Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Μαθηματική Λογική

- Ασκήσεις -

17 Φεβρουαρίου 2021

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Περιεχόμενα

Μέρος I

Προτασιακός Λογισμός

Κεφάλαιο 1

Πρώτο Πακέτο Ασκήσεων

1.1 Ασκήσεις

1. Ένα σύνολο εκφράσεων $X \subseteq E(\Gamma_0)$ της γλώσσας Γ_0 του Προτασιακού Λογισμού λέγεται **κλειστό** ως προς τους συνδέσμους αν για κάθε $\alpha, \beta \in X$ ισχύει ότι $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta, \alpha \leftrightarrow \beta \in X$.
   Αποδείξτε ότι:
   $$T(\Gamma_0) = \bigcap \Big\{ X \subseteq E(\Gamma_0) \mid M(\Gamma_0) \subseteq X \text{ και } X \text{ είναι κλειστό ως προς τους συνδέσμους} \Big\}.$$

2. Για κάθε προτασιακό τύπο φ και οποιεσδήποτε αποτιμήσεις a_1, a_2 αποδείξτε ότι: αν οι a_1, a_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ, τότε $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$.

3. Έστω φ ένας προτασιακός τύπος. Ορίζουμε ως μήκος του φ το πλήθος των συμβόλων που περιέχει. Αποδείξτε ότι αν ο φ δεν περίεχει τον σύνδεσμο της άρνησης, τότε το μήκος του είναι της μορφής $4k+1$, όπου k φυσικός αριθμός, και ότι το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών του φ είναι $k+1$.
   (*Παρατήρηση*: Σε αυτήν την άσκηση, θεωρούμε τους προτασιακούς τύπους με όλες τους τις παρενθέσεις.)

4. Έστω $a \colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ μια αποτίμηση. Γνωρίζουμε ότι η a επεκτείνεται σε μια συνάρτηση $\overline{a} \colon T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι πίνακες αλήθειας των συνδέσμων. Αποδείξτε τη μοναδικότητα αυτής της επέκτασης.

5. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ικανοποιήσιμα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

   (i) $\Big\{ p \to (q \to r), r \to \neg r, (s \to p) \wedge (t \to q), s \wedge t \Big\}$

   (ii) $\Big\{ p \to (q \to \neg r), r \to p \wedge q, (p \wedge r) \vee (s \wedge t), \neg s \vee \neg t \Big\}$

6. Αφού απλοποιήσετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους, να εξετάσετε αν είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι:
$$(p \to q) \vee (\neg p \wedge q), \quad (p \leftrightarrow q) \vee \neg(p \to q).$$

7. Χωρίς να κάνετε πίνακα αλήθειας, να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογία:

   (i) $((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$.

   (i) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

   (iii) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$.

8. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ένα σύνολο προτασιακών τύπων και $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ δύο προτασιακοί τύποι. Να αποδείξετε ή να καταρρίψετε καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

   (i) Αν $T \models \varphi$ ή $T \models \psi$, τότε $T \models \varphi \vee \psi$.

   (ii) Αν $T \models \varphi \vee \psi$, τότε $T \models \varphi$ ή $T \models \psi$.

9. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ένα σύνολο προτασιακών τύπων και $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ δύο προτασιακοί τύποι. Αν $T \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$, δείξτε ότι $T \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$.

10. (i) Αποδείξτε ότι $\models (p \to q) \vee (q \to r)$.

    (ii) Αποδείξτε ή καταρρίψτε τον ισχυρισμό:
$$\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))\,.$$

11. Να απλοποιήσετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους:

    (i) $(p_1 \wedge p_2) \vee ((p_3 \to p_4) \wedge p_1) \vee \neg\,(p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg\,((p_3 \wedge \neg p_4) \vee p_1)$

    (ii) $\neg\,[\neg\,(\neg p_2 \wedge \neg p_4) \to \neg p_1 \vee \neg p_3] \vee \neg\,[\neg p_1 \vee \neg p_3 \to \neg\,(\neg p_2 \wedge \neg p_4)]\,.$

12. Γράψτε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους σε Κανονική Διαζευκτική Μορφή:

    (i) $(p \vee q \to \neg r) \to (p \leftrightarrow q \wedge r)$.

    (ii) $(p \leftrightarrow q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to r)$

    (iii) $p \leftrightarrow \neg\neg p$.

1.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Ένα σύνολο εκφράσεων $X \subseteq E(\Gamma_0)$ της γλώσσας Γ_0 του Προτασιακού Λογισμού λέγεται **κλειστό** ως προς τους συνδέσμους αν για κάθε $\alpha, \beta \in X$ ισχύει ότι $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta, \alpha \leftrightarrow \beta \in X$.
   Αποδείξτε ότι:
   $$T(\Gamma_0) = \bigcap \Big\{ X \subseteq E(\Gamma_0) \mid M(\Gamma_0) \subseteq X \text{ και } X \text{ είναι κλειστό ως προς τους συνδέσμους} \Big\}.$$
   Λύση. Από τον ορισμό του $T(\Gamma_0)$ έχουμε ότι $T(\Gamma_0) \subseteq E(\Gamma_0)$, όπου $M(\Gamma_0) \subseteq T(\Gamma_0)$ και μάλιστα είναι κλειστό ως προς τους συνδέσμους. Άρα, είναι σαφές ότι
   $$A = \bigcap \Big\{ X \subseteq E(\Gamma_0) \mid M(\Gamma_0) \subseteq X \text{ και } X \text{ είναι κλειστό ως προς τους συνδέσμους} \Big\} \subseteq T(\Gamma_0).$$
   Τώρα θα αποδείξουμε το ζητούμενο με χρήση επαγωγής.
   (α′) **Βάση.** Έστω $p \in M(\Gamma_0)$.Τότε, για κάθε $X \subseteq E(\Gamma_0)$ με $M(\Gamma_0) \subseteq X$ είναι σαφές ότι $p \in X$, δηλαδή ισχύει ότι $p \in A$.
   (β′) **Επαγωγικό Βήμα.** Θεωρούμε $\varphi \in A$, δηλαδή $\varphi \in X$, για κάθε $X \subset E(\Gamma_0)$ που έχει τις παραπάνω ιδιότητες.Αφού για κάθε τέτοιο X ισχύει η κλειστότητα ως προς συνδέσμους έχουμε ότι $\neg\varphi \in X$, για κάθε τέτοιο X.Συνεπώς, ισχύει ότι $\neg\varphi \in A$. Με ακριβώς όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και το ζητούμενο και για τους υπόλοιπους συνδέσμους.

   Έτσι με χρήση επαγωγής δείξαμε ότι $A = T(\Gamma_0)$. ■

2. Για κάθε προτασιακό τύπο φ και οποιεσδήποτε αποτιμήσεις a_1, a_2 αποδείξτε ότι: αν οι a_1, a_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ, τότε $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$.

   Λύση. Έστω $a_1, a_2 : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ δύο αποτιμήσεις. Θεωρούμε το σύνολο :
   $$A = \{\varphi \in T(\Gamma_0) : \text{αν } a_1(p) = a_2(p), \text{ για κάθε } p \text{ μεταβλητή στο } \varphi, \text{ τότε } \overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)\}.$$
   Με χρήση επαγωγής θα δείξουμε ότι $A = T(\Gamma_0)$.
   (α′) **Βάση.** Πραφανώς, αν $\varphi \in M(\Gamma_0)$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
   (β′) **Επαγωγικό Βήμα.** Θεωρούμε τους προτασικούς τύπους $\varphi, \psi \in A$.
   - Υποθέτουμε ότι για κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ στο $\neg\varphi$ ισχύει ότι $a_1(p) = a_2(p)$.Όμως γνωρίζουμε ότι φ και $\neg\varphi$ έχουν τις ίδιες προτασιακές μεταβλητές, άρα για κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ στο A ισχύει ότι $a_1(p) = a_2(p)$ και συνεπώς απο την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$. Έτσι είναι σαφές ότι $\overline{a_1}(\neg\varphi) = \overline{a_2}(\neg\varphi)$.
   - Θεωρούμε τώρα, ότι για κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ στο $\varphi \to \psi$ ισχύει $a_1(p) = a_2(p)$. Όμως γνωρίζουμε ότι ο σύνδεσμος $\varphi \to \psi$ αποτελείται από τις προτασιακές μεταβλητές των φ και ψ, άρα ισχύει ότι οι a_1, a_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές των φ και ψ. Εξετάζουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις :
     (i) Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \Psi$ από επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\overline{a_2}(\varphi) = \Psi$, δηλαδή ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = A$.

(ii) Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = A$ και $\overline{a_1}(\psi) = \overline{a_2}(\psi) = \Psi$, τότε ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = \Psi$.

(iii) Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = A$ και $\overline{a_1}(\psi) = \overline{a_2}(\psi) = A$, τότε ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = A$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \to\}$ είναι πλήρες, άρα έχουμε το ζητούμενο.

■

3. Έστω φ ένας προτασιακός τύπος. Ορίζουμε ως μήκος του φ το πλήθος των συμβόλων που περιέχει. Αποδείξτε ότι αν ο φ δεν περιέχει τον σύνδεσμο της άρνησης, τότε το μήκος του είναι της μορφής $4k+1$, όπου k φυσικός αριθμός, και ότι το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών του φ είναι $k+1$.
(*Παρατήρηση*: Σε αυτήν την άσκηση, θεωρούμε τους προτασιακούς τύπους με όλες τους τις παρενθέσεις.)

Λύση. Για να δείχθεί το ζητούμενο θα γίνει χρήση επαγωγής στου σύνολο των προτασιακών τύπων, που δεν περιέχουν την άρνηση.

(α΄) **Βάση.** Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $p \in M(\Gamma_0)$ ισχύει ότι το μήκος της ισούται με $4 \cdot 0 + 1$ και περιέχει $0+1$ μεταβλητές, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

(β΄) **Επαγωγικό Βήμα.** Θεωρούμε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$, όπου δεν περιέχουν τον σύνδεσμο της άρνησης, έχουν μήκος $4k+1, 4m+1$ και πλήθος μεταβλητών $k+1, m+1$ αντίστοιχα. Έτσι παρατηρούμε ότι ο προτασιακός τύπος $(\varphi \to \psi)$ απότελείται από $(k+m+1)+1$ μεταβλητές και περιέχει $(4k+1)+(4m+1)+3 = 4(k+m+1)+1$ σύμβολα (θεωρούμε τα δύο σύμβολα των παρενθέσων και το σύμβολο $\to$). Το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι πλήρες, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Συνεπώς με την ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. ■

4. Έστω $a \colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ μια αποτίμηση. Γνωρίζουμε ότι η a επεκτείνεται σε μια συνάρτηση $\overline{a} \colon T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι πίνακες αλήθειας των συνδέσμων. Αποδείξτε τη μοναδικότητα αυτής της επέκτασης.

Λύση. Θεωρούμε $\overline{a_1}, \overline{a_2} : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ δύο επεκτάσεις της αποτίμησης a, που ικανοποιούνται οι πίνακες αλήθειας των συνδέσμων. Θεωρούμε το σύνολο :

$$A = \{\varphi \in T(\Gamma_0) : \overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)\}.$$

Θα αποδείξουμε με χρήση επαγωγής, ότι $A = T(\Gamma_0)$ και συνεπώς θα προκύψει ότι $\overline{a_1} = \overline{a_2}$.

(α΄) **Βάση.** Για κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ γνωρίζουμε ότι $\overline{a_1}(p) = a(p) = \overline{a_2}$, αφού οι $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ είναι επεκτάσεις της a. Συνεπώς, ισχύει ότι $p \in A$.

(β΄) **Επαγωγικό Βήμα.** Θεωρούμε τους προτασιακούς τύπους $\phi, \psi \in A$.

- Χωρίς βλάβη της γενικότητας (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = A$. Αφού έχουμε ότι $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ ικανοποιούν τους πίνακες αλήθειας των συνδέσμων ισχύει ότι $\overline{a_1}(\neg\varphi) = \overline{a_2}(\neg\varphi) = \Psi$ και έχουμε το ζητούμενο.

- Από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$ και $\overline{a_1}(\psi) = \overline{a_2}(\psi)$. Εξετάζουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις :

  Α′. Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = \Psi$, τότε ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = A$.

  Β′. Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = A$ και $\overline{a_1}(\psi) = \overline{a_2}(\psi) = A$, τότε ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = A$.

  Γ′. Αν $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi) = A$ και $\overline{a_1}(\psi) = \overline{a_2}(\psi) = \Psi$, τότε ισχύει ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi) = \Psi$.

  Έτσι σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $\overline{a_1}(\varphi \to \psi) = \overline{a_2}(\varphi \to \psi)$.

Το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι πλήρες, άρα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

■

5. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ικανοποιήσιμα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

   (i) $A = \Big\{p \to (q \to r), r \to \neg r, (s \to p) \wedge (t \to q), s \wedge t\Big\}$

   (ii) $B = \Big\{p \to (q \to \neg r), r \to p \wedge q, (p \wedge r) \vee (s \wedge t), \neg s \vee \neg t\Big\}$

Λύση. (i) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αποτίμηση $a : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ ώστε να ικανοποιεί το σύνολο A.Τότε, θα ισχύει ότι $\overline{a}(r \to \neg r) = A$, όπου η μονάδικη περίπτωση να ισχύει είναι όταν $a(r) = \Psi$.Επίσης έχουμε $\overline{a}(s \wedge t) = A$, δηλαδή ισχύει ότι $a(s) = a(t) = A$. Ακόμη ισχύει ότι $\overline{a}((s \to p) \wedge (t \to q)) = A$, δηλαδή από τα παραπάνω ισχύει ότι $a(p) = a(q) = A$. Όμως από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a(r) = \Psi$ και $a(p) = a(q)$, δηλαδή $\overline{a}(q \to r) = \Psi$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\overline{a}(p \to (q \to r)) = \Psi$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι η a ικανοποιεί το A.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αποτίμηση $a : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ ώστε να ικανοποιεί το σύνολο B.Τότε, θα ισχύει ότι $\overline{a}(\neg s \vee \neg t) = \overline{a}(\neg(s \wedge t)) = A$, δηλαδή $\overline{a}(s \wedge t) = \Psi$.Αφού ισχύει ότι $\overline{a}((p \wedge r) \vee (s \wedge t)) = A$, τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\overline{a}(p \wedge r) = A$, δηλαδή $a(r) = a(p) = A$.Επίσης ισχύει ότι $\overline{a}(r \to (p \wedge q)) = A$, δηλαδή ισχύει ότι $a(p \wedge q) = A$, άρα έχουμε ότι $a(q) = A$.Όμως από τα παραπάνω ισχύει ότι $\overline{a}(q \to \neg r) = \Psi$, δηλαδή $\overline{a}(p \to (q \to \neg r)) = \Psi$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι η a ικανοποιεί το A.

■

6. Αφού απλοποιήσετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους, να εξετάσετε αν είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι:

$$(p \to q) \vee (\neg p \wedge q), \quad (p \leftrightarrow q) \vee \neg(p \to q).$$

Λύση. Παρατηρούμε το εξής :

$$\begin{aligned}
&(p \to q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\equiv&(\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\equiv&[\neg p \vee (\neg p \wedge q)] \vee [q \vee (\neg p \wedge q)] \\
\equiv&\neg p \vee q && \text{(έχει αποδειχθεί)} \\
\equiv&p \to q
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&(p \leftrightarrow q) \vee \neg(p \to q)\\
\equiv&[(p \to q) \wedge (q \to p)] \vee \neg(p \to q)\\
\equiv&[(p \to q) \vee \neg(p \to q)] \wedge [(q \to p) \vee \neg(p \to q)]\\
\equiv&(q \to p) \vee \neg(p \to q)\\
\equiv&q \to p \quad \text{(έχει τον ίδιο πίνακα αλήθειας με το παραπάνω π.τ.)}
\end{aligned}$$

Θα κατασκεύσασουμε τους πίνακες αληθείας των παραπάνω προτασιακών τύπων.

p	q	$p \to q$	$q \to p$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι δοθέντες προτασιακοί τύποι δεν είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι. ■

7. Χωρίς να κάνετε πίνακα αλήθειας, να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογία:

   (i) $\varphi = ((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$.

   (i) $\varphi = (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

   (iii) $\varphi = (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$.

Λύση. (i) Θεωρούμε την αποτίμηση $a : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$, όπου $a(p) = A$ και $a(q) = a(r) = \Psi$.Τότε, παρατηρούμε ότι $\overline{a}(p \to q) = \overline{a}(p \to r) = \Psi$ και $\overline{a}(q \to r) = A$.Έτσι, ισχύει ότι $\overline{a}((p \to q) \to (q \to r)) = A$, συνεπώς προκύπτει το εξής :

$$\overline{a}(((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \Psi.$$

Εφόσον, ο παραπάνω προτασιακός τύπος δεν ικανοποιεί την αποτίμηση a συμπεραίνουμε ότι δεν είναι ταυτολογία.

(ii) Θεωρούμε την αποτίμηση $a : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$, όπου $a(p) = A$ και $a(q) = a(r) = \Psi$.Τότε, παρατηρούμε ότι $\overline{a}(p \to q) = \overline{a}(p \to r) = \Psi$ και $\overline{a}(q \to r) = A$.Έτσι, ισχύει ότι $\overline{a}((q \to r) \to (p \to r)) = \Psi$, συνεπώς προκύπτει το εξής :

$$\overline{a}((p \to q) \to ((q \to r)) \to (p \to r))) = \Psi.$$

Εφόσον, ο παραπάνω προτασιακός τύπος δεν ικανοποιεί την αποτίμηση a συμπεραίνουμε ότι δεν είναι ταυτολογία.

(iii) Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν θεωρήσουμε αποτίμηση a, με $a(p) = A$ και $a(q) = \Psi$, τότε έχουμε ότι $\overline{a}(p \to q) = \Psi$, άρα ισχύει ότι $\overline{a}(\varphi) = A$.
- Αν θεωρήσουμε αποτίμηση a, με $a(p) = A$ και $a(q) = A$, τότε έχουμε ότι $\overline{a}(p \to q) = A$, $\overline{a}(p \to \neg q) = \Psi$ και $\overline{a}((p \to \neg q) \to \neg p) = A$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\overline{a}(\varphi) = A$.

- Αν θεωρήσουμε αποτίμηση a, με $a(p) = \Psi$ και $a(q) = A$, τότε έχουμε ότι $\overline{a}(p \to q) = A$, $\overline{a}(p \to \neg q) = A$ και $\overline{a}((p \to \neg q) \to \neg p) = A$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\overline{a}(\varphi) = A$.
- Αν θεωρήσουμε αποτίμηση a, με $a(p) = \Psi$ και $a(q) = \Psi$, τότε έχουμε ότι $\overline{a}(p \to q) = A$, $\overline{a}(p \to \neg q) = A$ και $\overline{a}((p \to \neg q) \to \neg p) = A$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\overline{a}(\varphi) = A$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση a ισχύει ότι $\overline{a}(\varphi) = A$, δηλαδή ο προτασιακός τύπος φ είναι ταυτολογία.

■

8. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ένα σύνολο προτασιακών τύπων και $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ δύο προτασιακοί τύποι. Να αποδείξετε ή να καταρρίψετε καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

   (i) Αν $T \models \varphi$ ή $T \models \psi$, τότε $T \models \varphi \vee \psi$.

   (ii) Αν $T \models \varphi \vee \psi$, τότε $T \models \varphi$ ή $T \models \psi$.

Λύση. (i) Υποθέτουμε ότι $T \models \varphi$ ή $T \models \psi$ και έστω a αποτίμηση, που ικανοποιεί το σύνολο T.Τότε, ισχύει ότι $a(\varphi) = A$ ή $a(\psi) = A$, δηλαδή έχουμε ότι $\overline{a}(\varphi \vee \psi) = A$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $T \models \varphi \vee \psi$.

(ii) Θεωρούμε $T = \{\varphi \vee \psi\} \subseteq T(\Gamma_0)$, όπου είναι προφανές, ότι $T \models \varphi \vee \psi$.Τώρα, παρατηρούμε ότι οι αποτιμήσεις $a_1(\varphi) = A$, $a_1(\psi) = \Psi$ και $a_2(\varphi) = \Psi$, $a_2(\psi) = A$ ικανοποιούν την T, όμως δεν ικανοποιούν τους ψ και φ αντίστοιχα. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $T \not\models \varphi$ και $T \not\models \psi$.

