqslant s \leqslant f$, τότε έχουμε επίσης $0 \leqslant s \leqslant g$. Άρα,

$$\{s : s \text{ απλή με } 0 \leqslant s \leqslant f\} \subseteq \{s : s \text{ απλή με } 0 \leqslant s \leqslant g\},$$

και έπεται ότι $\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$.

(iii) Η σχέση $A \subseteq B$ είναι ισοδύναμη με την $\chi_A \leqslant \chi_B$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $f \geqslant 0$, έχουμε $f\chi_A \leqslant f\chi_B$ και το συμπέρασμα έπεται από το (ii).

(iv) Αν $f = 0$ στο A, τότε $f\chi_A = 0$ στο X, άρα $\int f\chi_A\, d\mu = 0$, δηλαδή $\int_A f d\mu = 0$.

Έστω τώρα ότι $\mu(A) = 0$. Αν η s απλή και $0 \leqslant s \leqslant f\chi_A$, τότε η s μηδενίζεται έξω από το A και συνεπώς έχει μια παράσταση της μορφής

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad \text{όπου } A_i \subseteq A \text{ για κάθε } i.$$

Άρα,

$$\int s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 0 = 0.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε απλή s με $0 \leqslant s \leqslant f\chi_A$, συμπεραίνουμε ότι $\int f\chi_A\, d\mu = \int_A f\, d\mu = 0$. □

Παρ' όλο που οι παραπάνω ιδιότητες του ολοκληρώματος αποδείχθηκαν σχετικά εύκολα, με τον Ορισμό 6.2.1 που δώσαμε δεν είναι καθόλου προφανής η προσθετικότητα του ολοκληρώματος, δηλαδή ότι αν $f, g : X \to [0, \infty]$ είναι δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Για να αποδείξουμε την προσθετικότητα θα βασιστούμε σε δύο πολύ βασικά θεωρήματα σύγκλισης, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue και το λήμμα του Fatou. Θα χρειαστούμε αρχικά το εξής λήμμα, που θα γενικευτεί αργότερα στην §6.2.1:

Λήμμα 6.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $s : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική απλή συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με*

$$\nu(A) = \int_A s\, d\mu,$$

για $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο[1] *στον χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αν

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

είναι η κανονική μορφή της s, τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\nu(A) = \int_A s\, d\mu = \int s\chi_A\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A\cap A_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A \cap A_j),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$. Όμως, το $\mu_j : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\mu_j(A) = \mu(A \cap A_j)$ είναι μέτρο, ο περιορισμός του μ στο A_j, συνεπώς το ίδιο ισχύει για το ν, αφού $a_j \geqslant 0$ για κάθε j. □

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη των βασικών θεωρημάτων σύγκλισης θα χρειαστούμε την έννοια του $\liminf_n$ μιας ακολουθίας συνόλων: Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X, θέτουμε

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4 (Άσκηση 4 του Κεφαλαίου 1), έχουμε την ταυτότητα

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Επίσης, σύμφωνα με την Άσκηση 2.2, αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου τότε ισχύει η ανισότητα

$$\mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n). \tag{6.2.1}$$

Η απόδειξη όλων αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείχνουμε το εξής:

Θεώρημα 6.2.4 (Λήμμα του Fatou). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια ακολουθία*

[1] Η ν λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της s ως προς μ.

μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = \liminf_n f_n$, η οποία είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 5.2.4, και μια απλή συνάρτηση s με $0 \leqslant s \leqslant f$ στο X. Θα δείξουμε ότι

$$\int s \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu. \tag{6.2.2}$$

Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ισχύει

$$\varepsilon \int s \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n^\varepsilon = [f_n \geqslant \varepsilon s] = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \varepsilon s(x)\}$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμα και επιπλέον $\liminf_n A_n^\varepsilon = X$: Πράγματι, για κάθε $x \in X$, αν $s(x) = 0$ τότε προφανώς $x \in A_n^\varepsilon$ για κάθε n, ενώ αν $s(x) > 0$, τότε

$$\varepsilon s(x) < s(x) \leqslant f(x) = \liminf_n f_n(x),$$

άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\varepsilon s(x) < f_n(x)$. Έτσι, πράγματι $x \in A_n^\varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$ και έπεται ότι $x \in \liminf_n A_n^\varepsilon$.

Από τον ορισμό του A_n^ε έχουμε ότι

$$f_n(x) \geqslant \varepsilon s(x) \chi_{A_n^\varepsilon}(x) \quad \text{στο } X$$

και συνεπώς

$$\int f_n \, d\mu \geqslant \varepsilon \int s \chi_{A_n^\varepsilon} \, d\mu = \varepsilon \int_{A_n^\varepsilon} s \, d\mu = \varepsilon \nu(A_n^\varepsilon),$$

όπου $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ το μέτρο του Λήμματος 6.2.3 για την απλή συνάρτηση s. Κατά συνέπεια, από τη σχέση (6.2.1) και την ισότητα $\liminf_n A_n^\varepsilon = X$ έπεται ότι

$$\liminf_n \int f_n \, d\mu \geqslant \varepsilon \liminf_n \nu(A_n^\varepsilon) \geqslant \varepsilon \nu(\liminf_n A_n^\varepsilon) = \varepsilon \nu(X).$$

Όμως, $\nu(X) = \int_X s \, d\mu$, άρα πράγματι

$$\liminf_n \int f_n \, d\mu \geqslant \varepsilon \int s \, d\mu,$$

που για $\varepsilon \to 1^-$ δίνει την (6.2.2). Μετά, παίρνοντας το supremum πάνω από όλες τις απλές μετρήσιμες s με $0 \leqslant s \leqslant f$ έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0,\infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η f_n συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to [0,\infty]$ και επιπλέον $f_n \leqslant f$*

στο X για κάθε n, τότε

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou: έχουμε $\liminf_n f_n = f$, συνεπώς

$$\begin{aligned}\int f\,d\mu &= \int \liminf_n f_n\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu \\ &\leqslant \limsup_n \int f_n\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu,\end{aligned}$$

αφού $f_n \leqslant f$ στο X. Άρα, έχουμε παντού ισότητες και έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

□

Ειδικότερα έχουμε το εξής πολύ σημαντικό πόρισμα.

Θεώρημα 6.2.6 (θεώρημα μονότονης σύγκλισης). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f = \lim_n f_n$, τότε*

$$\int f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu \quad \text{για } n \to \infty.$$

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 6.2.5, αφού $f_n \leqslant f$ στο X. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε έναν πολύ πιο βολικό τρόπο για να χειριζόμαστε το ολοκλήρωμα: Για μια $f : X \to [0, \infty]$ μη αρνητική, μετρήσιμη βρίσκουμε από το Θεώρημα 5.3.3 μια αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών μη αρνητικών συναρτήσεων με

$$s_n \nearrow f.$$

Τότε, από το Θεώρημα 6.2.6 βλέπουμε ότι

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int s_n\,d\mu.$$

Από αυτή την παρατήρηση έπονται τα εξής:

Πόρισμα 6.2.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) *Το ολοκλήρωμα είναι προσθετικό, δηλαδή*

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

(ii) *Αν $f \leqslant g$ στο X και επιπλέον $\int f\,d\mu < \infty$, τότε*

$$\int (g-f)\,d\mu = \int g\,d\mu - \int f\,d\mu.$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε αύξουσες ακολουθίες $(s_n)_n$ και $(t_n)_n$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f$ και $t_n \nearrow g$. Τότε, η ακολουθία $(s_n + t_n)_n$ είναι επίσης αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων και

$$s_n + t_n \nearrow f + g.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\int (f+g)\,d\mu = \lim_n \int (s_n + t_n)\,d\mu = \lim_n \int s_n\,d\mu + \lim_n \int t_n\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για τις απλές συναρτήσεις s_n και t_n (Πρόταση 6.1.4).

(ii) Οι f και $g - f$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, άρα από το (i) έχουμε

$$\int f\,d\mu + \int (g-f)\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Αφού επιπλέον $\int f\,d\mu < \infty$, από την τελευταία ισότητα έπεται πράγματι ότι

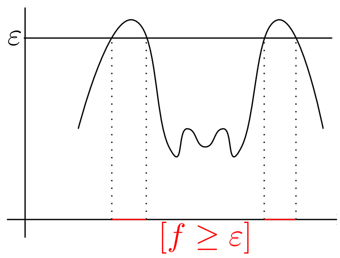
$$\int (g-f)\,d\mu = \int g\,d\mu - \int f\,d\mu.$$

□

Ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα είναι η ανισότητα των Chebyshev-Markov που παρ' όλη την απλότητα της έχει, όπως θα δούμε, σημαντικότατες εφαρμογές:

Πρόταση 6.2.8 (ανισότητα Chebyshev-Markov). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για καθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int f\,d\mu.$$



Σχήμα 6.2: Απόδειξη της ανισότητας Chebyshev-Markov

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, αν $A_\varepsilon = \{x \in X : f(x) \geqslant \varepsilon\}$, τότε

$$\int f\,d\mu \geqslant \int_{A_\varepsilon} f\,d\mu \geqslant \int_{A_\varepsilon} \varepsilon\,d\mu = \varepsilon \cdot \mu(A_\varepsilon).$$

Η ανισότητα αυτή είναι ακριβώς ισοδύναμη με τη ζητούμενη. □

Παρατήρηση 6.2.9. Μια χρήσιμη εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev-Markov είναι η εξής. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση με $\int f \, d\mu < \infty$. Τότε,

$$\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0.$$

Πράγματι, για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant n\}) \leqslant \frac{1}{n} \int f \, d\mu \longrightarrow 0,$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι

$$[f = \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f \geqslant n]$$

και τη συνέχεια του μέτρου.

Αν επιχειρήσουμε να αντικαταστήσουμε το $\liminf$ στο Λήμμα του Fatou με $\limsup$ παίρνουμε τα εξής δυικά αποτελέσματα:

Θεώρημα 6.2.10. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων.*

(i) *Αν υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη ώστε $f_n \leqslant g$ για κάθε n και $\int g \, d\mu < \infty$, τότε*

$$\int \limsup_n f_n \, d\mu \geqslant \limsup_n \int f_n \, d\mu. \tag{6.2.3}$$

(ii) *Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ με $f_n \geqslant f$ στο X για κάθε n και επιπλέον υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $f_n \leqslant g$ για κάθε n και $\int g \, d\mu < \infty$, τότε*

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu. \tag{6.2.4}$$

(iii) *Αν η ακολουθία (f_n) είναι φθίνουσα και $\int f_1 \, d\mu < \infty$, τότε για την $f = \lim_n f_n$ ισχύει ότι*

$$\int f_n \, d\mu \searrow \int f \, d\mu.$$

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou για την ακολουθία $(g - f_n)_n$ και έχουμε ότι

$$\int \liminf_n (g - f_n) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int (g - f_n) \, d\mu.$$

Όμως, αν (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\liminf_n (a_n + a) = \liminf_n a_n + a \quad \text{και} \quad \liminf_n (-a_n) = -\limsup_n (a_n),$$

άρα η παραπάνω ανισότητα γράφεται ως:

$$\int g \, d\mu - \int \limsup_n f_n \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu - \limsup_n \int f_n \, d\mu.$$

Από αυτή την ανισότητα και την υπόθεση ότι $\int g\, d\mu < \infty$ συμπεραίνουμε ότι πράγματι

$$\int \limsup_n f_n\, d\mu \geqslant \limsup_n \int f_n\, d\mu.$$

(ii) Προκύπτει από το (i) ακριβώς όπως προκύπτει το Πόρισμα 6.2.5 από το Λήμμα του Fatou. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.

(iii) Προκύπτει άμεσα από το (ii) αν παρατηρήσουμε ότι η $g = f_1$ κυριαρχεί όλες τις f_n, δηλαδή $f_n \leqslant f_1$ για κάθε n.

□

Παρατήρηση 6.2.11. Η υπόθεση της ύπαρξης μιας μετρήσιμης $g : X \to [0,\infty]$ που να έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα και να κυριαρχεί όλες τις f_n είναι απαραίτητη για την ισχύ του προηγούμενου θεωρήματος.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$ παρατηρούμε ότι όλες οι f_n είναι μετρήσιμες, $f_n \to 0$ κατά σημείο και $\int f_n\, d\mu = 1$ για κάθε n. Συνεπώς οι (6.2.3) και (6.2.4) δεν αληθεύουν. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρατηρώντας ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue συμπεριφέρεται καλά και ως προς τις σειρές μη αρνητικών συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 6.2.12 (Beppo Levi). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0,\infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε:*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε

$$S_m = f_1 + f_2 + \cdots + f_m,$$

τότε κάθε S_m είναι μετρήσιμη και για τη συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ έχουμε ότι

$$S_m \nearrow f \quad \text{για } m \to \infty.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \int f\, d\mu = \lim_m \int S_m\, d\mu = \lim_m \sum_{n=1}^{m} \int f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu,$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος. □

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $P(x)$ μια ιδιότητα που αφορά τα στοιχεία $x \in X$. Θα λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει *μ−σχεδόν παντού* αν το σύνολο

$$Z = \{x \in X : \text{η } P(x) \text{ δεν αληθεύει}\}$$

είναι μ-μηδενικό (θυμηθείτε τον Ορισμό 2.3.1). Θα γράφουμε ότι η P ισχύει μ–σ.π. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι οι «σχεδόν παντού διαταραχές» δεν επηρεάζουν το ολοκλήρωμα:

Πρόταση 6.2.13. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $f = g$ μ–σ.π., τότε $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.*

(ii) *$f = 0$ μ–σ.π. αν και μόνο αν $\int f\, d\mu = 0$.*

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $X = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ και παρατηρούμε ότι $Z \in \mathcal{A}$ (αφού f, g μετρήσιμες) και $\mu(Z) = 0$ από την υπόθεση. Χρησιμοποιώντας το (iv) της Πρότασης 6.2.2 βλέπουμε ότι

$$\int f\, d\mu = \int_{X \setminus Z} f\, d\mu = \int_{X \setminus Z} g\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

(ii) Αν $f = 0$ μ–σ.π. τότε από το (i) έχουμε

$$\int f\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0.$$

Έστω τώρα ότι $\int f\, d\mu = 0$. Θέτουμε $A = [f > 0]$ και παρατηρούμε ότι αν $A_n = \left[f \geqslant \frac{1}{n}\right]$ τότε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Όμως,

$$0 = \int f\, d\mu \geqslant \int_{A_n} f\, d\mu \geqslant \int_{A_n} \frac{1}{n}\, d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n),$$

δηλαδή $\mu(A_n) = 0$ για κάθε n. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$, άρα πράγματι $f = 0$ μ–σ.π. □

Από την Πρόταση 6.2.13 έπεται ότι αν μια ιδιότητα μιας συνάρτησης f ισχύει μ–σ.π. τότε το ολοκλήρωμα της f δε θα αλλάξει αν υποθέσουμε ότι ισχύει παντού. Έτσι, μπορούμε να γενικεύσουμε για παράδειγμα το Πόρισμα 6.2.5 λέγοντας ότι η f_n συγκλίνει στην f μ–σ.π. και ότι $f_n \leqslant f$ μ–σ.π. Όμοια γενικεύεται το Θεώρημα 6.2.10. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτές τις ιδιότητες του «σχεδόν παντού» χωρίς ιδιαίτερη μνεία.

6.2.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρήσουμε να γενικεύσουμε το Λήμμα 6.2.3. Δίνουμε πρώτα τον εξής ορισμό:

Ορισμός 6.2.14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \tag{6.2.5}$$

για $A \in \mathcal{A}$. Η ν λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ.*

Οι βασικές ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος είναι οι εξής:

Πρόταση 6.2.15. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και ν το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το ν είναι μέτρο.*

(ii) *Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$*[2].

(iii) *Αν $g : X \to [0, \infty]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu.$$

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές ότι $\nu(\emptyset) = 0$. Για την αριθμήσιμη προσθετικότητα, θεωρούμε μια ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, δηλαδή ότι

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu. \tag{6.2.6}$$

Αφού τα A_n είναι ξένα ανά δύο, συμπεραίνουμε ότι

$$\chi_{\bigcup_n A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n},$$

άρα η (6.2.6) είναι ισοδύναμη με την

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{A_n} \, d\mu$$

που προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Beppo Levi για τις $f_n := f\chi_{A_n}$.

(ii) Το έχουμε ήδη αποδείξει στο (iv) της Πρότασης 6.2.2.

(iii) Θα σπάσουμε την απόδειξη σε βήματα, ακολουθώντας την μέχρι τώρα πορεία του ορισμού του ολοκληρώματος.

Βήμα 1. Η g είναι της μορφής $g = \chi_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$.

Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζουμε

$$\int g \, d\nu = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int gf \, d\mu.$$

Βήμα 2. Η g είναι απλή συνάρτηση της μορφής

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας το Βήμα 1 και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε:

$$\int g \, d\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A_j} \, d\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A_j} f \, d\mu = \int gf \, d\mu.$$

[2]Αν για δύο μέτρα μ και ν ισχύει αυτή η ιδιότητα, λέμε ότι το ν είναι *απολύτως συνεχές* ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$.

Βήμα 3. Η g είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία απλών μη αρνητικών συναρτήσεων $(s_n)_n$ με $s_n \nearrow g$. Χρησιμοποιώντας το Βήμα 2 βλέπουμε ότι

$$\int s_n \, d\nu = \int s_n f \, d\mu$$

για κάθε n. Άρα, παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int g \, d\nu = \int g f \, d\mu,$$

αφού οι (s_n) και $(s_n f)$ είναι αύξουσες ακολουθίες. □

Σχόλιο. Από την Πρόταση 6.2.15 προκύπτει φυσιολογικά το εξής ερώτημα: Αν μ και ν είναι δύο μέτρα σε έναν χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $\nu \ll \mu$, είναι απαραίτητο το ν να είναι αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης f ως προς μ, δηλαδή να είναι της μορφής (6.2.5); Αυτό το ερώτημα είναι αρκετά δύσκολο. Το Θεώρημα Radon-Nikodym που θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 10 δίνει θετική απάντηση αν ικανοποιούνται κάποιες υποθέσεις για το ζεύγος των μέτρων μ και ν.

6.3 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με το τελευταίο στάδιο του ορισμού του ολοκληρώματος: το ολοκλήρωμα για συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και μιγαδικές συναρτήσεις. Αρχίζουμε με την πρώτη περίπτωση: Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Θυμηθείτε τη βασική ταυτότητα

$$f = f^+ - f^-$$

όπου οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν πιστέψουμε προς στιγμήν ότι έχουμε ορίσει ένα ολοκλήρωμα για όλες αυτές τις συναρτήσεις f, το οποίο να επεκτείνει τον ορισμό της προηγούμενης παραγράφου και επιπλέον να είναι γραμμικό, αναγκαστικά θα ισχύει:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Για να ορίζεται όμως καλά αυτή η ποσότητα, πρέπει να αποφύγουμε καταστάσεις της μορφής $\infty - \infty$. Δίνουμε λοιπόν τον εξης ορισμό:

Ορισμός 6.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $\int f^+ \, d\mu < \infty$ και $\int f^- \, d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f *ορίζεται* και θέτουμε
$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

(ii) Αν ισχύουν και οι δύο παραπάνω σχέσεις, δηλαδή $\int f^+ \, d\mu < \infty$ και $\int f^- \, d\mu < \infty$, τότε η συνάρτηση f λέγεται *ολοκληρώσιμη* και πάλι θέτουμε:
$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Παρατήρηση 6.3.2. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$|f| = f^+ + f^-$$

παρατηρούμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Λόγω της τελευταίας παρατήρησης οδηγούμαστε στον εξής ορισμό για τη μιγαδική περίπτωση:

Ορισμός 6.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται *ολοκληρώσιμη* αν $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Αν $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν οι u και v είναι ολοκληρώσιμες (εξηγήστε γιατί), δηλαδή αν και μόνον αν τα ολοκληρώματα

$$\int u^+\, d\mu, \ \int u^-\, d\mu, \ \int v^+\, d\mu \text{ και } \int v^-\, d\mu$$

είναι πεπερασμένα. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε, φυσιολογικά,

$$\int f\, d\mu = \left(\int u^+\, d\mu - \int u^-\, d\mu\right) + i\left(\int v^+\, d\mu - \int v^-\, d\mu\right).$$

Από τον ορισμό έπεται άμεσα η σχέση

$$\int f\, d\mu = \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu. \tag{6.3.1}$$

Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$ θέτουμε και πάλι

$$\int_A f\, \mu = \int f \chi_A\, d\mu.$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του Ορισμού 6.3.1 και με $\mathcal{L}^1(\mu)$ το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του Ορισμού 6.3.3. Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια τις ιδιότητες αυτών των χώρων. Οι αποδείξεις των αντίστοιχων προτάσεων και θεωρημάτων μοιάζουν πολύ και για αυτό θα ασχοληθούμε ουσιαστικά μόνο με την περίπτωση του $\mathcal{L}^1(\mu)$. Ο αναγνώστης μπορεί να συμπληρώσει εκείνες αποδείξεις για τον $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ που παρουσιάζουν κάποια μικρή διαφορά.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a, b \in \mathbb{C}$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Ο χώρος $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος, δηλαδή $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

(ii) *Το ολοκλήρωμα στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι γραμμικό, δηλαδή*

$$\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu.$$

Απόδειξη. (i) Η συνάρτηση $af+bg$ είναι φυσικά μετρήσιμη και από την τριγωνική ανισότητα ικανοποιεί την

$$|af + bg| \leqslant |a||f| + |b||g|.$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\int |af + bg|\, d\mu \leqslant |a| \int |f|\, d\mu + |b| \int |g|\, d\mu < \infty$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Για την προσθετικότητα: υποθέτουμε αρχικά ότι οι f και g παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και θέτουμε $h = f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ από το (i). Τότε, από τη γνωστή ταυτότητα για το θετικό και το αρνητικό μέρος έχουμε ότι

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ή ισοδύναμα

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Όμως, όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι τώρα μη αρνητικές, άρα ισχύει η

$$\int h^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int h^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu$$

η οποία αφού όλα τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα γράφεται ως:

$$\int h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu$$

ή ισοδύναμα

$$\int h \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Στη γενική περίπτωση, θέτουμε $u_1 = \mathrm{Re} f$, $v_1 = \mathrm{Im} f$, $u_2 = \mathrm{Re} g$ και $v_2 = \mathrm{Im} g$. Τότε, από την (6.3.1) και από τον τελευταίο υπολογισμό παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int f + g \, d\mu &= \int (u_1 + u_2) \, d\mu + i \int (v_1 + v_2) \, d\mu \\ &= \left(\int u_1 \, d\mu + i \int v_1 \, d\mu\right) + \left(\int u_2 \, d\mu + i \int v_2 \, d\mu\right) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.\end{aligned}$$

Για την ομογένεια τώρα: ξεκινάμε με την περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $a \geqslant 0$ έχουμε τις σχέσεις

$$(af)^+ = af^+ \text{ και } (af)^- = af^-$$

άρα σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\int af \, d\mu = \int af^+ \, d\mu - \int af^- \, d\mu = a \int f \, d\mu.$$

Αν πάλι $a < 0$, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$(af)^+ = -af^- \text{ και } (af)^- = -af^+$$

(εξηγήστε γιατί) άρα και πάλι ισχύει ότι

$$\int af \, d\mu = -a \int f^- \, d\mu + a \int f^+ \, d\mu = a \int f \, d\mu.$$

Αν τώρα η f είναι μιγαδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, γράφουμε $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$ και τότε για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\int af \, d\mu = \int au \, d\mu + i \int av d\mu = a \int f \, d\mu$$

από τον προηγούμενο υπολογισμό. Αν $a = i$, τότε $af = -v + iu$ και βλέπουμε ότι

$$\int f\, d\mu = -\int v\, d\mu + i\int u\, d\mu = i\int f\, d\mu$$

χρησιμοποιώντας και πάλι την (6.3.1). Για τη γενική περίπτωση, αν $a = x + iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int af\, d\mu &= \int (xf + iyf)\, d\mu = \int xf\, d\mu + \int iyf\, d\mu \\ &= x\int f\, d\mu + iy\int f\, d\mu = a\int f\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 6.3.5. Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ή $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $A, B \in \mathcal{A}$ είναι δύο ξένα σύνολα, τότε

$$\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B g\, d\mu.$$

Απόδειξη. Αφού τα A, B είναι ξένα ισχύει η σχέση $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ και το συμπέρασμα έπεται από το (ii) της παραπάνω πρότασης. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το ολοκλήρωμα που ορίσαμε είναι πράγματι μονότονο όπως θέλαμε. Φυσικά αυτό δεν έχει νόημα για μιγαδικές συναρτήσεις οπότε δουλεύουμε στην κλάση $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Πρόταση 6.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ με $f \leqslant g$ μ–σ.π. στο X. Τότε,*

$$\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $A = [|f| = \infty]$. Από την Παρατήρηση 6.2.9 έπεται ότι $\mu(A) = 0$, άρα

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu = 0.$$

Από το ανάλογο της Πρότασης 6.3.4 για τον χώρο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ έπεται ότι $g\chi_{A^c} - f\chi_{A^c} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και επιπλέον:

$$\int_{A^c} g\, d\mu = \int_{A^c} f\, d\mu + \int_{A^c} (g - f)\, d\mu \geqslant \int_{A^c} f\, d\mu,$$

αφού $g - f \geqslant 0$ μ–σ.π. Άρα τελικά:

$$\int g\, d\mu = \int_A g\, d\mu + \int_{A^c} g\, d\mu \geqslant \int_A f\, d\mu + \int_{A^c} f\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

□

Πρόταση 6.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Τότε:*

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu.$$

Απόδειξη. Αν $\int f\,d\mu = 0$ τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Σε αντίθετη περίπτωση, γράφουμε

$$\left|\int f\,d\mu\right| = a\int f\,d\mu$$

για κάποιον $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$ και παρατηρούμε ότι, από την Πρόταση 6.2.4,

$$\left|\int f\,d\mu\right| = a\int f\,d\mu = \int af\,d\mu.$$

Όμως, η αριστερή ποσότητα είναι πραγματική, άρα χρησιμοποιώντας την (6.3.1) και την Πρόταση 6.3.6 έχουμε

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \int \mathrm{Re}(af)\,d\mu \leqslant \int |af|\,d\mu = \int |f|\,d\mu,$$

όπως θέλαμε. □

Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα πολύ βασικό θεώρημα σύγκλισης: το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Το θεώρημα αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται σε αυθαίρετες μετρήσιμες συναρτήσεις σε αντίθεση με το λήμμα του Fatou και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης που ισχύουν μόνο για μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.3.8 (θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ–σ.π. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leqslant g$ μ–σ.π. στο X. Τότε οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0. \tag{6.3.2}$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu. \tag{6.3.3}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αφού $|f_n| \leqslant g$ μ–σ.π. έπεται ότι

$$\int |f_n|\,d\mu \leqslant \int g\,d\mu < \infty,$$

δηλαδή $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ για καθε n. Επιπλέον, αφού $f_n \to f$ μ–σ.π. έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη και $|f| \leqslant g$ μ–σ.π. Άρα, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Για την (6.3.2) τώρα, παρατηρούμε ότι η συνθήκη της ύπαρξης μιας τέτοιας συνάρτησης g θυμίζει την αντίστοιχη συνθήκη στο Θεώρημα 6.2.10. Η $|f_n - f|$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, $|f_n - f| \to 0$ μ–σ.π. και $|f_n - f| \geqslant 0$. Αφού επιπλέον

$$|f_n - f| \leqslant 2g \ \ \mu - \text{σ.π.} \quad \text{και} \quad \int 2g\,d\mu < \infty$$

έπεται, από το (ii) του Θεωρήματος 6.2.10, ότι

$$\lim_n \int |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\left|\int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu\right| = \left|\int (f_n - f)\,d\mu\right| \leqslant \int |f_n - f|\,d\mu \to 0,$$

άρα ισχύει η (6.3.3). □

Πόρισμα 6.3.9 (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ–σ.π. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ μ–σ.π. στο X. Τότε οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Απόδειξη. Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης αν παρατηρήσουμε ότι η σταθερή συνάρτηση M είναι ολοκληρώσιμη: πράγματι

$$\int M\,d\mu = M \cdot \mu(X) < \infty.$$

□

Σχόλιο. Με το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ολοκληρώνεται η διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος Lebesgue και η απόδειξη των βασικών του ιδιοτήτων. Η ίδια η πορεία που ακολουθήσαμε για τον ορισμό μας δίνει μια μέθοδο απόδειξης νέων αποτελεσμάτων: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση P ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, πολύ συχνά ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Αποδεικνούμε αρχικά την πρόταση στην περίπτωση που η f είναι της μορφής $f = \chi_A$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο A.

2. Χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση που η f είναι μη αρνητική και απλή.

3. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση από απλές συναρτήσεις σε συνδυασμό με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει στην κλάση των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων.

4. Τέλος, λόγω της ταυτότητας $f = f^+ - f^-$ γενικεύουμε το αποτέλεσμα για τυχούσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πραγματικές τιμές και στη συνέχεια με μιγαδικές μέσω της ταυτότητας (6.3.1).

Αυτή η τεχνική είναι πολύ συνηθισμένη στη Θεωρία Μέτρου και θα τη χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές παρακάτω.

6.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

6.1. (Ανισότητα Chebyshev-Markov) Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0,\infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > t\}\right) \leqslant \frac{1}{t}\int f\, d\mu.$$

6.2. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με

$$F(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}).$$

Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

6.3. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x}\, d\lambda = 0$.

6.4. Βρείτε μια ακολουθία $\{f_n\}$ μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n\, d\lambda = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την $\{f_n\}$ έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;

6.5. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu.$$

6.6. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

6.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μη αρνητική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f\, d\lambda.$$

6.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}} f\, d\mu.$$

6.9. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

6.10. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

6.11. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu \leqslant \int\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Ομάδα Β′.

6.12. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu.$$

6.13. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f|\, d\lambda \to 0$.

6.14. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$;

6.15. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αν $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ και $\int |f_n| \, d\mu \to \int |f| \, dmu$.

6.16. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αν $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \, d\mu \to \int f^+ \, d\mu$.

6.17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε

$$\int_E f \, d\mu > \int f \, d\mu - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

6.18. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $E \in \mathcal{A}$ και $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f \, d\mu < \varepsilon$.

6.19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^x f \, d\lambda$ είναι συνεχής.

6.20. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{A}$. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

6.21. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty.$$

6.22. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

6.23. Υπολογίστε (αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας) το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} dx.$$

6.24. Έστω $\{f_n\}$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| \, d\mu \to \int |f| \, d\mu.$$

6.25. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού και αν $f_n = \min\{f, n\}$, τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

(ii) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

6.26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[a,x]} f \, d\lambda = 0,$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Να δείξετε ότι $f = 0$ λ−σ.π. στο $[a,b]$.

6.27. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} dx = 0.$$

Ομάδα Γ΄.

6.28. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

6.29. Έστω $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \, d\mu \to \int g \, d\mu$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

6.30. Έστω f Lebesgue μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(i) Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ λ−σ.π. στο $[0,1]$.

(ii) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f \, d\lambda : \lambda(E) = 1/2\} > 0$.

6.31. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $A \subseteq E$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > \alpha$, τότε

$$\int_A f \, d\lambda \geqslant \delta.$$

6.32. Έστω $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$, συνεχής στο 0. Να δείξετε ότι, για κάθε n, η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1[0,1]$.

6.33. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(ii) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

6.34. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty,$$

η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$, και

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n.$$

6.35. Έστω $k,n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1,\dots,E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα σύνολα $E_1,E_2,\dots,E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

6.36. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ και έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_n |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

6.37. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{-1/2}$ αν $0<x<1$ και $f(x)=0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών και θέτουμε

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n}.$$

(i) Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι $|g|<\infty$ σχεδόν παντού.

(ii) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα.

(iii) Δείξτε ότι η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα, παρ' όλο που $g^2<\infty$ σχεδόν παντού.

6.38. Έστω $f:[0,1]\to[0,\infty)$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x)>0\}).$$

6.39. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x>0$ ορίζουμε

$$g(x)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

6.40. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων με

$$(*)\qquad \int_0^1 |f_n(t)|^3\, d\lambda(t) \leqslant 1,$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $E\subseteq[0,1]$ με $\lambda(E)<\delta$ να ισχύει $\int_E |f_n|\, d\lambda<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) δεν ισχύει αν η $(*)$ αντικατασταθεί από την $\int_0^1 |f_n(t)|\, d\lambda(t)\leqslant 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

6.41. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E_n=\{x : |f(x)|\geqslant n\}$, να δείξετε ότι $n\cdot\mu(E_n)\to 0$ καθώς $n\to\infty$.

6.42. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(i) Αν $\int_U f\, d\lambda=0$ για κάθε ανοικτό σύνολο U με $\lambda(U)=1$, δείξτε ότι $f=0$ σχεδόν παντού.

(ii) Αν $\int_G f\, d\lambda = \int_{\overline{G}} f\, d\lambda$, για κάθε ανοικτό σύνολο G, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

6.43. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $\int_E f\, d\mu \leqslant C$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι

$$\int_X f\, d\mu \leqslant C.$$

6.44. Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α′) $\lambda(A_k) \geqslant 1/2$, για κάθε k και

(β′) $\lambda(A_k \cap A_s) \leqslant 1/4$ για κάθε $k \neq s$.

Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant 1.$$

Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

Γνωρίζουμε από την Πραγματική Ανάλυση τις έννοιες της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών πραγματικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι

$$f_n \to f \text{ κατά σημείο αν } \; f_n(x) \to f(x) \text{ για κάθε } x \in X$$

και

$$f_n \to f \quad \text{ομοιόμορφα αν } \; \|f_n - f\|_\infty \to 0,$$

δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \geqslant n_0 \text{ και } x \in X.$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε διάφορες άλλες έννοιες σύγκλισης ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και θα εξετάσουμε διάφορες σχέσεις μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα αυτής της μορφής είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στη Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς είναι το βασικό εργαλείο για την απόδειξη οριακών θεωρημάτων. Ενδεικτικά, παραπέμπουμε σε οποιοδήποτε βιβλίο μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων για τις αποδείξεις του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών και του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

7.1 Κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση

Οι συνηθισμένες έννοιες της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη Θεωρία Πιθανοτήτων, όπου μας απασχολούν φαινόμενα που δεν συμβαίνουν «παντού» αλλά συμβαίνουν «βέβαια», δηλαδή με πιθανότητα 1. Έτσι, δίνουμε τους εξής ασθενέστερους ορισμούς:

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά σημείο μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X \setminus Z$.

(ii) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus Z$, δηλαδή

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X \setminus Z\} \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

(iii) Η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$ να ισχύει $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Είναι φανερό από τους ορισμούς ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα μ−σ.π. τότε $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π. Επίσης, αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα μ−σ.π. σε μια συνάρτηση f, τότε η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π.

Ισχύει και το αντίστροφο του τελευταίου ισχυρισμού:

Πρόταση 7.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π. τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ−σ.π.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν η ακολουθία $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy τότε υπάρχει $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα στο σύνολο $X \setminus Z$, όπου Z το σύνολο που βρίσκουμε από τον Ορισμό 7.1.1. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. □

Αποδεικνύουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες των ειδών σύγκλισης που ορίσαμε:

Πρόταση 7.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π. και $f_n \to g$ κατά σημείο μ−σ.π., τότε $f = g$ μ−σ.π.*

(ii) *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα μ−σ.π. και $f_n \to g$ ομοιόμορφα μ−σ.π., τότε $f = g$ μ−σ.π.*

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό της κατά σημείο μ−σ.π. σύγκλισης, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{στο } X \setminus Z_1 \quad \text{και} \quad f_n(x) \to g(x) \quad \text{στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, έχουμε $f(x) = g(x)$ για $x \in X \setminus (Z_1 \cup Z_2)$. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το γεγονός ότι $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$.

(ii) Είναι άμεσο από το (i) αφού η ομοιόμορφη μ−σ.π. σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο μ−σ.π. σύγκλιση. □

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π. και $g_n \to g$ κατά σημείο μ−σ.π., τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ έχουμε $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά σημείο μ−σ.π.*

(ii) *Αν* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π. και* $g_n \to g$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π., τότε για κάθε* $a, b \in \mathbb{C}$ *έχουμε* $af_n + bg_n \to af + bg$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π.*

Απόδειξη. (i) Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ στο } X \setminus Z_1 \ \text{ και } \ g_n(x) \to g(x) \ \text{ στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, για κάθε $x \in X \setminus (Z_1 \cup Z_2)$ έχουμε $af_n(x) + bg_n(x) \to af(x) + bg(x)$, και $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$. Δηλαδή, $af_n + bg_n \to af + bg$ μ–σ.π.

(ii) Βρίσκουμε πάλι σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ ώστε

$$f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_1 \ \text{ και } \ g_n \to g \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, από τα γνωστά για την ομοιόμορφα σύγκλιση βλέπουμε ότι $af_n + bg_n \to af + bg$ ομοιόμορφα στο $X \setminus (Z_1 \cup Z_2)$. Το ζητούμενο έπεται τώρα και πάλι από το γεγονός ότι $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$. □

Πρόταση 7.1.5. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου,* $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ *ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων,* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $a, b \in \mathbb{C}$.

(i) *Αν* $f_n \to f$ *κατά σημείο* μ*–σ.π. και* $g_n \to g$ *κατά σημείο* μ*–σ.π., τότε* $f_n g_n \to fg$ *κατά σημείο* μ*–σ.π.*

(ii) *Αν* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π.,* $g_n \to g$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π και επιπλέον, υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|f_n| \leqslant M$ *και* $|g_n| \leqslant M$ μ*–σ.π. για κάθε* n*, τότε* $f_n g_n \to fg$ *ομοιόμορφα* μ*–σ.π.*

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια με το (i) της προηγούμενης Πρότασης και αφήνεται ως άσκηση.

(ii) Σύμφωνα με τον ορισμό της ομοιόμορφης μ–σ.π. σύγκλισης, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_1 \ \text{ και } \ g_n \to g \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_2.$$

Από τη δεύτερη υπόθεση, για κάθε n βρίσκουμε επιπλέον σύνολο $A_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_n) = 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ και $|g_n| \leqslant M$ στο $X \setminus A_n$. Θέτουμε

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

και παρατηρούμε ότι $Z \in \mathcal{A}$ και επιπλέον

$$\mu(Z) \leqslant \mu(Z_1) + \mu(Z_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$

δηλαδή $\mu(Z) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $x \in X \setminus Z$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= \big|(f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)) + (f(x)g_n(x) - f(x)g(x))\big| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \\ &\leqslant M(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|). \end{aligned}$$

αφού ισχύει και η $|f(x)| \leqslant M$ στο $X \setminus Z$ (εξηγήστε γιατί). Όμως, σύμφωνα με τις υποθέσεις, βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus Z$ και $n \geqslant N$ να έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Με βάση τα παραπάνω, για $x \in X \setminus Z$ και $n \geqslant N$ έχουμε

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

άρα $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα μ–σ.π. όπως θέλαμε. □

Σχόλιο. Η υπόθεση ότι οι $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στην προηγούμενη πρόταση δεν μπορεί να παραλειφθεί. Αφήνεται ως άσκηση η κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος.

7.2 Σύγκλιση κατά μέσο

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι βρισκόμαστε σε έναν χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Οι μετρήσιμες συναρτήσεις σε έναν τέτοιο χώρο ονομάζονται *τυχαίες μεταβλητές*. Αν λοιπόν $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, η ποσότητα

$$\mathbb{E}[f] = \int f \, d\mu$$

λέγεται *μέση τιμή* της f και είναι, κατά κάποιο τρόπο, το κέντρο της κατανομής της f. Αυτό οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 7.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *κατά μέσο* αν

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy κατά μέσο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geqslant n_0$ να ισχύει

$$\int |f_n - f_m| \, d\mu < \varepsilon.$$

Είναι και πάλι σαφές, ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά μέσο σε μια συνάρτηση f, τότε είναι και Cauchy κατά μέσο.

Όπως και στην Παράγραφο 7.1 αποδεικνύουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες της σύγκλισης κατά μέσο:

Πρόταση 7.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και $f_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f = g$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω της τριγωνικής ανισότητας και της γραμμικότητας του ολοκληρώματος για κάθε n έχουμε

$$\int |f - g| \, d\mu \leqslant \int |f - f_n| \, d\mu + \int |f_n - g| \, d\mu \to 0$$

από τις δοσμένες συγκλίσεις. Έτσι, αφού $|f-g| \geqslant 0$, συμπεραίνουμε ότι $|f-g| = 0$ μ–σ.π. ή ισοδύναμα ότι $f = g$ μ–σ.π. □

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά μέσο.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο από τη σχέση

$$\int \left|(af_n + bg_n) - (af + bg)\right| \, d\mu \leqslant |a| \int |f_n - f| \, d\mu + |b| \int |g_n - g| \, d\mu \to 0.$$

□

Σχετικά με τις ακολουθίες συναρτήσεων που είναι Cauchy κατά μέσο έχουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.2.4 (Riesz). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέσο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση f. Αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, για κάθε s υπάρχει $k_s \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geqslant k_s$ να ισχύει

$$\int |f_n - f_m| \, d\mu < \frac{1}{2^s}.$$

Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι $k_1 < k_2 < \cdots$ (εξηγήστε γιατί), συνεπώς η $\{f_{k_n}\}$ είναι υπακολουθία της $\{f_n\}$. Από την κατασκευή της υπακολουθίας συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\int |f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \, d\mu < \frac{1}{2^n}$$

για κάθε n. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $F : X \to [0, \infty]$ με

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_{n+1}} - f_{k_n}|$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμη και

$$\int F \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \, d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty,$$

από το Θεώρημα Beppo Levi (Θεώρημα 6.2.12). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $F < \infty$ μ–σ.π. στο X, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))$ συγκλίνει για κάθε $x \in B$, για κάποιο $B \in \mathcal{A}$ με $\mu(X \setminus B) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_{k_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)), & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμη και επιπλέον για $x \in B$ ισχύει ότι

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(f_{k_1}(x) + \sum_{n=1}^{N-1}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))\right) = \lim_{N\to\infty} f_{k_N}(x).$$

Συνεπώς, $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π. στο X.

Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο. Για $x \in B$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |f_{k_N}(x) - f(x)| &= \left|f_{k_N}(x) - f_{k_1}(x) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))\right| \\ &= \left|\sum_{n=N}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\left|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)\right|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mu(X \setminus B) = 0$, από το Θεώρημα Beppo Levi παίρνουμε

$$\int |f_{k_N} - f|\, d\mu \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\int \left|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)\right| d\mu \to 0,$$

άρα $f_{k_n} \to f$ κατά μέσο καθώς $N \to \infty$. Τέλος, έχουμε ότι

$$\int |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int |f_n - f_{k_n}|\, d\mu + \int |f_{k_n} - f|\, d\mu \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ από τον παραπάνω υπολογισμό και το γεγονός ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο. □

Πόρισμα 7.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Θεώρημα Riesz αφού η $\{f_n\}$ θα είναι επιπλέον Cauchy κατά μέσο. □

Παράδειγμα 7.2.6. Δεν είναι σωστό ότι η σύγκλιση κατά μέσο συνεπάγεται την μ–σ.π. σύγκλιση.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}$, $f_5 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ κ.ο.κ. Δηλαδή, για κάθε n θεωρούμε τα διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{n}$ που καλύπτουν το $[0,1]$ (ξεκινώντας από το $n = 1$) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για τον $n+1$. Είναι σαφές ότι

$$\int |f_m(x)|\, dx \to 0,$$

δηλαδή $f_m \to 0$ κατά μέσο αλλά δεν ισχύει $f_m \to 0$ μ–σ.π.: Αν $x \in [0,1]$ τότε ο x ανήκει σε άπειρα διαστήματα της μορφής $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ με $0 \leqslant k \leqslant n-1$, άρα $f_m(x) = 1$ για άπειρους δείκτες m: συνεπώς η $\{f_m(x)\}$ δε συγκλίνει στο 0 για κανένα $x \in [0,1]$. □

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος Riesz είναι το εξής ανάλογο της Πρότασης 7.1.5 για τη σύγκλιση κατά μέσο:

Πρόταση 7.2.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ μ−σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|f| \leqslant M$ μ−σ.π.*

(ii) *Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, $g_n \to g$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ και $|g_n| \leqslant M$ μ−σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.*

Απόδειξη. (i) Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f κατά σημείο μ−σ.π. και το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5 (ii).

(ii) Ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 7.1.5 (ii) μπορούμε να βρούμε σύνολο $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus Z$ και $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leqslant M$$

άρα και $|g(x)| \leqslant M$ από το (i). Έτσι, γράφουμε:

$$\begin{aligned}\int \big|f_n g_n - fg\big|\, d\mu &= \int \big|(f_n g_n - f_n g) + (f_n g - fg)\big|\, d\mu \\ &\leqslant \int |f_n||g_n - g|\, d\mu + \int |f_n - f||g|\, d\mu \\ &\leqslant M \int |g_n - g|\, d\mu + M \int |f_n - f|\, d\mu \to 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο. □

7.3 Σύγκλιση κατά μέτρο

Ορισμός 7.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *κατά μέτρο* (ή κατά πιθανότητα), αν για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0.$$

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy κατά μέτρο* αν για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geqslant n_0$ να ισχύει

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta.$$

Θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στα παρακάτω η εξής:

Παρατήρηση 7.3.2. Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε για κάθε $a, b > 0$ ισχύει:

$$\mu(\{x : |f(x) + g(x)| \geqslant a + b\}) \leqslant \mu(\{x : |f(x)| \geqslant a\}) + \mu(\{x : |g(x)| \geqslant b\}).$$

Η απόδειξη της ανισότητας αφήνεται ως άσκηση.

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f κατά μέτρο, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο (επαληθεύστε το).

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $f_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f = g$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Παρατήρηση 7.3.2, για κάθε n έχουμε

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu\left(\left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

το οποίο συγκλίνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Άρα $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και έπεται ότι $f = g$ μ–σ.π. (εξηγήστε γιατί). □

Πρόταση 7.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ έχουμε $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από τη σχέση:

$$\begin{aligned}&\mu(\{x : |(af_n(x) + bg_n(x)) - (af(x) + bg(x))| \geqslant \varepsilon\})\\ &\qquad\leqslant \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|a|}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : |g_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|b|}\right\}\right) \to 0\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες ως άσκηση. □

Θα μελετήσουμε τώρα την συμπεριφορά των ακολουθιών $\{f_n\}$ που είναι Cauchy κατά μέτρο. Υπενθυμίζουμε την έννοια του $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων: Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X θέτουμε

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα } A_n\}.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4, έχουμε την ταυτότητα

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Σχετικά με το $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων ισχύει το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 7.3.5 (1ο Λήμμα Borel-Cantelli). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

τότε $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ δηλαδή μ–σχεδόν κάθε $x \in X$ ανήκει το πολύ σε πεπερασμένα από τα A_n.

Αυτή είναι η Άσκηση 2.3. Οι αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραλείπονται και αφήνονται ως ασκήσεις για τον αναγνώστη.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 7.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, για κάθε s βρίσκουμε $k_s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \frac{1}{2^s}\right\}\right) < \frac{1}{2^s}$$

για κάθε $m, n \geqslant k_s$. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε τους k_s με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε $k_1 < k_2 < \cdots$ (εξηγήστε γιατί). Έτσι, η $\{f_{k_n}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{f_n\}$ και επιπλέον $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε n, όπου

$$A_n = \left\{x \in X : |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| \geqslant \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Αφού λοιπόν $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι αν $F = \limsup_n A_n$, τότε από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli έπεται ότι $\mu(F) = 0$. Από τον ορισμό του $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων, αν $x \in X \setminus F$ υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{για κάθε } n \geqslant N.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x))$$

συγκλίνει για κάθε $x \in X \setminus F$, δηλαδή μ–σ.π. στο X. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} f_{k_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)), & \text{αν } x \in X \setminus F \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η f είναι μετρήσιμη και για κάθε $x \in X \setminus F$ έχουμε

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \left(f_{k_1}(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x) \right) = \lim_{N \to \infty} f_{k_N}(x),$$

άρα πράγματι $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π. στο X.

Μένει να δειχθεί η σύγκλιση κατά μέτρο. Αν θέσουμε

$$F_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

παρατηρούμε ότι

$$\mu(F_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

και επιπλέον ότι για κάθε $x \in X \setminus F_m$ έχουμε $|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \geqslant m$. Συνεπώς, αν

$x \in X \setminus F_m$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|f_{k_m}(x) - f(x)| &= \left| f_{k_m}(x) - f_{k_1}(x) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{m-1}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=m}^{\infty}(f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)) \right| \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}}.\end{aligned}$$

Από αυτόν τον υπολογισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_{k_m}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^{m-1}}\right\}\right) \leqslant \mu(F_m) < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $m \geqslant m_0$ ισχύει ότι

$$\mu(\{x : |f_{k_m}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu\left(\left\{x : |f_{k_m}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^m}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{2^m} \to 0$$

καθώς $m \to \infty$, δηλαδή $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο.

Τέλος, για κάθε n και $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_{k_n}(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \to 0$$

αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο και $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα τελικά, $f_n \to f$ κατά μέτρο. □

Πόρισμα 7.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα αφού η $\{f_n\}$ ως συγκλίνουσα κατά μέτρο είναι και Cauchy κατά μέτρο. □

Παράδειγμα 7.3.8. Δεν είναι σωστό ότι η σύγλιση κατά μέτρο συνεπάγεται την μ–σ.π. σύγκλιση: το Παράδειγμα 7.2.6 είναι αντιπαράδειγμα και εδώ – εξηγήστε γιατί.

Πρόταση 7.3.9. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ μ–σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $|f| \leqslant M$ μ–σ.π.*

(ii) *Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, $g_n \to g$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ και $|g_n| \leqslant M$ μ–σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη. (i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.6 υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f κατά σημείο μ–σ.π., άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5.
(ii) Βρίσκουμε, κατά τα γνωστά, σύνολο $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leqslant M$$

για κάθε $x \in X \setminus Z$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\mu(\{x : |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : |g_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right)$$

(εξηγήστε γιατί) άρα έπεται το ζητούμενο. □

7.4 Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μια κάπως ασθενέστερη μορφή της ομοιόμορφης μ–σ.π. σύγκλισης. Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 7.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *σχεδόν ομοιόμορφα* αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$.

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα* αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A$.

Είναι και πάλι σαφές από τον ορισμό ότι αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα.

