

Όροι, Τύποι, Δομές, Αποτιμήσεις και Αλήθεια στον Κατηγορηματικό Λογισμό

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα Γ . Συμβολίζουμε με $E(\Gamma)$ το σύνολο των εκφράσεων (ακολουθιών από σύμβολα) της Γ , με $M(\Gamma)$ το σύνολο των μεταβλητών της Γ , με $\Sigma\tau(\Gamma)$ το σύνολο των συμβόλων σταθερών της Γ , με $K\alpha\tau(\Gamma)$ το σύνολο των συμβόλων κατηγορημάτων της Γ ($K\alpha\tau_n(\Gamma)$ για τα n -μελή) και με $\Sigma\nu(\Gamma)$ το σύνολο των συμβόλων συναρτήσεων της Γ ($\Sigma\nu_n(\Gamma)$ για τα n -μελή). Τότε, έχουμε τα εξής:

Το σύνολο $O(\Gamma)$ των όρων της Γ ορίζεται ως εξής: Μία έκφραση $t \in E(\Gamma)$ είναι όρος της Γ , αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα εξής:

- $t \in M(\Gamma)$.
- $t \in \Sigma\tau(\Gamma)$.
- Η t είναι της μορφής $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$, όπου $F \in \Sigma\nu_n(\Gamma)$ και οι $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι ήδη κατασκευασμένοι όροι της Γ .

Το σύνολο $T(\Gamma)$ των (καλά σχηματισμένων) τύπων της Γ ορίζεται ως εξής: Μία έκφραση φ είναι τύπος της Γ , αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα εξής:

- Η φ είναι της μορφής $t_1 = t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\Gamma)$.
- Η φ είναι της μορφής $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, όπου $P \in K\alpha\tau_n(\Gamma)$ και $t_1, t_2, \dots, t_n \in O(\Gamma)$.
- Η φ είναι της μορφής $(\neg\psi)$, όπου ψ ήδη κατασκευασμένος τύπος της Γ (συχνά παραλείπουμε τις παρενθέσεις).
- Η φ είναι της μορφής $(\psi \rightarrow \chi)$, όπου ψ, χ ήδη κατασκευασμένοι τύποι της Γ (συχνά παραλείπουμε τις παρενθέσεις).
- Η φ είναι της μορφής $\forall x\psi$, όπου $x \in M(\Gamma)$ και ψ ήδη κατασκευασμένος τύπος της Γ .

Επίσης, ορίζουμε το σύνολο $AT(\Gamma)$ των ατομικών τύπων της Γ ως το σύνολο των τύπων της Γ που είναι οποιασδήποτε από τις πρώτες δύο παραπάνω μορφές.

Επίσης, μπορούμε για λόγους ευκολίας να ορίσουμε τις εξής συντομογραφίες (το ότι ορίζουμε αυτούς τους τύπους σαν συντομογραφίες είναι θέμα καθαρά τυπικό, πρακτικά τους σκεφτόμαστε κανονικά σαν τύπους και έχουν την προφανή σημασία):

- Για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma)$, ορίζουμε $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.
- Για κάθε $x \in M(\Gamma)$ και για κάθε $\varphi \in T(\Gamma)$, ορίζουμε $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x(\neg\varphi)$.

Μία δομή $\mathfrak{A}$ για τη Γ αποτελείται από τα εξής:

- Ένα σύμπαν A (γράφουμε $|\mathfrak{A}|$ για το σύμπαν της $\mathfrak{A}$).
- Για κάθε $c \in \Sigma\tau(\Gamma)$, μία ερμηνεία $c^{\mathfrak{A}} \in A$ του c .
- Για κάθε $P \in K\alpha\tau(\Gamma)$, μία ερμηνεία $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ του P , όπου $P \in K\alpha\tau_n(\Gamma)$.
- Για κάθε $F \in \Sigma\nu(\Gamma)$, μία ερμηνεία $F^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$ του F , όπου $F \in \Sigma\nu_n(\Gamma)$.

Έστω δομή $\mathfrak{A}$ της Γ , με $|\mathfrak{A}| = A$. Τότε, έχουμε τα εξής:

Μία αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$ είναι μία συνάρτηση $v: M(\Gamma) \rightarrow A$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε (μονοσήμαντα) μία αποτίμηση $v: M(\Gamma) \rightarrow A$ σε μία συνάρτηση $\bar{v}: O(\Gamma) \rightarrow A$, ως εξής:

- Για κάθε $x \in M(\Gamma)$, θέτουμε $\bar{v}(x) = v(x)$.
- Για κάθε $c \in \Sigma\tau(\Gamma)$, θέτουμε $\bar{v}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
- Για κάθε $F \in \Sigma\cup\nu(\Gamma)$ και για κάθε $t_1, t_2, \dots, t_n \in O(\Gamma)$, θέτουμε $\bar{v}(F(t_1, t_2, \dots, t_n)) = F^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \dots, \bar{v}(t_n))$.

Επίσης, για κάθε $x \in M(\Gamma)$, για κάθε αποτίμηση $v: M(\Gamma) \rightarrow A$ και για κάθε $\alpha \in A$, μπορούμε να ορίσουμε την αποτίμηση $v(x|\alpha): M(\Gamma) \rightarrow A$, με

$$v(x|\alpha)(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } x \equiv y \\ v(y), & \text{αν } x \not\equiv y \end{cases}, \forall y \in M(\Gamma).$$

Λέμε ότι ένας τύπος φ είναι αληθής στη δομή $\mathfrak{A}$ με την αποτίμηση $v: M(\Gamma) \rightarrow A$ και γράφουμε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, στις εξής περιπτώσεις:

- Αν ο φ είναι της μορφής $t_1 = t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, όπου $P \in K\alpha\tau_n(\Gamma)$ και $t_1, t_2, \dots, t_n \in O(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \dots, \bar{v}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, όπου $\psi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \not\models \psi[v]$ (δηλαδή, αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models \psi[v]$).
- Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \rightarrow \chi$, όπου $\psi, \chi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \psi[v]$ ή $\mathfrak{A} \models \chi[v]$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$, όπου $x \in M(\Gamma)$ και $\psi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν, για κάθε $\alpha \in A$, έχουμε ότι $\mathfrak{A} \models \psi[v(x|\alpha)]$.

Επίσης, προφανώς, ισχύουν τα εξής (έπονται από τον παραπάνω ορισμό):

- Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \vee \chi$, όπου $\psi, \chi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \psi[v]$ ή $\mathfrak{A} \models \chi[v]$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \chi$, όπου $\psi, \chi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \psi[v]$ και $\mathfrak{A} \models \chi[v]$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \leftrightarrow \chi$, όπου $\psi, \chi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν $(\mathfrak{A} \models \psi[v] \text{ και } \mathfrak{A} \models \chi[v])$ ή $(\mathfrak{A} \not\models \psi[v] \text{ και } \mathfrak{A} \not\models \chi[v])$.
- Αν ο φ είναι της μορφής $\exists x\psi$, όπου $x \in M(\Gamma)$ και $\psi \in T(\Gamma)$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha \in A$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{A} \models \psi[v(x|\alpha)]$.