■

9. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ένα σύνολο προτασιακών τύπων και $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ δύο προτασιακοί τύποι. Αν $T \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$, δείξτε ότι $T \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$.

Λύση. Θεωρούμε αποτίμηση a, που ικανοποιεί το σύνολο $T \cup \{\psi\}$ και υποθέτουμε ότι $\overline{a}(\neg\varphi) = \Psi$, δηλαδή $a(\varphi) = A$.Τότε, από την αρχική υπόθεση, αφού η a ικανοποιεί το σύνολο $T \cup \{\varphi\}$ ισχύει ότι $\overline{a}(\neg\psi) = A$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $a(\psi) = A$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $T \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$. ■

10. (i) Αποδείξτε ότι $\models (p \to q) \vee (q \to r)$.

    (ii) Αποδείξτε ή καταρρίψτε τον ισχυρισμό:

$$\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))\,.$$

Λύση.

(i) Θέτοντας $\varphi = (p \to q) \vee (q \to r)$, θα αποδείξουμε το ζητούμενο μέσω του παρακάτω πίνακα αλήθειας.

p	q	r	$p \to q$	$q \leftrightarrow r$	ψ
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Έτσι, είναι σαφές ότι ο προτασιακός τύπος φ είναι ταυτολογία.

(ii) Θεωρούμε την αποτίμηση $a : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$, όπου $a(p) = \Psi$ και $a(q) = A$.Τότε, έχουμε ότι $\overline{a}(p \leftrightarrow q) = \overline{a}(q \leftrightarrow p) = \Psi$.Έτσι, είναι σαφές ότι ισχύει $\overline{a}(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)) = A$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\overline{a}((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))) = \Psi \ ,$$

δηλαδή ο προτασιακός τύπος $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))$ δεν είναι ταυτολογία. ■

11. Να απλοποιήσετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους:

(i) $(p_1 \wedge p_2) \vee ((p_3 \to p_4) \wedge p_1) \vee \neg (p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg ((p_3 \wedge \neg p_4) \vee p_1)$

(ii) $\neg [\neg (\neg p_2 \wedge \neg p_4) \to \neg p_1 \vee \neg p_3] \vee \neg [\neg p_1 \vee \neg p_3 \to \neg (\neg p_2 \wedge \neg p_4)]$.

Λύση. (i)

$$\begin{aligned}
&(p_1 \wedge p_2) \vee ((p_3 \to p_4) \wedge p_1) \vee \neg (p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg ((p_3 \wedge \neg p_4) \vee p_1)\\
\equiv\, &(p_1 \wedge p_2) \vee ((p_3 \to p_4) \wedge p_1) \vee \neg (p_1 \vee \neg p_2) \vee ((\neg p_3 \vee p_4) \wedge \neg p_1)\\
\equiv\, &(p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3 \vee p_4) \wedge p_1) \vee \neg (p_1 \vee \neg p_2) \vee ((\neg p_3 \vee p_4) \wedge \neg p_1)\\
\equiv &(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee \neg p_1))\\
\equiv &(p_2 \wedge (p_1 \vee \neg p_1)) \vee (\neg p_3 \vee p_4)\\
\equiv &p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4
\end{aligned}$$

(ii) Για διευκόλυνση θα απλοποιήσουμε τον προτασιακό τύπο $\neg [\neg (\neg p_2 \wedge \neg p_4) \to \neg p_1 \vee \neg p_3]$ και έπειτα τον $\neg [\neg p_1 \vee \neg p_3 \to \neg (\neg p_2 \wedge \neg p_4)]$.

$$\begin{aligned}
&\neg [\neg (\neg p_2 \wedge \neg p_4) \to \neg p_1 \vee \neg p_3]\\
\equiv &\neg[(\neg p_2 \wedge \neg p_4) \vee \neg p_1 \vee \neg p_3]\\
\equiv &\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_4) \wedge p_1 \wedge p_3\\
\equiv &(p_2 \vee p_4) \wedge (p_1 \wedge p_3)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&\neg[\neg p_1 \vee \neg p_3 \to \neg(\neg p_2 \wedge \neg p_4)]\\
\equiv &\neg[\neg(\neg p_1 \vee \neg p_3) \vee \neg(\neg p_2 \wedge \neg p_4)]\\
\equiv &\neg(p_1 \wedge p_3) \wedge \neg(p_2 \vee p_4)
\end{aligned}$$

Έτσι ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\neg\left[\neg\left(\neg p_2 \wedge \neg p_4\right) \rightarrow \neg p_1 \vee \neg p_3\right] \vee \neg\left[\neg p_1 \vee \neg p_3 \rightarrow \neg\left(\neg p_2 \wedge \neg p_4\right)\right] \\
\equiv&[(p_2 \vee p_4) \wedge (p_1 \wedge p_3)] \vee [\neg(p_1 \wedge p_3) \wedge \neg(p_2 \vee p_4)] \\
\equiv&[\neg(p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \vee p_4] \wedge [\neg(p_2 \vee p_4) \vee (p_1 \wedge p_1)] \\
\equiv&(p_1 \wedge p_3) \leftrightarrow (p_2 \vee p_4)
\end{aligned}$$

■

12. Γράψτε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους σε Κανονική Διαζευκτική Μορφή:

(i) $(p \vee q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \leftrightarrow q \wedge r)$.

(ii) $(p \leftrightarrow q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \rightarrow r)$

(iii) $p \leftrightarrow \neg\neg p$.

Λύση. (i) Αρχικά κατασκεύαζουμε τον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου $\varphi = (p \vee q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \leftrightarrow q \wedge r)$.

p	q	r	φ
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \rightarrow \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{lll}
f(A,A,A)=A & f(A,\Psi,A)=A & f(\Psi,A,A)=A \\
f(\Psi,\Psi,A)=A & f(A,A,\Psi)=\Psi & f(A,\Psi,\Psi)=\Psi. \\
f(\Psi,A,\Psi)=A & f(\Psi,\Psi,\Psi)=A &
\end{array}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

ο οποίος βρίσκεται σε Κανονική Διαζευτική Μορφή.

(ii) Αρχικά κατασκεύαζουμε τον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου $\varphi = (p \leftrightarrow q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \rightarrow r)$.

p	q	r	φ
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{lll} f(A,A,A) = A & f(A,\Psi,A) = A & f(\Psi,A,A) = \Psi \\ f(\Psi,\Psi,A) = \Psi & f(A,A,\Psi) = A & f(A,\Psi,\Psi) = A. \\ f(\Psi,A,\Psi) = \Psi & f(\Psi,\Psi,\Psi) = A & \end{array}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

ο οποίος βρίσκεται σε Κανονική Διαζευτική Μορφή.

(iii) Γνωρίζουμε ότι ο προτασιακός τύπος $\varphi = p \leftrightarrow \neg\neg p$ είναι ταυτολογία, άρα θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{ll} f(A,A) = A & f(A,\Psi) = A \\ f(\Psi,A) = A & f(\Psi,\Psi) = A. \end{array}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$\begin{aligned} & (p \wedge \neg\neg p) \vee (p \wedge \neg\neg\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg\neg\neg p) \\ \equiv & (p \wedge p) \vee (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \\ \equiv & (p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \end{aligned}$$

ο οποίος βρίσκεται σε Κανονική Διαζευτική Μορφή.

■

Κεφάλαιο 2

Δεύτερο Πακέτο Ασκήσεων

2.1 Ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους σε κανονική διαζευκτική μορφή:

$$p \to ((q \to \neg p) \lor r)\ , \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \land p)$$

2. Λέμε ότι ένας προτασιακός τύπος φ είναι σε *κανονική συζευκτική μορφή* ανν είναι μια σύζευξη

$$\varphi = \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n$$

όπου κάθε φ_i είναι μια διάζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών.

   (i) Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο σε κανονική συζευκτική μορφή.

   (ii) Βρείτε έναν τύπο σε κανονική συζευκτική μορφή που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.

3. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\land, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες, αλλά κανένα γνήσιο υποσύνολό του δεν είναι πλήρες.

4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\bot, \to\}$ είναι πλήρες.

5. Δείξτε ότι το $\{\neg, <\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων, ενώ το $\{<\}$ δεν είναι, όπου $<$ είναι ο διθέσιος σύνδεσμος που αντιστοιχεί στον εξής πίνακα αλήθειας:

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi < \psi)$
A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

6. Θεωρούμε το σύνολο των συνδέσμων $\mathcal{C} = \{\neg, \sharp\}$. (Υπενθυμίζουμε ότι $\sharp$ είναι ο τριαδικός σύνδεσμος της πλειονότητας. Δηλαδή αν α είναι μια αποτίμηση, τότε η τιμή αλήθειας $\overline{\alpha}\,(\sharp(\varphi, \psi, \chi))$ συμφωνεί με την πλειονότητα των $\overline{\alpha}\,(\varphi)$, $\overline{\alpha}\,(\psi)$ και $\overline{\alpha}\,(\chi)$.)

   (i) Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος φ που περίεχει μόνο τους συνδέσμους $\{\neg, \sharp\}$ έχει την εξής ιδιότητα: αν α, α' είναι δύο αποτιμήσεις που δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ, τότε οι α και α' δίνουν διαφορετική τιμή αλήθειας και στον φ.

   (ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ δεν είναι πλήρες.

7. Έστω M ο τριαδικός σύνδεσμος της μειονότητας. (Δηλαδή αν α είναι μια αποτίμηση, τότε η τιμή αλήθειας $\overline{\alpha}\,(M(\varphi, \psi, \chi))$ είναι πάντοτε διαφορετική από την πλειονότητα των $\overline{\alpha}\,(\varphi)$, $\overline{\alpha}\,(\psi)$ και $\overline{\alpha}\,(\chi)$.)

   (i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{M, \perp\}$ είναι πλήρες.

   (ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{M\}$ δεν είναι πλήρες.

8. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαγωγής και τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε φ, ψ):

   i) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

   ii) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

   iii) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$.

9. Ορίζουμε στον Προτασιακό Λογισμό ένα αξιωματικό σύστημα $\mathfrak{D}$ ως εξής:

   Αξιώματα: όλοι οι προτασιακοί τύποι της μορφής:

   ΑΣ1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

   ΑΣ2. $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$.

   Αποδεικτικός κανόνας: Modus Ponens.

   (i) Στο Αξιωματικό σύστημα $\mathfrak{D}$ ορίστε τι σημαίνει απόδειξη από ένα σύνολο υποθέσεων T.

   (ii) Αποδείξτε ότι αν στο σύστημα $\mathfrak{D}$ το σύνολο T είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε για κάθε προτασιακό τύπο φ έχουμε $T \vdash \varphi$. (Εδώ το σύμβολο $\vdash$ σημαίνει ''αποδεικνύεται στο $\mathfrak{D}$''.)

10. (i) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του T είναι (από μόνο του) ικανοποιήσιμο.

   (ii) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε για δύο οποιαδήποτε στοιχεία φ_1 και φ_2 του T, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

   (iii) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε τρία στοιχεία φ_1, φ_2 και φ_3 του T, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Λύστε τα παρακάτω προβλήματα χρησιμοποιώντας Προτασιακό Λογισμό.

11. Ο Αλλαντίν βρίσκει σε μια σπηλιά δύο μπαούλα, τα Α και Β. Γνωρίζει ότι καθένα από αυτά περιέχει είτε ένα θησαυρό ή μια θανάσιμη παγίδα.

    - Στο μπαούλο Α είναι γραμμένο: ''Τουλάχιστον ένα από τα μπαούλα περίεχει ένα θησαυρό''.
    - Στο μπαούλο Β είναι γραμμένο: ''Το μπαούλο Α περιέχει μια θανάσιμη παγίδα''.

    Ο Αλλαντίν γνωρίζει ότι είτε και οι δύο επιγραφές είναι αληθείς ή και οι δύο είναι ψευδείς. Μπορεί ο Αλλαντίν να διαλέξει με σιγουριά ένα μπαούλο στο οποίο θα βρει ένα θησαυρό; Αν ναι, ποιο είναι αυτό το μπαούλο;

12. Ο Χάρι Πότερ, η Ερμιόνη Γκρέιντζερ και ο Ρον Ουέσλι βρίσκονται παγιδευμένοι σε ένα σκοτεινό και υγρό μπουντρούμι. Μετά από μια σύντομη αναζήτηση, τα παιδιά βρίσκουν τρεις πόρτες: μια κόκκινη, μια μπλε και μια πράσινη. Πίσω από μια πόρτα είναι ο δρόμος προς την ελευθερία. Πίσω από τις άλλες δύο πόρτες ωστόσο υπάρχει από ένας κακός δράκος που βγάζει φλόγες. Ανοίγοντας μια πόρτα που οδηγεί σε δράκο σημαίνει σχεδόν σίγουρο θάνατο. Σε κάθε πόρτα υπάρχει μια επιγραφή:

    - Στην κόκκινη πόρτα: ''Η ελευθερία βρίσκεται πίσω από αυτήν την πόρτα''.
    - Στην μπλε πόρτα: ''Η ελευθερία δεν είναι πίσω από αυτήν την πόρτα''.
    - Στην πράσινη πόρτα: ''Η ελευθερία δεν είναι πίσω από την μπλε πόρτα''.

    Γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις τρεις επιγραφές είναι αληθής και τουλάχιστον μία είναι ψευδής. Ποια πόρτα θα οδηγήσει τους μαθητευόμενους μάγους στην ελευθερία;

13. Περπατάτε σε ένα λαβύρινθο και ξαφνικά βρίσκεστε μπροστά σε τρεις πιθανούς δρόμους: ο δρόμος στα αριστερά σας είναι στρωμένος με χρυσό, ο δρόμος μπροστά σας είναι στρωμένος με μάρμαρο και ο δρόμος στα δεξιά σας είναι στρωμένος με μικρές πέτρες. Κάθε δρόμος προστατεύεται από ένα φρουρό. Μιλάτε στους φρουρούς και σας λένε τα παρακάτω:

    - Ο φρουρός του χρυσού δρόμου: ''Αυτός ο δρόμος θα σε οδηγήσει κατευθείαν στο κέντρο του λαβυρίνθου. Επιπλέον, αν ο δρόμος με τις πέτρες σε πάει στο κέντρο, τότε και ο μαρμάρινος δρόμος θα σε οδηγήσει στο κέντρο.''
    - Ο φρουρός του μαρμάρινου δρόμου: ''Ούτε ο χρυσός δρόμος ούτε ο δρόμος με τις πέτρες θα σε οδηγήσουν στο κέντρο του λαβυρίνθου.''
    - Ο φρουρός του πέτρινου δρόμου: ''Ακολούθησε το χρυσό και θα φτάσεις στο κέντρο, ακολούθησε το μάρμαρο και θα χαθείς.''

    Γνωρίζετε ότι όλοι οι φρουροί ψεύδονται. Μπορείτε να διαλέξετε με σιγουριά ένα δρόμο που θα σας οδηγήσει στο κέντρο του λαβυρίνθου; Αν ναι, τότε ποιος είναι ο δρόμος αυτός;

2.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Να γράψετε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους σε κανονική διαζευκτική μορφή:

$$p \to ((q \to \neg p) \vee r)\ , \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge p)$$

Λύση. (α′) Αρχικά θα κατασκευάσουμε το πίνακα αλήθειας για τον προτασιακό τύπο $\varphi = p \to ((q \to \neg p) \vee r)$.

p	q	r	$q \to \neg p$	$(q \to \neg p) \vee r$	φ
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{lll} f(A,A,A) = A & f(A,\Psi,A) = A & f(\Psi,A,A) = A \\ f(\Psi,\Psi,A) = A & f(A,A,\Psi) = \Psi & f(A,\Psi,\Psi) = A. \\ f(\Psi,A,\Psi) = A & f(\Psi,\Psi,\Psi) = A & \end{array}$$

Έτσι, από την απόδειξη του θεωρήματος Κ.Δ.Μ., συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

(β′) Αρχικά θα κατασκευάσουμε το πίνακα αλήθειας για τον προτασιακό τύπο $\varphi = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge p)$.

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$r \wedge p$	φ
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{lll} f(A,A,A) = A & f(A,\Psi,A) = A & f(\Psi,A,A) = \Psi \\ f(\Psi,\Psi,A) = \Psi & f(A,A,\Psi) = \Psi & f(A,\Psi,\Psi) = A. \\ f(\Psi,A,\Psi) = A & f(\Psi,\Psi,\Psi) = \Psi & \end{array}$$

Έτσι, από την απόδειξη του θεωρήματος Κ.Δ.Μ., συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

■

2. Λέμε ότι ένας προτασιακός τύπος φ είναι σε *κανονική συζευκτική μορφή* ανν είναι μια σύζευξη

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$$

όπου κάθε φ_i είναι μια διάζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών.

(i) Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο σε κανονική συζευκτική μορφή.

(ii) Βρείτε έναν τύπο σε κανονική συζευκτική μορφή που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.

Λύση. (i) Θεωρούμε $\varphi \in T(\Gamma_0)$. Από το θεώρημα Κ.Δ.Μ. υπάρχει $\psi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n \in T(\Gamma_0)$, ώστε $\neg\varphi \equiv \psi$, όπου φ_j είναι σύζευξη προτασιακών μεταβλητών ή άρνησεων προτασιακών μεταβλητών, για κάθε $j = 1, \cdots, n$. Τότε, έχουμε ότι $\varphi \equiv \neg\psi \equiv \neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_2$, όπου φ_j είναι διάζευξη προτασιακών μεταβλητών ή άρνησεων προτασιακών μεταβλητών, για κάθε $j = 1, \cdots, n$, ο οποίος είναι σε κανονική συζευτική μορφή.

(ii) Ακολουθώντας, τη διαδιακάσια του (i) αρχικά θα υπολογίσουμε τον πίνακα αλήθειας της $\neg\varphi$, όπου $\varphi = p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	ϕ	$\neg\phi$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνάρτηση Boole $f : \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$, που ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{lll} f(A,A,A) = \Psi & f(A,\Psi,A) = A & f(\Psi,A,A) = A \\ f(\Psi,\Psi,A) = \Psi & f(A,A,\Psi) = A & f(A,\Psi,\Psi) = \Psi. \\ f(\Psi,A,\Psi) = A & f(\Psi,\Psi,\Psi) = \Psi & \end{array}$$

Έτσι, από την απόδειξη του θεωρήματος Κ.Δ.Μ., συμπεραίνουμε ότι ο $\neg\varphi$ είναι ισοδύναμος με τον

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r).$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι ισοδύναμος με τον

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)\ ,$$

ο οποίος είναι σε κανονική συζευτική μορφή.

■

3. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\wedge, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες, αλλά κανένα γνήσιο υποσύνολό του δεν είναι πλήρες.

Λύση. Θεωρούμε $p \in T(\Gamma_0)$ και παρατηρούμε ότι $(p+p) \leftrightarrow p \equiv \neg p$, αφού έχουμε ότι

p	$p+p$	$(p+p) \leftrightarrow p$	$\neg p$
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Έτσι, έχουμε ότι το σύνολο $\{\wedge, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες, αφού το $\{\wedge, \neg\}$ είναι πλήρες.