Πρόταση 7.4.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και $f_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε $f = g$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις, βρίσκουμε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε

$$f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1 \ \text{ και } \ f_n \to g \ \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2$$

και $\mu(A_1), \mu(A_2) < \delta$. Τότε, στο $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ ισχύει ότι $f = g$ (εξηγήστε γιατί), άρα $E \subseteq A_1 \cup A_2$. Συνεπώς,

$$\mu(E) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) < 2\delta$$

και αφού το άρχικό $\delta > 0$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι $f = g$ μ–σ.π. □

Πρόταση 7.4.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και $g_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα. Τότε, για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $af_n + bg_n \to af + bg$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Υπάρχουν σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_1), \mu(A_2) < \delta/2$ και

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1, \quad g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2.$$

Αν θέσουμε $A = A_1 \cup A_2$, τότε $af_n + bg_n \to af + bg$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$ και $\mu(A) < \delta$, άρα έπεται το ζητούμενο. □

Η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση συμπεριφέρεται καλύτερα σε σχέση με τις ακολουθίες Cauchy από τις συγκλίσεις που μελετήσαμε στις δύο προηγούμενες ενότητες. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Επιπλέον ισχύει ότι $f_n \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Για κάθε k βρίσκουμε $A_k \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A_k$. Συνεπώς, υπάρχουν συναρτήσεις $g_k : X \setminus A_k \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to g_k$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_k$. Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

και παρατηρούμε ότι ορίζεται καλά μια $f : X \setminus A \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο A. Πράγματι, αν $x \in X \setminus A$, τότε $x \in X \setminus A_k$ για κάποιους δείκτες k και αφού $f_n(x) \to g_k(x)$ συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες $g_k(x)$ ταυτίζονται για όλους αυτούς τους δείκτες k. Επομένως, η f είναι μετρήσιμη και $f_n \to f$ κατά σημείο στο $X \setminus A$. Τέλος, αφού

$$\mu(A) \leqslant \mu(A_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε k έπεται ότι $\mu(A) = 0$, άρα $f_n \to f$ μ–σ.π.

Για τη σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση τώρα, θεωρούμε $\delta > 0$ και βρίσκουμε k ώστε $\frac{1}{k} < \delta$. Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_k$ και $\mu(A_k) < \frac{1}{k} < \delta$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 7.4.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα αφού η $\{f_n\}$ ως συγκλίνουσα σχεδόν ομοιόμορφα είναι και Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. □

Ανάλογα με τις προηγούμενες παραγράφους, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.4.4 και δείχνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.4.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ μ–σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|f| \leqslant M$ μ–σ.π.*

(ii) *Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και επιπλέον $|f_n| \leqslant M$ και $|g_n| \leqslant M$ μ–σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n g_n \to fg$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. (i) Από το Πόρισμα 7.4.5 έχουμε $f_n \to f$ μ–σ.π., άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5 (ii).

(ii) Έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_1), \mu(A_2) < \delta/2$ και επιπλέον

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1 \quad \text{και} \quad g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2.$$

Από την Πρόταση 7.1.5 (ii) έχουμε ότι $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα μ–σ.π. στο $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ και αφού $\mu(A_1 \cup A_2) < \delta$ έπεται η ζητούμενη σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση. □

7.5 Σύγκριση των διαφόρων ειδών σύγκλισης

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με διάφορα θεωρήματα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ των ειδών σύγκλισης που μελετήσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Ξεκινάμε από το εξής: στο Θεώρημα 7.4.4 είδαμε ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f τότε συγκλίνει στην f και κατά σημείο μ−σ.π. Παραθέτουμε δύο μερικά αντίστροφα αυτού του θεωρήματος: Το πρώτο, το Θεώρημα Egorov, είναι η δεύτερη από τις λεγόμενες «τρεις αρχές του Littlewood» τις οποίες είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 4.

Θεώρημα 7.5.1 (Egorov). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) < \infty$ και $f_n \to f$ μ−σ.π., τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Κατ' αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ παντού στο X (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{k,m} = \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ για κάθε } n \geqslant m \right\} \tag{7.5.1}$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα (εξηγήστε γιατί). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν $x \in X$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ για κάθε $n \geqslant m$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k,m}.$$

Έπεται ότι $\mu(A_{k,m}) \to \mu(X)$ για $m \to \infty$, άρα για κάθε k μπορούμε να βρούμε $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(X) < \mu(A_{k,m_k}) + \frac{\delta}{2^k}.$$

Ορίζουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}.$$

Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \varepsilon$. Τότε για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in A_{k,m_k}$, άρα για κάθε $n \geqslant m_k$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

δηλαδή $\|(f_n - f)|_A\|_\infty < \varepsilon$.

Επίσης,

$$\mu(X \setminus A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta,$$

άρα πράγματι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. □

Ένα άλλο μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος 7.4.4, που δεν απαιτεί το μέτρο μ να είναι πεπερασμένο, είναι το εξής:

Θεώρημα 7.5.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ μ−σ.π. και επιπλέον υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leqslant g$ για κάθε n και $\int g \, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Υποθέτουμε πάλι ότι $f_n \to f$ παντού στο X και θεωρούμε τα σύνολα $A_{k,m}$ της προηγούμενης απόδειξης. Τότε, αφού $|f_n| \leqslant g$ για κάθε n έχουμε ότι $|f| \leqslant g$, άρα $|f_n - f| \leqslant 2g$. Από αυτή τη σχέση και από την (7.5.1) έπεται ότι

$$X \setminus A_{k,m} \subseteq \left\{ x \in X : g(x) > \frac{1}{2k} \right\}.$$

Ισχυρισμός. Για κάθε k ισχύει ότι $\mu\left(\{x \in X : g(x) > 1/2k\}\right) < \infty$.

Πράγματι, αν θέσουμε $S_k = \{x \in X : g(x) > 1/2k\}$, παρατηρούμε ότι αν το $\mu(S_k)$ ήταν άπειρο θα είχαμε

$$\infty > \int g \, d\mu \geqslant \int_{S_k} g \, d\mu > \int_{S_k} \frac{1}{2k} \, d\mu = \frac{1}{2k}\mu(S_k) = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, δείχνουμε ότι η ακολουθία $(X \setminus A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα με τομή το κενό σύνολο. Από τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι $\lim_n \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$ για κάθε k. Έτσι, βρίσκουμε $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \frac{\delta}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}.$$

Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A (ακριβώς όπως πριν) και

$$\mu(X \setminus A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_{k,m_k}) = \delta.$$

Αυτό δείχνει ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. □

Συνεχίζουμε με άλλο ένα θεώρημα που επιβεβαιώνει ότι η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρή: συνεπάγεται την σύγκλιση κατά μέτρο.

Θεώρημα 7.5.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Για το ευθύ πρώτα: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus A$ και κάθε $n \geqslant n_0$ να έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Συνεπώς,

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq A$$

και έπεται ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu(A) < \delta$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. Αυτό δείχνει ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Όσον αφορά το αντίστροφο, έχει ήδη αποδειχθεί ουσιαστικά στο Θεώρημα 7.3.6: Ακολουθώντας τον συμβολισμό αυτής της απόδειξης, έχουμε ότι $\mu(F_m) < \frac{1}{2^{m-1}}$ για κάθε m. Έστω $\delta > 0$. Βρίσκουμε m

ώστε $\frac{1}{2^{m-1}} < \delta$ και τότε για $x \in X \setminus F_m$ έχουμε

$$|f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $n \geqslant m$. Συνεπώς,

$$\|(f_{k_n} - f)|_{X\setminus F_m}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0$$

για $k \to \infty$, άρα $f_{k_n} \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus F_m$. Αυτό δείχνει ότι $f_{k_n} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.5.3 με το θεώρημα Egorov παίρνουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 7.5.4 (Lebesgue). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) < \infty$ και $f_n \to f$ μ–σ.π., τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

□

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τη σύγκλιση κατά μέτρο με τη σύγκλιση κατά μέσο. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.5.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ με $\int g \, d\mu < \infty$ και $|f_n| \leqslant g$ για κάθε n, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς για το ευθύ: έστω $\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα Chebyshev-Markov έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

αφού $f_n \to f$ κατά μέσο. Άρα, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Για το αντίστροφο τώρα, υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αν το ζητούμενο δεν ισχύει, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int |f_{k_n} - f| \, d\mu \geqslant \varepsilon_0 \tag{7.5.2}$$

για κάθε n. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, έχουμε επίσης ότι $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα, από το Πόρισμα 7.3.7, υπάρχει μια υπακολουθία $f_{k_{l_n}}$ της f_{k_n} ώστε $f_{k_{l_n}} \to f$ μ–σ.π. Αφού $|f_{k_{l_n}}| \leqslant g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.3.8) μας δίνει ότι

$$\int |f_{k_{l_n}} - f| \, d\mu \to 0,$$

το οποίο έρχεται φυσικά σε αντίφαση με τη σχέση (7.5.2). Άρα, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέσο, όπως θέλαμε. □

Παράδειγμα 7.5.6. Δεν είναι σωστό, γενικά, ότι η σύγκλιση κατά μέτρο συνεπάγεται τη σύγκλιση κατά μέσο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Τότε, για $\varepsilon \in (0,1]$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geqslant \varepsilon\}) = \frac{1}{n} \to 0,$$

άρα $f_n \to 0$ κατά μέτρο. Όμως, για κάθε n ισχύει ότι

$$\int |f_n(x)|\, dx = n\frac{1}{n} = 1 \nrightarrow 0,$$

άρα η $\{f_n\}$ δε συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά μέσο[1]. □

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της σύγκλισης κατά μέτρο σε έναν χώρο πεπερασμένου μέτρου:

Θεώρημα 7.5.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά μέτρο.*

(ii) *Κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στην f μ–σ.π.*

(iii) $\int \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}\, d\mu \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Απόδειξη. (i) ⇒ (ii) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο και θεωρούμε μια υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$. Τότε, $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο και το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 7.3.7.

(ii) ⇒ (iii) Αν υποθέσουμε ότι δεν αληθεύει το ζητούμενο, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int \frac{|f_{k_n} - f|}{1 + |f_{k_n} - f|}\, d\mu \geqslant \delta \tag{7.5.3}$$

για κάθε n. Όμως, από το (ii) μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{f_{k_{l_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ με $f_{k_{l_n}} \to f$ μ–σ.π., άρα

$$\frac{|f_{k_{l_n}} - f|}{1 + |f_{k_{l_n}} - f|} \to 0.$$

Αφού ο χώρος είναι πεπερασμένου μέτρου και

$$\left|\frac{|f_{k_{l_n}} - f|}{1 + |f_{k_{l_n}} - f|}\right| \leqslant 1$$

στο X, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.3.9) έπεται ότι

$$\int \frac{|f_{k_{l_n}} - f|}{1 + |f_{k_{l_n}} - f|}\, d\mu \to 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (7.5.3).

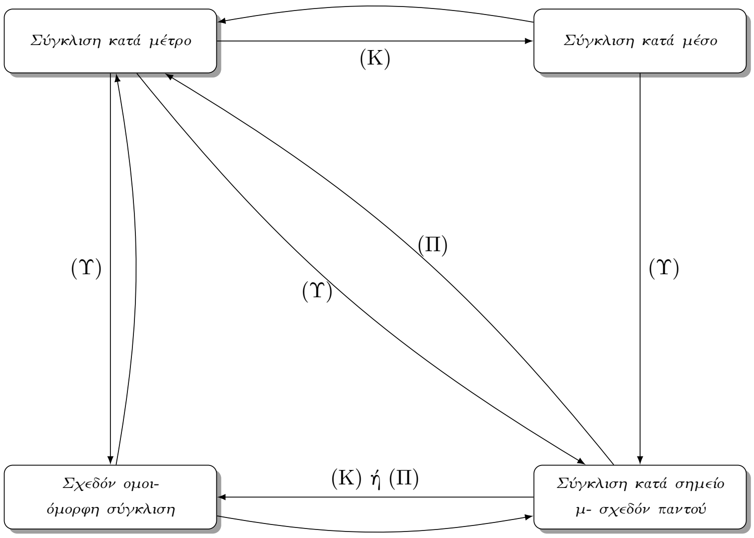
(iii) ⇒ (i) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε από την ανισότητα Chebyshev-Markov συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) &= \mu\left(\left\{x : \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\right) \\ &\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \to 0,\end{aligned}$$

σύμφωνα με το (iii). □

[1]Γιατί δεν εφαρμόζεται εδώ το προηγούμενο θεώρημα;

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας μπορούμε στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 7.1: Σύγκριση των διαφόρων ειδών σύγκλισης

όπου:
(Υ): σύγκλιση κατά υπακολουθία
(Π): $\mu(X) < \infty$ και
(Κ): η ακολουθία κυριαρχείται από κατάλληλη ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

7.6 Ασκήσεις

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, όλα τα υποσύνολα του X που εμφανίζονται ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και οι $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες.

Ομάδα Α΄.

7.1. Έστω $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού, τότε $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

7.2. Να δείξετε ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $f = \chi_A$ μ-σχεδόν παντού.

7.3. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι για μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ μ−σχεδόν για κάθε $x \in X$. Να δείξετε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $\mu(X \setminus B) < \delta$ ώστε

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, x\in B} |f_n(x)| < \infty.$$

7.4. Αν $f_n \geqslant 0$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Ομάδα Β΄.

7.5. Υποθέτουμε ότι ο X είναι μετρικός χώρος, εφοδιασμένος με ένα μέτρο Borel μ και θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα), τότε $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα).

7.6. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(A_n \triangle A_m) \to 0$ για $n, m \to \infty$. Δείξτε επίσης ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα τότε $\mu(A_n \triangle A_m) \to 0$ για $n, m \to \infty$. Ισχύει το αντίστροφο;

7.7. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Για $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

7.8. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι αν για δύο ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_n\}, \{g_n\}$ ισχύει $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

7.9. Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ ισχύει $|f_n| \leqslant g$ και επιπλέον $f_n \to f$ κατά μέτρο, να δείξετε ότι

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Ομάδα Γ΄.

7.10. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και θεωρούμε ακολουθία $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμων συναρτήσεων με $|f_n| < \infty$ μ σχεδόν παντού.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ και ακολουθία (r_n) θετικών αριθμών ώστε $|f_n| \leqslant r_n g$ μ σχεδόν παντού για κάθε n.

7.11. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών με $\lambda_n \to \infty$ ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$ ώστε $|f_n| \leqslant \varepsilon_n g$ μ σχεδόν παντού για κάθε n.

7.12. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Λέμε ότι οι f_n είναι *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$, τότε

$$\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

7.13. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

7.14. Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ συνάρτηση η οποία είναι συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Κεφάλαιο 8

Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα

Σε αυτό το κεφάλαιο επιστρέφουμε στη μελέτη των μετρήσιμων συναρτήσεων και ασχολούμαστε με τα εξής τρία βασικά θέματα:

1. Δίνουμε αρχικά έναν γενικό ορισμό της μετρησιμότητας, δηλαδή ορίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to Y$, όπου $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι, και στη συνέχεια μελετάμε τις βασικές τους ιδιότητες.

2. Μελετάμε το πρόβλημα της προσέγγισης μετρήσιμων συναρτήσεων από συνεχείς συναρτήσεις.

3. Μελετάμε τη σχέση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann και αποδεικνύουμε ότι το πρώτο αποτελεί πράγματι μια γνήσια γενίκευση του δεύτερου.

Τα αποτελέσματα αυτά συμβάλλουν σε μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της μετρησιμότητας και του ολοκληρώματος Lebesgue.

8.1 Μετρησιμότητα και το επαγόμενο μέτρο

Στην Πρόταση 5.1.7 (iv) αποδείξαμε ότι σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ορμώμενοι από αυτό το αποτέλεσμα δίνουμε τον εξής γενικό ορισμό της μετρησιμότητας:

Ορισμός 8.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f λέγεται $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*μετρήσιμη* (ή μετρήσιμη ως προς $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$) αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ειδικότερα, στην περίπτωση που ο Y είναι μετρικός χώρος και $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$ η f λέγεται $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

παρατηρούμε ότι η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη αν και μόνον αν

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Πρόταση 8.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ και $(Z, \mathcal{C})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη και η g είναι $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-μετρήσιμη, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)). \tag{8.1.1}$$

Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ και $g^{-1}(C) \subseteq \mathcal{B}$. Έπεται ότι

$$f^{-1}(g^{-1}(C)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$$

που λόγω της (8.1.1) δίνει το ζητούμενο. □

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση για να ελέγξουμε κατά πόσο μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ είναι μετρήσιμη είναι το (ii) της ακόλουθης πρότασης:

Πρόταση 8.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η οικογένεια $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.*

(ii) *Αν $C \subseteq \mathcal{P}(Y)$ και $\sigma(C) = \mathcal{B}$, τότε η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη αν και μόνον αν*

$$f^{-1}(C) \subseteq \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Το (i) είναι σχεδόν άμεσο από τον ορισμό της σ-άλγεβρας και αφήνεται ως άσκηση. Για το (ii) παρατηρούμε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν

$$\mathcal{B} \subseteq \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Αφού η οικογένεια $\mathcal{F}$ δεξιά είναι σ-άλγεβρα και $\sigma(C) = \mathcal{B}$, οι ισχυρισμοί $C \subseteq \mathcal{F}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ είναι ισοδύναμοι. □

Παρατηρήσεις 8.1.4. (α΄) Όμοια με το (i) αποδεικνύεται ότι η οικογένεια $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

(β΄) Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$\Delta = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$$

γνωρίζουμε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, συνεπώς το (ii) της Πρότασης 8.1.3 είναι ο Ορισμός 5.1.1 για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ έχουμε κι ένα μέτρο μ. Τότε, η μετρήσιμη συνάρτηση f επάγει ένα μέτρο στον χώρο $(Y, \mathcal{B})$ ως εξής:

Ορισμός 8.1.5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αν μ είναι ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) := \mu(f \in B),$$

για $B \in \mathcal{B}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ν είναι μέτρο (επαληθεύστε το) στον χώρο $(Y, \mathcal{B})$. Το μέτρο ν λέγεται *εικόνα* του μ μέσω της f και συμβολίζεται με $f_*(\mu)$ ή με μ^f.

Μέσω αυτού του μέτρου έχουμε μια μορφή θεωρήματος «αλλαγής μεταβλητής» για το ολοκλήρωμα Lebesgue. Πιο συγκεκριμένα, το επόμενο θεώρημα δίνει έναν τρόπο να μετατρέψουμε τα ολοκληρώματα ως προς $f_*(\mu)$ σε ολοκληρώματα ως προς μ.

Θεώρημα 8.1.6. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αν μ είναι ένα μέτρο στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ και $g : Y \to [-\infty,\infty]$ ή $g : Y \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η $g \circ f$ να είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int_B g \, df_*(\mu) = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f \, d\mu,$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}$. (Με την τελευταία ισότητα εννοούμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι ίσο με το δεύτερο.)

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, λόγω της Πρότασης 8.1.2 η συνάρτηση $g \circ f$ είναι μετρήσιμη, άρα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται έχουν νόημα. Επιπλέον, λόγω της

$$(g \circ f) \cdot \chi_{f^{-1}(B)} = (g \cdot \chi_B) \circ f$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B = Y$ (εν ανάγκη θέτοντας $\widetilde{g} = g \cdot \chi_B$), άρα $f^{-1}(B) = X$. Θέτουμε $\nu = f_*(\mu)$ και θα δείξουμε ότι

$$\int g \, d\nu = \int g \circ f \, d\mu.$$

Θα σπάσουμε την απόδειξη σε βήματα, ως συνήθως:

Βήμα 1. Η g είναι της μορφής $g = \chi_B$ για κάποιο σύνολο $B \in \mathcal{B}$.

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα

$$\int g \, d\nu = \int \chi_B d\nu = \nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

και

$$\int g \circ f \, d\mu = \int \chi_B \circ f \, d\mu = \int \chi_{f^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(f^{-1}(B))$$

και διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ζητούμενη ισότητα.

Βήμα 2. Η g είναι μη αρνητική απλή μετρησιμη συνάρτηση της μορφής

$$g = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Βήμα 1 έχουμε:

$$\int g \, d\nu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j} \, d\nu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j} \circ f \, d\mu = \int g \circ f \, d\mu,$$

όπως θέλαμε.

Βήμα 3. Η g είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

Από το Θεώρημα 5.3.3, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών, απλών συναρτήσεων $(s_n)_n$ με $s_n \nearrow g$ στο Y. Από το Βήμα 2, έχουμε ότι για κάθε n ισχύει ότι

$$\int s_n \, d\nu = \int s_n \circ f \, d\mu.$$

Όμως οι ακολουθίες $(s_n)_n$ και $(s_n \circ f)_n$ είναι αύξουσες ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $s_n \nearrow g$ και $s_n \circ f \nearrow g \circ f$. Εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.2.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\int g \, d\nu = \lim_n \int s_n \, d\nu = \lim_n \int s_n \circ f \, d\mu = \int g \circ f \, d\mu.$$

Βήμα 4. Η $g : Y \to [-\infty, \infty]$ είναι τυχούσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Γράφουμε, ως συνήθως, $g = g^+ - g^-$ και παρατηρούμε ότι, από το Βήμα 3,

$$\int g^+ \, d\nu = \int g^+ \circ f \, d\mu = \int (g \circ f)^+ \, d\mu$$

και

$$\int g^- \, d\nu = \int g^- \circ f \, d\mu = \int (g \circ f)^- \, d\mu.$$

Έτσι, πράγματι το ολοκλήρωμα $\int g \, d\nu$ υπάρχει και είναι ίσο με το $\int g \circ f \, d\mu$.

Βήμα 5. Η $g : Y \to \mathbb{C}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη μιγαδική συνάρτηση.

Είναι άμεσο αν εφαρμόσουμε το Βήμα 4 για τις μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. □

8.2 Το θεώρημα του Luzin

Σε αυτή την ενότητα ασχολούμαστε με την προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^k$ από συνεχείς συναρτήσεις. Υπάρχουν πολλά αποτελέσματα αυτού του είδους, που ισχύουν και σε γενικότερο πλαίσιο, αλλά εμείς θα αρκεστούμε στο θεώρημα του Luzin, το οποίο είναι η τελευταία από τις «τρεις αρχές του Littlewood» που έχουμε αναφέρει.

Θεώρημα 8.2.1 (Luzin). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δώσουμε και πάλι την απόδειξη σε βήματα.

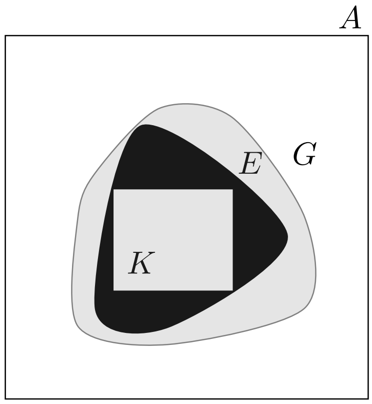
Βήμα 1. Αν η f είναι της μορφής $f = \chi_E$ για κάποιο $E \subseteq A$ Lebesgue μετρήσιμο.

Θα «διαχωρίσουμε» τα σημεία στα οποία η f παίρνει τις τιμές 1 και 0. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue μπορούμε να βρούμε K κλειστό σύνολο στο A και G ανοικτό στο A με $K \subseteq E \subseteq G$ και

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(K) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \lambda(G) \leqslant \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Αφού $\lambda(E) \leqslant \lambda(A) < \infty$, οι σχέσεις αυτές δίνουν:

$$\lambda(G \setminus K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$



Σχήμα 8.1: Απόδειξη του θεωρήματος Luzin

Θεωρούμε το σύνολο $F_1 = K \cup (A \setminus G)$ και παρατηρούμε ότι

$$\lambda(A \setminus F_1) = \lambda(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τα σύνολα K και $A \setminus G$ είναι ξένα και κλειστά στο A και επιπλέον $f \equiv 1$ στο K και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Έπεται ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής συνάρτηση (εξηγήστε γιατί).

Πάλι από την εσωτερική κανονικότητα του λ βρίσκουμε $F \subseteq F_1$ κλειστό με $\lambda(F_1 \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε η $f|_F$ είναι συνεχής και επιπλέον

$$\lambda(A \setminus F) = \lambda(A \setminus F_1) + \lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon.$$

Βήμα 2. Αν η f είναι απλή συνάρτηση της μορφής

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}.$$

Από το Βήμα 1, για κάθε j βρίσκουμε σύνολο $F_j \subseteq A$ κλειστό με $\lambda(A \setminus F_j) < \varepsilon/m$ και την $\chi_{A_j}|_{F_j}$ συνεχή. Αν $F = \bigcap_{j=1}^{n} F_j$, τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του A, τότε η $f|_F$ είναι συνεχής συνάρτηση και επιπλέον

$$\lambda(A \setminus F) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda(A \setminus F_j) < \varepsilon,$$

όπως θέλαμε.

Βήμα 3. Αν η f είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση.

Από το Πόρισμα 5.3.4, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(s_n)_n$ της μορφής του Βήματος 2 ώστε $s_n \to f$ στο A. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε κλειστό σύνολο $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ ώστε η $s_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Θέτουμε

$$A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

και παρατηρούμε ότι

$$\lambda(A \setminus A_\infty) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{4}$$

και ότι φυσικά όλες οι $s_n|_{A_\infty}$ είναι συνεχείς. Για να περάσουμε όμως τη συνέχεια στην οριακή συνάρτηση f θα θέλαμε η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη. Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Egorov: μπορούμε να βρούμε σύνολο $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \frac{\varepsilon}{4}$ ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Τότε, για το σύνολο

$$C = B \cap A_\infty$$

έχουμε $\lambda(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$ (εξηγήστε γιατί) και η $f|_C$ είναι συνεχής, αφού οι $s_n|_C$ είναι συνεχείς για κάθε n και $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο C.

Το C είναι φυσικά μετρήσιμο, αλλά όχι απαραίτητα κλειστό. Από την εσωτερική κανονικότητα του λ βρίσκουμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq C$ ώστε $\lambda(C \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus C) + \lambda(C \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

και φυσικά η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής, αφού $F_\varepsilon \subseteq C$. □

Σχόλιο. Χρειάζεται κάποια προσοχή στη διατύπωση του Θεωρήματος Luzin: Δεν ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ κλειστό με $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε όλα τα σημεία του F_ε να είναι σημεία συνέχειας της f. Σε αυτή την περίπτωση η f θα ήταν συνεχής σχεδόν παντού στο A (εξηγήστε γιατί) το οποίο, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, σημαίνει ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αυτό που μας δίνει το θεώρημα είναι ότι ο *περιορισμός* της f στο F_ε είναι συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, για την $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ στο $[0,1]$ ξέρουμε ότι είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0,1]$ ενώ ο περιορισμός της f στο $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

8.3 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Για μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ θα γράφουμε $\int_a^b f(x)\, dx$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $\int_a^b f\, d\lambda$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (οταν αυτά υπάρχουν). Επίσης λέγοντας «σχεδόν παντού» θα εννοούμε $\lambda-$σχεδόν παντού. Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

1. Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
2. Την παρατήρηση ότι αν $f \leqslant g$ και $\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.
3. Την παρατήρηση ότι αν $s = \sum \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$\int_a^b s\, d\lambda = \int_a^b s(x)\, dx.$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad U(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leqslant f \leqslant u_n.$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$ και $\ell \leqslant f \leqslant u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$\int_a^b u\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

και

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αφού $\ell \leqslant u$ και $\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leqslant f \leqslant u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \quad \text{σχεδόν παντού.} \tag{8.3.1}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων (αιτιολογήστε τις λεπτομέρειες). Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος, από την (8.3.1) έχουμε

$$\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx,$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει και το (ii). □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού.