Τώρα, είναι σαφές, ότι $\{\wedge\}, \{\leftrightarrow\}, \{+\}$ δεν είναι πλήρη, αφού έχουμε δείξει ότι $\{|\}$ και $\{\downarrow\}$ είναι τα μόνα πλήρη μονοσύνολα, που περιέχουν διθέσιο σύνδεσμο. Τώρα, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ δεν είναι πλήρες. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το σύνολο $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ είναι πλήρες, Αρχικά θα χρειαστεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό :

Ισχυρισμός 1. *Έστω $\varphi \in T(\Gamma_0)$, όπου περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές $p_1, \cdots, p_k$ και τους συνδέσμους $\wedge$ και $\leftrightarrow$. Τότε, αν $\alpha : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ αποτίμηση, όπου $\alpha(p_j) = A$, για κάθε $j = 1, \cdots, k$, τότε $\overline{\alpha}(\varphi) = A$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται άμεσα με χρήση επαγωγής. Στο επαγωγικό βήμα θα εξετασθούν, όμως μόνο οι περιπτώσεις των ''$\wedge$'' και ''$\leftrightarrow$''. ■

Τώρα, αν $p_0 \in M(\Gamma_0)$, έχουμε ότι $\neg p_0 \equiv \varphi$, όπου φ είναι προτασιακός τύπος, που περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές και τους συνδέσμους $\wedge, \leftrightarrow$. Αν $p_1, \cdots, p_n \in M(\Gamma_0)$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές, που εμφανίζονται στον φ, θεωρούμε αποτίμηση α, ώστε $\alpha(p_j) = A$, για κάθε $j = 0, \cdots, n$. Συνεπώς, από την παραπάνω ισχυρισμό έχουμε ότι $\overline{a}(\neg p_0) = \Psi$, ενώ $\overline{\alpha}(\varphi) = A$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\{\wedge, +\}$, είναι πλήρες.Χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο ισχυρισμό :

Ισχυρισμός 2. *Έστω $\varphi \in T(\Gamma_0)$, όπου περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές $p_1, \cdots, p_k$ και τους συνδέσμους $\wedge$ και $+$. Τότε, αν $\alpha : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ αποτίμηση, όπου $\alpha(p_j) = \Psi$, για κάθε $j = 1, \cdots, k$, τότε $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$.*

ο οποίος αποδεικνύεται άμεσα με χρήση επαγωγής, καθώς και την παραπάνω συλλογιστική πορεία, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{\leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες. Διατυπώνουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 3. *Αν φ προτασιακός τύπος, που δεν είναι προτασιακή μεταβλητή και περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\{\leftrightarrow, +\}$, τότε ο πίνακας αλήθειας του φ έχει άρτιο πλήθος γραμμών με τιμή αλήθειας A.*

Ο παραπάνω ισχυρισμός αποδεικνύεται με επαγωγή στη πολυπλοκότητα του φ (όμοια με παλαιότερη λυμένη άσκηση). Θεωρούμε $p, q \in M(\Gamma_0)$ και από την αρχική μας υπόθεση ο προτασιακός τύπος $p \wedge q$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος προτασιακό τύπο που περιέχει μόνο τους συνδέσμους

$+, \leftrightarrow$ το οποίο είναι άτοπο από τον παραπάνω ισχυρισμό, αφού ο πίνακας αλήθειας του $p \wedge q$ έχει περιττό πλήθος γραμμών με τιμή Α. ■

4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\perp, \rightarrow\}$ είναι πλήρες.

Λύση. Θεωρούμε $p \in T(\Gamma_0)$ και παρατηρούμε ότι $\neg p \equiv p \rightarrow \perp$, αφού ισχύει ότι

p	$\neg p$	$\perp$	$p \rightarrow \perp$
Α	Ψ	Ψ	Ψ
ψ	Α	Ψ	Α

Τώρα, αφού το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι πλήρες, συμπεραίνουμε ότι και το $\{\perp, \rightarrow\}$ είναι πλήρες. ■

5. Δείξτε ότι το $\{\neg, <\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων, ενώ το $\{<\}$ δεν είναι, όπου $<$ είναι ο διθέσιος σύνδεσμος που αντιστοιχεί στον εξής πίνακα αλήθειας:

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi < \psi)$
A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Λύση. Θεωρούμε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ και παρατηρούμε ότι $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\psi < \varphi)$, αφού ισχύει το εξής :

φ	ψ	$\psi < \varphi$	$\neg(\psi < \varphi)$	$\varphi \rightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Τώρα, είναι σαφές ότι $\{<\}$ δεν είναι πλήρες, αφού $\{<\} \neq \{|\}$ και $\{<\} \neq \{\downarrow\}$. ■

6. Θεωρούμε το σύνολο των συνδέσμων $\mathcal{C} = \{\neg, \sharp\}$. (Υπενθυμίζουμε ότι $\sharp$ είναι ο τριαδικός σύνδεσμος της πλειονότητας. Δηλαδή αν α είναι μια αποτίμηση, τότε η τιμή αλήθειας $\overline{\alpha}\,(\sharp(\varphi, \psi, \chi))$ συμφωνεί με την πλειονότητα των $\overline{\alpha}\,(\varphi)$, $\overline{\alpha}\,(\psi)$ και $\overline{\alpha}\,(\chi)$.)

   (i) Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος φ που περίεχει μόνο τους συνδέσμους $\{\neg, \sharp\}$ έχει την εξής ιδιότητα: αν α, α' είναι δύο αποτιμήσεις που δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ, τότε οι α και α' δίνουν διαφορετική τιμή αλήθειας και στον φ.

   (ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ δεν είναι πλήρες.

Λύση. (i) Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή.

1. **Βάση.** Αν $p \in M(\Gamma_0)$ και υπάρχουν αποτιμήσεις αν α, α' είναι δύο αποτιμήσεις που δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στο p το ζητούμενο ισχύει άμεσα.
2. **Επαγωγικό Βήμα.** Θεωρούμε φ, ψ, χ που ικανοποιούν τα παραπάνω.

- Αν υπάρχουν α, α' είναι δύο αποτιμήσεις που δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις μεταβλητές του $\neg\varphi$, τότε ισχύει ότι α, α' δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις μεταβλητές του φ. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\overline{a}(\varphi) \neq \overline{a'}(\varphi)$, δηλαδή $\overline{a}(\neg\varphi) \neq \overline{a'}(\varphi)$.
- Αν υπάρχουν α, α' είναι δύο αποτιμήσεις που δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις μεταβλητές του $\sharp(\varphi, \psi, \chi)$, τότε ισχύει ότι α, α' δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις μεταβλητές του φ, ψ, χ.Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\overline{a}(\varphi) \neq \overline{a'}(\varphi)$, $\overline{a}(\psi) \neq \overline{a'}(\psi)$ και $\overline{a}(\chi) \neq \overline{a'}(\chi)$.Έτσι είναι σαφές, ότι $\overline{a}(\sharp(\varphi, \psi, \chi)) \neq \overline{a'}(\sharp(\varphi, \psi, \chi))$ και το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί.

(ii) Έστω, ότι $\mathcal{C}$ είναι πλήρες και θεωρούμε $p, q \in M(\Gamma_0)$.Τότε, είναι σαφές ότι $p \leftrightarrow q$ δεν μπορεί να είναι ισοδύναμος με προτασιακή μεταβλητή, άρα $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα προτασιακό τύπο που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\neg, \sharp$.Τώρα, θεωρούμε αποτιμήσεις $a, a' : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$, όπου $a(p) = a(q) = A$ και $a'(p) = a'(q) = \Psi$.Παραρηρήστε ότι $\overline{a}(p \leftrightarrow q) = \overline{a'}(p \leftrightarrow q) = A$, ενώ οι a, a' δίνουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στις μεταβλητές του $p \leftrightarrow q$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο από το (i). Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{C}$ δεν είναι πλήρες.

■

7. Έστω M ο τριαδικός σύνδεσμος της μειονότητας. (Δηλαδή αν α είναι μια αποτίμηση, τότε η τιμή αλήθειας $\overline{\alpha}\,(M(\varphi, \psi, \chi))$ είναι πάντοτε διαφορετική από την πλειονότητα των $\overline{\alpha}\,(\varphi)$, $\overline{\alpha}\,(\psi)$ και $\overline{\alpha}\,(\chi)$.)

   (i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{M, \perp\}$ είναι πλήρες.

   (ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{M\}$ δεν είναι πλήρες.

Λύση. (i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$ ισχύει ότι $M(\varphi, \psi, \perp) \equiv \varphi|\psi$, μέσω του παρακάτω πίνακα αλήθειας :

φ	ψ	$\varphi\|\psi$	$\perp$	$M(\varphi, \psi, \perp)$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Συνεπώς, αφού το σύνολο $\{|\}$ είναι πλήρες, τότε και το $\{M, \perp\}$ είναι πλήρες.

(ii) Αν το $\{M\}$ ήταν πλήρες, τότε για κάθε $\varphi, \psi, \chi \in T(\Gamma_0)$ παρατηρούμε ότι $M(\varphi, \psi, \chi) \equiv \neg(\sharp(\varphi, \psi, \chi))$.Έτσι, συμπεραίνουμε ότι και το σύνολο $\{\neg, \sharp\}$ είναι πλήρες, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο από την *Άσκηση 2.6* (ii).

■

8. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαγωγής και τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε φ, ψ):

   i) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

   ii) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

   iii) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$.

Λύση. (i) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$, όπου ισοδύναμα από το *Θεώρημα Απαγωγής* αρκεί να δείξουμε ότι $\{\neg\psi \to \neg\varphi, \varphi\} \vdash \psi$. Τώρα, παρατηρούμε το εξής :

τ_1	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	$\mathrm{A\Sigma}_3$
τ_2	$\neg\psi \to \neg\varphi$	υπόθεση
τ_3	$(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	τ_1, τ_2 M.P.
τ_4	$\varphi \to (\neg\psi \to \varphi)$	$\mathrm{A\Sigma}_1$
τ_5	φ	υπόθεση
τ_6	$\neg\psi \to \varphi$	τ_4, τ_5, M.P.
τ_7	ψ	τ_3, τ_6, M.P.

Έτσι, μέσω της παραπάνω τυπικής απόδειξης έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(ii) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, όπου ισοδύναμα από το *Θεώρημα Απαγωγής* αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$. Τώρα, παρατηρούμε το εξής :

τ_1	$(\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\neg\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$	$\mathrm{A\Sigma}_3$
τ_2	$\neg\psi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	$\mathrm{A\Sigma}_1$
τ_3	$\neg\psi$	υπόθεση
τ_4	$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$	τ_2, τ_3, M.P.
τ_5	$(\neg\neg\varphi \to \psi) \to \neg\varphi$	τ_1, τ_4, M.P.
τ_6	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	τυπικό θεώρημα
τ_7	$\varphi \to \psi$	υπόθεση
τ_8	$\neg\neg\varphi \to \psi$	τ_6, τ_7
τ_9	$\neg\varphi$	τ_5, τ_8, M.P.

Έτσι, μέσω της παραπάνω τυπικής απόδειξης έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$, όπου ισοδύναμα από το *Θεώρημα*

Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi\} \to \psi$.Τώρα, παρατηρούμε το εξής :

τ_1	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	τυπικό θεώρημα
τ_2	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	$\mathrm{A}\Sigma_3$
τ_3	$(\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	τ_1, τ_2
τ_4	$\varphi \to \psi$	υπόθεση
τ_5	$(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	τ_3, τ_4, M.P.
τ_6	$\neg\varphi \to \psi$	υπόθεση
τ_7	$\psi \to \neg\neg\psi$	τυπικό θεώρημα
τ_8	$\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	τ_6, τ_7
τ_9	$(\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	τυπικό θεώρημα
τ_{10}	$\neg\psi \to \neg\neg\varphi$	τ_8, τ_9, M.P.
τ_{11}	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	τυπικό θεώρημα
τ_{12}	$\neg\psi \to \varphi$	τ_{10}, τ_{11}
τ_{13}	ψ	τ_5, τ_{12}, M.P

Έτσι, μέσω της παραπάνω τυπικής απόδειξης έχουμε δείξει το ζητούμενο.

■

9. Ορίζουμε στον Προτασιακό Λογισμό ένα αξιωματικό σύστημα $\mathfrak{D}$ ως εξής:

   Αξιώματα: όλοι οι προτασιακοί τύποι της μορφής:

ΑΣ1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

ΑΣ2. $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$.

   Αποδεικτικός κανόνας: Modus Ponens.

   (i) Στο Αξιωματικό σύστημα $\mathfrak{D}$ ορίστε τι σημαίνει απόδειξη από ένα σύνολο υποθέσεων T.

   (ii) Αποδείξτε ότι αν στο σύστημα $\mathfrak{D}$ το σύνολο T είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε για κάθε προτασιακό τύπο φ έχουμε $T \vdash \varphi$. (Εδώ το σύμβολο $\vdash$ σημαίνει ''αποδεικνύεται στο $\mathfrak{D}$''.)

Λύση. (i)

Ορισμός 1. *Μια* ***τυπική απόδειξη*** *από το T στο $\mathfrak{D}$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων $\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \cdots, n$ να έχουμε ότι*

1. *τ_i είναι αξίωμα ή*
2. *$\tau_i \in T$ ή*
3. *τ_i είναι συνέπεια προηγούμενο τύπων (δηλαδή των $\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$) με βάση τον Modus Ponens.*

(ii) Έστω σύνολο T το οποίο είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, και $\varphi \in T(\Gamma_0)$. Έτσι, έχουμε ότι υπάρχουν τυπικές αποδείξεις, από το T στο $\mathfrak{D}$, $\langle \tau_1, \cdots, \tau_m \rangle$ και $\langle \tau_{m+1}, \cdots, \tau_{n+m} \rangle$ τέτοιες ώστε $\tau_m = \psi$ και $\tau_{n+m} = \neg\psi$. Τώρα, παρατηρούμε το εξής

τ_{n+m+1}	$\psi \to (\neg\varphi \to \psi)$	ΑΣ$_1$
τ_{n+m+2}	$\neg\varphi \to \psi$	τ_m, τ_{m+n+1}, M.P
τ_{n+m+3}	$(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$	ΑΣ$_3$
τ_{n+m+4}	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	$\tau_{n+m+2}, \tau_{n+m+3}$, M.P.
τ_{n+m+5}	$\neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	ΑΣ$_1$
τ_{n+m+6}	$\neg\varphi \to \neg\psi$	τ_{n+m+5}, τ_{n+m}, M.P.
τ_{n+m+7}	φ	τ_{n+m+6}, τ_{n+m}, M.P.

Άρα, έχουμε ότι $\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n+m+7} \rangle$ είναι μια τυπική απόδειξη στο $\mathfrak{D}$ από το T με $\tau_{n+m+7} = \varphi$, συνεπώς έχουμε $T \vdash \varphi$. ■

10. (i) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του T είναι (από μόνο του) ικανοποιήσιμο.
    (ii) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε για δύο οποιαδήποτε στοιχεία φ_1 και φ_2 του T, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι ικανοποιήσιμο.
    (iii) Βρείτε ένα *μη ικανοποιήσιμο* σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε τρία στοιχεία φ_1, φ_2 και φ_3 του T, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Λύση. (i) Θεωρούμε μια προτασιακή μεταβλητή $p \in M(\Gamma)$. Τότε, έχουμε άμεσα ότι $T = \{p, \neg p\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, όμως κάθε ένα από τα σύνολα $\{p\}$ και $\{\neg p\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

(ii) Θεωρούμε το $p, q \in M(\Gamma_0)$, όπου παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{q, \neg p, p \leftrightarrow q\}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες μέσω του παρακάτω πίνακα αλήθειας :

p	q	$\neg p$	$q \leftrightarrow p$
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

(iii) Θεωρούμε $p, q, r \in M(\Gamma_0)$ και παρατηρούμε μέσω του παρακάτω πίνακα αλήθειας, ότι το σύνολο $\{p, q, r, \neg(p \wedge q \wedge r)\}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες :

p	q	r	$\neg(p \wedge q \wedge r)$
Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α

■

Λύστε τα παρακάτω προβλήματα χρησιμοποιώντας Προτασιακό Λογισμό.

11. Ο Αλλαντίν βρίσκει σε μια σπηλιά δύο μπαούλα, τα Α και Β. Γνωρίζει ότι καθένα από αυτά περιέχει είτε ένα θησαυρό ή μια θανάσιμη παγίδα.

    - Στο μπαούλο Α είναι γραμμένο: "Τουλάχιστον ένα από τα μπαούλα περίεχει ένα θησαυρό".
    - Στο μπαούλο Β είναι γραμμένο: "Το μπαούλο Α περιέχει μια θανάσιμη παγίδα".

    Ο Αλλαντίν γνωρίζει ότι είτε και οι δύο επιγραφές είναι αληθείς ή και οι δύο είναι ψευδείς. Μπορεί ο Αλλαντίν να διαλέξει με σιγουριά ένα μπαούλο στο οποίο θα βρει ένα θησαυρό; Αν ναι, ποιο είναι αυτό το μπαούλο;

    Λύση. Ορίζουμε προτασιακές μεταβλητές ως εξής :

    p : Το σεντούκι Α περιέχει θησαυρό.

    q : Το σεντούκι Β περιέχει θησαυρό.

    Στην πρώτη επιγραφή είναι γραμμένο, ότι τουλάχιστον ένα από τα μπαούλα περιέχει το θησαυρό, δηλαδή $p \vee q$, ενώ στη δεύτερη επίγραφή είναι γραμμένο ότι το μπαούλο Α περιέχει μια θανάσιμη παγίδα, δηλαδή $\neg p$.Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο επιγραφές είναι ψευδείς, τότε έχουμε ότι οι προτασιακοί $\neg p$ και $p \vee q$ είναι ψευδείς ταυτόχρονα, το οποίο είναι αντίφαση.Τότε, συμπεραίνουμε ότι και οι δύο επιγραφές είναι αληθείς, άρα $\neg p$ και $p \vee q$ είναι αληθείς. Συνεπώς, έχουμε ότι q είναι αληθής και συμπεραίνουμε ότι το σεντούκι Β έχει τον θησαυρό. ■

12. Ο Χάρι Πότερ, η Ερμιόνη Γκρέιντζερ και ο Ρον Ουέσλι βρίσκονται παγιδευμένοι σε ένα σκοτεινό και υγρό μπουντρούμι. Μετά από μια σύντομη αναζήτηση, τα παιδιά βρίσκουν τρεις πόρτες: μια κόκκινη, μια μπλε και μια πράσινη. Πίσω από μια πόρτα είναι ο δρόμος προς την ελευθερία. Πίσω από τις άλλες δύο πόρτες ωστόσο υπάρχει από ένας κακός δράκος που βγάζει φλόγες. Ανοίγοντας μια πόρτα που οδηγεί σε δράκο σημαίνει σχεδόν σίγουρο θάνατο. Σε κάθε πόρτα υπάρχει μια επιγραφή:

    - Στην κόκκινη πόρτα: "Η ελευθερία βρίσκεται πίσω από αυτήν την πόρτα".
    - Στην μπλε πόρτα: "Η ελευθερία δεν είναι πίσω από αυτήν την πόρτα".
    - Στην πράσινη πόρτα: "Η ελευθερία δεν είναι πίσω από την μπλε πόρτα".

    Γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις τρεις επιγραφές είναι αληθής και τουλάχιστον μία είναι ψευδής. Ποια πόρτα θα οδηγήσει τους μαθητευόμενους μάγους στην ελευθερία;

    Λύση. Ορίζουμε προτασιακές μεταβλητές ως εξής :

    p : "Η ελευθερία βρίσκεται πίσω από την κόκκινη πόρτα"

    q : "Η ελευθερία βρίσκεται πίσω από την μπλέ πόρτα"

    r : "Η ελευθερία βρίσκεται πίσω από την πράσινη πόρτα"

Στην κόκκινη πόρτα αναγράφεται ότι ελευθερία βρίσκεται πίσω από αυτήν την πόρτα, δηλαδή p, στην μπλέ πόρτα αναγράφεται ότι η ελευθερία δεν είναι πίσω από αυτήν την πόρτα, δηλαδή $p \vee r$ και στην πράσινη πόρτα αναγράφεται ότι ελευθερία δεν είναι πίσω από την μπλε πόρτα, δηλαδή $\neg q$.

(i) Έστω ότι η επιγραφή Α είναι αληθής, δηλαδή p είναι αληθής.Τότε, $p \vee r$ είναι αληθής, δηλαδή αληθεύει η επιγραφή Β είναι αληθής. Συνεπώς, η επιγραφή Γ είναι ψευδής, δηλαδή q είναι αληθής, το οποίο είναι άτοπο, αφού p αληθής.

(ii) Έστω ότι η επιγραφή Β είναι αληθής, δηλαδή $p \vee r$ είναι αληθής. Αν υποθέσουμε ότι p είναι αληθής, τότε αληθεύει η επιγραφή Α, συνεπώς η επιγραφή Γ είναι ψευδής, άρα η προτασιακή μεταβλητή q είναι αληθής, το οποίο είναι άτοπο, αφού p αληθής. Έτσι, έχουμε ότι r είναι αληθής και συμπεραίνουμε ότι η ελευθερία βρίσκεται στη πράσινη πόρτα.

(iii) Έστω ότι η επιγραφή Γ είναι αληθής, δηλαδή $\neg q$ είναι αληθής, συνεπώς η q είναι ψευδής. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $p \vee r$ είναι αληθής και αφού η επιγραφή Α είναι αναγκαστικά ψευδής, έχουμε ότι p ψευδής, δηλαδή r είναι αληθής και η ελευθερία βρίσκεται πίσω από την πράσινη πόρτα.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, έχουμε ότι η ελευθερία βρίσκεται στην πράσινη πόρτα. ■

13. Περπατάτε σε ένα λαβύρινθο και ξαφνικά βρίσκεστε μπροστά σε τρεις πιθανούς δρόμους: ο δρόμος στα αριστερά σας είναι στρωμένος με χρυσό, ο δρόμος μπροστά σας είναι στρωμένος με μάρμαρο και ο δρόμος στα δεξιά σας είναι στρωμένος με μικρές πέτρες. Κάθε δρόμος προστατεύεται από ένα φρουρό. Μιλάτε στους φρουρούς και σας λένε τα παρακάτω:

- Ο φρουρός του χρυσού δρόμου: ‘‘Αυτός ο δρόμος θα σε οδηγήσει κατευθείαν στο κέντρο του λαβυρίνθου. Επιπλέον, αν ο δρόμος με τις πέτρες σε πάει στο κέντρο, τότε και ο μαρμάρινος δρόμος θα σε οδηγήσει στο κέντρο.’’
- Ο φρουρός του μαρμάρινου δρόμου: ‘‘Ούτε ο χρυσός δρόμος ούτε ο δρόμος με τις πέτρες θα σε οδηγήσουν στο κέντρο του λαβυρίνθου.’’
- Ο φρουρός του πέτρινου δρόμου: ‘‘Ακολούθησε το χρυσό και θα φτάσεις στο κέντρο, ακολούθησε το μάρμαρο και θα χαθείς.’’

Γνωρίζετε ότι όλοι οι φρουροί ψεύδονται. Μπορείτε να διαλέξετε με σιγουριά ένα δρόμο που θα σας οδηγήσει στο κέντρο του λαβυρίνθου; Αν ναι, τότε ποιος είναι ο δρόμος αυτός;

Λύση. Ορίζουμε προτασιακές μεταβλητές ως εξής :

p : ‘‘Ο χρυσός δρόμος οδηγεί στο κέντρο.’’
q : ‘‘Ο μαρμάρινος δρόμος οδηγεί στο κέντρο.’’
r : ‘‘Ο πέτρινος δρόμος οδηγεί στο κέντρο.’’

Ο φρουρός του χρυσού δρόμο λέει :‘‘Αυτός ο δρόμος θα σε οδηγήσει κατευθείαν στο κέντρο του λαβυρίνθου. Επιπλέον, αν ο δρόμος με τις πέτρες σε πάει στο κέντρο, τότε και ο μαρμάρινος δρόμος θα σε οδηγήσει στο κέντρο.’’, δηλαδή $p \wedge (q \to r)$.Ο φρουρός του μαρμαρινού δρόμου λέει :‘‘Ούτε ο χρυσός δρόμος ούτε ο δρόμος με τις πέτρες θα σε οδηγήσουν στο κέντρο του λαβυρίνθου.’’, δηλαδή $\neg p \wedge \neg r$. Ο φρουρός του πέτρινου δρόμου λέει : ‘‘Ακολούθησε το χρυσό και θα φτάσεις στο κέντρο, ακολούθησε το μάρμαρο και θα χαθείς.’’, δηλαδή $p \wedge \neg q$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα αλήθειας :

p	q	r	$q \to r$	$p \land (q \to r)$	$\neg p \land \neg r$	$p \land \neg q$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ

Παρατηρούμε, λοιπόν ότι όταν και οι τρείς φρουροί ψεύδονται q είναι πάντα αληθές, άρα μπορούμε να διαλέξουμε με σιγουρία, τον μαρμάρινο δρόμο για να οδηγηθούμε στο κέντρο. ∎

Κεφάλαιο 3

Τρίτο Πακέτο Ασκήσεων

3.1 Ασκήσεις

1. (i) Έστω $\Sigma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ και $\Sigma_2 = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ δύο σύνολα προτασιακών τύπων τέτοια ώστε το $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ να είναι μη-ικανοποιήσιμο. Αποδείξτε ότι υπάρχει προτασιακός τύπος χ ώστε $\Sigma_1 \models \chi$ και $\Sigma_2 \models \neg\chi$.

   (ii) Αποδείξτε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος στην περίπτωση που τα Σ_1, Σ_2 είναι άπειρα σύνολα προτασιακών τύπων. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Συμπάγειας.)

2. Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων με την εξής ιδιότητα: για κάθε αποτίμηση $\alpha\colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ υπάρχει προτασιακός τύπος $\varphi \in \Sigma$ τέτοιος ώστε $\overline{\alpha}(\varphi) = A$.

   Αποδείξτε ότι υπάρχουν προτασιακοί τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ στο Σ, ώστε ο τύπος $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ να είναι ταυτολογία.

3. Ορίζουμε μια σχέση $\prec$ στο σύνολο $T(\Gamma_0)$ των προτασιακών τύπων ως εξής:

$$\varphi \prec \psi \text{ ανν } \models \varphi \to \psi \text{ και } \not\models \psi \to \varphi.$$

   (i) Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\varphi \prec \psi$ τότε υπάρχει προτασιακός τύπος χ τέτοιος ώστε: $\varphi \prec \chi \prec \psi$.

   (ii) Βρείτε προτασιακούς τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ τέτοιους ώστε $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \ldots$.

4. Αν $T \subseteq T(\Gamma_0)$, τότε με $\overline{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο:

$$\overline{T} = \{\varphi \in T(\Gamma_0) \mid T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi\}.$$

   Δείξτε ότι για τυχαία $T, \Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύουν τα παρακάτω:

   (i) $\overline{\overline{T}} = \overline{T}$.

   (ii) $\overline{T \cap \Sigma} \subseteq \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$.

(iii) $\overline{T} \cup \overline{\Sigma} \subseteq \overline{T \cup \Sigma}$.

(iv) $T(\Gamma_0) \setminus \overline{T} \subseteq \overline{T(\Gamma_0) \setminus T}$.

Στις περιπτώσεις (ii), (iii) και (iv) βρείτε παραδείγματα συνόλων $T, \Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ για τα οποία έχουμε $\subset$ (γνήσιο υποσύνολο).

5. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και $\varphi \in T(\Gamma_0)$. Υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο. Δείξτε, **χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Συμπάγειας**, ότι το ίδιο ισχύει και για ένα τουλάχιστον από τα σύνολα $T \cup \{\varphi\}$ και $T \cup \{\neg\varphi\}$.

6. Έστω Δ ένα σύνολο προτασιακών τύπων τέτοιο ώστε:

   (i) κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Δ είναι ικανοποιήσιμο,

   (ii) για κάθε προτασιακό τύπο φ, είτε $\varphi \in \Delta$ ή $\neg\varphi \in \Delta$.

   Ορίζουμε την ακόλουθη αποτίμηση: $\alpha\colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ με

$$\alpha(p) = \begin{cases} A, & \text{αν } p \in \Delta\cdot \\ \Psi, & \text{αν } p \notin \Delta. \end{cases}$$

   Δείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει:

$$\overline{\alpha}(\varphi) = A \quad \text{ανν} \quad \varphi \in \Delta.$$

   (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς φ.)

3.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. (i) Έστω $\Sigma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ και $\Sigma_2 = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ δύο σύνολα προτασιακών τύπων τέτοια ώστε το $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ να είναι μη-ικανοποιήσιμο. Αποδείξτε ότι υπάρχει προτασιακός τύπος χ ώστε $\Sigma_1 \models \chi$ και $\Sigma_2 \models \neg\chi$.

   (ii) Αποδείξτε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος στην περίπτωση που τα Σ_1, Σ_2 είναι άπειρα σύνολα προτασιακών τύπων. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Συμπάγειας.)

   Λύση. (i) Αφού το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει $\varphi \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, όπου για κάθε α αποτίμηση ισχύει $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\varphi \in \Sigma_2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε χ προτασιακό τύπο ισχύει ότι $\Sigma_1 \models \neg\chi$ ή $\Sigma_2 \models \chi$. Ισοδύναμα ισχύει ότι για κάθε χ προτασιακό τύπο ισχύει ότι $\Sigma_1 \cup \{\chi\}$ είναι ικανοποιήσιμο ή $\Sigma_2 \cup \{\neg\chi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Όμως, παρατηρούμε ότι για χ να είναι ο τύπος φ, ισχύει ότι $\Sigma_1 \cup \{\varphi\}$ μη ικανοποιήσιμο, αφού $\{\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο και $\Sigma_2 \cup \{\neg\chi\}$ μη ικανοποιήσιμο, αφού Σ_2 είναι μη ικανοποιήσιμο. Συνεπώς, καταλήγουμε σε άτοπο και έπεται το ζητούμενο. [Στην περίπτωση, όπου $\varphi \in \Sigma_1$ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για χ να είναι ο τύπος $\neg\varphi$.]

   (ii) Αν $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο από το Θεώρημα Συμπάγειας έχουμε ότι υπάρχουν $K_1 \subseteq \Sigma_1$ και $K_2 \subseteq \Sigma_2$ πεπερασμένα, ώστε $K_1 \cup K_2$ να είναι μη ικανοποιήσιμο. Συνεπώς, από το (i) έχουμε ότι υπάρχει προτασιακός τύπος χ ώστε $K_1 \models \chi$ και $K_2 \models \neg\chi$, δηλαδή ισχύει ότι υπάρχει προτασιακός τύπος χ ώστε $\Sigma_1 \models \chi$ και $\Sigma_2 \models \neg\chi$.

   ■

2. Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων με την εξής ιδιότητα: για κάθε αποτίμηση $\alpha\colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ υπάρχει προτασιακός τύπος $\varphi \in \Sigma$ τέτοιος ώστε $\overline{\alpha}(\varphi) = A$.

   Αποδείξτε ότι υπάρχουν προτασιακοί τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ στο Σ, ώστε ο τύπος $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ να είναι ταυτολογία.

   Λύση. Αν θεωρήσουμε Σ' το σύνολο των αρνήσεων των προτασιακών τύπων του Σ, τότε από την αρχική υπόθεση έχουμε ότι Σ' είναι μη ικανοποιήσιμο. Από το Θεώρημα Συμπάγειας, υπάρχει $\{\neg\varphi_1, \cdots, \neg\varphi_n\} \subseteq \Sigma'$, το οποίο είναι μη ικανοποιήσιμο. Συνεπώς, για κάθε αποτίμηση $\alpha\colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ υπάρχει προτασιακός τύπος $\neg\varphi_i \in \Sigma'$ τέτοιος ώστε $\overline{\alpha}(\neg\varphi_i) = \Psi \Leftrightarrow \overline{\alpha}(\varphi_i) = A$. Έτσι, έχουμε ότι για κάθε αποτίμηση α ισχύει $\overline{\alpha}(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n) = A$, δηλαδή ο τύπος $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ είναι ταυτολογία. ■

3. Ορίζουμε μια σχέση $\prec$ στο σύνολο $T(\Gamma_0)$ των προτασιακών τύπων ως εξής:

$$\varphi \prec \psi \text{ ανν } \models \varphi \to \psi \text{ και } \not\models \psi \to \varphi.$$

   (i) Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\varphi \prec \psi$ τότε υπάρχει προτασιακός τύπος χ τέτοιος ώστε: $\varphi \prec \chi \prec \psi$.

   (ii) Βρείτε προτασιακούς τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ τέτοιους ώστε $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \ldots$.

   Λύση. (i)

(ii) Έστω $p \in M(\Gamma_0)$. Για $\varphi = p$ και $\psi = p \vee \neg p$, είναι σαφές ότι $\models \varphi \to \psi$ και $\not\models \psi \to \varphi$. Θέτουμε $\varphi_1 = \varphi$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν προτασιακοί τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ τέτοιοι ώστε $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \ldots \prec \psi$ και έτσι θα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

- **Βάση.** Για $n = 1$ έχουμε ότι $\varphi_1 \prec \psi$, από την αρχική παρατήρηση.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω ότι υπάρχουν $\varphi_1 \prec \cdots \prec \varphi_n \prec \psi$. Τότε, από (i) έχουμε ότι υπάρχει $\varphi_{n+1} \in T(\Gamma_0)$ τέτοιο ώστε $\varphi_n \prec \varphi_{n+1} \prec \psi$.

■

4. Αν $T \subseteq T(\Gamma_0)$, τότε με $\overline{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο:

$$\overline{T} = \{\varphi \in T(\Gamma_0) \mid T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi\}.$$

Δείξτε ότι για τυχαία $T, \Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $\overline{\overline{T}} = \overline{T}$.

(ii) $\overline{T \cap \Sigma} \subseteq \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$.

(iii) $\overline{T} \cup \overline{\Sigma} \subseteq \overline{T \cup \Sigma}$.

(iv) $T(\Gamma_0) \setminus \overline{T} \subseteq \overline{T(\Gamma_0) \setminus T}$.

Στις περιπτώσεις (ii), (iii) και (iv) βρείτε παραδείγματα συνόλων $T, \Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ για τα οποία έχουμε $\subset$ (γνήσιο υποσύνολο).

Λύση. (i) Αν $\varphi \in \overline{T}$, τότε είναι σαφές ότι $\overline{T} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$, δηλαδή $\varphi \in \overline{\overline{T}}$. Έτσι, έχουμε ότι $\overline{T} \subseteq \overline{\overline{T}}$. Τώρα, αν $\varphi \in \overline{\overline{T}}$ έχουμε ότι $\overline{T} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Συνεπώς, υπάρχει τυπική απόδειξη, $\tau_1, \cdots, \tau_n = \varphi$, όπου τ_i είναι αξίωμα ή $\tau_i \in \overline{T_i}$ ή τ_i προκύπτει με Modus Ponens.Αν υπάρχουν $\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_k} \in \overline{T}$, για κάποια $i_1, \cdots, \in i_k \in \{1, \cdots, n\}$, υπάρχουν τυπικές αποδείξεις τους από το T στο $\mathcal{A}_0$. Ενσωματώνοντας τις προηγούμενες τυπικές αποδείξεις στην αρχική τυπική απόδειξη του φ από το $\overline{T}$ στο $\mathcal{A}_0$ προκύπτει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$.

(ii) Έστω $\varphi \in \overline{T \cap \Sigma}$, δηλαδή $T \cap \Sigma \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Αφού, $T \cap \Sigma \subseteq T$ και $T \cap \Sigma \subseteq \Sigma$, τότε έχουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$ και $\Sigma \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\varphi \in \overline{T} \cap \overline{S}$, δηλαδή $\overline{T \cap \Sigma} \subseteq \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$.

Αν $p, q \in M(\Gamma_0)$, ορίζουμε $T = \{q \to p\}$ και $\Sigma = \{p\}$. Τότε, παρατηρούμε ότι $T \vdash q \to p$ και $\Sigma \vdash q \to p$ (από Α.Σ.1 και Μ.Ρ.). Όμως, $T \cap \Sigma = \emptyset$ και παρατηρούμε ότι $q \to p$ δεν είναι ταυτολογία χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας για κατάλληλη αποτίμηση. Συνεπώς, $q \to p \in \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$, αλλά έχουμε ότι $q \to p \notin \overline{T \cap \Sigma}$.

(iii) Έστω $\varphi \in \overline{T} \cup \overline{\Sigma}$, δηλαδή ισχύει ότι $\varphi \in \overline{T}$ ή $\varphi \in \overline{\Sigma}$. Συνεπώς, ισχύει ότι $T \vdash \varphi$ ή $\Sigma \vdash \varphi$, δηλαδή σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $T \cup \Sigma \vdash \varphi$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\varphi \in \overline{T \cup \Sigma}$, δηλαδή $\overline{T} \cup \overline{\Sigma} \subseteq \overline{T \cup \Sigma}$.

Θεωρούμε $p, q \in M(\Gamma_0)$ και θέτουμε $T = \{\neg p \to \neg q\}, \Sigma = \{\neg p \to q\}$. Τότε, έχουμε ότι $T \cup \Sigma \vdash_{\mathcal{A}_0} p$, το οποίο είναι άμεσο από το Α.Σ.1, δηλαδή έχουμε ότι $p \in \overline{T \cup \Sigma}$. Τώρα, αν θεωρήσουμε $\alpha : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ αποτίμηση με $\alpha(p) = \alpha(q) = \Psi$, έχουμε ότι α ικανοποιεί το T, αλλά όχι το p. Συνεπώς, έχουμε ότι $T \not\models p$ και από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας συμπεραίνουμε ότι $T \nvdash p$, δηλαδή $p \notin \overline{T}$. Ομοίως, μέσω της αποτίμησης α', όπου $\alpha'(p) = \Psi$ και $\alpha'(q) = A$, συμπεραίνουμε ότι $\Sigma \not\models p$ και από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας συμπεραίνουμε ότι $\Sigma \nvdash p$, δηλαδή $p \notin \overline{\Sigma}$. Έτσι, προκύπτει ότι $p \notin \overline{T} \cup \overline{\Sigma}$.

(iv) Θεωρούμε $\varphi \in T(\Gamma_0) \setminus \overline{T}$, δηλαδή έχουμε ότι $\varphi \notin \overline{T}$, ισοδύναμα ισχύει ότι $T \nvdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Έτσι, είναι σαφές ότι $\varphi \in T(\Gamma_0) \setminus T$, όπου προκύπτει ότι $T(\Gamma_0) \setminus T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\varphi \in \overline{T(\Gamma_0) \setminus T}$, όπου ισοδύναμα προκύπτει ότι $T(\Gamma_0) \setminus \overline{T} \subseteq \overline{T(\Gamma_0) \setminus T}$.

Θεωρούμε $p \in M(\Gamma_0)$ και γνωρίζουμε ότι ο προτασιακός τύπος $p \leftrightarrow p$ είναι ταυτολογία συνεπώς για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύει ότι $T \vdash p \leftrightarrow p$ και $T(\Gamma_0) \setminus T \vdash p \leftrightarrow p$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $p \leftrightarrow p \notin T(\Gamma_0) \setminus \overline{T}$ και $p \leftrightarrow p \in \overline{T(\Gamma_0) \setminus T}$.

■

5. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και $\varphi \in T(\Gamma_0)$. Υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο. Δείξτε, **χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Συμπάγειας**, ότι το ίδιο ισχύει και για ένα τουλάχιστον από τα σύνολα $T \cup \{\varphi\}$ και $T \cup \{\neg\varphi\}$.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν $T_1, T_2 \subseteq T$ πεπερασμένα, ώστε τα $T_1 \cup \{\varphi\}$ και $T_2 \cup \{\neg\varphi\}$ να είναι μη ικανοποιήσιμα. Αφού, το σύνολο $T_1 \cup T_2 \subseteq T$ είναι πεπερασμένο, από την αρχική υπόθεση, είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει α αποτίμηση, που να ικανοποιεί το $T_1 \cup T_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Αν $\overline{\alpha}(\varphi) = A$, τότε το σύνολο $T_1 \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο και οδηγούμαστε σε άτοπο.

(ii) Αν $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$, τότε $\overline{\alpha}(\neg\varphi) = A$, δηλαδή $T_2 \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο, συνεπώς οδηγούμαστε σε άτοπο.

Σε κάθε περίπτωση, καταλήγουμε σε άτοπο, συνεπώς, έχουμε το ζητούμενο. ■

6. Έστω Δ ένα σύνολο προτασιακών τύπων τέτοιο ώστε:

(i) κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Δ είναι ικανοποιήσιμο,

(ii) για κάθε προτασιακό τύπο φ, είτε $\varphi \in \Delta$ ή $\neg\varphi \in \Delta$.

Ορίζουμε την ακόλουθη αποτίμηση: $\alpha\colon M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ με

$$\alpha(p) = \begin{cases} A, & \text{αν } p \in \Delta\cdot \\ \Psi, & \text{αν } p \notin \Delta. \end{cases}$$

Δείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει:

$$\overline{\alpha}(\varphi) = A \quad \text{ανν} \quad \varphi \in \Delta.$$

(*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς φ.)