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a,b] : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$, $\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n)$ και $\int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})} \quad \text{και} \quad u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leqslant f \leqslant u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n(x)\,dx \to \int_a^b \ell\,d\lambda \ \text{ και } \ \int_a^b u_n(x)\,dx \to \int_a^b u\,d\lambda.$$

Δηλαδή,

$$L(f,P_n) \to \int_a^b \ell\,d\lambda \ \text{ και } \ U(f,P_n) \to \int_a^b u\,d\lambda.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda.$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x-\delta, x+\delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon$. Όμως,

$$0 \leqslant u(x) - \ell(x) \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon.$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Όμως $\lambda(A \cup P) = 0$, άρα $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx \ , \ U(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n)\ , \ \int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n).$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leqslant f \leqslant u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n(x)\,dx = \lim_n L(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

και

$$\int_a^b u\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n(x)\,dx = \lim_n U(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell \, d\lambda = \int_a^b u \, d\lambda.$$

Αφού $\ell \leqslant u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a,b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: έστω $x \in C \setminus P$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε έτσι ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a,b] \setminus C) \cup P$, άρα $\lambda(A) = 0$. □

Σχόλιο. Τα ακριβώς ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που μόλις αποδείξαμε για την πραγματική ευθεία ισχύουν και για τους χώρους $\mathbb{R}^k$ γενικότερα.

8.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

8.1. Έστω X, Y μετρικοί χώροι εφοδιασμένοι με τις $\sigma-$άλγεβρες των Borel υποσυνόλων τους. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι μετρήσιμη.

8.2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ και $g(y) = y^3 + y$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{(0,1)} g \, df_*(\lambda).$$

8.3. Έστω X ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *άνω* (αντίστ. *κάτω*) *ημισυνεχής* αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) < a\}$ (αντίστ. $\{x \in X : f(x) > a\}$) είναι ανοικτό στο X για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι μια τέτοια συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Ομάδα Β΄.

8.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, Y μετρικός χώρος και $f_n : X \to Y$ ακολουθία $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))-$μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to Y$, να δείξετε ότι και η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))-$μετρήσιμη.

8.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g_n \to f$ κατά σημείο $\mu-$σχεδόν παντού στο X.

8.6. Έστω X ένας μετρικός χώρος και ένα υποσύνολο $A \subseteq X$. Πότε η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A είναι άνω ημισυνεχής και πότε κάτω ημισυνεχής;

8.7. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ δύο άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχείς συναρτήσεις. Να δείξετε ότι για κάθε $a, b \geqslant 0$, η συνάρτηση $af + bg$ είναι και αυτή άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχής.

Ομάδα Γ΄.

8.8. (Θεώρημα Vitali-Καραθεοδωρή) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$, μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A)$ και ένα $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη συνάρτηση ϕ και κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη συνάρτηση ψ στο A ώστε $\phi \leqslant f \leqslant \psi$ και επιπλέον

$$\int_X \psi - \phi d\mu < \varepsilon,$$

ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Υποθέστε πρώτα ότι $f \geqslant 0$ και αποδείξτε ότι η f μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(*) \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}$$

για κάποια μετρήσιμα σύνολα B_k και $b_k \geqslant 0$.

(ii) Χρησιμοποιώντας την $(*)$ και την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue καταλήξτε στο ζητούμενο στην περίπτωση που $f \geqslant 0$.

(iii) Ολοκληρώστε την απόδειξη γράφοντας $f = f^+ - f^-$ και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8.7.

8.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, όχι ταυτοτικά ίση με ∞. Για $n = 1, 2, \dots$ και $x \in X$ ορίζουμε

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + nd(x, p) : \ p \in X\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(i) Ισχύει η ανισότητα $|g_n(x) - g_n(y)| \leqslant nd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(ii) Ισχύει ότι $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \cdots \leqslant f$.

(iii) Η $\{g_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f καθώς $n \to \infty$.

Συνάγετε ότι μια μη αρνητική συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 9

Μέτρα γινόμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με μέτρα σε χώρους γινόμενα. Ξεκινάμε με δύο χώρους μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ και θέλουμε να δώσουμε στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ μια «φυσιολογική» δομή χώρου μέτρου $(X \times Y, \mathcal{C}, \rho)$. Ειδικότερα, θέλουμε:

1. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{C}$ να περιέχει όλα τα *μετρήσιμα ορθογώνια*, δηλαδή όλα τα σύνολα της μορφής $A \times B$ με $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.
2. Το μέτρο ρ να συμφωνεί με τη διδιάστατη έννοια του εμβαδού, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ να ισχύει

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{9.0.1}$$

Θα αποδείξουμε ότι, αν ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες, ένα τέτοιο μέτρο υπάρχει και είναι μάλιστα μοναδικό.

Το επόμενο φυσιολογικό ερώτημα είναι να καταλάβουμε πως «λειτουργεί» το ολοκλήρωμα ως προς αυτό το μέτρο ρ. Γνωρίζουμε, από τον Απειροστικό Λογισμό, ότι αν $K = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_K f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy,$$

όπου dA είναι το στοιχείο του εμβαδού στο επίπεδο (ουσιαστικά είναι το $d\lambda_2$). Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, το διπλό ολοκλήρωμα στο χώρο γινόμενο γράφεται ως δύο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα. Θα δούμε παρακάτω ότι, αν ορίζεται καλά το μέτρο γινόμενο, το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα ισχύει και στη γενική περίπτωση.

9.1 Χώροι και μέτρα γινόμενο

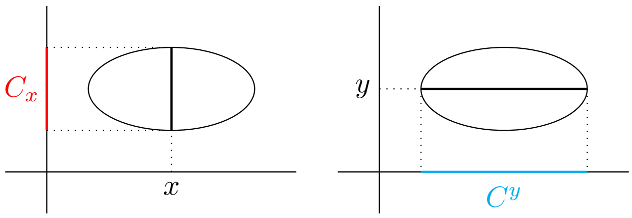
Ξεκινάμε με τον ορισμό της σ-άλγεβρας γινόμενο.

Ορισμός 9.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι. Ένα σύνολο $C \subseteq X \times Y$ καλείται *μετρήσιμο ορθογώνιο* αν είναι της μορφής $C = A \times B$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Η *σ-άλγεβρα γινόμενο* των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή η

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Ορισμός 9.1.2. Έστω X, Y δύο σύνολα και ένα $C \subseteq X \times Y$. Αν $x \in X$ και $y \in Y$ τότε οι *τομές* του C στα x και y αντίστοιχα είναι τα σύνολα

$$C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \quad \text{και } C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}.$$



Σχήμα 9.1: Οι τομές ενός συνόλου C

Αν επιπλέον $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $f_x : Y \to \mathbb{R}$ και $f^y : X \to \mathbb{R}$ με

$$f_x(y) = f(x, y) \quad \text{και } f^y(x) = f(x, y).$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι της μορφής $f = \chi_C$ για κάποιο $C \subseteq X \times Y$, τότε $f_x = (\chi_C)_x = \chi_{C_x}$, αφού για $x \in X$ σταθερό έχουμε $f(x, y) = 1$ αν και μόνον αν $(x, y) \in C$, δηλαδή αν και μόνο αν $y \in C_x$. Τελείως ανάλογα βλέπουμε ότι $f^y = (\chi_C)^y = \chi_{C^y}$.

Επίσης, αν το C είναι της μορφής $A \times B$ για κάποια $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, τότε

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{αν } x \in A \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad C^y = \begin{cases} A, & \text{αν } y \in B \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \tag{9.1.1}$$

Γενικά ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 9.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι.*

(i) *Αν $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε $C_x \in \mathcal{B}$ και $C^y \in \mathcal{A}$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.*

(ii) *Αν f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στο $X \times Y$, τότε η f_x είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη για κάθε $x \in X$ και η f^y είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : C_x \in \mathcal{B}, \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Παρατηρούμε αρχικά, ότι αν $C = A \times B$ είναι ένα μετρήσιμο ορθογώνιο, τότε από την (9.1.1) έχουμε $C_x \in \mathcal{B}$ για κάθε $x \in X$. Άρα, η $\mathcal{C}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια. Για να δειχθεί λοιπόν το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$((X \times Y) \setminus C)_x = Y \setminus C_x \quad \text{και} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x$$

(να τις ελέγξετε). Από αυτές τώρα, έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή είναι σ-άλγεβρα, όπως θέλαμε. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. Τελείως ανάλογα δείχνουμε ότι $C^y \in \mathcal{A}$ για κάθε $y \in Y$.

(ii) Έστω $(Z, \mathcal{D})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{D})$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για $D \in \mathcal{D}$ έχουμε

$$(f_x)^{-1}(D) = \{y \in Y : f_x(y) = f(x,y) \in D\} = \left(f^{-1}(D)\right)_x \in \mathcal{B}$$

από το (i). Άρα, η f_x είναι μετρήσιμη.

Όμοια δείχνουμε ότι η f^y είναι μετρήσιμη. □

Σχόλιο. Στο (ii) παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τη γενική έννοια της μετρησιμότητας που συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αν η συνάρτηση f παίρνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$ τότε τα αντίστοιχα σύνολα D είναι τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$ όπου $b \in \mathbb{R}$ ενώ αν παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$ είναι τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$.

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: Αν f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ θα γράφουμε

$$\int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

για να ξεχωρίζουμε κάθε φορά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Όπως είπαμε και στην αρχή του κεφαλαίου θέλουμε να αποδείξουμε θεωρήματα τύπου Fubini σε αρκετά «καλές» καταστάσεις. Ειδικότερα, αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι δύο «καλοί» χώροι μέτρου και $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ μια «καλή» συνάρτηση θα θέλαμε να μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της διπλής ολοκλήρωσης, δηλαδή να ισχύει ότι

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Λίγο πιο προσεκτικά, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ισότητα ως

$$\int_X \left(\int_Y f_x(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y(x) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Εκείνοι οι χώροι μέτρου για τους οποίους θα πετύχουμε αποτελέσματα τέτοιας φύσης είναι ακριβώς οι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Θα φανεί αργότερα ποιές θα είναι οι «καλές» συναρτήσεις, αλλά σε κάθε περίπτωση θα θέλαμε οι δείκτριες συναρτήσεις να είναι τέτοιες. Έχουμε λοιπόν το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 9.1.4 (Fubini για δείκτριες συναρτήσεις). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για κάθε $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_C : X \to [0, \infty]$ και $\psi_C : Y \to [0, \infty]$ που ορίζονται ως*

$$\phi_C(x) = \nu(C_x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) \, d\nu(y) = \int_Y \chi_C(x,y) \, d\nu(y)$$

και

$$\psi_C(y) = \mu(C^y) = \int_X \chi_{C^y}(x) \, d\mu(x) = \int_X \chi_C(x,y) \, d\mu(x).$$

Τότε η ϕ_C είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, η ψ_C $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_C \, d\mu = \int_Y \psi_C \, d\nu, \tag{9.1.2}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_X\left(\int_Y \chi_C(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X \chi_C(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \left\{C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} : \phi_C, \psi_C \text{ μετρήσιμες και } \int_X \phi_C\,d\mu = \int_Y \psi_C\,d\nu\right\}$$

και θα δείξουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Αφού $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \sigma(\Delta)$, όπου Δ είναι η οικογένεια όλων των μετρήσιμων ορθογωνίων, και αφού η Δ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές (εξηγήστε γιατί) γνωρίζουμε ότι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \delta(\Delta)$ από το Θεώρημα 1.2.4. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι:

1. Η $\mathcal{C}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια.

2. Η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin.

Για το πρώτο, αν $C = A\times B$ με $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $C_x = B$ για $x \in A$ και $C_x = \varnothing$ αλλιώς. Επίσης $C^y = A$ για $y \in B$ και $C^y = \varnothing$ αλλιώς, άρα $\phi_C(x) = \nu(B)\chi_A$ και $\psi_C(y) = \mu(A)\chi_B$, που είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως,

$$\int_X \phi_C\,d\mu = \int_A \nu(B)\,d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_B \mu(A)\,d\nu = \int_Y \psi_C\,d\nu.$$

Για το δεύτερο, πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin. Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $X\times Y \in \mathcal{C}$ αφού το $X\times Y$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο.

Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία $(C_n)_n$ στοιχείων της $\mathcal{C}$ και θα δείξουμε ότι $C := \bigcup_n C_n \in \mathcal{C}$. Όλες οι ϕ_{C_n} και ψ_{C_n} είναι μετρήσιμες και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_{C_n}\,d\mu = \int_Y \psi_{C_n}\,d\nu$$

για κάθε n. Αφού η $(C_n)_n$ είναι αύξουσα, το ίδιο ισχύει για τις $((C_n)_x)$ και $((C_n)^y)$ και επιπλέον έχουμε

$$C_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n)_x \quad\text{και}\quad C^y = \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n)^y.$$

Έτσι, οι (ϕ_{C_n}) και (ψ_{C_n}) είναι αύξουσες και επιπλέον

$$\phi_C(x) = \nu(C_x) = \lim_n \nu((C_n)_x) = \lim_n \phi_{C_n}(x)$$

και

$$\psi_C(y) = \mu(C^y) = \lim_n \mu((C_n)^y) = \lim_n \psi_{C_n}(y)$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς, οι ϕ_C και ψ_C είναι μετρήσιμες και επιπλέον, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 6.2.6 έχουμε ότι

$$\int_X \phi_C\,d\mu = \lim_n \int_X \phi_{C_n}\,d\mu = \lim_n \int_Y \psi_{C_n}\,d\nu = \int_Y \psi_C\,d\nu,$$

δηλαδή πράγματι $C \in \mathcal{C}$.

Θεωρούμε τώρα δύο σύνολα $C, D \in \mathcal{C}$ με $C \subseteq D$ και θα δείξουμε ότι $D \setminus C \in \mathcal{C}$. Για $x \in X$ και $y \in Y$ έχουμε

$$(D \setminus C)_x = D_x \setminus C_x \quad \text{και} \quad (D \setminus X)^y = D^y \setminus C^y.$$

Συνεπώς, αφού $C_x \subseteq D_x$ και $C^y \subseteq D^y$ και τα μ και ν είναι πεπερασμένα έχουμε:

$$\phi_{D\setminus C}(x) = \nu(D_x \setminus C_x) = \nu(D_x) - \nu(C_x) = \phi_D(x) - \phi_C(x)$$

και όμοια $\psi_{D\setminus C} = \psi_D - \psi_C$. Έπεται λοιπόν ότι οι $\phi_{D\setminus C}$ και $\psi_{D\setminus C}$ είναι μετρήσιμες και επιπλέον

$$\begin{aligned}\int_X \phi_{D\setminus C}\, d\mu &= \int_X \phi_D - \phi_C\, d\mu = \int_X \phi_D\, d\mu - \int_X \phi_C\, d\mu = \int_Y \psi_D\, d\nu - \int_Y \psi_C\, d\nu \\ &= \int_Y \psi_D - \psi_C\, d\nu = \int_Y \psi_{D\setminus C}\, d\nu.\end{aligned}$$

Άρα, πράγματι, $D \setminus C \in \mathcal{C}$.

Ελέγξαμε ότι ισχύουν τα 1 και 2 παραπάνω, άρα έπεται το ζητούμενο στην περίπτωση των πεπερασμένων μέτρων. Στη γενική περίπτωση τώρα, βρίσκουμε αύξουσες ακολουθίες $(X_n)_n$ και $(Y_n)_n$ στις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα ώστε $X = \bigcup_n X_n$, $Y = \bigcup_n Y_n$ και για κάθε n να ισχύει $\mu(X_n), \nu(Y_n) < \infty$. Θεωρούμε, ως συνήθως, τους περιορισμούς μ_n και ν_n των μ και ν που ορίζονται ως

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n) \quad \text{και} \quad \nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$$

για $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

Τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα μέτρα και για οποιεσδήποτε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και g στα X και Y αντίστοιχα ισχύει

$$\int_X f\, d\mu_n = \int_{X_n} f\, d\mu \quad \text{και} \quad \int_Y g\, d\nu_n = \int_{Y_n} g\, d\nu, \tag{9.1.3}$$

αρκεί να ορίζονται όλα τα ολοκληρώματα. (Η απόδειξη αυτών των σχέσεων αφήνεται ως άσκηση.) Αφού τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα, οι συναρτήσεις

$$x \mapsto \nu_n(C_x) \quad \text{και} \quad y \mapsto \mu_n(C^y)$$

είναι μετρήσιμες και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \nu_n(C_x)\, d\mu_n(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\, d\nu_n(y)$$

για κάθε n. Σύμφωνα με την (9.1.3) η τελευταία ισότητα γράφεται ως

$$\int_X \nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\chi_{Y_n}(y)\, d\nu(y). \tag{9.1.4}$$

Όμως, εύκολα βλεπουμε ότι $\phi_C(x) = \nu(C_x) = \lim_n \nu_n(C_x)$ και όμοια $\psi_C(y) = \lim_n \mu_n(C^y)$, άρα οι ϕ_C και ψ_C είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Τώρα, αφού οι ακολουθίες (X_n) και (Y_n) είναι αύξουσες, το ίδιο ισχύει και για τις υπό ολοκλήρωση ακολουθίες στην (9.1.4). Επομένως, καθώς το n τείνει στο ∞ έχουμε (από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 6.2.6 ότι

$$\int_X \phi_C(x)\, d\mu(x) = \int_Y \psi_C(y)\, d\nu(y),$$

όπως θέλαμε. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Αν υποθέταμε προς στιγμήν ότι είχε οριστεί ένα μέτρο ρ στον $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ ώστε να ικανοποιείται η (9.0.1) και θέλαμε να ισχύει και κάποιο αποτέλεσμα τύπου Fubini για την $f = \chi_C$ θα έπρεπε να έχουμε

$$\int_X \phi_C\, d\mu = \int_Y \psi_C\, d\nu = \int_{X\times Y} \chi_C\, d\rho = \rho(C).$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση αποδεικνύουμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 9.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο ρ στον χώρο $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ ώστε*

$$\rho(A\times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \text{για κάθε } A\in\mathcal{A} \text{ και } B\in\mathcal{B}. \tag{9.1.5}$$

Επιπλέον το ρ δίνεται από τη σχέση

$$\rho(C) = \int_X \phi_C\, d\mu = \int_Y \psi_C\, d\nu, \quad \text{για } C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \tag{9.1.6}$$

όπου οι ϕ_C και ψ_C είναι όπως στο προηγούμενο θεώρημα.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά την ύπαρξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση ρ που ορίζεται από τις σχέσεις (9.1.6) και θα δείξουμε ότι ορίζει ένα μέτρο στον χώρο $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\rho(\varnothing) = \int_X \phi_\varnothing\, d\mu = \int_X \nu(\varnothing_x)\, d\mu(x) = 0.$$

Επομένως, μένει να δειχθεί η αριθμήσιμη προσθετικότητα. Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία $(C_n)_n$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ και θα δείξουμε ότι

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \rho(C_n).$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\right) &= \int_X \phi_{\cup_n C_n}\, d\mu = \int_X \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (C_n)_x\right)\, d\mu(x)\\
&= \int_X \sum_{n=1}^\infty \nu((C_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_X \nu((C_n)_x)\, d\mu(x)\\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_X \phi_{C_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \rho(C_n),
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι τα $(C_n)_x$ είναι ξένα ανά δύο και στην επόμενη το θεώρημα Beppo Levi (Θεώρημα 6.2.12). Άρα, το ρ είναι πράγματι μέτρο. Αν τώρα $A\times B$

είναι ένα μετρήσιμο ορθογώνιο, δηλαδή $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$, τότε

$$\rho(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x)\ d\mu(x) = \int_A \nu(B)\ d\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

Συνεπώς, το ρ έχει όλες τις ιδιότητες που ζητούσαμε, δηλάδη για χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου υπάρχει πάντα ένα μέτρο γινόμενο.

Για τη μοναδικότητα, έστω τ ένα μέτρο στον χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ με την ιδιότητα

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ και } B \in \mathcal{B}.$$

Θα δείξουμε ότι το τ ταυτίζεται με το ρ. Βρίσκουμε αύξουσες ακολουθίες (X_n) και (Y_n) μετρήσιμων συνόλων ώστε να ισχύουν οι $X = \bigcup_n X_n$ και $Y = \bigcup_n Y_n$, και για κάθε n να έχουμε $\mu(X_n) < \infty$ και $\nu(Y_n) < \infty$. Τότε, $X \times Y = \bigcup_n (X_n \times Y_n)$ και επιπλέον

$$\tau(X_n \times Y_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) = \rho(X_n \times Y_n) < \infty.$$

Αφού η οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές έπεται, από το Θεώρημα Μοναδικότητας 2.2.1, ότι $\rho = \tau$. □

Ορισμός 9.1.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Το μοναδικό μέτρο ρ που εξασφαλίζεται από το προηγούμενο θεώρημα λέγεται *μέτρο γινόμενο* των μ και ν και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$. Ο χώρος μέτρου $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ λέγεται *χώρος γινόμενο* των $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Παρατηρήστε ότι, από τον τρόπο που ορίστηκε το μέτρο γινόμενο, είμαστε τώρα σε θέση να ξαναγράψουμε τη σχέση (9.1.2) ως εξής:

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu = \int_{X \times Y} \chi_C\ d(\mu \times \nu).$$

Πόρισμα 9.1.7 (αρχή Cavalieri). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν για τα σύνολα $C, D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ισχύει ότι*

$$\nu(C_x) = \nu(D_x)\ \ \mu - \text{σχεδόν για κάθε } x \in X$$

τότε $(\mu \times \nu)(C) = (\mu \times \nu)(D)$.

Απόδειξη. Η δοσμένη σχέση γράφεται και ως $\phi_C = \phi_D$ μ–σ.π. στο X. Άρα, πράγματι

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_X \phi_C\ d\mu = \int_X \phi_D\ d\mu = (\mu \times \nu)(D).$$

□

Εξετάζουμε τώρα τη συμπεριφορά του μέτρου Lebesgue στα γινόμενα:

Παράδειγμα 9.1.8. Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το μέτρο Lebesgue λ_n στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Αν $k, m \in \mathbb{N}$ με $n = k + m$, τότε:

(α΄) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, όπου έχουμε κάνει φυσικά την ταύτιση $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.

(β΄) $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_m$.

Απόδειξη. (α΄) Θα αποδείξουμε διαδοχικά τους δύο εγκλεισμούς. Θεωρούμε αρχικά δύο σύνολα $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ και θα δείξουμε ότι $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Αν

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \quad \text{και} \quad \pi_2 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

είναι οι απεικονίσεις προβολής, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^k \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B).$$

Αφού οι π_1 και π_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις, συμπεραίνουμε ότι τα $\pi_1^{-1}(A)$ και $\pi_2^{-1}(B)$ είναι σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$, άρα το ίδιο ισχύει και για το $A \times B$. Συνεπώς, η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια και αφού επιπλέον είναι σ-άλγεβρα έχουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι αν G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, διότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ παράγεται από τα ανοικτά σύνολα. Από το βασικό Λήμμα 3.2.3 μπορούμε να βρούμε ακολουθία ξένων ανά δύο διαστημάτων R_t, $t = 1, 2, \ldots$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$G = \bigcup_{t=1}^{\infty} R_t.$$

Είναι όμως σαφές ότι κάθε διάστημα R_t γράφεται στη μορφή $R_t = R_t^{(1)} \times R_t^{(2)}$ όπου το $R_t^{(1)}$ είναι διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και το $R_t^{(2)}$ είναι διάστημα στον $\mathbb{R}^m$, άρα $R_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ για κάθε t. Έπεται ότι

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R_t^{(1)} \times R_t^{(2)}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

άρα έχουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

(β΄) Γνωρίζουμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την

$$\lambda_n(I) = v_n(I), \quad \text{για κάθε } I \text{ διάστημα στον } \mathbb{R}^n,$$

όπου $v_n(I)$ ο n-διάστατος όγκος του I. Αν I είναι ένα τέτοιο διάστημα, τότε μπορούμε να γράψουμε $I = I^{(1)} \times I^{(2)}$ όπου τα $I^{(1)}$ και $I^{(2)}$ είναι διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, άρα:

$$\begin{aligned}(\lambda_k \times \lambda_m)(I) &= (\lambda_k \times \lambda_m)(I^{(1)} \times I^{(2)}) = \lambda_k(I^{(1)})\lambda_m(I^{(2)}) \\ &= v_k(I^{(1)})v_m(I^{(2)}) = v_n(I^{(1)} \times I^{(2)}) = v_n(I).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_m$. □

Παράδειγμα 9.1.9. Το θεώρημα Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορεί να μην ισχύει αν έστω και ένα από τα μ και ν δεν είναι σ-πεπερασμένο.