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο $Q = \{\varphi \in T(\Gamma_0) \mid \overline{\alpha}(\varphi) = A \Leftrightarrow \varphi \in \Delta\}$. Από τον ορισμό της αποτίμησης α είναι σαφές ότι $M(\Gamma_0) \subseteq Q$.

Θεωρούμε $\varphi \in Q$ και διακρίνουμε περιπτώσεις και παρατηρούμε ότι αν $\overline{\alpha}(\neg\varphi) = A$, αν και μόνο αν $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$, συνεπώς αφού $\varphi \in Q$ ισχύει ότι $\varphi \notin \Delta$. Από το (ii) του ορισμού ισχύει ότι $\neg\varphi \in \Delta$. Αντίστροφα, έστω ότι $\neg\varphi \in \Delta$ και υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha}(\neg\varphi) = \Psi$.Συνεπώς, ισχύει ότι $\overline{\alpha}(\varphi) = A$, δηλαδη $\varphi \in \Delta$. Όμως, το σύνολο $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq \Delta$ είναι πεπερασμένο, συνεπώς από το (i) είναι ικανοποιήσιμο, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\neg\varphi \in \Delta$.

Θεωρούμε $\varphi, \psi \in \Delta$ και υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha}(\varphi \to \psi) = \Psi$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\overline{\alpha}(\varphi) = A$ και $\overline{\alpha}(\psi) = \Psi$, ισοδύναμα $\varphi \in \Delta$ και $\neg\psi \in \Delta$ από (ii). Αν $\varphi \to \psi \in \Delta$, τότε $\{\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi\} \subseteq \Delta$ είναι ικανοποιήσιμο από το (i), άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν $\varphi \to \psi \in \Delta$, τότε $\overline{\alpha}(\varphi \to \psi) = A$. Τώρα, υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha}(\varphi \to \psi) = A$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(a) Αν $\overline{\alpha}(\varphi) = A$, τότε $\overline{\alpha}(\psi) = A$, συνεπώς, έχουμε ότι $\varphi, \psi \in \Delta$. Αν $\varphi \to \psi \notin \Delta$, τότε από (ii) έχουμε ότι $\neg(\varphi \to \psi) \in \Delta$, δηλαδή το $\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \to \psi)\}$ είναι ικανοποιήσιμο, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\varphi \to \psi \in \Delta$.

(b) Αν $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$ και $\overline{\alpha}(\psi) = A$, ισοδύναμα ισχύει ότι $\neg\varphi, \psi \in \Delta$. Αν υποθέσουμε ότι $\varphi \to \psi \notin \Delta$, τότε από (ii) ισχύει ότι $\neg(\varphi \to \psi) \in \Delta$.Από (i) έχουμε ότι $\{\neg\varphi, \psi, \neg(\varphi \to \psi\}$ είναι ικανοποιήσιμο, συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\varphi \to \psi \in \Delta$.

(c) Αν $\overline{\alpha}(\varphi) = \Psi$ και $\overline{\alpha}(\psi) = \Psi$, ομοίως με (a),(b) έχουμε ότι $\varphi \to \psi \in \Delta$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει ότι $\varphi \to \psi \in \Delta$, συνεπώς έχουμε ότι $\varphi \to \psi \in Q$. Άρα, αφού το σύνολο $\{\neg, \leftrightarrow\}$ είναι πλήρες, από το Θεώρημα Επαγωγής συμπεραίνουμε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει:

$$\overline{\alpha}(\varphi) = A \quad \text{ανν} \quad \varphi \in \Delta.$$

■

Μέρος **II**

Κατηγορηματικός Λογισμός

Κεφάλαιο 4

Τέταρτο Πακέτο Ασκήσεων

4.1 Ασκήσεις

1. (α′) Ποιος είναι ο τύπος που μετά από την απαλοιφή παρενθέσεων γράφεται ως:

$$\exists x_1 P(x_1) \vee Q(x_1) \leftrightarrow R(x_2) \wedge \forall x_2 \neg Q(x_2).$$

   (β′) Πώς θα γραφεί ο παρακάτω τύπος, αν απαλείψουμε όσα ζεύγη παρενθέσεων είναι δυνατόν;

$$\Big((\neg \forall x_1 (P(c_2) \vee Q(x_1))) \rightarrow (\forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1))\Big).$$

2. Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε ποιες μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες. Επίσης, να σημειώσετε ποιοι από τους τύπους αυτούς είναι προτάσεις.

   (α′) $\forall x_1 P(x_1) \rightarrow Q(x_1)$.

   (β′) $\forall x_1 P(x_1) \wedge Q(x_1)$.

   (γ′) $\exists x_2 \left(P(x_1, c_1) \rightarrow \forall x_1 P(x_1, x_2)\right)$.

   (δ′) $\exists x_1 Q(x_1) \wedge \exists x_2 P(x_1, x_2)$.

   (ε′) $\forall x_2 \left[\exists x_1 P(f(x_1, x_2), c_2) \rightarrow R(x_1, g(x_1, x_3))\right]$.

   (ϛ′) $\forall x_3 \left(\forall x_1 R(x_1, x_2) \rightarrow Q(x_3, x_1, c_1)\right)$.

   (ζ′) $\forall x_2 P(x_3, x_2) \rightarrow \forall x_3 P(x_3, x_2)$.

   (η′) $\forall x_2 \exists x_1 Q(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \vee (\neg \forall x_1 P(x_2, g(x_1)))$.

3. Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε ποιες μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες. Επίσης, να σημειώσετε ποιοι από τους τύπους αυτούς είναι προτάσεις.

   (α′) $P(x) \wedge \neg R(y, z)$.

   (β′) $\exists x R(x, y)$.

(γ′) $\forall x P(x) \to \exists y \neg Q(f(x), y, f(y))$.

(δ′) $\forall x \exists y R(x, f(y))$.

(ε′) $\forall x \exists y R(x, f(y)) \to R(x, y)$.

4. (α′) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ''Υπάρχει η τομή δύο οποιονδήποτε συνόλων''.

   (β′) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ''Η σχέση του περιέχεσθαι είναι μεταβατική.''.

   (γ′) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ''Υπάρχει πρώτος αριθμός''.

5. Έστω Γ_1 η πρωτοβάθμια γλώσσα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία περιέχει τα παρακάτω σύμβολα:

   - δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος E, Σ, των οποίων η ερμηνεία είναι $E(x)$: ''το αντικείμενο x είναι ευθεία'' και $\Sigma(x)$: ''το αντικείμενο x είναι σημείο''.
   - δύο διθέσια σύμβολα κατηγορήματος D, P, των οποίων η ερμηνεία είναι $D(x, y)$: ''το x διέρχεται από το y'' και $P(x, y)$ ''το x είναι παράλληλο προς το y''.

   Βρείτε τύπους στην πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 που να αντιστοιχούν στις προτάσεις:

   (a) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.

   (b) Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη προς την αρχική.

6. Μεταφράστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις της Ελληνικής γλώσσας στη δοθείσα πρωτοτάξια γλώσσα:

   (α′) Ο Κώστας δεν μπορεί να εκτελέσει κάθε εργασία σωστά.

   (β′) Ο Κώστας δεν μπορεί να εκτελέσει καμία εργασία σωστά.

   Πρωτοτάξια γλώσσα: $\forall$: για όλα τα πράγματα, $J(x)$: το x είναι μια εργασία, $D(x, y)$: ο x μπορεί να εκτελέσει σωστά το y, c: ο Κώστας (σύμβολο σταθεράς).

7. Αφού ορίσετε κατάλληλη πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1, να μεταφράσετε καθεμία από τις παρακάτω φράσεις σε έναν τύπο της Γ_1.

   (α′) Όλοι οι φοιτητές είναι έξυπνοι.

   (β′) Υπάρχει ένας φοιτητής.

   (γ′) Υπάρχει ένας έξυπνος φοιτητής.

   (δ′) Κάθε φοιτητής αγαπάει κάποιον φοιτητή.

   (ε′) Κάθε φοιτητής αγαπάει κάποιον άλλο φοιτητή.

   (ϛ′) Υπάρχει ένας φοιτητής τον οποίο αγαπούν όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές.

   (ζ′) Κανένας φοιτητής δεν αγαπάει τον καθηγητή της Μαθηματικής Λογικής.

8. Έστω $\mathfrak{A}$ μια δομή για την πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1 και $v\colon M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$. Αποδείξτε ότι ισχύουν τα παρακάτω (για κάθε φ, ψ ΚΣΤ).

(α′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \wedge \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

(β′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \vee \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ ή $\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

(γ′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \leftrightarrow \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi \Big)$ ή $\Big(\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

(δ′) $\models_{\mathfrak{A}} \exists x \varphi[v]$ ανν υπάρχει $a \in |\mathfrak{A}|$ ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)]$

9. Έστω v αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}^*$ για την πρωτοτάξια γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών, τέτοια ώστε $v(x_1) = -2$, $v(x_2) = -1$ και $v(x_3) = 0$.

   (α′) Να βρείτε αναλυτικά την τιμή που δίνει η αποτίμηση στον όρο $s(x_1) \cdot s(x_2 + s(x_3))$.

   (β′) Να εξετάσετε αν η δομή $\mathcal{N}^*$ ικανοποιεί με την αποτίμηση v τον τύπο:

$$\exists x_4 x_4 \neq 0 \leftrightarrow \forall x_4 x_4 \cdot s(0) = x_2.$$

10. Έστω Γ_1 η πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P, ένα διθέσιο σύμβολο συνάρτησης f και ένα σύμβολο σταθεράς c. Ορίζουμε τη δομή $\mathfrak{A}$ για την πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 ως εξής:

$$|\mathfrak{A}| = \mathbb{Z},\ P^{\mathfrak{A}} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\},\ f^{\mathfrak{A}}(m, n) = m \cdot n,\ c^{\mathfrak{A}} = 2.$$

   Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους εξετάστε αν υπάρχει αποτίμηση που τον ικανοποιεί και αποτίμηση που δεν τον ικανοποιεί στην $\mathfrak{A}$:

   (α′) $P(c, f(x_1, x_1))$.

   (β′) $P(x_1, x_2) \to \neg P(x_2, x_1)$.

   (γ′) $\forall x_1 \forall x_2 [P(x_1, x_2) \to \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))]$.

11. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι αληθείς στην συνήθη δομή $\mathcal{N}$:

   (α′) $\exists x_1 x_1 + x_1 = 0$.

   (β′) $\forall x_1 x_1 = x_1 \vee \exists x_0 x_0 \neq x_0$.

   (γ′) $\forall x_1 x_1 \neq x_1 \to \forall x_1 \forall x_2 x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

12. Δίνεται μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με ένα μόνο διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, να βρείτε μια δομή $\mathfrak{A}$ για την Γ_1 η οποία να αποτελεί μοντέλο της πρότασης.

   (α′) $\forall x \forall y x = y$.

   (β′) $\forall x \forall y P(x, y)$.

   (γ′) $\forall x \forall y \neg P(x, y)$.

   (δ′) $\forall x \exists y P(x, y)$.

4.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. (α΄) Ποιος είναι ο τύπος που μετά από την απαλοιφή παρενθέσεων γράφεται ως:

$$\exists x_1 P(x_1) \vee Q(x_1) \leftrightarrow R(x_2) \wedge \forall x_2 \neg Q(x_2).$$

(β΄) Πώς θα γραφεί ο παρακάτω τύπος, αν απαλείψουμε όσα ζεύγη παρενθέσεων είναι δυνατόν;

$$\Big((\neg \forall x_1 (P(c_2) \vee Q(x_1))) \to (\forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1))\Big).$$

Λύση. (α΄) Ο τύπος που προέκυψε από την απαλοιφή παρανθέσεων γράφεται ως εξής :

$$\Big((\exists x(P(x_1)) \vee Q(x_1)) \leftrightarrow (R(x_2) \wedge (\forall x_2(\neg Q(x_2))\Big)$$

(β΄) Ο τύπος, που προκύπτει από την απαλοιφή παρανθέσεων είναι ο εξής :

$$\neg \forall x_1 (P(c_2) \vee Q(x_1)) \to \forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1).$$

■

2. Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε ποιες μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες. Επίσης, να σημειώσετε ποιοι από τους τύπους αυτούς είναι προτάσεις.

(α΄) $\forall x_1 P(x_1) \to Q(x_1)$.

(β΄) $\forall x_1 P(x_1) \wedge Q(x_1)$.

(γ΄) $\exists x_2 (P(x_1, c_1) \to \forall x_1 P(x_1, x_2))$.

(δ΄) $\exists x_1 Q(x_1) \wedge \exists x_2 P(x_1, x_2)$.

(ε΄) $\forall x_2 [\exists x_1 P(f(x_1, x_2), c_2) \to R(x_1, g(x_1, x_3))]$.

(ϛ΄) $\forall x_3 (\forall x_1 R(x_1, x_2) \to Q(x_3, x_1, c_1))$.

(ζ΄) $\forall x_2 P(x_3, x_2) \to \forall x_3 P(x_3, x_2)$.

(η΄) $\forall x_2 \exists x_1 Q(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \vee (\neg \forall x_1 P(x_2, g(x_1)))$.

Λύση. (α΄) Η μεταβλητή x_1 εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο, συνεπώς ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(β΄) Η μεταβλητή x_1 εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο, συνεπώς ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(γ΄) Οι μεταβλητές x_1 και c_1 εμφανίζονται ελεύθερες και η x_2 εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(δ΄) Οι μεταβλητή x_1 εμφανίζεται ελεύθερη και η x_2 εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(ε΄) Η μεταβλητές x_1, x_3 εμφανίζονται ελεύθερες, ενώ η x_2 εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(ϛ΄) Οι μεταβλητές x_1, x_2, c_1 εμφανίζονται ελεύθερες, ενώ η x_2 εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(ζ΄) Οι μεταβλητές x_2, x_3 εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

(η΄) Η μεταβλητή x_2 εμφανίζεται ελεύθερη, ενώ η x_1 εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

■

3. Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε ποιες μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες. Επίσης, να σημειώσετε ποιοι από τους τύπους αυτούς είναι προτάσεις.

   (α΄) $P(x) \wedge \neg R(y, z)$.

   (β΄) $\exists x R(x, y)$.

   (γ΄) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(f(x), y, f(y))$.

   (δ΄) $\forall x \exists y R(x, f(y))$.

   (ε΄) $\forall x \exists y R(x, f(y)) \rightarrow R(x, y)$.

   Λύση. (α΄) Οι μεταβλητές x, y, z εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

   (β΄) Η μεταβλητή x εμφανίζεται δεσμευμένη και η y εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

   (γ΄) Η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη, ενώ η y δεσμευμένη στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

   (δ΄) Οι μεταβλητές x, y εμφανίζονται δεσμευμένες στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος είναι πρόταση.

   (ε΄) Οι μεταβλητές x, y εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι πρόταση.

■

4. (α΄) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ‘‘Υπάρχει η τομή δύο οποιονδήποτε συνόλων’’.

   (β΄) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ‘‘Η σχέση του περιέχεσθαι είναι μεταβατική.’’.

   (γ΄) Βρείτε τύπο της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση: ‘‘Υπάρχει πρώτος αριθμός’’.

   Λύση. (α΄) *Τύπος:* $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \left[((x_4 \in x_1) \wedge (x_4 \in x_2)) \leftrightarrow x_4 \in x_3\right]$

   (β΄) *Τύπος:* $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [\forall x_4 (x_4 \in x_1 \rightarrow x_4 \in x_2) \wedge \forall x_5 (x_5 \in x_2 \rightarrow x_5 \in x_3) \rightarrow \forall x_6 (x_6 \in x_1 \rightarrow x_6 \in x_3)]$

   (γ΄) *Τύπος:* $\exists x_1 \{\exists x_4\, (x_1 = S(S(x_4))) \wedge \forall x_2 \forall x_3 [(x_2 \neq S_0)] \wedge (x_3 \neq S_0) \rightarrow (x_1 \neq x_2 \cdot x_3)]\}$

■

5. Έστω Γ_1 η πρωτοβάθμια γλώσσα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία περιέχει τα παρακάτω σύμβολα:

- δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος E, Σ, των οποίων η ερμηνεία είναι $E(x)$: ''το αντικείμενο x είναι ευθεία'' και $\Sigma(x)$: ''το αντικείμενο x είναι σημείο''.
- δύο διθέσια σύμβολα κατηγορήματος D, P, των οποίων η ερμηνεία είναι $D(x, y)$: ''το x διέρχεται από το y'' και $P(x, y)$ ''το x είναι παράλληλο προς το y''.

Βρείτε τύπους στην πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 που να αντιστοιχούν στις προτάσεις:

(a) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.

(b) Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη προς την αρχική.

Λύση. (a) Αρχικά, ορίζουμε ως $Q(x_1, x_2, x_3) = [D(\Sigma(x_1), E(x_3))] \wedge [D(\Sigma(x_2), E(x_3))]$. Τώρα, ο ζητούμενος τύπος γράφεται ως εξής :

$$\forall x_1 \forall x_2 \left[\Sigma(x_1) \neq \Sigma(x_2) \to \exists x_3 \left(Q(x_1, x_2, x_3) \wedge \forall x_4 \left(Q(x_1, x_2, x_4) \to E(x_3) = E(x_4)\right)\right)\right]$$

(b) Αρχικά, ορίζουμε ως $K(x_1, x_2, x_3) = D\left(\Sigma(x_1), E(x_3)\right) \wedge P\left(E(x_2), E(x_3)\right)$. Τώρα, ο ζητούμενος τύπος γράφεται ως εξής :

$$\forall x_1 \forall x_2 \left[\neg D\left(\Sigma(x_1), E(x_2)\right) \to \exists x_3 \left(Q(x_1, x_2, x_3) \wedge \forall x_4 \left(Q(x_1, x_2, x_4) \to E(x_3) = E(x_4)\right)\right)\right]$$

■

6. Μεταφράστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις της Ελληνικής γλώσσας στη δοθείσα πρωτοτάξια γλώσσα:

(α΄) Ο Κώστας δεν μπορεί να εκτελέσει κάθε εργασία σωστά.

(β΄) Ο Κώστας δεν μπορεί να εκτελέσει καμία εργασία σωστά.

Πρωτοτάξια γλώσσα: $\forall$: για όλα τα πράγματα, $J(x)$: το x είναι μια εργασία, $D(x, y)$: ο x μπορεί να εκτελέσει σωστά το y, c: ο Κώστας (σύμβολο σταθεράς).

Λύση. (α΄) Ζητούμενος τύπος: $\exists y\,[J(y) \wedge \neg D(c, y)]$

(β΄) Ζητούμενος τύπος: $\forall y\,[J(y) \to \neg D(c, y)]$

■

7. Αφού ορίσετε κατάλληλη πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1, να μεταφράσετε καθεμία από τις παρακάτω φράσεις σε έναν τύπο της Γ_1.

(α΄) Όλοι οι φοιτητές είναι έξυπνοι.

(β΄) Υπάρχει ένας φοιτητής.

(γ΄) Υπάρχει ένας έξυπνος φοιτητής.

(δ΄) Κάθε φοιτητής αγαπάει κάποιον φοιτητή.

(ε΄) Κάθε φοιτητής αγαπάει κάποιον άλλο φοιτητή.

(ϛ΄) Υπάρχει ένας φοιτητής τον οποίο αγαπούν όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές.

(ζ′) Κανένας φοιτητής δεν αγαπάει τον καθηγητή της Μαθηματικής Λογικής.