Απόδειξη. Έστω $(X, \mathcal{A}) = (Y, \mathcal{B}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, μ το μέτρο Lebesgue στο $(X, \mathcal{A})$ και ν το μέτρο απαρίθμησης στον $(Y, \mathcal{B})$. Θεωρούμε το $\Delta = \{(x,x) : x \in [0,1]\} \subseteq X \times Y$ και παρατηρούμε ότι $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και επίσης για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ ισχύει ότι

$$\phi_\Delta(x) = \nu(\Delta_x) = \nu(\{x\}) = 1$$

και

$$\psi_\Delta(y) = \mu(\Delta^y) = \mu(\{y\}) = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_X \phi_\Delta \, d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \psi_\Delta \, d\nu.$$

□

Σχόλιο. Σε αυτή την ενότητα αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που έχουμε δύο χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου ορίζεται πάντα ένα μοναδικό μέτρο γινόμενο (δηλαδή που να ικανοποιεί τη σχέση (9.0.1)) στον χώρο γινόμενο. Δεν είναι γενικά σωστό, αν αφαιρέσουμε την υπόθεση του σ-πεπερασμένου μέτρου, ότι υπάρχει πάντα μόνο ένα τέτοιο μέτρο: στην Άσκηση 9.14 δίνεται ένα αντιπαράδειγμα. Παρ' όλα αυτά, είναι γεγονός ότι για οποιουσδήποτε δύο χώρους μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ υπάρχει ένα μέτρο ρ στον $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ που να ικανοποιεί την (9.0.1). Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρησιμοποιεί το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Θα σκιαγραφήσουμε τα βασικά της βήματα στην Άσκηση 9.13 παρακάτω.

9.2 Τα θεωρήματα Tonelli και Fubini

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε δύο διαφορετικές εκδοχές θεωρημάτων τύπου Fubini. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.4 και τον Ορισμό 9.1.6, αν οι X και Y είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, τότε

$$\int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu \right) d\nu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε τέτοιες ταυτότητες για ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων. Αυτό που θα σκεφτόταν κανείς φυσιολογικά είναι να προχωρήσουμε όπως ακριβώς και στον ορισμό του ολοκληρώματος στο Κεφάλαιο 6: μετά από τις δείκτριες συναρτήσεις να φτάσουμε στις απλές συναρτήσεις, στη συνέχεια στις μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και τέλος στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αυτή ακριβώς είναι η πορεία που θα ακολουθήσουμε. Ξεκινάμε λοιπόν από το εξής:

Θεώρημα 9.2.1 (Tonelli). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν $f : X \times Y \to [0, \infty]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_f : X \to [0, \infty]$ και $\psi_f : Y \to [0, \infty]$ που ορίζονται ως*

$$\phi_f(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$$

και

$$\psi_f(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x, y) \, d\mu(x).$$

Τότε, η ϕ_f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, η ψ_f $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f \, d\mu = \int_Y \psi_f \, d\nu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu)$$

ή ισοδύναμα

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, οι ϕ_f και ψ_f είναι καλά ορισμένες σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3. Ως συνήθως, δίνουμε την απόδειξη σε βήματα:

Βήμα 1. Η f είναι της μορφής $f = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Όπως είπαμε και πριν από τη διατύπωση του θεωρήματος, αυτό το βήμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 9.1.4 και τον Ορισμό 9.1.6, αν παρατηρήσουμε ότι $\phi_f = \phi_C$ και $\psi_f = \psi_C$, όπου ϕ_C και ψ_C είναι οι συναρτήσεις που θεωρήσαμε στο Θεώρημα 9.1.4.

Βήμα 2. Η f είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση της μορφής

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{C_j}$$

για κάποια $a_j \geqslant 0$ και $C_j \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$f_x = \sum_{j=1}^{n} a_j (\chi_{C_j})_x$$

και συνεπώς η γραμμικότητα του ολοκληρώματος δίνει

$$\phi_f = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_{C_j} \tag{9.2.1}$$

η οποία είναι μετρήσιμη. Τελειώς όμοια παίρνουμε ότι

$$\psi_f = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_{C_j} \tag{9.2.2}$$

άρα και η ψ_f είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, από το Βήμα 1, για κάθε j έχουμε

$$\int_X \phi_{C_j}\, d\mu = \int_Y \psi_{C_j}\, d\nu = \int_{X\times Y} \chi_{C_j}\, d(\mu\times\nu).$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις με a_j και προσθέτοντας παίρνουμε (λόγω των (9.2.1) και (9.2.2)) ότι

$$\int_X \phi_f\, d\mu = \int_Y \psi_f\, d\nu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu),$$

δηλαδή τη ζητούμενη ισότητα.

Βήμα 3. Η f είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

Κατά τα γνωστά, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(s_n)_n$ μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $s_n \nearrow f$. Τότε, για κάθε $x \in X$, η ακολουθία συναρτήσεων $((s_n)_x)_n$ είναι αύξουσα και επιπλέον $(s_n)_x \nearrow f_x$. Κατά συνέπεια, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_n \phi_{s_n}(x) = \lim_n \int_Y (s_n)_x\, d\nu = \int_Y f_x\, d\nu = \phi_f(x).$$

Τελείως όμοια έχουμε και τη σχέση

$$\lim_n \psi_{s_n}(y) = \psi_f(y)$$

για κάθε $y \in Y$. Όμως, από το Βήμα 2 οι ϕ_{s_n} και ψ_{s_n} είναι μετρήσιμες για κάθε n και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_{s_n}\, d\mu = \int_Y \psi_{s_n}\, d\nu = \int_{X\times Y} s_n\, d(\mu\times\nu).$$

Άρα, οι συναρτήσεις ϕ_f και ψ_f είναι μετρήσιμες και μάλιστα, αφού και οι $(\phi_{s_n})_n$ και $(\psi_{s_n})_n$ είναι αύξουσες (εξηγήστε γιατί), έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης ότι

$$\int_X \phi_f\, d\mu = \int_Y \psi_f\, d\nu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu).$$

□

Πόρισμα 9.2.2. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$.*

(ii) *Ισχύει ότι $\int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x) < \infty$.*

(iii) *Ισχύει ότι $\int_Y \int_X |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) < \infty$.*

Απόδειξη. Η $|f|$ είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\int_X\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu).$$

Αν λοιπόν ισχύει μία από τις (i)-(iii), δηλαδή ένα από τα τρία ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο, τότε το ίδιο ισχύει και για τις άλλες δύο. □

Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{C}$. Γι' αυτές ισχύει το εξής:

Θεώρημα 9.2.3 (Fubini). *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε:*

(i) *Ισχύει ότι $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $x\in X$ και $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $\phi_f : X \to \mathbb{C}$ και $\psi_f : Y \to \mathbb{C}$ που ορίζονται ως*

$$\phi_f(x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), & \text{αν } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\psi_f(y) = \begin{cases} \int_X f^y(x)\, d\mu(x), & \text{αν } f^y \in \mathcal{L}^1(\mu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ανήκουν στους $\mathcal{L}^1(\mu)$ και $\mathcal{L}^1(\nu)$ αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f\, d\mu = \int_Y \psi_f\, d\nu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) \tag{9.2.3}$$

δηλαδή, ουσιαστικά

(9.2.4)
$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu).$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό ϕ_h και ψ_h για μια μετρήσιμη συνάρτηση $h : X\times Y \to [0,\infty]$ όπως κάναμε στο Θεώρημα Tonelli.

(i) Αφού $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι

$$\int_X\left(\int_Y |f_x(y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$$

άρα

$$\int_Y |f_x(y)|\,d\nu(y) < \infty$$

μ–σχεδόν για κάθε $x \in X$ (εξηγήστε το αυτό αναλυτικά). Με άλλα λόγια, $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ μ–σχεδόν για κάθε $x \in X$. Τελείως ανάλογα βλέπουμε ότι $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ν–σχεδόν για κάθε $y \in Y$.

(ii) Θέτουμε $A = \{x \in X : f_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\}$ και παρατηρούμε ότι για ένα $x \in X$ έχουμε

$$\int_Y |f_x(y)|\,d\nu(y) = \infty \quad \text{αν και μόνο αν } \phi_{|f|}(x) = \infty,$$

άρα $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$, αφού η $\phi_{|f|}$ είναι μετρήσιμη. Για την απόδειξη της (9.2.3) τώρα:

Υποθέτουμε αρχικά ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση. Για $x \in X \setminus A$ έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_f(x) &= \int_Y f_x(y)\,d\nu(y) = \int_Y (f_x)^+(y)\,d\nu(y) - \int_Y (f_x)^-(y)\,d\nu(y)\\ &= \int_Y (f^+)_x(y)\,d\nu(y) - \int_Y (f^-)_x(y)\,d\nu(y) = \phi_{f^+}(x) - \phi_{f^-}(x).\end{aligned}$$

Άρα $\phi_f = (\phi_{f^+} - \phi_{f^-})\chi_{X\setminus A}$. Από το Θεώρημα Tonelli η ϕ_f είναι μετρήσιμη και επιπλέον, αφού $\mu(A) = 0$ και $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ ισχύουν οι:

$$\int_X \phi_{f^+}\chi_{X\setminus A}\,d\mu = \int_X \phi_{f^+}\,d\mu = \int_{X\times Y} f^+\,d(\mu\times\nu) < \infty$$

και

$$\int_X \phi_{f^-}\chi_{X\setminus A}\,d\mu = \int_X \phi_{f^-}\,d\mu = \int_{X\times Y} f^-\,d(\mu\times\nu) < \infty.$$

Συνεπώς,

$$\int_X |\phi_f|\,d\mu \leqslant \int_X \phi_{f^+}\,d\mu + \int_X \phi_{f^-}\,d\mu = \int_{X\times Y} |f|\,d(\mu\times\nu) < \infty,$$

δηλαδή $\phi_f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\int_X \phi_f\,d\mu &= \int_X \phi_{f^+}\chi_{X\setminus A}\,d\mu - \int_X \phi_{f^-}\chi_{X\setminus A}\,d\mu\\ &= \int_{X\times Y} f^+\,d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-\,d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu).\end{aligned}$$

Τελείως ανάλογα αποδεικνύεται και η σχέση με την ψ_f.

Για τη γενική περίπτωση τώρα: γράφουμε $f = f_1 + i f_2$ όπου οι f_1, f_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες ως προς $\mu \times \nu$. Θέτουμε

$$A_1 = \{x \in X : (f_1)_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\} \quad \text{και} \quad A_2 = \{x \in X : (f_2)_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\}.$$

Αφού $f_x = (f_1)_x + i(f_2)_x$ έπεται ότι $A = \{x \in X : f_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\} = A_1 \cup A_2$ (συνεπώς $\mu(A) = 0$) και επίσης $\phi_f = (\phi_{f_1} + i\phi_{f_2})\chi_{X\setminus A}$. Άρα η ϕ_f είναι μετρήσιμη και $\phi_f = \phi_{f_1} + i\phi_{f_2}$ $\mu-$σ.π. στο X, συνεπώς $\phi_f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και

$$\begin{aligned}\int_X \phi_f \, d\mu &= \int_X \phi_{f_1} \, d\mu + i \int_X \phi_{f_2} \, d\mu \\ &= \int_{X\times Y} f_1 \, d(\mu\times\nu) + i \int_{X\times Y} f_2 \, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu).\end{aligned}$$

Τελείως όμοια έπεται το συμπερασμα για τις ψ_f και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη μπορεί να δείξει κανείς ότι το Θεώρημα Fubini ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Σχόλιο. Συνήθως τα θεωρήματα Tonelli και Fubini εφαρμόζονται μαζί. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ βολεύει πολλές φορές να αποδείξουμε πρώτα ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Tonelli (ουσιαστικά το πόρισμα που το ακολουθεί) και στη συνέχεια να το υπολογίσουμε μέσω του Θεωρήματος Fubini αναδιατάσσοντας τα ολοκληρώματα με κατάλληλη σειρά. Μια εφαρμογή αυτής της ιδέας θα δούμε στο Κεφάλαιο 11 όπου θα μελετήσουμε τη συνέλιξη στο χώρο $L^1(\lambda)$.

9.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

9.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu_i)$, $i = 1, 2$ χώροι $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου. Να δείξετε ότι

$$\mu \times (\nu_1 + \nu_2) = (\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2).$$

9.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι τα σύνολα

(i) $\mathrm{Gr}_-(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y < f(x)\}$

(ii) $\mathrm{Gr}_+(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y > f(x)\}$ και

(iii) $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y = f(x)\}$

ανήκουν στη $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

9.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$R(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

και

$$S(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ ) \leqslant y < f(x)\}.$$

Να δείξετε ότι $R(f), S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και επιπλέον

$$\int_X f \, d\mu = (\mu \times \lambda)(R(f)) = (\mu \times \lambda)(S(f)) = \int_{[0,\infty)} \mu([f \geqslant y]) \, d\lambda(y).$$

Συνάγετε ότι αν για μια μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ ισχύει $\mu([f \geqslant y]) \leqslant \mu([g \geqslant y])$ για κάθε $y \geqslant 0$, τότε $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

Ομάδα Β΄.

9.4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο Borel $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ ώστε A_x αριθμήσιμο για κάθε $x \in [0,1]$ και $[0,1] \setminus A^y$ αριθμήσιμο για κάθε $y \in [0,1]$.

9.5. Δώστε παράδειγμα συνόλου $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ και να ισχύουν τα εξής:

(α΄) $C_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C^y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και

(β΄) Οι συναρτήσεις $x \mapsto \lambda(C_x)$ και $y \mapsto \lambda(C^y)$ είναι Borel μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(C^y) d\lambda(y).$$

9.6. Δώστε παράδειγμα Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$ και να ισχύει $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και $f^y \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y) d\lambda(x).$$

9.7. Έστω $(a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ μια διπλή ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n,k} |a_{nk}|$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Ομάδα Γ΄.

9.8. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, να δείξετε ότι $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$.

9.9. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Να δείξετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g \, d\lambda = \int_0^{\infty} \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geqslant y\}} f(x) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Συνάγετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, d\lambda(x) = \int_0^{\infty} \lambda(\{x : g(x) \geqslant t\}) \, dt.$$

9.10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$

$$\lambda(\{x : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C_1}{t^2}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο E με $0 < \lambda(E) < \infty$ να ισχύει

$$\int_E |f(x)| \, dx \leqslant C_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

9.11. Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$. Για $x \in (0,1)$ θέτουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}^1(0,1)$ και

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

9.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ τυχόντες χώροι μέτρου. Αποδείξτε ότι στον χώρο γινόμενο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ορίζεται ένα μέτρο γινόμενο ρ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Αποδείξτε ότι αν ένα μετρήσιμο ορθογώνιο $A \times B$ γράφεται στη μορφή

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n),$$

όπου $\{A_n \times B_n\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων, τότε

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(A_n).$$

(ii) Αν $\{A_n \times B_n\}$ και $\{E_n \times F_n\}$ είναι δύο ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n),$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\nu(F_n).$$

(iii) Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{R}$ όλων των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρήσιμων ορθογωνίων. Για ένα $C = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k) \in \mathcal{R}$ θέτουμε

$$\rho_0(C) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\nu(B_k).$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα και το ρ_0 προμέτρο στην $\mathcal{R}$.

(iv) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή συνάγετε το ζητούμενο.

9.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, όπου

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Έστω $\pi : X \times Y \to X$ με $\pi(x, y) = x - y$ η προβολή του X παράλληλα στη διαγώνιο $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ του $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $\rho, \tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ από τις σχέσεις

$$\rho(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\tau(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \cup D \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B), \pi(D) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι:

(i) Τα ρ και τ είναι μέτρα στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(ii) $\rho(A \times B) = \tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

(iii) Για τη διαγώνιο Δ ισχύει $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\rho(\Delta) = \infty$, ενώ $\tau(\Delta) = 0$.

Έτσι, η μοναδικότητα του μέτρου γινομένου αποτυγχάνει αν δεν κάνουμε την υπόθεση του $\sigma-$πεπερασμένου.

Κεφάλαιο 10

Το Θεώρημα Radon-Nikodym

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να παρουσιάσουμε το θεώρημα Radon-Nikodym. Το θεώρημα αυτό ξεχωρίζει κυρίως λόγω των εφαρμογών του στη Θεωρία Πιθανοτήτων και τη Συναρτησιακή Ανάλυση.

Στην Παράγραφο 6.2.1 είδαμε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση, τότε η $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \tag{10.0.1}$$

ορίζει ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$ το οποίο είναι, όπως λέμε, *απόλυτα συνεχές* ως προς το μ, δηλαδή αν $\mu(A) = 0$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$, τότε ισχύει ότι $\nu(A) = 0$. Το θεώρημα Radon-Nikodym εξετάζει κατά πόσον ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε κάθε μέτρο ν το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς μ να είναι της μορφής (10.0.1). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αρκεί να κάνουμε την υπόθεση ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις για την απόδειξη του θεωρήματος. Συχνά αποδεικνύεται μετά από τη μελέτη της έννοιας του *προσημασμένου μέτρου*, με χρήση της λεγόμενης ανάλυσης Hahn ενός τέτοιου μέτρου. Θα αποφύγουμε αυτά τα εργαλεία και θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη που βασίζεται μόνο σε όσα έχουμε μελετήσει έως το Κεφάλαιο 6. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος με χρήση βασικών αποτελεσμάτων της θεωρίας χώρων Hilbert, τα οποία θα εφαρμόσουμε στον $L^2(\mu)$.

10.1 Απόλυτη συνέχεια και καθετότητα

Ξεκινάμε με μια σύντομη μελέτη της έννοιας της απόλυτης συνέχειας που αναφέραμε παραπάνω.

Ορισμός 10.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το ν είναι *απολύτως συνεχές* ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$ αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει ότι $\nu(A) = 0$.

Η έκφραση «απολύτως συνεχές» που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω δικαιολογείται από την εξής ενδιαφέρουσα πρόταση:

Πρόταση 10.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι το ν είναι πεπερασμένο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς μ.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ να ισχύει $\nu(A) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Ας υποθέσουμε ότι το (ii) δεν αληθεύει. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε n να μπορούμε να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(A_n) \geqslant \varepsilon.$$

Θέτουμε $A = \limsup_n A_n$ και παρατηρούμε ότι, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty,$$

από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 2.3) έπεται ότι $\mu(A) = 0$, άρα και $\nu(A) = 0$. Όμως, από την Άσκηση 1.4 έχουμε ότι:

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_n \nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geqslant \varepsilon$$

αφού $\nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geqslant \nu(A_n) \geqslant \varepsilon$ για κάθε n, άρα έχουμε αντίφαση.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A) = 0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (ii), όμως τότε $\mu(A) < \delta$ και έπεται ότι $\nu(A) < \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε πράγματι ότι $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\nu \ll \mu$. □

Περνάμε τώρα στην έννοια της καθετότητας που θα χρειαστούμε μετά από την απόδειξη του θεωρήματος Radon-Nikodym:

Ορισμός 10.1.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$.

(i) Λέμε ότι το μ είναι *συγκεντρωμένο* σε ένα $A \in \mathcal{A}$ αν ισχύει $\mu(X \setminus A) = 0$.

(ii) Λέμε ότι τα μέτρα μ και ν είναι *κάθετα* αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε το μ να είναι συγκεντρωμένο στο A και το ν να είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus A$. Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\mu \perp \nu$.

Μερικές σχεδόν άμεσες ιδιότητες της απόλυτης συνέχειας και της καθετότητας περιέχονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 10.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν και ρ μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $\nu \ll \mu$ και $\rho \ll \mu$, τότε $\nu + \rho \ll \mu$.*

(ii) *Αν $\mu \perp \nu$ και $\rho \perp \nu$, τότε $\mu + \rho \perp \nu$.*

(iii) *Αν $\nu \ll \mu$ και $\rho \perp \mu$, τότε $\nu \perp \rho$.*

(iv) *Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$, τότε $\nu = 0$.*

Απόδειξη. (i) Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$ τότε από τις υποθέσεις παίρνουμε ότι $\nu(A) = 0$ και $\rho(A) = 0$. Άρα, $(\nu + \rho)(A) = \nu(A) + \rho(A) = 0$.

(ii) Βρίσκουμε σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) = \nu(A) = \rho(X \setminus B) = \nu(B) = 0.$$

Έτσι, για το $C = A \cup B \in \mathcal{A}$ έχουμε $\nu(C) = 0$ και $\mu(X \setminus C) = \rho(X \setminus C) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $(\mu + \rho)(X \setminus C) = 0$, άρα $\mu + \rho \perp \nu$.

(iii) Αφού $\rho \perp \mu$ μπορούμε να βρούμε $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\rho(X \setminus A) = 0$ και $\mu(A) = 0$. Αφού όμως $\nu \ll \mu$ έχουμε ότι $\nu(A) = 0$, άρα $\nu \perp \rho$.

(iv) Από το (iii), για $\rho = \nu$, συμπεραίνουμε ότι $\nu \perp \nu$, άρα πράγματι $\nu = 0$ (εξηγήστε γιατί). □

10.2 Το Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym

Δίνουμε σε αυτή την ενότητα την απόδειξη του θεωρήματος Radon-Nikodym στην περίπτωση που τα μέτρα μ και ν είναι πεπερασμένα. Στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο θεώρημα αναπαράστασης:

Θεώρημα 10.2.1 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε υπάρχουν μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ και $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε*

$$\nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Κατασκευή της συνάρτησης f.

Η συνάρτηση f που ψάχνουμε θα πρέπει σίγουρα να ικανοποιεί την

$$\int_A f \, d\mu \leqslant \nu(A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Θα επιλέξουμε εκείνη τη συνάρτηση που προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την ισότητα σε αυτή την ανισότητα. Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \left\{ h : X \to [0, \infty) : \int_A h \, d\mu \leqslant \nu(A), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Για την $\mathcal{H}$ παρατηρούμε τα εξής:

(i) $\mathcal{H} \neq \emptyset$, αφού $0 \in \mathcal{H}$.

(ii) Αν $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ τότε $h_1 \vee h_2 := \max\{h_1, h_2\} \in \mathcal{H}$. Πράγματι, αν $B = [h_1 > h_2]$ και $A \in \mathcal{A}$ τυχόν, τότε

$$\begin{aligned}\int_A h_1 \vee h_2 \, d\mu &= \int_{A \cap B} h_1 \vee h_2 \, d\mu + \int_{A \setminus B} h_1 \vee h_2 \, d\mu \\ &= \int_{A \cap B} h_1 \, d\mu + \int_{A \setminus B} h_2 \, d\mu \leqslant \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A).\end{aligned}$$

(iii) Για κάθε $h \in \mathcal{H}$ ισχύει ότι

$$\int h \, d\mu \leqslant \nu(X) < \infty,$$

αφού το μέτρο ν είναι πεπερασμένο.

Θέτουμε

$$a = \sup\left\{\int h\, d\mu :\ h \in \mathcal{H}\right\} < \infty.$$

Θα δείξουμε ότι αυτό το supremum είναι στην πραγματικότητα maximum και η συνάρτηση για την οποία επιτυγχάνεται θα είναι η ζητούμενη f. Για κάθε n βρίσκουμε συνάρτηση $h_n \in \mathcal{H}$ ώστε

$$a - \frac{1}{n} \leqslant \int h_n\, d\mu.$$

Τότε, αν $g_n = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ έχουμε ότι $g_n \in \mathcal{H}$ και

$$a - \frac{1}{n} \leqslant \int h_n\, d\mu \leqslant \int g_n\, d\mu \leqslant a. \tag{10.2.1}$$

Όμως, η ακολουθία $(g_n)_n$ είναι αύξουσα (εξηγήστε γιατί), άρα συγκλίνει κατά σημείο σε μια μετρήσιμη συνάρτηση f. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και τη σχέση (10.2.1) συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{H}$ και μάλιστα

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int g_n\, d\mu = a.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tau : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ με

$$\tau(A) = \nu(A) - \int_A f\, d\mu, \quad \text{για } A \in \mathcal{A}$$

και παρατηρούμε ότι είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ (εξηγήστε γιατί). Πρέπει να βρούμε σύνολο D με $\mu(D) = 0$ και $\tau(A) = \nu(A \cap D)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αν όμως $\mu(D) = 0$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \tau(A \cap D) + \tau(A \setminus D) = \nu(A \cap D) - \int_{A\cap D} f\, d\mu + \tau(A \setminus D)\\ &= \nu(A \cap D) + \tau(A \setminus D).\end{aligned}$$

Συνεπώς το D πρέπει, και ταυτόχρονα αρκεί, να ικανοποιεί επιπλέον τη σχέση $\tau(A \setminus D) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Οπότε, συνολικά, ψάχνουμε κάποιο $D \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(D) = 0 \quad \text{και} \quad \tau(X \setminus D) = 0.$$

Θα μας φανεί χρήσιμο το εξής τεχνικό λήμμα (η απόδειξη θα δοθεί στο τέλος της παραγράφου):

Λήμμα 10.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:*

(i) *Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.*

(ii) *Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.*

(iii) *Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.*

Βήμα 2. Κατασκευή του D.

Ψάχνουμε ένα σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(D) = 0 \quad \text{και} \quad \tau(X \setminus D) = 0.$$

Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E}_n = \left\{ A \in \mathcal{A} : \tau(A) < \frac{\mu(A)}{n} \right\}$$

και παρατηρούμε ότι

(α΄) αν $A \in \mathcal{E}_n$ τότε $\mu(A) > 0$, και

(β΄) η $\mathcal{E}_n$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ξένες ενώσεις

(να τα επαληθεύσετε). Εφαρμόζοντας, το Λήμμα 10.2.2 για κάθε μία από τις $\mathcal{E}_n$, για κάθε n βρίσκουμε αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{E}_n$ ξένων ανά δύο συνόλων θετικού μ-μέτρου, ώστε αν $G_n = \bigcup \mathcal{G}_n$ το $X \setminus G_n$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}_n$ θετικού μ-μέτρου.

Από το (β΄) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κάθε $G_n \in \mathcal{E}_n$, άρα

$$\tau(G_n) \leqslant \frac{\mu(G_n)}{n} \leqslant \frac{\mu(X)}{n}.$$

Έτσι, αν $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ έχουμε ότι $\tau(G) \leqslant \tau(G_n) \to 0$, δηλαδή $\tau(G) = 0$. Θέτουμε

$$D = G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c$$

και παρατηρούμε ότι μένει να δειχθεί μόνο ότι $\mu(D) = 0$. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επιλέξαμε την f. Αρκεί φυσικά (από την υποπροσθετικότητα του μέτρου) να δειχθεί ότι $\mu(X \setminus G_n) = 0$ για κάθε n.

Ισχυρισμός. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{E}_n$ ώστε $B_n \subseteq A$.

Πράγματι, αν θέσουμε

$$g = f + \frac{1}{n}\chi_A,$$

τότε η g δεν είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{H}$ αφού

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \frac{1}{n}\mu(A) > \int f \, d\mu = \sup\left\{ \int h \, d\mu : h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Συνεπώς, υπάρχει σύνολο $B \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\int_B g \, d\mu > \nu(B)$$

ή ισοδύναμα

$$\nu(B) < \int_B f \, d\mu + \frac{1}{n} \int_B \chi_A \, d\mu = \int_B f \, d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap B).$$

Τότε, για το σύνολο $B_n = A \cap B$ έχουμε

$$\tau(B_n) \leqslant \tau(B) = \nu(B) - \int_B f \, d\mu < \frac{\mu(A \cap B)}{n},$$

δηλαδή $B_n \in \mathcal{E}_n$ όπως θέλαμε.

Σταθεροποιούμε τώρα έναν φυσικό αριθμό n. Αν είχαμε $\mu(X \setminus G_n) > 0$ τότε θα μπορούσαμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{E}_n$ με $\mu(B_n) > 0$ ώστε $B_n \subseteq X \setminus G_n$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο επιλογής της οικογένειας $\mathcal{G}_n$. Έτσι, πράγματι $\mu(X \setminus G_n) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(D) = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Σαν άμεσο πόρισμα του θεωρήματος Lebesgue-Radon-Nikodym έχουμε τώρα το θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα:

Πόρισμα 10.2.3 (θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μοναδική μ–σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \textit{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym μπορούμε να βρούμε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ και σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε

$$\nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f\, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Αφού όμως $\mu(D) = 0$ και $\nu \ll \mu$ έπεται ότι $\nu(D) = 0$, άρα $\nu(A \cap D) = 0$. Συνεπώς, πράγματι,

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι $f_0 : X \to [0, \infty)$ είναι κάποια άλλη μετρήσιμη συνάρτηση ώστε το ν να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f_0 ως προς μ και θα δείξουμε ότι $f = f_0$ μ-σ.π. στο X. Αφού $f, f_0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ έπεται ότι $f - f_0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και επιπλέον για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A (f - f_0)\, d\mu = \int_A f\, d\mu - \int_A f_0\, d\mu = \nu(A) - \nu(A) = 0.$$

Έπεται το ζητούμενο (εξηγήστε γιατί). □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με την απόδειξη του Λήμματος 10.2.2.

Πρώτη απόδειξη του Λήμματος 10.2.2. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E} : \ \text{ισχύουν οι (i) και (ii) παραπάνω}\}.$$

Το (iii) παραπέμπει στην εύρεση μιας οικογένειας $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ η οποία να είναι πολύ «μεγάλη», άρα στη χρήση του Λήμματος Zorn. Αν $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ είναι μια αλυσίδα στοιχείων της $\mathcal{S}$, τότε αυτή έχει άνω φράγμα στην $\mathcal{S}$ αφού $\mathcal{F}_j \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ για κάθε $j \in I$ και επιπλέον $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \mathcal{S}$ – η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Επομένως, υπάρχει $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ μεγιστική ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Για την $\mathcal{F}$ ισχύουν φυσικά οι (i) και (ii) αφού $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$. Για την (iii) τώρα, αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{E}$ με $\mu(E) > 0$ ώστε $E \subseteq X \setminus F$ τότε θα έχουμε $E \cap A = \varnothing$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ (εξηγήστε γιατί) και συνεπώς $\mathcal{F} \cup \{E\} \in \mathcal{S}$: αυτό είναι άτοπο από τη μεγιστικότητα της $\mathcal{F}$.

Μένει να δειχθεί η αριθμησιμότητα της $\mathcal{F}$. (Παρατηρήστε ότι δεν έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα η υπόθεση ότι το μ είναι πεπερασμένο.) Για κάθε k η οικογένεια

$$\mathcal{F}_k = \left\{ A \in \mathcal{F} : \mu(A) > \frac{1}{k} \right\}$$

είναι πεπερασμένη, αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία $\{A_n : n = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{F}_k$ τότε από το (ii) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το μ είναι πεπερασμένο. Από το (i) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k,$$

άρα η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη. □

Δεύτερη απόδειξη του Λήμματος 10.2.2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{E}$ με $\mu(A) > 0$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αρχικά ορίζουμε $\mathcal{E}_0 := \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) > 0\}$ και επιλέγουμε $A_1 \in \mathcal{E}_0$ με $\mu(A_1) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in E_0\}$. Ορίζουμε επίσης $\mathcal{E}_1 := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap A_1 = 0\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν τα $A_1, \dots, A_n$ έχουν επιλεγεί και έχει οριστεί η οικογένεια $\mathcal{E}_n$, επιλέγουμε $A_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ έτσι ώστε $\mu(A_{n+1}) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_n\}$ και θέτουμε $\mathcal{E}_{n+1} := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = \emptyset\}$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}_m = \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{E}$ με $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \emptyset$ ισχύει ότι $\mu(A) = 0$. Τότε, η $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια, τα $A_1, \dots, A_m$ είναι ξένα, έχουν μέτρο $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, και το $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα σύνολα A_n είναι ξένα και $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $\mu(X) < +\infty$ και τα A_n είναι ξένα, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, άρα $\mu(A_n) \to 0$.

Έστω $A \in \mathcal{E}$ το οποίο περιέχεται στο $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και έστω ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $\mu(A_n) \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_n) < \frac{1}{2}\mu(A)$, και έστω n_0 ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Αφού $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n_0-1}) = \emptyset$, έχουμε $A \in \mathcal{E}_{n_0-1}$, άρα $\frac{1}{2}\mu(A) < \mu(A_n)$ το οποίο είναι άτοπο. □

10.3 Η γενική μορφή του θεωρήματος

Στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το θεώρημα Radon-Nikodym στην περίπτωση που το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε άλλο ένα τεχνικό λήμμα στο ύφος του Βήματος 2 της απόδειξης του Θεωρήματος 10.2.1:

Λήμμα 10.3.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να ισχύει ότι*

$$\mu(E \setminus F) = 0, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{E}. \tag{10.3.1}$$

(Από αυτό έπεται ότι το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ θετικού μέτρου, εξηγήστε γιατί.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το μ είναι πεπερασμένο και θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}_\sigma$ που αποτελείται από όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{E}$. Κάθε στοιχείο της $\mathcal{E}_\sigma$ ανήκει και στην $\mathcal{A}$, άρα έχει νόημα να θεωρήσουμε την ποσότητα

$$a = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{E}_\sigma\} \tag{10.3.2}$$

για την οποία επιπλέον ισχύει ότι $0 \leqslant a \leqslant \mu(X) < \infty$. Βρίσκουμε λοιπόν μια ακολουθία $(E_n)_n$ στοιχείων της $\mathcal{E}_\sigma$ ώστε $\mu(E_n) \to a$ και θέτουμε $F = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Τότε, $F \in \mathcal{E}_\sigma$ (εξηγήστε γιατί) άρα υπάρχει $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε $F = \bigcup \mathcal{F}$. Έτσι, για κάθε n έχουμε ότι

$$\mu(E_n) \leqslant \mu(F) \leqslant a$$

και αφού $\mu(E_n) \to a$ έπεται ότι $\mu(F) = a$. Συνεπώς, αφού το μ είναι πεπερασμένο, για $E \in \mathcal{E}$ έχουμε ότι

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E \cup F) - \mu(F) = \mu(E \cup F) - a \leqslant a - a = 0,$$

αφού $E \cup F \in \mathcal{E}_\sigma$. Συνεπώς, πράγματι $\mu(E \setminus F) = 0$.

Στη γενική περίπτωση, αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, βρίσκουμε ακολουθία $(X_n)_n$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ και $\mu(X_n) < \infty$ για κάθε n. Θέτουμε $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$ για $A \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι κάθε μ_n είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Συνεπώς, για κάθε n βρίσκουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{E}$ ώστε

$$\mu_n\Big(E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\Big) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $E \in \mathcal{E}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n \tag{10.3.3}$$

και παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ και αν επιπλέον $F = \bigcup \mathcal{F}$, για $E \in \mathcal{E}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(E \setminus F) &\leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(X_n \cap E \setminus F) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu\Big(X_n \cap E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\Big) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu_n\Big(E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\Big) = 0,\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 10.3.2. Αν $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ είναι δύο αριθμήσιμες υποοικογένειες της $\mathcal{E}$ όπως στο προηγούμενο λήμμα, τότε

$$\mu\Big(\bigcup \mathcal{F} \,\triangle\, \bigcup \mathcal{F}'\Big) = 0. \tag{10.3.4}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\bigcup \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{F}' = \bigcup \Big\{E \setminus \bigcup \mathcal{F}' : E \in \mathcal{F}\Big\}$$

και αφού η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\Big(\bigcup \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{F}'\Big) \leqslant \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu\Big(E \setminus \bigcup \mathcal{F}'\Big) = 0$$

χρησιμοποιώντας την (10.3.1) για την $\mathcal{F}'$. Τελείως όμοια έπεται η σχέση

$$\mu\Big(\bigcup \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{F}\Big) = 0$$

και συνεπώς η (10.3.4). □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα αποδεικνύουμε τώρα το:

Θεώρημα 10.3.3 (Radon-Nikodym). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο και $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μοναδική μ–σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}. \tag{10.3.5}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι και το ν είναι σ-πεπερασμένο τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Δίνουμε και πάλι την απόδειξη σε βήματα:

Βήμα 1. Τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα.

Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε ακολουθίες $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_i) < \infty$ και $\nu(A_j) < \infty$ για κάθε i και j. Αν πάρουμε ως $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση της οικογένειας $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ παρατηρούμε ότι η (X_n) αποτελείται από ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(X_n), \nu(X_n) < \infty$ για κάθε n – εξηγήστε τις λεπτομέρειες.

Θέτουμε τώρα $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_{X_n}}$ και $\nu_n = \nu|_{\mathcal{A}_{X_n}}$, όπου $\mathcal{A}_{X_n} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq X_n\}$ το ίχνος της $\mathcal{A}$ στο X_n. Τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα μέτρα με $\nu_n \ll \mu_n$, άρα από το Θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα συμπεραίνουμε ότι για κάθε n υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f_n : X_n \to [0, \infty)$ ώστε

$$\nu_n(A) = \int_A f_n \, d\mu_n, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n,$$

ή ισοδύναμα

$$\nu(A) = \int_A f_n \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n. \tag{10.3.6}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ ώστε $f|_{X_n} = f_n$ για κάθε n και παρατηρούμε ότι αυτή ορίζεται καλά και είναι μετρήσιμη (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη σχέση (10.3.6) και το Θεώρημα Beppo Levi, για $A \in \mathcal{A}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap X_n} f_n \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap X_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f\chi_{X_n} \, d\mu \\
&= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{X_n} = \int_A f \cdot 1 \, d\mu = \int_A f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Αν τώρα $f_0 : X \to [0, \infty)$ είναι μια άλλη μετρήσιμη συνάρτηση ώστε το ν να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f_0 ως προς μ, συμπεραίνουμε ότι για κάθε n

$$\nu_n(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n$$

άρα, από την μοναδικότητα για πεπερασμένα μέτρα, έπεται ότι $f = f_0$ μ−σ.π. στο X_n. Συνεπώς, αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ έχουμε πράγματι ότι $f = f_0$ μ−σ.π. στο X (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

Βήμα 2. Η γενική περίπτωση: το ν δεν είναι απαραίτητα σ-πεπερασμένο.

Θα ξεχωρίσουμε εκείνα τα υποσύνολα του X στα οποία το ν είναι πεπερασμένο και θα διαμερίσουμε στη συνέχεια το X κατάλληλα βάσει του προηγούμενου λήμματος. Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} : \nu(A) < \infty\} \tag{10.3.7}$$

και σύμφωνα με το Λήμμα 10.3.1 βρίσκουμε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ αριθμήσιμη ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να έχουμε $\mu(E \setminus F) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$. Αν γράψουμε $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$ έχουμε ότι $\nu(F_n) < \infty$ (αφού $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$) για κάθε n, άρα το $\nu|_{\mathcal{A}_F}$ είναι σ-πεπερασμένο. Αφού επιπλέον $\nu|_{\mathcal{A}_F} \ll \mu|_{\mathcal{A}_F}$, από το Βήμα 1 υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : F \to [0, \infty)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq F.$$

Μένει να δούμε μόνο τι γίνεται για εκείνα τα A με $A \subseteq X \setminus F$:

Ισχυρισμός. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq X \setminus F$, τότε $\nu(A) = \infty \cdot \mu(A)$[1].

Πράγματι, αν για κάποιο τέτοιο A έχουμε $\mu(A) = 0$, τότε $\nu(A) = 0$ αφού $\nu \ll \mu$, ενώ αν $\mu(A) > 0$ τότε $\mu(A \setminus F) > 0$ (εξηγήστε γιατί), άρα $A \notin \mathcal{E}$, δηλαδή $\nu(A) = \infty$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in F \\ \infty, & x \in X \setminus F \end{cases} \tag{10.3.8}$$

και παρατηρούμε ότι για $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \nu(A) = \nu(A \cap F) + \nu(A \setminus F) &= \int_{A \cap F} g \, d\mu + \infty \cdot \mu(A \setminus F) \\ &= \int_{A \cap F} g \, d\mu + \int_{A \setminus F} \infty \, d\mu = \int_{A \cap F} f \, d\mu + \int_{A \setminus F} f \, \mu = \int_A f \, d\mu. \end{aligned}$$

Μένει να δειχθεί μόνο η μοναδικότητα της f: υποθέτουμε πάλι ότι υπάρχει κάποια άλλη συνάρτηση $f_0 : X \to [0, \infty]$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu \tag{10.3.9}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Από τη μοναδικότητα στο Βήμα 1 έπεται ότι $f|_F = f_0|_F$ μ−σ.π., άρα μένει να δείξουμε

[1]όπου ως συνήθως κάνουμε τη σύμβαση $\infty \cdot 0 = 0$.

μόνο ότι $f_0|_{X\setminus F} = \infty$ μ–σ.π. Αν αυτό δεν αληθεύει, τότε το σύνολο

$$\{x \in X \setminus F : f_0(x) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \setminus F : f_0(x) \leqslant n\}$$

έχει θετικό μ-μέτρο και συνεπώς υπάρχει n ώστε

$$\mu(\{x \in X \setminus F : f_0(x) \leqslant n\}) > 0.$$

Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, βρίσκουμε $A \subseteq \{x \in X \setminus F : f_0(x) \leqslant n\}$ με $0 < \mu(A) < \infty$. Τότε, αφού $A \subseteq X \setminus F$ και $\mu(A) > 0$, έπεται ότι $\nu(A) = \infty$ ενώ

$$\int_A f_0 \, d\mu \leqslant \int_A n \, d\mu = n \cdot \mu(A) < \infty :$$

άτοπο από την (10.3.9). Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 10.3.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο και $\nu \ll \mu$. Η μοναδική μ–σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση f που προσδιορίζεται από το θεώρημα Radon-Nikodym λέγεται *Radon-Nikodym παράγωγος* του ν ως προς μ και συμβολίζεται με $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Έτσι, η σχέση (10.3.5) λαμβάνει τη μορφή

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu$$

και η Πρόταση 6.2.15 (iii) γράφεται ως

$$\int g \, d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu$$

για κάθε $g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g : X \to \mathbb{C}$ – επαληθεύστε το.

Παράδειγμα 10.3.5. Το συμπέρασμα του θεωρήματος Radon-Nikodym δεν ισχύει κατ' ανάγκη στην περίπτωση που το μ δεν είναι σ-πεπερασμένο.

Απόδειξη. Θέτουμε $(X, \mathcal{A}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$, $\nu = \lambda$, το μέτρο Lebesgue στον $(X, \mathcal{A})$ και μ το μέτρο απαρίθμησης στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε $\nu \ll \mu$, αλλά αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη ώστε

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A},$$

τότε για $x \in X$ έχουμε

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f \, d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x),$$

δηλαδή $f \equiv 0$, άρα $\nu \equiv 0$ το οποίο είναι φυσικά άτοπο. □

10.4 Το Θεώρημα Ανάλυσης του Lebesgue

Σύμφωνα με το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym, αν μ και ν είναι δύο πεπερασμένα μέτρα στον χώρο $(X,\mathcal{A})$, τότε υπάρχουν μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0,\infty)$ και σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε

$$\nu(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

όπου

$$\nu_1(A) = \nu(A \cap D) \ \text{ και } \ \nu_2(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Οι συναρτήσεις ν_1 και ν_2 είναι επίσης μέτρα στον χώρο $(X,\mathcal{A})$ για τα οποία μάλιστα παρατηρούμε ότι το ν_1 είναι συγκεντρωμένο στο D, ενώ το μ είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus D$, και το ν_2 είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ. Με άλλα λόγια, $\nu_1 \perp \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$. Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται στο εξής:

Θεώρημα 10.4.1 (θεώρημα ανάλυσης του Lebesgue). *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$ ώστε το ν να είναι σ-πεπερασμένο. Τότε υπάρχουν μοναδικά μέτρα ν_1 και ν_2 στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ ώστε*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \text{με } \ \nu_1 \perp \mu \ \text{ και } \ \nu_2 \ll \mu.$$

(Παρατηρήστε ότι ισχύει επίσης $\nu_1 \perp \nu_2$ από το (iii) *της Πρότασης* 10.1.4.)

Απόδειξη. Αναζητούμε σύνολο $F \in \mathcal{A}$, ώστε $\nu_1(A) = \nu(A \cap F)$ και $\nu_2(A) = \nu(A \setminus F)$. Τότε, προφανώς $\nu = \nu_1 + \nu_2$ και το ν_1 είναι συγκεντρωμένο στο F. Άρα, για να ισχύει $\nu_1 \perp \mu$ πρέπει να έχουμε ότι $\mu(F) = 0$. Επιπλέον, για να ισχύει $\nu_2 \ll \mu$, πρέπει για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$ να έχουμε $\nu(E \setminus F) = 0$, δηλαδή το F πρέπει να είναι κατά κάποιον τρόπο ένα μεγιστικό σύνολο (ως προς το ν) για το οποίο $\mu(F) = 0$. Οδηγούμαστε λοιπόν στη χρήση του Λήμματος 10.3.1 για την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}. \tag{10.4.1}$$

Βρίσκουμε έτσι μια αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να έχουμε

$$\nu(E \setminus F) = 0, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{E}.$$

Όμως, η $\mathcal{E}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, άρα $F \in \mathcal{E}$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$\mu(F) = 0 \ \text{ και } \ \nu(E \setminus F) = 0, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{A} \text{ με } \mu(E) = 0.$$

Θέτουμε $\nu_1(A) = \nu(A \cap F)$ και $\nu_2(A) = \nu(A \setminus F)$, τα οποία φυσικά ορίζουν μέτρα στον χώρο $(X,\mathcal{A})$ και επιπλέον $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Επίσης, από τη συζήτηση που κάναμε πριν από την (10.4.1), προκύπτει ότι $\nu_1 \perp \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$ – ελέγξτε το.

Για τη μοναδικότητα, θεωρούμε δύο μέτρα ν_1' και ν_2' στον χώρο $(X,\mathcal{A})$ ώστε $\nu = \nu_1' + \nu_2'$ με $\nu_1' \perp \mu$ και $\nu_2' \ll \mu$. Αφού $\nu_1' \perp \mu$, υπάρχει $F' \in \mathcal{A}$ ώστε το ν_1' να είναι συγκεντρωμένο στο F' και το μ να είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus F'$. Αν τώρα $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$, τότε

$$\nu(E \setminus F') = \nu_1'(E \setminus F') + \nu_2'(E \setminus F') \leqslant \nu_1'(X \setminus F') + \nu_2'(E) = 0,$$

αφού $\nu_1' \perp \mu$ και $\nu_2' \ll \mu$. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 10.3.2 έπεται ότι $\nu(F \triangle F') = 0$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\nu_1(A) = \nu(A \cap F) = \nu(A \cap F') = \nu_1'(A \cap F') + \nu_2'(A \cap F') = \nu_1'(A)$$

αφού το ν_1' είναι συγκεντρωμένο στο F' και $\nu_2'(F') = 0$ αφού $\nu_2' \ll \mu$. Άρα $\nu_1 = \nu_1'$. Ανάλογα, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\nu_2(A) = \nu(A \setminus F) = \nu(A \setminus F') = \nu_1'(A \setminus F') + \nu_2'(A \setminus F') = \nu_2'(A)$$

(εξηγήστε γιατί). Άρα, $\nu_2 = \nu_2'$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

10.5 Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο κάνοντας μια απλή αναφορά στο θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Υπενθυμίζουμε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό από τη Συναρτησιακή Ανάλυση.

Ορισμός 10.5.1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο *δυικός χώρος* του $(X, \|\cdot\|)$ είναι ο χώρος με νόρμα $(X^*, \|\cdot\|)$, όπου

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές}\}$$

και

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Είναι τυπικό πρόβλημα στη Συναρτησιακή Ανάλυση, για δοσμένο χώρο $(X, \|\cdot\|)$ να θέλουμε να καταλάβουμε με τι «μοιάζει» ο δυικός του χώρος $(X^*, \|\cdot\|)$, δηλαδή να βρούμε έναν τρόπο να περιγράψουμε όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή $f : X \to \mathbb{R}$. Δύο αποτελέσματα τέτοιας φύσης είναι τα εξής:

1. (Θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert) Αν $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας (πραγματικός) χώρος Hilbert και $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει $v \in \mathcal{H}$ ώστε

   $$f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

   Με άλλα λόγια, ο $\mathcal{H}^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}$.

2. Έστω $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ για $1 < p < \infty$ ο χώρος ακολουθιών

   $$\ell_p = \left\{(a_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}$$

   με νόρμα την

   $$\|(a_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει ακολουθία $(b_n)_n \in \ell_q$ ώστε

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

   για κάθε $x = (a_n)_n \in \ell_p$, όπου q ο *συζυγής εκθέτης* του p, δηλαδή

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Μάλιστα, ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_q.

Για περισσότερα παραδείγματα δυικών χώρων παραπέμπουμε στις Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz χαρακτηρίζει τα θετικά φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου Banach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ όπου K ένας συμπαγής μετρικός χώρος[2]. Δηλαδή, εκείνα τα συναρτησοειδή $\Phi \in C(K)^*$ με την ιδιότητα: αν $f \geqslant 0$ τότε $\Phi(f) \geqslant 0$.

Θεώρημα 10.5.2 (θεώρημα αναπαράστασης του Riesz). *Έστω (K, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Αν $\Phi : C(K) \to \mathbb{R}$ είναι ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο Borel μ στο K ώστε*

$$\Phi(f) = \int_K f\, d\mu, \quad \text{για κάθε } f \in C(K).$$

Για μια απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 12 του βιβλίου «Θεωρία Μέτρο» των Γ. Κουμουλλή και Σ. Νεγρεπόντη.

Μια γενικότερη εκδοχή του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz χαρακτηρίζει όλα τα μιγαδικά (όχι μόνο τα θετικά) γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου $C(K)$. Για τη διατύπωση αυτού του αποτελέσματος χρειαζόμαστε την έννοια του μιγαδικού μέτρου με την οποία δεν έχουμε ασχοληθεί σε αυτές τις σημειώσεις. Για μια απόδειξη του θεωρήματος με χρήση μιας «μιγαδικής εκδοχής» του Θεωρήματος Radon-Nikodym παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 6 του βιβλίου Real and Complex Analysis του W. Rudin.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε ένα ακόμη αποτέλεσμα τέτοιου τύπου: για «καλά» μέτρα μ, θα δούμε ότι για $1 < p < \infty$ ο δυικός χώρος του χώρου συναρτήσεων $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$ όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.

10.6 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

10.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος μέτρου και μ το μέτρο απαρίθμησης στο X. Αποδείξτε ότι $\nu \ll \mu$.

10.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν_1, ν_2 μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

και ότι για $a \geqslant 0$

$$\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a\frac{d\nu_1}{d\mu},$$

μ-σχεδόν παντού.

Ομάδα Β΄.

10.3. Έστω μ, ν δύο μέτρα στον χώρο $(X, \mathcal{A})$. Αποδείξτε ότι $\mu \perp \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(A) < \varepsilon \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A) < \varepsilon.$$

10.4. Έστω μ, ν μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι:

[2] Υπάρχει επίσης μια αρκετά γενικότερη εκδοχή του θεωρήματος που αναφέρεται σε τοπικά συμπαγείς Hausdorff τοπολογικούς χώρους και χαρακτηρίζει τα θετικά γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου $C_c(X)$.

(α) Αν το ν είναι $\sigma-$πεπερασμένο τότε $f < \infty$ $\mu-$σ.π.

(β) Αν το μ είναι $\sigma-$πεπερασμένο και $f < \infty$ $\mu-$σ.π. τότε το ν είναι σ-πεπερασμένο.

10.5. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι $f > 0$ $\mu-$σ.π. αν και μόνο αν $\mu \ll \nu$.

10.6. Έστω μ, ν σ-επερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} = 1, \quad \mu - \text{σ.π.}$$

10.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου. Αποδείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.