Λύση. Ορίζουμε πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1 ως εξής :

- **Μεταβλητές:** Ανθρωποι
- **Λογικά Σύμβολα:**
  (i) $\neg$: ''δεν ''
  (ii) $\rightarrow$: ''τότε''
- **Σύμβολο Ισότητας:** $=$
- **Παρενθέσεις:** $(,)$
- **Σταθερές:** Καθηγητής Μαθηματικής Λογικής (Συμβολισμός: c)
- **Ποσοδείκτες:** $\forall$: ''για κάθε'' ή ''όλοι''
- **Κατηγορηματικά Σύμβολα:**
  (i) $\Phi(x)$: ο x είναι φοιτητής
  (ii) $E(x)$: ο x είναι έξυπνος.
  (iii) $A(x,y)$: ο x αγαπάει τον y

(α′) $\forall x\,(\Phi(x) \rightarrow E(x))$

(β′) $\exists x \Phi(x)$

(γ′) $\exists x\,(\Phi(x) \wedge E(x))$

(δ′) $\forall x\,[\Phi(x) \rightarrow \exists y(\Phi(y) \wedge A(x,y))$

(ε′) $\forall x\,[\Phi(x) \rightarrow \exists y(x \neq y \wedge \Phi(y) \wedge A(x,y))]$

(ϛ′) $\exists x\,[\forall y(\Phi(y) \wedge y \neq x) \rightarrow A(y,x)]$

(ζ′) $\forall x\,(\Phi(x) \rightarrow \neg A(x,c))$

■

8. Έστω $\mathfrak{A}$ μια δομή για την πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1 και $v\colon M(\Gamma_1) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$. Αποδείξτε ότι ισχύουν τα παρακάτω (για κάθε φ, ψ ΚΣΤ).

   (α′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \wedge \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

   (β′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \vee \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ ή $\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

   (γ′) $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \leftrightarrow \psi[v]$ ανν $\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi \Big)$ ή $\Big(\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \Big)$

   (δ′) $\models_{\mathfrak{A}} \exists x \varphi[v]$ ανν υπάρχει $a \in |\mathfrak{A}|$ ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)]$

Λύση. (α′)

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} \varphi \wedge \psi[v]\\
\text{ανν}\ &\models_{\mathfrak{A}} \neg(\varphi \to \neg\psi)[v]\\
\text{ανν}\ &\not\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \neg\psi)[v]\\
\text{ανν}\ &(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ και } \not\models_{\mathfrak{A}} \neg\psi[v])\\
\text{ανν}&\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v]\Big)
\end{aligned}$$

(β′)

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} \varphi \vee \psi[v]\\
\text{ανν}\ &\models_{\mathfrak{A}} (\neg\varphi \to \psi)[v]\\
\text{ανν}\ &\not\models_{\mathbb{A}} \neg\varphi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v]\\
\text{ανν}\ &(\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v])
\end{aligned}$$

(γ′)

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} \varphi \leftrightarrow \psi[v]\\
\text{ανν}\ &\models_{\mathfrak{A}} [(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)][v]\\
\text{ανν}\ &\models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \psi \to \varphi[v] && (\alpha')\\
\text{ανν}\ &(\not\models_{\mathbb{A}} \varphi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v]) \text{ και } (\not\models_{\mathbb{A}} \psi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v])\\
\text{ανν}\ &[(\not\models_{\mathbb{A}} \varphi[v] \text{ και } \not\models_{\mathbb{A}} \psi[v]) \text{ ή } (\not\models_{\mathbb{A}} \varphi[v] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v])]\\
&\text{ή}[(\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \text{ και } \not\models_{\mathbb{A}} \psi[v]) \text{ ή } (\models_{\mathfrak{A}} \psi[v] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v])]\\
\text{ανν}&\Big(\models_{\mathfrak{A}} \varphi \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \psi\Big) \text{ ή } \Big(\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ και } \not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v]\Big)
\end{aligned}$$

(δ′)

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} \exists x\varphi[v]\\
\text{ανν}\ &\models_{\mathfrak{A}} \neg\forall x\neg\varphi[v]\\
\text{ανν}\ &\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\neg\varphi[v]\\
\text{ανν υπάρχει}\ &a \in |\mathfrak{A}| \text{ ώστε } \not\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[v(x|a)]\\
\text{ανν υπάρχει}\ &a \in |\mathfrak{A}| \text{ ώστε } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)]
\end{aligned}$$

■

9. Έστω v αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}^*$ για την πρωτοτάξια γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών, τέτοια ώστε $v(x_1) = -2$, $v(x_2) = -1$ και $v(x_3) = 0$.

   (α′) Να βρείτε αναλυτικά την τιμή που δίνει η αποτίμηση στον όρο $s(x_1) \cdot s(x_2 + s(x_3))$.

   (β′) Να εξετάσετε αν η δομή $\mathcal{N}^*$ ικανοποιεί με την αποτίμηση v τον τύπο:

$$\exists x_4 x_4 \neq 0 \leftrightarrow \forall x_4 x_4 \cdot s(0) = x_2.$$

Λύση. (α′)

$$\begin{aligned}
&\overline{v}(s(x_1)\cdot s(x_2+s(x_3)))\\
=&\overline{v}(s(x_1))\cdot_{\mathcal{N}^*}\overline{v}(s(x_2+s(x_3)))\\
=&s(\overline{v}(x_1))\cdot_{\mathcal{N}^*}s(\overline{v}(x_2+s(x_3)))\\
=&s(\overline{v}(x_1))\cdot_{\mathcal{N}^*}s[\overline{v}(x_2)+\overline{v}(s(x_3))]\\
=&s(\overline{v}(x_1))\cdot_{\mathcal{N}^*}s[\overline{v}(x_2)+s(\overline{v}(x_3))]\\
=&s(-2)\cdot s[-1+s(0)]\\
=&-3\cdot_{\mathcal{N}^*}s(-1-1)\\
=&-3\cdot_{\mathcal{N}^*}(-3)\\
=&-9
\end{aligned}$$

(β′) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{array}{ll}
\models \exists x_4 x_4 \neq 0[v] & \text{αν και μόνο αν}\\
\exists(-n)\in\mathcal{N}^*: x_4\neq 0[v(x_4|-n)] & \text{αν και μόνο αν}\\
\exists(-n)\in\mathcal{N}^*: v[x_4|-n](x_4)\neq v[x_4|-n](0) & \text{αν και μόνο αν}\\
\exists(-n)\in\mathcal{N}^*: -n\neq 0 &
\end{array}$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι $\models \exists x_4 x_4 \neq 0[v]$. Επίσης, ισχύει ότι

$$\begin{array}{ll}
\models \forall x_4 x_4\cdot s(0)=x_2[v] & \text{αν και μόνο αν}\\
\models \forall(-n)\in\mathcal{N}^*: x_4\cdot s(0)=x_2[v(x_4|-n)] & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: v[x_4|-n](x_4\cdot s(0))=v[x_4|-n](x_2) & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: v[x_4|-n](x_4)\cdot_{\mathcal{N}^*}v[x_4|-n](s(0))=v[x_4|-n](x_2) & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: -n\cdot_{\mathcal{N}^*}s(v[x_4|-n](0))=-1 & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: -n\cdot_{\mathcal{N}^*}s(0)=-1 & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: -n\cdot_{\mathcal{N}^*}(-1)=-1 & \text{αν και μόνο αν}\\
\forall(-n)\in\mathcal{N}^*: -n=-1 &
\end{array}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\not\models \forall x_4 x_4\cdot s(0)=x_2[v]$ και από την *Άσκηση 8.* συμπεραίνουμε ότι η v δεν ικανοποιεί τον ζητούμενο τύπο στην δομή $\mathcal{N}^*$.

■

10. Έστω Γ_1 η πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P, ένα διθέσιο σύμβολο συνάρτησης f και ένα σύμβολο σταθεράς c. Ορίζουμε τη δομή $\mathfrak{A}$ για την πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 ως εξής:

$$|\mathfrak{A}|=\mathbb{Z},\ P^{\mathfrak{A}}=\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid m\leq n\},\ f^{\mathfrak{A}}(m,n)=m\cdot n,\ c^{\mathfrak{A}}=2.$$

Για καθέναν από τους παρακάτω τύπους εξετάστε αν υπάρχει αποτίμηση που τον ικανοποιεί και αποτίμηση που δεν τον ικανοποιεί στην $\mathfrak{A}$:

(α′) $P(c,f(x_1,x_1))$.

(β′) $P(x_1, x_2) \to \neg P(x_2, x_1)$.

(γ′) $\forall x_1 \forall x_2 [P(x_1, x_2) \to \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))]$.

Λύση. (α′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ μια αποτίμηση, τότε

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} P(c, f(x_1, x_1))[v] && \text{αν και μόνο αν}\\
&(v(c), v(f(x_1, x_1)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{αν και μόνο αν}\\
&(c^{\mathfrak{A}}, v(x_1) \cdot v(x_1)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{αν και μόνο αν}\\
&(2, v^2(x_1)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{αν και μόνο αν}\\
&2 \leq v^2(x_1)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, με βάση τις παραπάνω σχέσεις, αν θεωρήσουμε την αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ με $v(x_1) = 2$, τότε v ικανοποιεί τον ζητούμενο τύπο, ενώ για αποτίμηση $u : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ με $u(x_1) = 1$, έχουμε ότι u δεν ικανοποιεί τον ζητούμενο τύπο.

(β′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ μια αποτίμηση, τότε

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2) \to \neg P(x_2, x_1)[v] && \text{αν και μόνο αν}\\
&\not\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2) \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \neg P(x_2, x_1)[v] && \text{αν και μόνο αν}\\
&\not\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2) \text{ ή } \not\models_{\mathfrak{A}} P(x_2, x_1) && \text{αν και μόνο αν}\\
&(v(x_1), v(x_2)) \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } (v(x_2), v(x_1)) \notin P^{\mathfrak{A}} && \text{αν και μόνο αν}\\
&v(x_2) < v(x_1) \text{ ή } v(x_1) < v(x_2)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, με βάση τις παραπάνω σχέσεις, αν θεωρήσουμε την αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ με $v(x_1) = 1$ και $v(x_2) = 2$, τότε v ικανοποιεί τον ζητούμενο τύπο, ενώ για αποτίμηση $u : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ με $u(x_1) = u(x_2) = 1$, έχουμε ότι u δεν ικανοποιεί τον ζητούμενο τύπο.

(γ′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ μια αποτίμηση, τότε

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathfrak{A}} \forall x_1 \forall x_2 [P(x_1, x_2) \to \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))][v] && \text{ανν}\\
\forall n \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} \forall x_2 [P(x_1, x_2) \to \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))][v(x_1|n)] && \text{ανν}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2) \to \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))[v(x_1|n, x_2|m)] && \text{ανν}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &\not\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2)[v(x_1|n, x_2|m)] && \text{ή}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} \exists x_3 (P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2))[v(x_1|n, x_2|m)] && \text{ανν}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &\not\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_2)[v(x_1|n, x_2|m)] && \text{ή}\\
\forall n, m, \exists k \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_2)[v(x_1|n, x_2|m, x_3|k)] && \text{ανν}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &(v(x_1|n, x_2|m)](x_1), v(x_1|n, x_2|m)](x_1)) \notin P^{\mathfrak{A}} && \text{ή}\\
\forall n, m, \exists k \in |\mathfrak{A}| : &(u(x_1), u(x_3)), (u(x_3, u(x_2)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{ανν}\\
\forall n, m \in |\mathfrak{A}| : &m < n && \text{ή}\\
\forall n, m, \exists k \in |\mathfrak{A}| : &n \leq k \text{ και } k \leq m
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι μεταβλητές του αρχικού τύπου είναι δεσμευμένες, συνεπώς, είναι σαφές ότι ο τύπος ικανοποιείται από οποιαδήποτε αποτίμηση και δεν υπάρχει αποτίμηση, η οποία δεν ικανοποιεί τον τύπο.

■

11. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι αληθείς στην συνήθη δομή $\mathcal{N}$:

(α′) $\exists x_1 x_1 + x_1 = 0$.

(β′) $\forall x_1 x_1 = x_1 \vee \exists x_0 x_0 \neq x_0$.

(γ′) $\forall x_1 x_1 \neq x_1 \to \forall x_1 \forall x_2 x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

Λύση. (α′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to \mathcal{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathcal{N}} \exists x_1 x_1 + x_1 = 0\ [v] && \text{ανν}\\
\exists n \in |\mathcal{N}| : &\models_{\mathcal{N}} x_1 + x_1 = 0\ [v(x_1|n)] && \text{ανν}\\
\exists n \in |\mathcal{N}| : &v(x_1|n)(x_1 + x_1) = v(x_1|n)(0) && \text{ανν}\\
\exists n \in |\mathcal{N}| : &n + n = 0
\end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η αρχικός τύπος αληθεύει για οποιαδήποτε αποτίμηση v στην δομή $\mathcal{N}$, αφού για $n = 0$ έχουμε το ζητούμενο.

(β′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to \mathcal{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathcal{N}} \forall x_1 x_1 = x_1 \vee \exists x_0 x_0 \neq x_0 && \text{ανν}\\
&\models_{\mathcal{N}} \forall x_1 x_1 = x_1\ [v] \text{ ή } \models_{\mathcal{N}} \exists x_0 x_0 \neq x_0\ [v] && \text{ανν}\\
\forall n \in |\mathcal{N}| : &\models_{\mathcal{N}} x_1 = x_1\ [v(x_1|n)] && \text{ή}\\
\exists m \in |\mathcal{N}| : &\models_{\mathcal{N}} x_0 \neq x_0\ [v(x_0|m)] && \text{ανν}\\
\forall n \in |\mathcal{N}| : &n = n && \text{ή}\\
\exists m \in |\mathcal{N}| : &m \neq m
\end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο δοσμένος τύπος δεν αληθεύει με οποιαδήποτε αποτίμηση v στη δομή $\mathcal{N}$.

(γ′) Αν $v : M(\Gamma_1) \to \mathcal{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathcal{N}} \forall x_1 x_1 \neq x_1 \to \forall x_1 \forall x_2 x_1 + x_2 = x_2 + x_1\ [v] && \text{ανν}\\
&\not\models_{\mathcal{N}} \forall x_1 x_1 \neq x_1 [v] \text{ ή } \models_{\mathcal{N}} \forall x_1 \forall x_2 x_1 + x_2 = x_2 + x_1 [v] && \text{ανν}\\
&\models_{\mathcal{N}} \exists x_1 x_1 = x_1 [v] \text{ ή } \models_{\mathcal{N}} \forall x_1 \forall x_2 x_1 + x_2 = x_2 + x_1 [v] && \text{ανν}
\end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathcal{N}} \exists x_1 x_1 = x_1 [v] && \text{ανν}\\
\exists n \in |\mathcal{N}| : &\models_{\mathcal{N}} x_1 = x_1 [v(x_1|n)] && \text{ανν}\\
\exists n \in |\mathcal{N}| : &n = n
\end{aligned}$$

Όπου ισχύει, για παράδειγμα όταν $n = 0$, συνεπώς ο δοσμένος τύπος αληθεύει για οποιαδήποτε αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}$.

■

12. Δίνεται μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με ένα μόνο διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, να βρείτε μια δομή $\mathfrak{A}$ για την Γ_1 η οποία να αποτελεί μοντέλο της πρότασης.

    (α′) $\forall x \forall y x = y$.

    (β′) $\forall x \forall y P(x, y)$.

    (γ′) $\forall x \forall y \neg P(x, y)$.

    (δ′) $\forall x \exists y P(x, y)$.

Λύση. (α′) Αν θεωρήσουμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \{1\}$, έχουμε ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει :

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y x = y[v] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} x = y[v(x|a_1, y|a_2)] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &v(x|a_1, y|a_2)(x) = v(x|a_1, y|a_2)(y) \Leftrightarrow 1 = 1 \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ αποτελεί μοντέλο της δοσμένης πρότασης.

(β′) Αν θεωρήσουμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \{-1, 1\}$, όπου $P^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in \{-1, 1\}^2 : x|y\}$, έχουμε ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει :

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y P(x, y)[v] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} P(x, y)[v(x|a_1, y|a_2)] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &(v(x|a_1, y|a_2)(x), v(x|a_1, y|a_2)(y)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &a_1|a_2 \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ αποτελεί μοντέλο της δοσμένης πρότασης.

(γ′) Αν θεωρήσουμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \{3, 5\}$, όπου $P^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in \{3, 5\}^2 : 2x|y\}$, έχουμε ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει :

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y \neg P(x, y)[v] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &\not\models_{\mathfrak{A}} P(x, y)[v(x|a_1, y|a_2)] && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &(v(x|a_1, y|a_2)(x), v(x|a_1, y|a_2)(y)) \notin P^{\mathfrak{A}} && \text{ανν} \\ \forall a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}| : &2a_1 \not| a_2 \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ αποτελεί μοντέλο της δοσμένης πρότασης.

(δ′) Αν θεωρήσουμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \{3, 5\}$, όπου $P^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in \{3, 5\}^2 : x|y\}$, έχουμε ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει :

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y P(x, y)[v] && \text{ανν} \\ \forall a_1, \exists a_2 \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} P(x, y)[v(x|a_1, y|a_2)] && \text{ανν} \\ \forall a_1, \exists a_2 \in |\mathfrak{A}| : &(v(x|a_1, y|a_2)(x), v(x|a_1, y|a_2)(y)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{ανν} \\ \forall a_1, \exists a_2 \in |\mathfrak{A}| : &a_1|a_2 \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ αποτελεί μοντέλο της δοσμένης πρότασης, αφού για κάθε $x \in |\mathfrak{A}|$ ισχύει ότι $(x, x) \in P^{\mathfrak{A}}$.

■

Κεφάλαιο 5

Πέμπτο Πακέτο Ασκήσεων

5.1 Ασκήσεις

Μέρος Ι: Λογικές Συνεπαγωγές

1. Δείξτε ότι ένας τύπος φ είναι έγκυρος αν και μόνο αν ο $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος.

2. Έστω φ, ψ τύποι μιας πρωτοτάξιας γλώσσας. Αποδείξτε ότι:
$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi.$$

3. Έστω φ, ψ τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας και έστω ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ. Χρησιμοποιώντας **σημασιολογικές** αποδείξεις, δείξτε τα παρακάτω:
   (i) $\models (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$.
   (ii) $\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$.

4. Δίνεται πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με ένα διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P. Να εξετάσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι έγκυρος:
$$\exists y P(y, y).$$

5. Δίνεται μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 στην οποία υπάρχουν δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q. Αποδείξτε ότι:
$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \not\models \forall x\,(P(x) \to Q(x)).$$

6. Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q.
   (i) Αποδείξτε ότι:
$$P(x) \to \forall x Q(x) \not\models \forall x\,(P(x) \to Q(x)).$$

(ii) Αποδείξτε ότι:

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \not\models P(x) \to \forall x Q(x).$$

7. Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q.

   (i) Αποδείξτε ότι:

   $$\forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y)) \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,.$$

   (ii) Αποδείξτε ότι:

   $$\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \not\models \forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y))\,.$$

8. Δείξτε ότι για κάθε διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P και κάθε μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης f, ισχύει:

   $$\models x = y \to [P(z, f(x)) \to P(z, f(y))]\,.$$

9. Θεωρούμε τη δομή $\mathfrak{A}$ για την πρωτοτάξια γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων, η οποία ορίζεται ως εξής:

   $$|\mathfrak{A}| = \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \in^{\mathfrak{A}} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2^m \text{ διαιρεί τον } n\}.$$

   Να εξετάσετε αν η δομή $\mathfrak{A}$ είναι μοντέλο της πρότασης:

   $$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 (x_4 \in x_3 \leftrightarrow x_4 \in x_1 \vee x_4 \in x_2).$$

10. Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις της Ελληνικής γλώσσας:

    (i) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος αριθμός.

    (ii) Ο n είναι ακέραιος αριθμός.

    (iii) Ο n είναι φυσικός αριθμός.

    Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, αποδείξτε ότι οι προτάσεις (i) και (ii) δεν συνεπάγονται λογικά την πρόταση (iii).

Μέρος ΙΙ: Αξιωματικά Συστήματα για τον Κατηγορηματικό Λογισμό

11. Να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω τύπους είναι λογικό αξίωμα. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

    (α′) $\forall y\,[\forall x\,(P(x) \to P(x)) \to (P(c) \to P(c))]$.

    (β′) $\forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y Q(y,y)$.

    (γ′) $P(x) \to \forall x P(x)$.

    (δ′) $x_2 = x_0 \to [P(x_2, f(x_5, x_2)) \to P(x_2, f(x_5, x_0))]$.

    (ε′) $x_1 = x_2 \to (g(x_2) = g(x_3) \leftrightarrow g(x_1) = g(x_3))$.