10.8. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\nu \leqslant \mu$ αν και μόνο αν η Radon-Nikodym παράγωγος $\frac{d\nu}{d\mu}$ ορίζεται και ισχύει $\frac{d\nu}{d\mu} \leqslant 1$ $\mu-$σ.π. στο X.

Ομάδα Γ΄.

10.9. Έστω μ_1, ν_1 $\sigma-$πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και μ_2, ν_2 $\sigma-$πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(Y, \mathcal{B})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu_1$ και $\nu_2 \ll \mu_2$. Να δείξετε ότι

$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$

και επιπλέον

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y), \quad (\mu_1 \times \mu_2) - \text{σ.π.}$$

10.10. (Δεσμευμένη μέση τιμή) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια $\sigma-$άλγεβρα και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Μια *δεσμευμένη μέση τιμή* της f ως προς τη $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι μια $\mathcal{B}-$μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

(ii) Αποδείξτε ότι αν g είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$, τότε

$$\int |g| d\mu \leqslant \int |f| d\mu < \infty.$$

(iii) Αποδείξτε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική, δηλαδή αν g, g_1 είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της f, τότε $g = g_1$ $\mu-$σ.π.

Η δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$ συμβολίζεται με $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

10.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(f|\{\emptyset, X\})$ και $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$.

10.12. (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και δύο $\sigma-$άλγεβρες $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι:

(i) Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι γραμμική: για $a, b \in \mathbb{R}$ και $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(af + bg|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(g|\mathcal{B}).$$

(ii) Αν η $g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμη και $\int_X |fg| \, d\mu < \infty$, τότε

$$\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

(iii) Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{C})|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{C}\right).$$

Κεφάλαιο 11

Χώροι L^p

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο κατασκευάζουμε τους χώρους συναρτήσεων L^p. Στόχος μας είναι να ορίσουμε το συνεχές ανάλογο των χώρων $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ τους οποίους αναφέραμε στην Παράγραφο 10.5. Θεωρούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ασχολούμαστε με εκείνες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty. \tag{11.0.1}$$

Αν $1 \leqslant p < \infty$, μιμούμενοι τον ορισμό της $\|\cdot\|_p$ στον ℓ_p, είναι φυσιολογικό να θέσουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

για εκείνες τις f που ικανοποιούν την (11.0.1). Παρατηρούμε ότι ενώ, όπως θα δούμε παρακάτω, με αυτόν τον ορισμό η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, δεν είναι σωστό ότι αν $\|f\|_p = 0$ τότε $f = 0$, παρά μόνο ότι $f = 0$ μ–σ.π. (εξηγήστε γιατί). Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, θα κατασκευάσουμε τους χώρους L^p «ταυτίζοντας» συναρτήσεις που είναι μ–σ.π. ίσες.

Περιγράφουμε αναλυτικά αυτή την κατασκευή και στη συνέχεια μελετάμε βασικές ιδιότητες αυτών των χώρων. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι είναι χώροι Banach. Στη συνέχεια, ασχολούμαστε ιδιαίτερα με τους χώρους L^1 και L^2 που παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον και τέλος δίνουμε, ως εφαρμογή αυτής της θεωρίας, μια κομψή απόδειξη μιας (λίγο πιο ασθενούς) εκδοχής του θεωρήματος Radon-Nikodym.

11.1 Κατασκευή των χώρων L^p

Ορισμός 11.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Η κλάση $\mathcal{L}^p(\mu)$ αποτελείται από όλες εκείνες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $\mathcal{L}^p(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, έστω $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Τότε για κάθε

$x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p &\leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant (2\max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),\end{aligned}$$

άρα

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leqslant 2^p\left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu\right) < \infty,$$

δηλαδή $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Προκειμένου να αποφύγουμε τη δυσκολία για την οποία μιλήσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ ως εξής: αν $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ μ–σ.π. στο X – επαληθεύστε ότι είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 11.1.2. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}^p(\mu)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L^p(\mu)$. Επιπλέον, ο $L^p(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις πράξεις:

$$[f]+[g] = [f+g] \quad \text{και} \quad a\cdot[f] = [a\cdot f],$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ και $[f] \in L^p(\mu)$ είναι η κλάση μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Στα παρακάτω, για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, αντί να γράφουμε $[f] \in L^p(\mu)$ θα γράφουμε απλά $f \in L^p(\mu)$. Έτσι, για μια $f \in L^p(\mu)$ θέτουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Πρόταση 11.1.3. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν μ–σ.π. έγινε ακριβώς για να ισχύει η συνεπαγωγή $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int |f|^p \, d\mu = 0$ τότε $f = 0$ μ–σ.π. στο X και συνεπώς $[f] = [0] \in L^p(\mu)$. Επιπλέον, είναι άμεσο ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $a \in \mathbb{C}$, τότε

$$\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p,$$

άρα μένει μόνο να δειχθεί η τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Minkowski, την οποία αποδεικνύουμε παρακάτω χρησιμοποιώντας κάποιες κλασικές ανισότητες. □

Λήμμα 11.1.4 (Ανισότητα Young). *Αν $x,y \geqslant 0$ και $p,q > 1$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1,\dots,a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1+\cdots+t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^m t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1a_1+\cdots+t_ma_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1}a_2^{t_2}\cdots a_m^{t_m}\leqslant t_1a_1+\cdots+t_ma_m \tag{11.1.1}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1=\cdots=a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1=\cdots=t_m=1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1\cdots a_m}\leqslant \frac{a_1+\cdots+a_m}{m}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (11.1.1) με $a_1=x^p$, $a_2=y^q$ και $t_1=\frac{1}{p}$, $t_2=\frac{1}{q}$ (παρατηρήστε ότι $t_1+t_2=1$ αφού $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) συμπεραίνουμε ότι

$$xy=a_1^{1/p}a_2^{1/q}\leqslant \frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{q}=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p=a_1=a_2=y^q$. □

Ορισμός 11.1.5 (συζυγείς εκθέτες). Αν $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p=1$ είναι ο $q=\infty$.

Πρόταση 11.1.6 (ανισότητα Hölder). *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $f\in L^p(\mu)$ και $g\in L^q(\mu)$, όπου οι $p,q>1$ είναι συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg\in L^1(\mu)$ και*

$$\int |fg|\,d\mu\leqslant\left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q},$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1\leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p=\int |f|^p\,d\mu=1\ \text{ και }\ \|g\|_q^q=\int |g|^q\,d\mu=1.$$

Από την ανισότητα Young, για κάθε $x\in X$ ισχύει ότι

$$|f(x)g(x)|\leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$\int |fg|\,d\mu\leqslant \frac{1}{p}\int |f|^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int |g|^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=\|f\|_p\|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p\neq 0$ και $\|g\|_q\neq 0$ (αλλιώς $f\equiv 0$ ή $g\equiv 0$ $\mu-$σ.π. και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1=\frac{f}{\|f\|_p}\ \text{ και }\ g_1=\frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int |f_1|^p \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p \, d\mu = 1 \ \text{ και } \ \int |g_1|^q \, d\mu = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int |g|^q \, d\mu = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int |f_1 g_1| \, d\mu \leqslant 1, \ \ \text{δηλαδή,} \ \ \int |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Πρόταση 11.1.7 (ανισότητα Minkowski). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f, g \in L^p(\mu)$, τότε*

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu \\ &\leqslant \int |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} |g| \, d\mu \\ &\leqslant \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \|g\|_p, \end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζεύγη συναρτήσεων $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (διότι οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Ο χώρος L^∞

Ορίζουμε τώρα εν συντομία το συνεχές ανάλογο του χώρου $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ των φραγμένων ακολουθιών, παραλείποντας αρκετές από τις λεπτομέρειες.

Ορισμός 11.1.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Η κλάση $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ αποτελείται από όλες εκείνες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες υπάρχει $\beta > 0$ ώστε

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}) = 0.$$

Για μια τέτοια f, θέτουμε $\|f\|_\infty$ το infimum όλων αυτών των β.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος. Όπως και προηγουμένως, αν για μια $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ισχύει $\|f\|_\infty = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ μ–σ.π. Έτσι, για $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ μ–σ.π. στο X.

Ορισμός 11.1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L^\infty(\mu)$. Επιπλέον, ο $L^\infty(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις προφανείς πράξεις.

Θα γράφουμε, όπως και πριν, $f \in L^\infty(\mu)$ αντί για $[f] \in L^\infty(\mu)$. Τέλος, για μια $f \in L^\infty(\mu)$ θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{\beta > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}) = 0\},$$

το *ουσιώδες supremum* της f.

Πρόταση 11.1.10. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ο χώρος $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

11.2 Βασικές ιδιότητες των χώρων L^p

Σύγκλιση στον L^p

Όπως μόλις αποδείξαμε, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$, η $\|\cdot\|_p$ ορίζει μια νόρμα στον $L^p(\mu)$ και συνεπώς ορίζει μια έννοια σύγκλισης ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων σε αυτόν τον χώρο. Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε αυτή τη σύγκλιση με τις υπόλοιπες συγκλίσεις που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 7. Δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 11.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f στον $L^p(\mu)$ αν

$$\|f_n - f\|_p \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

Είναι φανερό ότι η σύγκλιση στον $L^1(\mu)$ δεν είναι άλλη από τη σύγκλιση κατά μέσο της Παραγράφου 7.2.

Θεώρημα 11.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $p < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Chebyshev-Markov (βλ. Πρόταση 6.2.8): Έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) &= \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)|^p \geqslant \varepsilon^p\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0,\end{aligned}$$

αφού $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Έτσι, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Για την περίπτωση $p = \infty$ τώρα, παρατηρούμε πρώτα ότι $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$ μ–σ.π. στο X. Αφού $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, για όλους τελικά τους n ισχύει ότι $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, άρα

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

□

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει – αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να βρει κατάλληλο αντιπαράδειγμα. Ισχύει όμως το εξής μερικό αντίστροφο:

Θεώρημα 11.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ με $g \in L^p(\mu)$ ώστε $|f_n| \leqslant g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f_n \nrightarrow f$ στον $L^p(\mu)$. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int |f_{k_n} - f|^p \, d\mu \geqslant \varepsilon_0 \tag{11.2.1}$$

για κάθε n. Όμως, αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο έπεται ότι $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο και συνεπώς, από το Πόρισμα 7.3.7, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{l_n}}\}$ ώστε $f_{k_{l_n}} \to f$ μ–σ.π. Από τη συνθήκη για την g και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι

$$\int |f_{k_{l_n}} - f|^p \, d\mu \to 0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (11.2.1). □

Είναι σαφές, ότι συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα με τα θεωρήματα της Παραγράφου 7.5 μπορούμε να βγάλουμε αρκετά άκόμη συμπεράσματα. Ξεχωρίζουμε το εξής:

Πόρισμα 11.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Αν $f_n \to f$ στον L^p, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Θεώρημα 11.2.2 σε συνδυασμό με το Πόρισμα 7.3.7. □

Πληρότητα των χώρων L^p

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι όλοι οι χώροι με νόρμα $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ είναι πλήρεις, δηλαδή χώροι Banach. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα για τη σύγκλιση στον $L^p(\mu)$.

Θεώρημα 11.2.5 (Riesz-Fischer). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ο χώρος με νόρμα $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $p < \infty$. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία Cauchy στον $L^p(\mu)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in L^p(\mu)$ ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Κατ᾽ αρχάς, χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 11.2.2 έχουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο: Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ και $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}) &= \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)|^p \geqslant \varepsilon^p\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f_m|^p \, d\mu \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f_m\|_p^p \to 0\end{aligned}$$

καθώς $n, m \to \infty$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.3.6 υπάρχουν μετρήσιμη $f : X \to \mathbb{C}$ και μια υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{k_n} \to f$ μ–σ.π. Πρέπει να δείξουμε ότι επιπλέον $f \in L^p(\mu)$ και $f_{k_n} \to f$ στον $L^p(\mu)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, για κάθε $m, n \geqslant n_0$. Από το Λήμμα του Fatou συμπεραίνουμε ότι:

$$\int |f_m - f|^p \, d\mu \leqslant \liminf_n \int |f_m - f_{k_n}|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p$$

για $m \geqslant n_0$. Συνεπώς, $f_m - f \in L^p(\mu)$, άρα $f \in L^p(\mu)$ και επιπλέον, για κάθε $m \geqslant n_0$ έχουμε $\|f_m - f\|_p \leqslant \varepsilon$. Αφού το αρχικό $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.

Για την περίπτωση $p = \infty$ τώρα, θεωρούμε τα σύνολα

$$A_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

για τα οποία ισχύει ότι $\mu(X \setminus A_{n,m}) = 0$. Έτσι, αν $A = \bigcap_{n,m} A_{n,m}$ έχουμε ότι $\mu(X \setminus A) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Παρατηρήστε ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty,$$

άρα η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο A και συνεπώς ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

$$\|f_n - f\|_\infty = \|(f_n - f)\chi_A\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

άρα $f \in L^\infty(\mu)$ και $f_n \to f$ στον $L^\infty(\mu)$. □

Προσέγγιση συναρτήσεων στον L^p

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε δύο βασικές ιδιότητες προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους L^p. Ξεκινάμε με το εξής γενικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 11.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές συναρτήσεις $s : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L^p(\mu)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν $s \in \mathcal{S}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

τέτοια ώστε για κάθε j για το οποίο $a_j \neq 0$ να ισχύει ότι $\mu(A_j) < \infty$, έχουμε

$$\int |s|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \mu(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mu)$.

Για την πυκνότητα τώρα, υποθέτουμε αρχικά ότι $f \in L^p(\mu)$, $f \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{s_n\}$ με $0 \leqslant s_n \leqslant f$ και $s_n \nearrow f$. Τότε όμως, $s_n \in L^p(\mu)$ για κάθε n άρα $s_n \in \mathcal{S}$ (εξηγήστε γιατί). Επιπλέον, $|f - s_n|^p \leqslant f^p$ και αφού $f \in L^p(\mu)$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι

$$\int |s_n - f|^p \, d\mu \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|s_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι θετικες συναρτήσεις στον L^p προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Η γενική περίπτωση των μιγαδικών συναρτήσεων έπεται με τις συνήθεις τεχνικές. $\square$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε ειδικότερα με την προσέγγιση Borel μετρήσιμων συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιον μετρικό χώρο από συνεχείς συναρτήσεις. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός 11.2.7. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση. Το κλειστό σύνολο

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

ονομάζεται *φορέας* της f.

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο $C_c(X)$ του χώρου $C(X)$ των συνεχών συναρτήσεων στο X που αποτελείται από όλες εκείνες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας είναι συμπαγές σύνολο, δηλαδή αυτές που μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$. Σε «πολλούς» μετρικούς χώρους ισχύει ότι οι συναρτήσεις στον $L^p(\mu)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, προσεγγίζονται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα – χοντρικά, σε όσους χώρους ισχύει το Θεώρημα Luzin (Θεώρημα 8.2.1). Χρειαζόμαστε το εξής θεώρημα από την Τοπολογία:

Θεώρημα 11.2.8 (Tietze για μετρικούς χώρους). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $F \subseteq X$ κλειστό και $f : F \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{C}$ που επεκτείνει την f, δηλαδή $g|_F = f$, και επιπλέον ικανοποιεί την $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Για μια απόδειξη του θεωρήματος στο γενικότερο πλαίσιο των φυσιολογικών τοπολογικών χώρων, παραπέμπουμε στο βιβλίο «Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση» των Σ. Νεγρεπόντη, Θ. Ζαχαριάδη, Ν. Καλαμίδα και Β. Φαρμάκη (Κεφάλαιο 13). Εμείς, για λόγους απλότητας, θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα μόνο στους χώρους $\mathbb{R}^k$.

Θεώρημα 11.2.9. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^k)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα του $\mathbb{R}^k$ είναι πυκνό στον $L^p(\lambda_k)$, όπου λ_k το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 11.2.6, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $s \in \mathcal{S}$, που επιπλέον έχει συμπαγή φορέα (άσκηση), προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, μπορούμε εύκολα να αναχθούμε στην περίπτωση που $s = \chi_A$ για κάποιο φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές K_ε και φραγμένο ανοικτό U_ε ώστε $K_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\lambda_k(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon^p$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Urysohn μπορούμε να ορίσουμε $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ που ικανοποιεί τις $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f \equiv 0$ στο U_ε^c και $f \equiv 1$ στο K_ε. Τότε, $|f - \chi_A| \leqslant 1$ και $f = \chi_A$ στο $K_\varepsilon \cup U_\varepsilon^c$, άρα

$$\|f - \chi_A\|_p \leqslant [\lambda_k(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)]^{1/p} < \varepsilon.$$

□

Ο δυκός του L^p

Το θεώρημα που ακολουθεί χαρακτηρίζει όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή του $L^p(\mu)$ για $1 < p < \infty$ στην περίπτωση που το μ είναι σ-πεπερασμένο.

Θεώρημα 11.2.10. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $1 < p < \infty$. Αν $\Phi : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει $g \in L^q(\mu)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, ώστε*

$$\Phi(f) = \int fg \, d\mu$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Μάλιστα, ο δυικός $(L^p(\mu))^*$ του $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος παραλείπεται διότι ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Παραπέμπουμε είτε στις «Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ» του Α. Γιαννόπουλου (Κεφάλαιο 2) είτε στο βιβλίο «Θεωρία Μέτρου» των Γ. Κουμουλλή και Σ. Νεγρεπόντη (Κεφάλαιο 11) για την απόδειξη.

11.3 Οι χώροι L^1 και L^2

Κάνουμε εδώ μια επιπλέον αναφορά στους χώρους L^1 και L^2 οι οποίοι έχουν πρόσθετη δομή, αλγεβρική και αναλυτική.

11.3.1 Η συνέλιξη στον $L^1(\lambda)$

Όπως ισχύει γενικά για όλους τους $L^p(\mu)$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, ο $L^1(\lambda)$ έχει τη δομή γραμμικού χώρου. Παρ' όλα αυτά, θα θέλαμε να ορίσουμε κάποιας μορφής «πολλαπλασιασμό» στον χώρο αυτό, ώστε να γίνει, όπως λέμε *άλγεβρα*. Ο συνήθης, κατά σημείο, πολλαπλασιασμός όμως, δεν είναι καλά ορισμένη πράξη στον L^1, αφού υπάρχουν συναρτήσεις $f, g \in L^1(\lambda)$ για τις οποιες $fg \notin L^1(\lambda)$ (κατασκευάστε ένα τέτοιο παράδειγμα). Ο «κατάλληλος» πολλαπλασιασμός για τον $L^1(\lambda)$ είναι η *συνέλιξη*.

Έστω $f, g \in L^1(\lambda)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ με

$$\phi(x, y) = f(x - y)g(y),$$

η οποία είναι μετρήσιμη (άσκηση). Ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^{2k})$:

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\phi(x, y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^k} |f(x - y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \|f\|_1$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς τις μεταφορές. Επομένως:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |\phi(x, y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^k} |g(y)| \|f\|_1 \, d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Έπεται λοιπόν, από το Θεώρημα Tonelli, ότι $\phi \in L^1(\lambda_{2k})$ και άρα από το Θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int f(x-y)g(y)\ d\lambda(y)$$

ορίζεται $\lambda-$σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται), σαν συνάρτηση του x ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\lambda)$. Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 11.3.1. Έστω $f, g \in L^1(\lambda)$. Τότε, εκείνο το στοιχείο $f * g$ του $L^1(\lambda)$ που ορίζεται $\lambda-$σ.π. από τη σχέση

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\ d\lambda(y)$$

λέγεται *συνέλιξη* των f και g.

Έχουμε τώρα μια καλά ορισμένη πράξη

$$* : L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \to L^1(\lambda) \ \text{ με } \ (f, g) \mapsto f * g.$$

Αυτός θα είναι ο «πολλαπλασιασμός» που ζητήσαμε. Πολύ εύκολα παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η συνέλιξη είναι διγραμμική – επαληθεύστε το. Μερικές βασικές ιδιότητες της συνέλιξης περιγράφονται παρακάτω:

Πρόταση 11.3.2. *Αν $f, g \in L^1(\lambda)$, τότε*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{11.3.1}$$

Επιπλέον, η συνέλιξη είναι συνεχής.

Απόδειξη. Με τον παραπάνω συμβολισμό για τη συνάρτηση ϕ έχουμε ότι

$$\|f * g\|_1 = \int \left| \int f(x-y)g(y)\ d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int \left(\int |\phi(x,y)|\ d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Για τη συνέχεια τώρα, θα δείξουμε ότι αν $f_n, f, g_n, g \in L^1(\lambda)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$ και $\|g_n - g\|_1 \to 0$, τότε $\|f_n * g_n - f * g\|_1 \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|f_n * g_n - f * g\|_1 &= \|f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g\|_1 \leqslant \|f_n * (g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f) * g\|_1 \\ &\leqslant \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1 \to 0, \end{aligned}$$

από τις υποθέσεις. □

Πρόταση 11.3.3. *Έστω $f, g, h \in L^1(\lambda)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Είναι διγραμμική, δηλαδή*

$$(f + g) * h = f * h + g * h \ \text{ και } \ f * (g + h) = f * g + f * h.$$

(ii) *Είναι μεταθετική, δηλαδή*

$$f * g = g * f.$$

(iii) *Είναι προσεταιριστική, δηλαδή*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας της συνέλιξης, για να αποδείξουμε σε πλήρη γενικότητα αυτά τα αποτελέσματα, αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος11.2.9, όπου έχουμε τις συνήθεις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann.

Η διγραμμικότητα είναι άμεση. Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\ dy = \int f(z)g(x-z)\ dz = (g * f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$.

Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$(f * (g * h))(x) = \int f(x-y)(g * h)(y)\ dy = \int f(x-y)\left(\int g(y-z)h(z)\ dz\right)dy =$$

$$\int\left(\int f(x-y)g(y-z)\ dy\right)h(z)\ dz = \int\left(\int f(x-z-u)g(u)\ du\right)h(z)\ dz =$$

$$= \int (f * g)(x-z)h(z)\ dz = ((f * g) * h)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = y - z$. □

Με βάση την παραπάνω πρόταση και το Θεωρήμα Riesz-Fischer, ο $L^1(\lambda)$είναι μια *μεταθετική άλγεβρα Banach*, δηλαδή μια μεταθετική άλγεβρα με μια νόρμα για την οποία ισχύει η ανισότητα (11.3.1) και είναι πλήρης ως προς τη μετρική που αυτή επάγει.

11.3.2 Ο $L^2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert

Θυμίζουμε αρχικά το εξής: αν $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο σε έναν γραμμικό χώρο X, τότε αυτό επάγει φυσιολογικά μια νόρμα στο X που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \quad \text{για } x \in X,$$

η οποία με τη σειρά της καθιστά το X μετρικό χώρο. Αν ο X είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγει το εσωτερικό γινόμενο, τότε ο X λέγεται *χώρος Hilbert*. Θυμίζουμε επίσης ότι σε οποιονδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η εξής:

Πρόταση 11.3.4 (ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x, y \in X$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που ο X είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y\rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y\rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \\ &= r^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\theta+t)}) + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2\langle x,x\rangle - 2rM + \langle y,y\rangle \geqslant 0$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y,y\rangle}/\sqrt{\langle x,x\rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που ο X είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leqslant \langle tx+y, tx+y\rangle = t^2\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Έστω τώρα $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(\mu)\times L^2(\mu) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \langle f,g\rangle = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz συμπεραίνουμε ότι

$$\int |f\overline{g}|\, d\mu \leqslant \left(\int |f|^2\, d\mu\right)^{1/2}\left(\int |g|^2\, d\mu\right)^{1/2} < \infty$$

και συνεπώς η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα ορίζει ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mu)$, δηλαδή:

(i) Είναι διγραμμική:

$$\langle f, g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle \quad \text{και} \quad \langle f+g, h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle,$$

για κάθε $f, g, h \in L^2(\mu)$.

(ii) Είναι αντισυμμετρική, δηλαδή

$$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle},$$

για κάθε $f, g \in L^2(\mu)$.

(iii) Είναι θετική, δηλαδή

$$\langle f,f\rangle \geqslant 0, \quad \text{για κάθε } f \in L^2(\mu) \text{ και } \langle f,f\rangle = 0 \iff f = 0.$$

Η απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση. Τέλος, παρατηρούμε ότι αν $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mu)$, τότε

$$\|f\| = \left(\int f\overline{f}\, d\mu\right)^{1/2} = \left(\int |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} = \|f\|_2,$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$. Κατά συνέπεια ο $L^2(\mu)$ έχει κληρονομήσει τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με το θεώρημα Riesz-Fischer, συμπεραίνουμε ότι ο $L^2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert.

11.4 Μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος Radon-Nikodym

Δίνουμε σε αυτή την ενότητα μια δεύτερη, συντομότερη, απόδειξη του θεωρήματος Radon-Nikodym. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή ότι ο L^2 είναι χώρος Hilbert. Συγκεκριμένα, θα χρειαστούμε το θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert το οποίο αναφέραμε και στην §10.5. Το υπενθυμίζουμε και εδώ:

Θεώρημα 11.4.1 (Riesz). *Έστω $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert και $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει $v \in \mathcal{H}$ ώστε*

$$f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Η απόδειξη στη μιγαδική περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της πραγματικής περίπτωσης και υπάρχει στις Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Ειδικότερα, στην περίπτωση του χώρου $L^2(\mu)$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, το αποτέλεσμα διατυπώνεται ως εξής:

Αν $\phi : L^2(\mu) \to \mathbb{C}$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει $g \in L^2(\mu)$ ώστε

$$\phi(f) = \int fg\, d\mu,$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$.

Το μειονέκτημα της απόδειξης που θα παρουσιάσουμε, σε σύγκριση με αυτήν που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ότι απαιτεί και τα δύο μέτρα που εμπλέκονται στη διατύπωση του θεωρήματος να είναι σ-πεπερασμένα. Η απόδειξη οφείλεται στον von Neumann.