    (ϛ′) $[(\forall x P(x) \to \forall y P(y)) \to P(z)] \to [\forall x P(x) \to (\forall y P(y) \to P(z))]$.

12. Έστω $\varphi \in T(\Gamma_1)$ ένας τύπος και x, y δύο μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται καθόλου στον τύπο $\forall x \varphi$. Δείξτε ότι

    $$\forall x \varphi \vdash \forall y \varphi^x_y \quad \text{και} \quad \forall y \varphi^x_y \vdash \forall x \varphi.$$

13. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τύπο σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή, ο οποίος να είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο που δίνεται.

    (α′) $\forall x\,(P(x) \to x = y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z = u)$.

    (β′) $(\exists x P(x) \land \exists x Q(x)) \to R(x)$.

    (γ′) $\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)$.

14. Δείξτε ότι:

    (α′) $\vdash \forall x x = x$.

    (β′) $\vdash \forall x \forall y (x = y \to y = x)$.

    (γ′) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x = y \to (y = z \to x = z))$.

    (δ′) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 [x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (P(x_1, x_2) \to P(y_1, y_2)))]$.

15. Δείξτε ότι για τυχόντες όρους t, s ισχύουν τα παρακάτω:

    (α′) $\vdash t = t$.

    (β′) $\vdash t = s \to s = t$.

    (γ′) $\vdash t = s \to (s = r \to t = r)$.

    (δ′) $\vdash s = t \to (r = t \to s = r)$.

16. Χρησιμοποιώντας συντακτικές αποδείξεις, δείξτε ότι:

    (α′)
    $$\vdash (\varphi \to \exists x \psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi),$$
    με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ.

    (β′)
    $$\vdash (\forall x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi),$$
    με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

17. (α′) Δείξτε ότι $\vdash \forall x \varphi \to \exists x \varphi$.

    (β′) Δείξτε ότι αν $\vdash \varphi \to \psi$, τότε $\vdash \forall x \varphi \to \forall x \psi$.

    (γ′) Δείξτε ότι δεν ισχύει εν γένει ότι $\varphi \to \psi \models \forall x \varphi \to \forall x \psi$.

18. (i) Δείξτε ότι:
    $$\vdash \exists x\,(P(x) \to \forall x P(x)),$$
    όπου P μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο.

    (ii) Δείξτε ότι:
    $$\{Q(x), \forall y (Q(y) \to \forall z P(z))\} \vdash \forall x P(x),$$
    όπου P, Q μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα.

19. Αν Q είναι μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο, δείξτε ότι:
    $$\vdash Q(y) \leftrightarrow \forall x (x = y \to Q(x)).$$

20. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_1)$ και μεταβλητή x):

    (α′) $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$.

    (β′) $\vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$.

21. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_1)$ και μεταβλητή x):

    (α′) $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$.

    (β′) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$.

22. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε φ, ψ, μεταβλητές x, y και P, Q μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα):

    (α′) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)$.

    (β′) $\vdash \exists x(P(y) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(y) \wedge \exists x Q(x)$.

23. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε τύπο φ, οποιεσδήποτε μεταβλητές x, y, αν η x είναι αντικαταστάσιμη από την y στον φ, τότε
$$\vdash x = y \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi^*),$$
όπου φ^* είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας τη x, σε μερικές ή όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της, με y.

24. Αποδείξτε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων:

    (α′) Αν T είναι ένα σύνολο τύπων, φ ένας τύπος και $T \vdash \varphi$, τότε $T \models \varphi$.

    (β′) Κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων είναι και συνεπές.

25. Δείξτε ότι:
$$\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \forall x P(y, x).$$

26. Έστω $\mathfrak{A}$ δομή (για μια πρωτοτάξια γλώσσα Γ_1), v αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$, x μια μεταβλητή και s, t όροι. Αποδείξτε ότι
$$\overline{v}\left(s_t^x\right) = \overline{v\left(x|\overline{v}(t)\right)}(s),$$
όπου με s_t^x συμβολίζουμε τον όρο που παίρνουμε από τον όρο s αντικαθιστώντας όλες τις εμφανίσεις της x με t.

Μέρος ΙΙΙ: Στοιχεία Θεωρίας Μοντέλων

27. Θεωρούμε την γλώσσα Γ_1, η οποία έχει δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα, τα $+$ και $\cdot$. Έστω $\mathcal{N}$ η δομή για την γλώσσα Γ_1, που ορίζεται ως εξής:

    - το σύμπαν της δομής είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$,
    - στα συναρτησιακά σύμβολα αντιστοιχούν οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{N}$.

    Δείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις είναι ορίσιμη στην δομή $\mathcal{N}$.

(α′) $\{0\}$.

(β′) $\{1\}$

(γ′) $\{(m,n) \mid n$ είναι ο διάδοχος του m στο $\mathbb{N}\}$.

(δ′) $\{(m,n) \mid m < n$ στο $\mathbb{N}\}$.

28. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα, τα $+$ και $\cdot$. Έστω $\mathcal{R}$ η δομή για την γλώσσα που ορίζεται ως εξής:

    - το σύμπαν της δομής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $|\mathcal{R}| = \mathbb{R}$,
    - στα συναρτησιακά σύμβολα αντιστοιχούν οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

    Να γράψετε έναν τύπο που ορίζει στη δομή $\mathcal{R}$

    (α′) το διάστημα $[0, \infty)$.

    (β′) το σύνολο $\{2\}$.

29. Δείξτε ότι η πράξη της πρόσθεσης $\{(m,n,k) \mid k = m + n\}$ δεν είναι ορίσιμη στη δομή $(\mathbb{N}, \cdot)$.

    (*Υπόδειξη*: Θεωρήστε έναν αυτομορφισμό της $(\mathbb{N}, \cdot)$, ο οποίος εναλλάσει μεταξύ τους δύο πρώτους αριθμούς.)

30. Αν $\mathcal{K}$ είναι μια κλάση δομών για την γλώσσα Γ_1, τότε ορίζουμε ως θεωρία της $\mathcal{K}$ (και συμβολίζουμε με $\mathrm{Th}\mathcal{K}$) το σύνολο όλων των προτάσεων οι οποίες είναι αληθής σε κάθε μέλος του $\mathcal{K}$. Με άλλα λόγια,

    $$\mathrm{Th}\mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \text{ είναι πρόταση και } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ για κάθε } \mathfrak{A} \text{ του } \mathcal{K}\}.$$

    Έστω T, Σ δύο σύνολα προτάσεων και $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ δύο κλάσεις δομών της γλώσσας Γ_1. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

    (α′) Αν $T \subseteq \Sigma$, τότε $\mathrm{Mod}\Sigma \subseteq \mathrm{Mod}T$.

    (β′) Αν $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, τότε $\mathrm{Th}\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{K}$.

    (γ′) $T \subseteq \mathrm{ThMod}T$ και $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ModTh}\mathcal{K}$.

    (δ′) $\mathrm{Mod}T = \mathrm{ModThMod}T$ και $\mathrm{Th}\mathcal{K} = \mathrm{ThModTh}\mathcal{K}$.

31. Έστω $\mathfrak{A}$ μια δομή. Αποδείξτε ότι η κλάση των δομών που είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες της $\mathfrak{A}$ είναι $\Sigma\mathrm{K}_\Delta$.

    (*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι είναι $\mathrm{ModTh}\mathfrak{A}$.)

5.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Δείξτε ότι ένας τύπος φ είναι έγκυρος αν και μόνο αν ο $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος.

   Λύση. Υποθέτουμε ότι ο τύπος φ είναι έγκυρος, και θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$. Τότε, για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$ ισχύει ότι $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)]$, αφού φ αληθεύει μέσω της αποτίμησης $v(x|a)$ στη δομή $\mathfrak{A}$, για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$.Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi[v]$.

   Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο τύπος $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος και θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$. Συνεπώς, αφού $v(x) \in |\mathfrak{A}|$, από τον ορισμό αλήθειας του Tarski, έχουμε ότι φ αληθεύει μέσω της αποτίμησης $v(x|v(x))$, δηλαδή ισχύει ότι $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v]$, αφού ισχύει ότι $v \equiv v(x|v(x))$. ■

2. Έστω φ, ψ τύποι μιας πρωτοτάξιας γλώσσας. Αποδείξτε ότι:

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi.$$

   Λύση. Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \forall x(\varphi \to \psi)[v]$ και $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi$. Συνεπώς, έχουμε τις εξής συνεπαγωγές

$$\begin{array}{rll} & \models_{\mathfrak{A}} \forall x(\varphi \to \psi)[v] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi & \text{τότε} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : & \models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v(x|a)] \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : & (\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)]) \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : & \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi[v] & \end{array}$$

   Συνεπώς, έχουμε ότι $\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi$. ■

3. Έστω φ, ψ τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας και έστω ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ. Χρησιμοποιώντας **σημασιολογικές** αποδείξεις, δείξτε τα παρακάτω:

   (i) $\models (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$.

   (ii) $\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$.

   Λύση. (i) Για να αποδείξουμε ότι $\models (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\models (\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$ και $\models \exists x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \exists x\psi)$.Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \exists x\psi\} \models \exists x(\varphi \to \psi)$ (α΄) και $\{\exists x(\varphi \to \psi)\} \models \varphi \to \exists x\psi$ (β΄).

   (α΄) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \exists x\psi[v]$. Συνεπώς, έχουμε τις ακόλουθες συνεπαγωγές :

$$\begin{array}{rll} & \models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \exists x\psi[v] & \text{τότε} \\ & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \exists x\psi[v] & \text{τότε} \\ & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ ή υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] \ (x \text{ ελεύθερη στον } \varphi) & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \exists x(\varphi \to \psi)[v] & \end{array}$$

   Συνεπώς, προκύπτει ότι $\models (\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$.

(β′) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \exists x(\varphi \to \psi)$. Συνεπώς, έχουμε τις ακόλουθες συνεπαγωγές :

$$\begin{array}{rll} & \models_{\mathfrak{A}} \exists x(\varphi \to \psi) & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ x \text{ ελεύθερη στον } \varphi : & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ ή υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ & \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \exists x\psi[v] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \exists x\psi[v] & \end{array}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $\models \exists x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \exists x\psi)$.

(ii) Για να αποδείξουμε ότι $\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\models (\forall x\psi \to \varphi) \to \exists x(\psi \to \varphi)$ και $\models \exists x(\psi \to \varphi) \to (\forall x\psi \to \varphi)$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\forall x\psi \to \varphi\} \models \exists x(\psi \to \varphi)$ (α′) και $\{\exists x(\psi \to \varphi)\} \models \forall x\psi \to \varphi$ (β′).

(α′) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi \to \varphi[v]$. Συνεπώς, έχουμε τις ακόλουθες συνεπαγωγές :

$$\begin{array}{rll} & \models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi \to \varphi[v] & \text{τότε} \\ & \not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \exists x\neg\psi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] \ (x \text{ ελεύθερη στον } \varphi) & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \exists x(\psi \to \varphi)[v] & \end{array}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $\models (\forall x\psi \to \varphi) \to \exists x(\psi \to \varphi)$.

(β′) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \exists x(\psi \to \varphi)[v]$. Συνεπώς, έχουμε τις ακόλουθες συνεπαγωγές :

$$\begin{array}{rll} & \models_{\mathfrak{A}} \exists x(\psi \to \varphi)[v] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \models_{\mathfrak{A}} \psi \to \varphi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : & \not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] & \text{τότε} \\ x \text{ ελεύθερη στον } \varphi : & \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : \not\models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \exists x\neg\psi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ & \not\models \forall x\psi[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] & \text{τότε} \\ & \models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi \to \varphi[v] & \end{array}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $\models \exists x(\psi \to \varphi) \to (\forall x\psi \to \varphi)$.

■

4. Δίνεται πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με ένα διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P. Να εξετάσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι έγκυρος:

$$\exists y P(y, y).$$

Λύση. Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$, με $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$ και $P^{\mathfrak{A}} = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n < m\}$. Τότε, είναι σαφές ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ισχύει ότι $\not\models_{\mathfrak{A}} \exists y P(y,y)[v]$, συνεπώς ο τύπος $\exists y P(y,y)$, δεν είναι έγκυρος. ∎

5. Δίνεται μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 στην οποία υπάρχουν δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q. Αποδείξτε ότι:

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \not\models \forall x \left(P(x) \to Q(x)\right).$$

Λύση. Αν $\mathfrak{A}$ μια δομή και $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ μια αποτίμηση τότε έχουμε ότι

$$\begin{array}{cr}
\models_{\mathfrak{A}} \forall x P(x) \to \forall x Q(x)[v] & \text{ανν} \\
\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x P(x)[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \forall x Q(x)[v] & \text{ανν} \\
\models_{\mathfrak{A}} \exists x \neg P(x) \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \forall x Q(x)[v] & \text{ανν} \\
(\text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \neg P(x)[v(x|a)]) \text{ ή } (\text{για κάθε } b \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} Q(x)[v(x|b)]) & \text{ανν} \\
(\text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| :\ a \notin P^{\mathfrak{A}}) \text{ ή } \left(\text{για κάθε } b \in |\mathfrak{A}| : b \in Q^{\mathfrak{A}}\right) &
\end{array}$$

και

$$\begin{array}{cr}
\models_{\mathfrak{A}} \forall x \left(P(x) \to Q(x)\right)[v] & \text{ανν} \\
\text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} P(x) \to Q(x)[v(x|a)] & \text{ανν} \\
\text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : \not\models_{\mathfrak{A}} P(x)[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} Q(x)[v(x|a)] & \text{ανν} \\
\text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : a \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } a \in Q^{\mathfrak{A}} &
\end{array}$$

Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$, με $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}, P^{\mathfrak{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ και $Q^{\mathfrak{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to \mathbb{N}$. Έτσι παρατηρούμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \forall x P(x) \to \forall x Q(x)[v]$, αλλά $\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x \left(P(x) \to Q(x)\right)[v]$. ∎

6. Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q.

   (i) Αποδείξτε ότι:
   $$P(x) \to \forall x Q(x) \not\models \forall x \left(P(x) \to Q(x)\right).$$

   (ii) Αποδείξτε ότι:
   $$\forall x \left(P(x) \to Q(x)\right) \not\models P(x) \to \forall x Q(x).$$

Λύση. Έστω δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} P(x) \to \forall x Q(x)[v]$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{array}{lr}
\models_{\mathfrak{A}} P(x) \to \forall x Q(x)[v] & \text{ανν} \\
\not\models_{\mathfrak{A}} P(x)[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} \forall x Q(x)[v] & \text{ανν} \\
v(x) \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} Q(x)[v(x|a)] & \text{ανν} \\
v(x) \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| :\ a \in Q^{\mathfrak{A}} &
\end{array}$$

Ομοίως αν δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v]$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &\models_{\mathfrak{A}} P(x) \to Q(x)[v(x|a)] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &\not\models_{\mathfrak{A}} P(x)[v(x|a)] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} Q(x)[v(x|a)] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &a \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } a \in Q^{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

(i) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}, P^{\mathfrak{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ είναι περιττός}\}$ και $Q^{\mathfrak{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Επίσης θεωρούμε αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $v(x_1) = 6$, όπου με βάση τα παραπάνω έχουμε $\models_{\mathfrak{A}} P(x) \to \forall x Q(x)[v]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v]$.

(ii) Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$, ώστε $|\mathfrak{A}| = \{a_1, a_2\}$ με $a_1 \neq a_2$ και $P^{\mathfrak{A}} = Q^{\mathfrak{A}} = \{a_1\}$. Επίσης θεωρούμε αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$, ώστε $v(x) = a_1$. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v]$, αφού $P^{\mathfrak{A}} = Q^{\mathfrak{A}}$, ενώ ισχύει ότι $\not\models_{\mathfrak{A}} P(x) \to \forall x Q(x)$, αφού $v(x) = a_1 \in P^{\mathfrak{A}}$ και $a_2 \in |\mathfrak{A}|$, αλλά έχουμε ότι $a_2 \notin Q^{\mathfrak{A}}$.

■

7. Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 με δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορήματος P, Q.

(i) Αποδείξτε ότι:
$$\forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y)) \models \forall x\,(P(x) \to Q(x)).$$

(ii) Αποδείξτε ότι:
$$\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \not\models \forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y)).$$

Λύση. Έστω δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y))\,[v] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &\forall y\,(P(x) \to Q(y))\,[v(x|a)] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a, b \in |\mathfrak{A}| : &P(x) \to Q(y)[v(x|a, y|b)] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a, b \in |\mathfrak{A}| : &a \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } b \in Q^{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &P(x) \to Q(x)[v(x|a)] && \text{ανν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : &a \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } a \in Q^{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

(i) Είναι σαφές, με βάση τα παραπάνω, ότι $\forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y)) \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$.

(ii) Αν θεωρήσουμε δομή $\mathfrak{A}$ με $|\mathfrak{A}| = \mathbb{R},\ P^{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = Q^{\mathfrak{A}}$, τότε είναι σαφές ότι για κάθε αποτίμηση v ισχύει ότι $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\,(P(x) \to Q(x))\,[v]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y\,(P(x) \to Q(y))\,[v]$.

■

8. Δείξτε ότι για κάθε διθέσιο σύμβολο κατηγορήματος P και κάθε μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης f, ισχύει:
$$\models x = y \to [P(z, f(x)) \to P(z, f(y))]\,.$$

Λύση. Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$. Τότε, έχουμε ότι
$$\begin{array}{ll} \not\models_{\mathfrak{A}} x = y[v] & \text{ανν} \\ v(x) \neq v(y) & \end{array}$$
και επίσης
$$\begin{array}{ll} \models_{\mathfrak{A}} P\left(z, f(x)\right) \to P\left(z, f(y)\right)[v] & \text{ανν} \\ \not\models_{\mathfrak{A}} P\left(z, f(x)\right)[v] \text{ ή } \models_{\mathfrak{A}} P\left(z, f(y)\right)[v] & \text{ανν} \\ (v(z), f(v(x))) \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } (v(z), f(v(y))) \in P^{\mathfrak{A}} & \end{array}$$
Έτσι, έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} x = y \to [P(z, f(x)) \to P(z, f(y))]\,[v]$ αν και μόνο αν
$$v(x) \neq v(y) \quad \text{ή} \quad \left[(v(z), f(v(x))) \notin P^{\mathfrak{A}} \text{ ή } (v(z), f(v(y))) \in P^{\mathfrak{A}}\right] \tag{5.1}$$
όπου είναι σαφές ότι η σχέση (5.1) ισχύει. ■

9. Θεωρούμε τη δομή $\mathfrak{A}$ για την πρωτοτάξια γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων, η οποία ορίζεται ως εξής:
$$|\mathfrak{A}| = \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \in^{\mathfrak{A}} = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2^m \text{ διαιρεί τον } n\}.$$
Να εξετάσετε αν η δομή $\mathfrak{A}$ είναι μοντέλο της πρότασης:
$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 (x_4 \in x_3 \leftrightarrow x_4 \in x_1 \vee x_4 \in x_2).$$

Λύση. Έστω $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ αποτίμηση στη δομή $\mathfrak{A}$. Τότε, έχουμε ότι
$$\models_{\mathfrak{A}} \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 (x_4 \in x_3 \leftrightarrow x_4 \in x_1 \vee x_4 \in x_2)[v]$$
ανν για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$
$$\models_{\mathfrak{A}} x_4 \in x_3 \leftrightarrow x_4 \in x_1 \vee x_4 \in x_2)[u]$$
όπου u είναι η αποτίμηση $u = v(x_1|n, x_2|m, x_3|k, x_4|\ell)$.
ανν για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$
$$\models_{\mathfrak{A}} x_4 \in x_3[v] \quad \text{ανν} \quad \models_{\mathfrak{A}} x_4 \in x_1 \vee x_4 \in x_2$$
ανν για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$
$$(\ell, k) \in \in^{\mathfrak{A}} \quad \text{ανν} \quad (\ell, n) \in \in^{\mathfrak{A}} \text{ ή } (\ell, m) \in \in^{\mathfrak{A}}$$
ανν για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$
$$2^\ell | k \quad \text{ανν} \quad 2^\ell | n \text{ ή } 2^\ell | m \tag{5.2}$$
Τώρα, αν $n = 0$ (ή $m = 0$) έχουμε ότι $2^\ell | n$ (αντίστοιχα $2^\ell | m$), για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν επιλέξουμε $k = 0$ έχουμε το ζητούμενο.Τώρα, αν $n, m \neq 0$ θεωρούμε $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, τους μεγιστούς φυσικούς, ώστε $2^{n_1} | n$ και $2^{m_1} | m$. Τότε, αν $k = 2^{\max\{n_1, m_1\}}$ τότε έχουμε ότι ισχύει η σχέση (5.2). ■

10. Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις της Ελληνικής γλώσσας:

    (i) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος αριθμός.