Θεώρημα 11.4.2 (Radon-Nikodym). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ με $\nu \ll \mu$. Τότε, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $h : X \to [0, \infty]$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A h\, d\mu,$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση που τα μ και ν είναι πεπερασμένα. Η συνέχεια για την περίπτωση που είναι σ-πεπερασμένα, την οποία παρουσιάσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.3, είναι απλή και δεν απαιτεί κάποια νέα ιδέα.

Θεωρούμε το μέτρο $\rho = \mu + \nu$ στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : L^2(\rho) \to \mathbb{C}$ με

$$\phi(f) = \int f\, d\nu.$$

Είναι άμεσο ότι το ϕ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^2(\rho)$ και επιπλέον

$$\begin{aligned}|\phi(f)| &\leqslant \int |f|\, d\nu \leqslant \int |f|\, d\rho \\ &\leqslant \left(\int 1\, d\rho\right)^{1/2} \left(\int |f|^2\, d\rho\right)^{1/2} = \sqrt{\rho(X)}\|f\|_2,\end{aligned}$$

δηλαδή το ϕ είναι φραγμένο. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει $g \in L^2(\rho)$ με την ιδιότητα

$$\phi(f) = \int fg \, d\rho,$$

δηλαδή,

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\rho, \tag{11.4.1}$$

για κάθε $f \in L^2(\rho)$. Από αυτή την g θα κατασκευάσουμε την h του θεωρήματος.

Ισχυρισμός. Ισχύει $0 \leqslant g \leqslant 1$ ρ–σ.π. στο X.

Θέτουμε αρχικά $A_n = \{x \in X : g(x) \geqslant 1 + \frac{1}{n}\}$ και έχουμε, θέτοντας $f = \chi_{A_n}$ στην (11.4.1), ότι:

$$\rho(A_n) \geqslant \nu(A_n) = \int_{A_n} g \, d\rho \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\rho(A_n),$$

δηλαδή $\rho(A_n) = 0$. Άρα, $\rho(\{x \in X : g(x) > 1\}) = 0$. Όμοια, θέτουμε $B_n = \{x \in X : g(x) \leqslant -\frac{1}{n}\}$ και τότε, για $f = \chi_{B_n}$, παίρνουμε:

$$0 \leqslant \nu(B_n) = \int_{B_n} g \, d\rho \leqslant -\frac{1}{n}\rho(B_n),$$

δηλαδή $\rho(B_n) = 0$. Έτσι, έπεται ο ισχυρισμός.

Από τη σχέση $\rho = \mu + \nu$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int f \, d\rho = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu$$

για κάθε $f : X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και συνεπώς η (11.4.1) παίρνει τη μορφή:

$$\int f(1-g) \, d\nu = \int fg \, d\mu \tag{11.4.2}$$

για κάθε $f \in L^2(\rho)$. Αν $C = \{x \in X : g(x) = 1\}$, τότε εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα για $f = \chi_C$, βλέπουμε ότι

$$0 = \int_C (1-g) \, d\nu = \int_C g \, d\mu,$$

άρα $\mu(C) = 0$. Αφού $\nu \ll \mu$, έχουμε ότι $\nu(C) = 0$, άρα και $\rho(C) = 0$. Κατά συνέπεια, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $0 \leqslant g < 1$ παντού στο X.

Έστω $A \in \mathcal{A}$. Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f_n = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_A$$

η οποία ανήκει στον $L^2(\rho)$, αφού $0 \leqslant g < 1$ και το ρ είναι πεπερασμένο, άρα η (11.4.2) για $f = f_n$ γράφεται:

$$\int_A (1 - g^{n+1}) \, d\nu = \int_A g \cdot \frac{1 - g^{n+1}}{1 - g} \, d\mu.$$

Οι υπο ολοκλήρωση ακολουθίες είναι όμως αύξουσες και $g^n \to 0$ κατά σημείο στο X. Έτσι, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει ότι:

$$\nu(A) = \int_A 1\, d\nu = \int_A \frac{g}{1-g}\, d\mu.$$

Το A ήταν τυχόν, οπότε θέτοντας $h = \frac{g}{1-g}$ έχουμε το ζητούμενο. □

11.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

11.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\mu\left(\{x : |f(x)| \geqslant a\}\right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p.$$

11.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$ και $g_n \to g$ στον $L^q(\mu)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L^1(\mu)$.

11.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^q(\mu)$, τότε $fg \in L^r(\mu)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

11.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$ ώστε $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Αν (g_n) είναι μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με $g_n \to g$ μ–σχεδόν παντού, να δείξετε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

11.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $1 \leqslant p < q < \infty$.

(i) Αν $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη, να δείξετε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q \left[\mu(X)\right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(ii) Να δείξετε ότι $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Ομάδα Β΄.

11.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Να δείξετε ότι κάθε $f \in L^q(\mu)$ γράφεται στη μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(\mu)$ και $h \in L^r(\mu)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε το σύνολο $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ και γράψτε $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$.]

11.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < r < \infty$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, τότε $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

11.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $p \geqslant 1$ και μια ακολουθία $\{f_n\}$ στον $L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε n. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ–σ.π., να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

11.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu\left(\{x \in X : n-1 \leqslant |f(x)| < n\}\right) < \infty,$$

όπου $1 \leqslant p < \infty$.

11.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, με $f_n \to f$ μ–σ.π. Να δείξετε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

11.11. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

11.12. Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(ii) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$

(iii) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

[*Υπόδειξη:* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a|\log x|^b$.]

11.13. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

(i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (E + x)) > 0$.

11.14. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0,1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\ dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

11.15. Σταθεροποιούμε $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και ορίζουμε

$$A_g(f) = g * f.$$

(i) Δείξτε ότι ο $A_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(ii) Αν επιπλέον $g \geqslant 0$, υπολογίστε τη νόρμα $\|A_g\|$ του A_g.

(iii) Δείξτε ότι η μοναδική $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για την οποία $f * f = f$ είναι η $f = 0$.

11.16. Δείξτε ότι αν $f_n \in L^1[0,1]$ και $\|f_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$, τότε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue.

Ομάδα Γ΄.

11.17. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $p \geqslant 1$ και μια συνάρτηση $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι

$$\int |f|^p\ d\lambda = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right)\ dt.$$

11.18. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p},$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L^r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

11.19. Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο Lebesgue) στο $(0,1)$. Να δείξετε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

11.20. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f_t(x) = f(x+t), x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(i) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\int f_t d\lambda = \int f d\lambda$.

(ii) Ισχύει $\lim_{t\to 0}\int |f_t - f| d\lambda = 0$.

11.21. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\cos(nx)\, d\lambda(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int f(x)\sin(nx)\, d\lambda(x) = 0.$$

11.22. Δίνεται μια φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

11.23. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R}^k)$ με $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\, d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \infty.$$

11.24. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^p(\mu)$ για κάποιο $p \geqslant 1$. Να δείξετε ότι

$$\log \|f\|_p \geqslant \int \log|f|\, d\mu.$$

11.25. Έστω E, F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με $\lambda(E) < \infty$.

(i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι $n \cdot (\chi_E * \chi_{[0,1/n]}) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

11.26. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου και $g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει και $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Να δείξετε ότι $f \in L^\infty(\mu)$.

11.27. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\, d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_p = 0.$$

11.28. Έστω $1 < p < \infty$ και $f \in L^p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)\, d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}}\int_0^x f(t)\, d\lambda(t) = 0.$$

11.29. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $c_1,c_2,\ldots,c_m>0$ με $c_1+c_2+\cdots+c_m=1$. Να δείξετε ότι αν $f_1,f_2,\ldots,f_m : X\to\mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int\left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right)d\mu \leqslant \prod_{i=1}^m\left(\int |f_i|\,d\mu\right)^{c_i}.$$

11.30. Υποθέτουμε ότι $f\in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1\leqslant p<2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2}\|f\|_p<+\infty.$$

Δείξτε ότι $f\in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2=\lim_{p\to 2^-}\|f\|_p.$$

11.31. Έστω $f\in L^1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C>0$ ώστε

$$\int_A |f|\,d\lambda\leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A\subseteq[0,1]$. Δείξτε ότι $f\in L^p[0,1]$ για κάθε $1\leqslant p<2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L^2[0,1]$;

11.32. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη, $E=\mathrm{supp}(f)$ για την οποία ισχύει

(∗). $$\int_E \exp\left(f(x)\right)\,d\lambda(x)=1$$

Αποδείξτε ότι $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $1\leqslant p<\infty$ και $\|f\|_p\leqslant Cp$, όπου $C>0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την (∗) αλλά $f\notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

11.33. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f:X\to\mathbb{C}$. Ορίζουμε το *ουσιώδες πεδίο τιμών* της f να είναι το σύνολο R_f όλων των $a\in\mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon>0$

$$\mu(\{x\in X:|f(x)-a|<\varepsilon\})>0.$$

(i) Να δείξετε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Αν $f\in L^\infty$ να δείξετε ότι το R_f είναι συμπαγές και $\|f\|_\infty=\max\{|a|:\ a\in R_f\}$.

11.34. Έστω $0<p<1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Αν $f,g:X\to[0,\infty]$ να δείξετε ότι

$$\int fg\,d\mu\geqslant\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\mu\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p}\geqslant\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}+\left(\int g^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

11.35. Δείξτε ότι αν $1\leqslant p<q\leqslant\infty$, τότε ο $L^q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L^p[0,1]$.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Ολοκλήρωμα Riemann

Α΄.1 Ορισμός

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. *Διαμέριση* του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.

Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε *πλάτος* της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

Η διαμέριση P_1 λέγεται *εκλέπτυνση* της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, η *κοινή εκλέπτυνση* των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$.

Θεωρούμε τώρα μια *φραγμένη* συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f, P) \leqslant U(f, P)$$

αφού $m_k \leqslant M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα Α΄.1.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε
>
> $$L(f, P) \leqslant L(f, P_1) \leqslant U(f, P_1) \leqslant U(f, P).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leqslant m_k^{(1)}$ και $m_k \leqslant m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \Longrightarrow \inf B \leqslant \inf A$). Επομένως,

$$L(f, P_1) - L(f, P) = m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k) \geqslant 0.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι

$$U(f, P_1) \leqslant U(f, P).$$

Για την απόδειξη του λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leqslant L(f, P)$.

Αφού η P προκύπτει από την P_2 με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων, όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leqslant U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leqslant U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_2).$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός Α΄.1.2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε ως *κάτω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\Big\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}$$

και ως *άνω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\Big\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}.$$

Από το Λήμμα Α΄.1.1 έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται *Riemann ολοκληρώσιμη* αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται *ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

Α΄.2 Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα Α΄.2.1 (κριτήριο Riemann). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P=P_1\cup P_2$. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,P)-\frac{\varepsilon}{2} &\leqslant U(f,P_2)-\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ᾽ όπου έπεται ότι

$$0\leqslant U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_\varepsilon)<L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon.$$

Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$
δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα Α΄.2.2. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Δηλαδή,
$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$
Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε
$$U(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$
ενώ
$$L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})).$$
Άρα,
$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n} \to 0.$$
Από το κριτήριο του Riemann βλέπουμε εύκολα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα Α΄.2.3. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε
$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$
Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση P_n που αποτελείται από τα σημεία
$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$
Έστω $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε
$$M_k = f(y_k') \quad \text{και} \quad m_k = f(y_k'').$$
Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα
$$|y_k' - y_k''| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Α΄.3 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτή την παράγραφο αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Θεώρημα Α΄.3.1 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος). *Αν $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t,s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα Α΄.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Θεώρημα Α΄.3.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leqslant f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

είναι η *μέση τιμή* της f στο $[a,b]$.

Πόρισμα Α΄.3.4. *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geqslant g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα Α΄.3.5. *Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ με την ιδιότητα $U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[m, M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\phi(\xi)| \leqslant A$ για κάθε $\xi \in [m, M]$. Επίσης, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2A + b - a) > 0$ τότε υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi, \eta \in [m, M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ να ισχύει $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμεριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2.$$

Ορίζουμε

$$I = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : \ M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$
$$J = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : \ M_k(f) - m_k(f) \geqslant \delta\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leqslant M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m, M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| = |\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leqslant \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leqslant (b - a)\varepsilon_1.$$

(ii) Για το J έχουμε

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

Επίσης,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| \leqslant |(\phi \circ f)(x)| + |(\phi \circ f)(x')| \leqslant 2A$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leqslant 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant 2A \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Α΄.3.5 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από την σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα Α΄.3.6. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*

(γ) *η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος Α΄.3.5. Για το (γ) γράφουμε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

και χρησιμοποιούμε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a,b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geqslant b$ ως εξής:

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Α΄.4 Ο ορισμός του Riemann

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός Α΄.4.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα

επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - I(f)\right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$ και $\sum(f,P,\Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f,P,\Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k,x_{k+1}]$.

Θεώρημα Α΄.4.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k,x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - I(f)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Για κάθε $k = 0,1,\dots,n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k',\xi_k'' \in [x_k,x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1}-x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1}-x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότ

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f).$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f).$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0.$$

Έστω P' διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, *η οποία είναι και εκλέπτυνση της P*. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant \sum(f, P', \Xi)\\ &\leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f, P', \Xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για *τυχούσα* διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a, b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n - 1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2 = P_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$ με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \ldots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_2, \Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1} - y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l) - f(\xi_l'')(y_{l+1} - x_k)|\\ &\leqslant 3M \max_l |y_{l+1} - y_l| < 3M\delta\\ &= \frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1, \Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k, \Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) Αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, έχουμε

$$\left|\sum(f, P_0, \Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(γ) Αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_0, \Xi^{(0)})\right| < n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $< \delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_0, \Xi^{(0)})\right| + \left|\sum(f, P_0, \Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

Παράρτημα Β΄

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Β΄.1 Ισοπληθικά σύνολα

Ορισμός Β΄.1.1 (Ισοπληθικότητα). Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Τα A, B λέγονται *ισοπληθικά* αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί[1]. Τότε, γράφουμε $A =_c B$ ή $|A| = |B|$ ή και $A \sim B$.

Παραδείγματα Β΄.1.2. (α) Τα σύνολα $(0,1)$ και $(0,2)$ είναι ισοπληθικά, μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (0,2)$ με $f(x) = 2x$. Γενικότερα, κάθε ανοικτό διάστημα (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, είναι ισοπληθικό με το $(0,1)$ μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (a,b)$ με $f(t) = (1-t)a + tb$.

(β) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των αρτίων $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ μέσω της αντιστοιχίας $\mathbb{N} \rightarrowtail A$ με $n \mapsto 2n$.

(γ) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Πράγματι: θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{αν } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1-k, & \text{αν } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f αντιστοιχεί στους περιττούς φυσικούς τους θετικούς ακεραίους και στους άρτιους φυσικούς τους μη θετικούς ακεραίους.

(δ) Τα σύνολα $[0,1]$ και $[0,1)$ είναι ισοπληθικά. Πράγματι: θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[0,1]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{αν } x \in A \text{ και } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι αντιστοιχία.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η ισοπληθικότητα μεταξύ συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Β΄.1.3. *Έστω A, B, C μη κενά σύνολα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) $A \sim A$,

(β) *αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$ και*

(γ) *αν $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$.*

---

[1] Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται αντιστοιχία. Λέμε τότε ότι έχουμε μια αντιστοιχία από το A στο B και γράφουμε $A \rightarrowtail B$.

Απόδειξη. Άμεση. □

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με T_n το σύνολο των πρώτων n φυσικών, δηλαδή $T_n = \{1, 2, \dots n\}$.

Ορισμός Β΄.1.4 (πεπερασμένα και άπειρα σύνολα). (α) Έστω A μη κενό σύνολο[2]. Το A λέγεται *πεπερασμένο* αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : A \to T_n$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, λέμε ότι ο *πληθάριθμος* του A είναι n ή ότι το A έχει n στοιχεία και γράφουμε $\mathrm{card}(A) = n$ ή $\#A = n$ ή και $|A| = n$.

(β) Ένα σύνολο A λέγεται *άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

Πρόταση Β΄.1.5. *Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $B \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι άπειρο. Ειδικότερα, το A είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_1 \in A$. Τότε, το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Ομοίως, $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ και μπορούμε να επιλέξουμε $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A. Πράγματι: αν υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \emptyset$ τότε θα είχαμε $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και το A θα ήταν πεπερασμένο.

Ορίζουμε τότε $f : \mathbb{N} \to A$ με $f(n) = a_n$. Η f είναι 1-1 διότι τα a_n είναι διαφορετικά ανά δύο. Αν θέσουμε $B = f(\mathbb{N})$ τότε $B \subseteq A$ και η $f : \mathbb{N} \to B$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, $B \sim \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $g : A \to T_m$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N} \to T_m$ είναι 1-1, άτοπο (εξηγήστε γιατί). □

Συμβολισμός. Έστω A, B δύο σύνολα. Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$, γράφουμε $A \leqslant_c B$ ή $A \preceq B$ και λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με αυτόν του B. Ο συμβολισμός και η ορολογία δικαιολογούνται από το γεγονός ότι το A είναι ισοπληθικό με το $f(A)$ το οποίο είναι υποσύνολο του B.

Παραδείγματα Β΄.1.6. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο, διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(β) Το σύνολο των ρητών είναι άπειρο διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε μη τετριμμένο διάστημα είναι άπειρο σύνολο.

Σχόλια Β΄.1.7. Κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Πράγματι, στην Πρόταση Β΄.1.6 δείξαμε ότι αν το A είναι άπειρο τότε υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Γράφουμε $b_n = f(n)$ για $n = 1, 2, \dots$ και θέτουμε $B = f(\mathbb{N}) = \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq A$. Θεωρούμε το σύνολο $C = A \setminus \{b_1\}$, το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του A και ορίζουμε μια συνάρτηση $g : A \to C$ ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} b_{n+1}, & \text{αν } x = b_n \text{ για κάποιο } n \\ x, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι 1-1 και επί (άσκηση).

Β΄.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός Β΄.2.1 (αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα). Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Το A θα λέγεται *άπειρο αριθμήσιμο* αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο A λέγεται *αριθμήσιμο* αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Αν το A δεν είναι αριθμήσιμο, θα λέγεται *υπεραριθμήσιμο*.

[2] Για το κενό σύνολο δεχόμαστε ότι είναι πεπερασμένο με πληθάριθμο 0.

Συμβολισμός. Τον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών τον συμβολίζουμε με ω ή $\aleph_0$ (άλεφ 0). Έτσι, αν το σύνολο A είναι αριθμήσιμο γράφουμε $|A| = \aleph_0$.

Παραδείγματα Β΄.2.2. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο αριθμήσιμο.

(β) Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο: η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$ είναι 1-1 και επί. Το γεγονός ότι είναι επί έπεται από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής (δείξτε ότι είναι 1-1).

(γ) Αν A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ είναι επίσης άπειρο αριθμήσιμο. Πράγματι, αν τα A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα τότε υπάρχουν $f : A \to \mathbb{N}$ και $g : B \to \mathbb{N}$ συναρτήσεις 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι f και g είναι 1-1 και επί μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η h είναι 1-1 και επί. Άρα, $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, οπότε από την Πρόταση Β΄.1.3 έπεται ότι $A \times B \sim \mathbb{N}$.

Η επόμενη πρόταση δίνει χρήσιμους χαρακτηρισμούς για τα αριθμήσιμα σύνολα.

Πρόταση Β΄.2.3. *Έστω A άπειρο σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το A είναι αριθμήσιμο.*
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί.*
(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1.*

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα Β΄.2.4. *Έστω A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το A είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, επομένως είναι μη κενό. Από την αρχή της καλής διάταξης (αρχή του ελαχίστου) υπάρχει το $a_1 = \min A$. Το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι επίσης μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν πεπερασμένο) οπότε, πάλι από την αρχή της καλής διάταξης, υπάρχει το $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον, γιατί αν σταματούσε σε κάποιο βήμα n_0 θα είχαμε $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n_0}\} = \emptyset$, δηλαδή το A θα ήταν πεπερασμένο. Έτσι, ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία (a_n) διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του A. Παρατηρήστε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, άρα $a_n \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Είναι προφανές ότι $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\} \subseteq A$. Αν υποθέσουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $a \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, έχουμε $a > a_1$ και επίσης υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > a$ (διότι $a_n \geqslant n$). Άρα, υπάρχει μέγιστος n με την ιδιότητα $a > a_n$. Τότε, $a_n < a < a_{n+1}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε $a \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ και $a < \min A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Από τον ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι το A είναι αριθμήσιμο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την Πρόταση Β΄.2.3.

Απόδειξη της Πρότασης Β΄.2.3. Η συνεπαγωγή (α) ⇒ (β) είναι άμεση από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (β), δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί. Τότε, για κάθε $a \in A$ ισχύει $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $n_a = \min f^{-1}(\{a\})$, $a \in A$ (το min υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης). Η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, με $g(a) = n_a$ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Πράγματι: παρατηρούμε ότι αν $a, b \in A$ με $a \neq b$, τότε $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$ και άρα $n_a \neq n_b$.

Έστω ότι ισχύει το (γ) δηλαδή, υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$. Τότε, το $B = g(A)$ είναι άπειρο υποσύνολο των φυσικών. Από το λήμμα, το B είναι αριθμήσιμο, δηλαδή υπάρχει $h : B \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{N}$ με $\phi(a) = h(g(a))$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι 1-1 και επί, άρα το A είναι αριθμήσιμο. □

Παραδείγματα Β΄.2.5. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Αφού $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ με $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\gcd(m, n) = 1$.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Cantor και δείχνει ότι αριθμήσιμες το πλήθος πράξεις μεταξύ αριθμήσιμων συνόλων παράγουν αριθμήσιμα σύνολα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη είναι γνωστό ως *πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*.

Θεώρημα Β΄.2.6 (Cantor, 1899). *Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια αριθμήσιμων υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν το I είναι αριθμήσιμο, τότε και το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το I είναι αριθμήσιμο, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι είναι το $\mathbb{N}$. Έτσι, έχουμε την οικογένεια $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Επίσης, κάθε A_i είναι αριθμήσιμο, επομένως μπορούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του ως

$$A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

(αν κάποιο από τα A_i είναι πεπερασμένο, «επαναλαμβάνουμε» κάποιο στοιχείο του άπειρες φορές). Αριθμώντας με αυτόν τον τρόπο τα στοιχεία του εκάστοτε συνόλου παίρνουμε έναν άπειρο πίνακα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{array}{llllllll}
A_1 : & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots \\
A_2 : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots \\
A_3 : & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_k^3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
A_n : & a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_k^n & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Τότε, είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός περιέχει όλα τα στοιχεία του $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (ενδεχομένως με επαναλήψεις). Απαριθμούμε τα στοιχεία αυτού του πίνακα κατά μήκος των διαγωνίων με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά, ως εξής:

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots$$

Από την παραπάνω διαδικασία αρίθμησης προκύπτει απεικόνιση $\pi : \mathbb{N} \to A$ επί (ορίστε την π). Το συμπέρασμα έπεται από το (β) της Πρότασης Β΄.2.3. □

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα. Αυτό μάλιστα ισχύει για τα μη τετριμμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση Β′.2.7. *Το σύνολο* $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το σύνολο $[0,1]$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Διαιρούμε το $[0,1]$ σε τρία διαδοχικά ισομήκη διαστήματα ως εξής: $[0,1] = [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$. Τότε, τουλάχιστον ένα από αυτά τα τρία διαστήματα δεν περιέχει το x_1. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_1 και το διαιρούμε σε τρία ισομήκη διαδοχικά κλειστά διαστήματα μήκους $1/9$. Τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περιέχει το x_2. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, οπότε παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ με $x_n \notin I_n$ και $b_n - a_n = 3^{-n} \to 0$. Από την αρχή κιβωτισμού ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Αφού $x \in [0,1]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_{n_0}$. Άτοπο, διότι $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $x_{n_0} \notin I_{n_0}$. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι η πληρότητα των πραγματικών αριθμών παίζει ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη: χρησιμοποιήσαμε την αρχή του κιβωτισμού. Σε αντιδιαστολή, το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα Β′.2.8. *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *και το σύνολο των αρρήτων* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *είναι υπεραριθμήσιμα.*

Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα Β′.2.9 (Cantor). *Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών*

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x(n)) : x(n) \in \{0,1\},\ n = 1, 2, \dots\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Το επιχείρημα της απόδειξης είναι γνωστό ως *δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει μια αρίθμηση των στοιχείων του: $2^{\mathbb{N}} = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$, όπου κάθε x_n είναι δυαδική ακολουθία. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τα στοιχεία x_n και τις συντεταγμένες τους σε μορφή άπειρου πίνακα:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_1(1), x_1(2), x_1(3), \dots, x_1(k), \dots) \\
x_2 &= (x_2(1), x_2(2), x_2(3), \dots, x_2(k), \dots) \\
x_3 &= (x_3(1), x_3(2), x_3(3), \dots, x_3(k), \dots) \\
&\ \ \vdots \\
x_n &= (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \dots, x_n(k), \dots) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Κοιτάζουμε το πρώτο στοιχείο στην πρώτη συντεταγμένη, το δεύτερο στοιχείο στη δεύτερη συντεταγμένη, το τρίτο στοιχείο στην τρίτη συντεταγμένη κ.ο.κ. Δηλαδή, κινούμαστε στην «κύρια διαγώνιο» του πίνακα και βάσει αυτής ορίζουμε το εξής στοιχείο του $2^{\mathbb{N}}$:

$$y = (1 - x_1(1), 1 - x_2(2), \dots, 1 - x_k(k), \dots)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x_n \neq y$ διότι $x_n(n) \neq 1 - x_n(n) = y(n)$. Με άλλα λόγια, το y διαφέρει από το x_1 στην πρώτη θέση, από το x_2 στη δεύτερη θέση κ.ο.κ. Έτσι οδηγούμαστε σε αντίφαση. $\square$