    (ii) Ο n είναι ακέραιος αριθμός.

    (iii) Ο n είναι φυσικός αριθμός.

    Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, αποδείξτε ότι οι προτάσεις (i) και (ii) δεν συνεπάγονται λογικά την πρόταση (iii).

    Λύση. ■

11. Να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω τύπους είναι λογικό αξίωμα. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

    (α′) $\forall y\,[\forall x\,(P(x) \to P(x)) \to (P(c) \to P(c))]$.

    (β′) $\forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y Q(y,y)$.

    (γ′) $P(x) \to \forall x P(x)$.

    (δ′) $x_2 = x_0 \to [P(x_2, f(x_5,x_2)) \to P(x_2, f(x_5,x_0))]$.

    (ε′) $x_1 = x_2 \to (g(x_2) = g(x_3) \leftrightarrow g(x_1) = g(x_3))$.

    (ϛ′) $[(\forall x P(x) \to \forall y P(y)) \to P(z)] \to [\forall x P(x) \to (\forall y P(y) \to P(z))]$.

    Λύση. (α′) Ο τύπος είναι λογικό αξίωμα ως γενίκευση του τύπου

    $$\forall x\,(P(x) \to P(x)) \to (P(x) \to P(x))_c^x \ ,$$

    ο οποίος είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.2, αφού x είναι αντικαταστάσιμη από την σταθερά c.

    (β′) Αν ο τύπος ήταν λογικό αξίωμα, τότε θα άνηκε στο Α.Σ.2., το οποίο δεν ισχύει, αφού η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από την y.

    (γ′) Είναι σαφές ότι ο τύπος δεν ανήκει σε κανένα από τα Α.Σ.1-Α.Σ.3,Α.Σ.5.,Α.Σ.6. Τώρα, ο τύπος δεν ανήκει στο Α.Σ.4, αφού η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $P(x)$.

    (δ′) Ο τύπος είναι λογικό αξίωμα από το Α.Σ.6, αφού αν φ είναι ο τύπος $P(x_2, f(x_5,x_2))$ και αν φ^* είναι ο τύπος $P(x_2, f(x_5,x_0))$, παρατηρούμε ότι ο φ^* προκύπτει από μερικές αντικαταστάσεις ελεύθερων εμφανίσεων του x_2 από το x_0.

    (ε′) Αν ο τύπος ήταν λογικό αξίωμα θα άνηκε στο Α.Σ.6. Όμως, παρατηρούμε ότι ο δοσμένος τύπος δεν είναι της μορφής $x = y \to (\varphi \to \varphi^*)$, όπου φ^* έχει προκύψει από κάποιες αντικαταστάσεις ελεύθερων εμφανίσεων των x από το y. Συνεπώς, ο τύπος δεν είναι λογικό αξίωμα.

    (ϛ′) Γνωρίζουμε ότι ο τύπος $[(x \to y) \to z] \to [x \to (y \to z)]$ είναι ταυτολογία στον προτασιακό λογισμό και παρατηρούμε ότι ο δοσμένος τύπος προκύπτει με αντικατάσταση του x από $\forall x P(x)$, y από $\forall y P(y)$ και του z από $P(z)$. Συνεπώς, από το Α.Σ.1. έχουμε ότι ο δοσμένος τύπος είναι λογικό αξίωμα.

    ■

12. Έστω $\varphi \in T(\Gamma_1)$ ένας τύπος και x, y δύο μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται καθόλου στον τύπο $\forall x\varphi$. Δείξτε ότι

$$\forall x\varphi \vdash \forall y\varphi^x_y \quad \text{και} \quad \forall y\varphi^x_y \vdash \forall x\varphi.$$

Λύση. Για να δείξουμε ότι $\forall x\varphi \vdash \forall y\varphi^x_y$, αφού η y δεν εμφανίζεται στον τύπο $\forall x\varphi$, από το Θεώρημα Γενίκευσης αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x\varphi \vdash \varphi^x_y$, το οποίο ισχύει από Α.Σ.2., αφού y δεν εμφανίζεται στον $\forall x\varphi$, άρα δεν εμφανίζεται καθόλου και στον φ, συνεπώς x είναι αντικαταστάσιμη από την y.

Για να αποδείξουμε ότι $\forall y\varphi^x_y \vdash \forall x\varphi$, αφού η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται στον τύπο $\forall y\varphi^x_y$, από το Θεώρημα Γενίκευσης αρκεί να δείξουμε ότι $\forall y\varphi^x_y \vdash \varphi$. Τώρα, παρατηρούμε ότι η y είναι αντικαταστάσιμη από τη x στο τύπο φ^x_y, αφού από τον αρχικό τύπο φ έχουν αντικατασταθεί όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις του x από την y και η y δεν εμφανίζεται καθόλου στον φ. Μάλιστα έχουμε ότι $(\varphi^x_y)^y_x$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο φ. Συνεπώς, από Α.Σ.2. προκύπτει το ζητούμενο. ∎

13. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τύπο σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή, ο οποίος να είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο που δίνεται.

(α΄) $\forall x\,(P(x) \to x = y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z = u)$.

(β΄) $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \to R(x)$.

(γ΄) $\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)$.

Λύση. (α΄) Αρχικά, αφού η u δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\exists z P(z)$ έχουμε ότι

$$\exists z P(z) \to \exists u z = u \equiv \exists u\,(\exists z P(z) \to z = u) \tag{5.3}$$

Επίσης αν θεωρήσουμε μεταβλητή k, που δεν είναι μία από τις x, y, z, u έχουμε ότι $\exists z P(z) \equiv \exists k P(k)$, συνεπώς έχουμε ότι

$$\exists u\,(\exists z P(z) \to z = u) \equiv \exists u\,(\exists k P(k) \to z = u) \equiv \exists u \forall k\,(P(k) \to z = u) \tag{5.4}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (5.3) και (5.4) έχουμε ότι ο αρχικός τύπος είναι ισοδύναμος με τον

$$\forall x\,(P(x) \to x = y) \to \exists u \forall k\,(P(k) \to z = u) \tag{5.5}$$

Αφού, οι μεταβλητές u, k δεν εμφανίζονται στον τύπο $\forall x\,(P(x) \to x = y)$ έχουμε ότι ο τύπος (5.5) είναι ισοδύναμος με τον τύπο

$$\exists u \forall k\,[\forall x\,(P(x) \to x = y) \to P(k) \to z = u] \tag{5.6}$$

Τέλος, αφού x δεν εμφανίζεται στον τύπο $P(k) \to z = u$ έχουμε ότι ο τύπος (5.5) είναι ισοδύναμος με τον

$$\exists u \forall k \exists x\,[(P(x) \to x = y) \to P(k) \to z = u] \tag{5.7}$$

όπου ο τύπος (5.7) βρίσκεται σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.

(β′) Αρχικά παρατηρούμε τις εξής ισοδυναμίες

$$
\begin{aligned}
&(\exists x P(x) \land \exists x Q(x)) \to R(x)\\
\equiv&\neg\left[\neg\left(\exists x P(x)\right) \lor \neg\left(\exists x Q(x)\right)\right] \to R(x)\\
\equiv&\neg\left[\exists x P(x) \to \neg\left(\exists x Q(x)\right)\right] \to R(x)\\
\equiv&\neg\left[\exists x P(x) \to \forall x\left(\neg Q(x)\right)\right] \to R(x)
\end{aligned}
$$

Τώρα, αφού x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $\forall x\left(\neg Q(x)\right)$ έχουμε ότι ο αρχικό τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο

$$\neg\forall x\left[P(x) \to \forall x\left(\neg Q(x)\right)\right] \to R(x) \tag{5.8}$$

Τώρα, η x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $P(x)$, συνεπώς αν y μεταβλητή διαφορετική του x έχουμε ότι $\forall x\left(\neg Q(x)\right) \equiv \forall y\left(\neg Q(y)\right)$ και συνεπώς ο τύπος (5.8) είναι ισοδύναμος με τον

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall x\left[P(x) \to \forall y\left(\neg Q(y)\right)\right] \to R(x)\\
\equiv&\neg\forall x\forall y\left[P(x) \to \neg Q(y)\right] \to R(x)\\
\equiv&\exists x\exists y\neg\left[P(x) \to \neg Q(y)\right] \to R(x)
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στο τύπο $R(x)$, συνεπώς διαλέγουμε μεταβλητή z διαφορετική από τις x, y, όπου έχουμε ότι

$$\exists x\exists y\neg\left[P(x) \to \neg Q(y)\right] \equiv \exists z\exists y\neg\left[P(z) \to \neg Q(y)\right]$$

Συνεπώς με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι ο αρχικός τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο

$$\forall z\forall y\left[\neg\left(P(z) \to \neg Q(y)\right) \to R(x)\right] \tag{5.9}$$

ο οποίος βρίσκεται σε Κανονική Ποσοδεικτική μορφή.

■

14. Δείξτε ότι:

(α′) $\vdash \forall x x = x$.

(β′) $\vdash \forall x\forall y(x = y \to y = x)$.

(γ′) $\vdash \forall x\forall y\forall z(x = y \to (y = z \to x = z))$.

(δ′) $\vdash \forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (P(x_1, x_2) \to P(y_1, y_2)))]$.

Λύση. (α′) Είναι άμεσο ότι $\vdash \forall x x = x$, ως γενίκευση λογικού αξιώματος.

(β′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x\forall y(x = y \to y = x)$, αφού x, y δεν εμφανίζονται ελεύθερες στις υποθέσεις μας, από το Θεώρημα Γενίκευσης αρκεί να δείξουμε ότι $\vdash x = y \to y = x$. Τώρα, από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $\{x = y\} \vdash y = x$. Πράγματι, για την τελευταία σχέση έχουμε την εξής τυπική απόδειξη :

τ_1	$x = x$	Α.Σ.5
τ_2	$(x = y) \to (x = x \to y = x)$	Α.Σ.6
τ_3	$x = y$	υπόθεση
τ_4	$x = x \to y = x$	τ_2, τ_3, M.P.
τ_5	$y = x$	τ_1, τ_4, M.P.

Έτσι, έχουμε δείξουμε το ζητούμενο.

(γ′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \to (y = z \to x = z))$, από το Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$.Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{x = y, y = z\} \vdash x = z \tag{5.10}$$

Πράγματι, μέσω της παρακάτω τυπικής απόδειξης

τ_1	$y = z \to (x = y \to x = z)$	Α.Σ.6.
τ_2	$y = z$	υπόθεση
τ_3	$x = y \to x = z$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$x = y$	υπόθεση
τ_5	$x = z$	τ_3, τ_4, M.P.

έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

(δ′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 [x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (P(x_1, x_2) \to P(y_1, y_2)))]$ από το Θεώρημα Γενίκευσης αρκεί να δείξουμε ότι $\vdash x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (P(x_1, x_2) \to P(y_1, y_2)))$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{x_1 = y_1, x_2 = y_2, P(x_1, x_2)\} \vdash P(y_1, y_2) \tag{5.11}$$

Έχουμε την εξής τυπική απόδειξη

τ_1	$x_1 = y_1 \to (P(x_1, x_2) \to P(y_1, x_2))$	Α.Σ.6
τ_2	$x_1 = y_1$	υπόθεση
τ_3	$P(x_1, x_2) \to P(y_1, x_2)$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$P(x_1, x_2)$	υπόθεση
τ_5	$P(y_1, x_2)$	τ_4, τ_5M.P.
τ_6	$x_2 = y_2 \to (P(y_1, x_2) \to P(y_1, y_2))$	Α.Σ.6
τ_7	$x_2 = y_2$	υπόθεση
τ_8	$P(y_1, x_2) \to P(y_1, y_2)$	τ_6, τ_7, M.P.
τ_9	$P(y_1, y_2)$	τ_5, τ_8, M.P.

Συνεπώς, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

■

15. Δείξτε ότι για τυχόντες όρους t, s ισχύουν τα παρακάτω:

(α′) $\vdash t = t$.

(β′) $\vdash t = s \to s = t$.

(γ′) $\vdash t = s \to (s = r \to t = r)$.

(δ′) $\vdash s = t \to (r = t \to s = r)$.

Λύση. ■

16. Χρησιμοποιώντας συντακτικές αποδείξεις, δείξτε ότι:

(α′)
$$\vdash (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi)\,,$$
με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ.

(β′)
$$\vdash (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi)\,,$$
με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

Λύση. (α′) Για να δείξουμε ότι $\vdash (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi)$, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\vdash (\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x\,(\varphi \to \psi) \tag{5.12}$$
και
$$\vdash \exists x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \exists x\psi) \tag{5.13}$$
Για να δείξουμε το (5.12), από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\exists x\,(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \to \exists x\psi)$$
δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι
$$\varphi \to \neg\forall x\neg\psi \vdash \neg\forall x\neg(\varphi \to \psi)$$
Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\varphi \to \neg\forall x\neg\psi)$$
Από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi \tag{5.14}$$
και
$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\neg\psi \tag{5.15}$$
Για να δείξουμε το (5.14), αφού γνωρίζουμε ότι $\forall x\neg(\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$ είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.2, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$$
Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$$
και από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash \psi$$

το οποίο ισχύει, αφού το σύνολο $\{\neg\varphi, \varphi\}$ είναι αντιφατικό.
Για το (5.15), από Θέωρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$$

και αφού $\forall x \neg(\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$ είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.2, αρκεί να δείξουμε

$$\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$$

Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\psi \vdash \varphi \to \psi$$

Τέλος από Θέωρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\psi, \varphi\} \vdash \psi$$

το οποίο ισχύει.
Για να αποδείξουμε το (5.13), από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε

$$\exists x\,(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \to \exists x \psi) \tag{5.16}$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\forall x \neg\,(\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \neg\forall x \neg\psi$$

Από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\forall x \neg\,(\varphi \to \psi)\,, \varphi\} \vdash \neg\forall x \neg\psi$$

Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x \neg\psi, \varphi\} \vdash \forall x \neg\,(\varphi \to \psi)$$

Αφού, η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ, από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x \neg\psi, \varphi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \psi)$$

Αφού $\forall x \neg\psi \to \neg\psi$ είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\psi, \varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$$

Από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\neg\psi, \varphi\} \vdash \varphi$ και $\{\neg\psi, \varphi\} \vdash \neg\psi$, το οποίο ισχύει.

(β′) Για να δείξουμε ότι $\vdash (\forall x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\,(\varphi \to \psi)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash (\forall x \varphi \to \psi) \to \exists x\,(\varphi \to \psi) \tag{5.17}$$

και

$$\vdash \exists x\,(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \psi) \tag{5.18}$$

Για το (5.17), από το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \to \psi \vdash \exists x\,(\varphi \to \psi)$$

δηλαδή

$$\forall x\varphi \to \psi \vdash \neg\forall x\neg\,(\varphi \to \psi)$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg\,(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\forall x\varphi \to \psi)$$

Από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\varphi \tag{5.19}$$

και

$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi \tag{5.20}$$

Για το (5.19), από το Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$$

Τώρα, όμοια με πριν, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$$

και από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$$

Από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash \psi$$

που ισχύει, αφού το σύνολο $\{\neg\varphi, \varphi\}$ είναι αντιφατικό.
Για το (5.20), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg(\varphi \to \psi)\} \vdash \psi$$

Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\psi \vdash \varphi \to \psi$$

Τέλος, από το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi$$

το οποίο ισχύει.
Για το (5.18), από το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\exists x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \psi$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\forall x\neg(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \psi$$

Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \forall x\neg(\varphi \to \psi)$$

και αφού η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο τύπο ψ, από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$$

Αφού $\forall x\varphi \to \varphi$ είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\psi, \varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$$

το οποίο προκύπτει άμεσα, από γνωστή στρατηγική.

■

17. (α′) Δείξτε ότι $\vdash \forall x\varphi \to \exists x\varphi$.
    (β′) Δείξτε ότι αν $\vdash \varphi \to \psi$, τότε $\vdash \forall x\varphi \to \forall x\psi$.
    (γ′) Δείξτε ότι δεν ισχύει εν γένει ότι $\varphi \to \psi \models \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Λύση. (α′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x\varphi \to \exists x\varphi$, από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vdash \exists x\varphi \ ,$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vdash \neg\forall x\neg\varphi \ .$$

Τώρα, από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vdash \neg\neg\varphi,$$

και αφού $\varphi \to \neg\neg\varphi$ είναι ταυτολογία στον προτασιακό λογισμό, από Α.Σ.1, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x\varphi \vdash \varphi$, το οποίο ισχύει από Α.Σ.2.

(β′) Υποθέτουμε ότι $\vdash \varphi \to \psi$, δηλαδή από Θεώρημα Απαγωγής, υποθέτουμε ότι $\varphi \vdash \psi$. Συνεπώς, υπάρχει τυπική απόδειξη $\tau_1, \cdots, \tau_n = \psi$, όπου τ_i είναι λογικό αξίωμα ή $\tau_i = \varphi$ ή τ_i προκύπτει από Μ.Ρ., για κάθε $i = 1, \cdots, n$.

Τώρα, για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x\varphi \to \forall x\psi$, από Θέωρημα Απάγωγης, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x\varphi \vdash \forall x\psi$. Συνεπώς, από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x\varphi \vdash \psi$. Τώρα, αν θεωρήσουμε τον τύπο $\forall x\varphi$ ως υπόθεση έχουμε την εξής τυπική απόδειξη

σ_1	$\forall x\varphi \to \varphi$	Α.Σ.2
σ_2	$\forall x\varphi$	υπόθεση
σ_3	φ	σ_1, σ_2, Μ.Ρ.

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω τυπικές αποδείξεις έχουμε το ζητούμενο.

(γ′) Έστω $\mathfrak{A}$ δομή και $v : M(\Gamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ αποτίμηση. Τότε, έχουμε ότι

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v] \Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v] \quad ή \quad \models_{\mathfrak{A}} \psi[v]$$

και

$$\begin{array}{ll} \models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi \to \forall x\psi[v] & ανν \\ \not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi[v] \quad ή \models_{\mathfrak{A}} \forall x\psi[v] & ανν \\ \text{υπάρχει } a \in |\mathfrak{A}| : \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[v(x|a)] \text{ ή για κάθε } b \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \psi[v(x|b)] & \end{array}$$

Τώρα, αν P, Q δύο μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα, θεωρούμε φ να είναι ο τύπος $P(x)$ και ψ να είναι ο τύπος $Q(x)$. Θεωρούμε δομή $\mathfrak{A}$, ώστε $|\mathfrak{A}| = \{a, b\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{a, b\}$ και $Q^{\mathfrak{A}} = \{b\}$, με $a \neq b$. Τώρα, αν θεωρήσουμε την αποτίμηση v, όπου $v(x) = b$ έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi[v]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi \to \forall x\psi[v]$.

■

18. (i) Δείξτε ότι:

$$\vdash \exists x \left(P(x) \to \forall x P(x)\right),$$

όπου P μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο.

(ii) Δείξτε ότι:

$$\{Q(x), \forall y(Q(y) \to \forall z P(z))\} \vdash \forall x P(x),$$

όπου P, Q μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα.

Λύση. (α′) Για να δείξουμε ότι $\vdash \exists x \left(P(x) \to \forall x P(x)\right)$, αφού η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $\forall x P(x)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)$$

το οποίο ισχύει αφού ο τύπος $\varphi \to \varphi$ είναι ταυτολογία στον προτασιακό λογισμό, συνεπώς $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$ είναι λογικό αξίωμα από Α.Σ.1.

(β′) Θέλουμε αν δείξουμε ότι $\{Q(x), \forall y(Q(y) \to \forall z P(z))\} \vdash \forall x P(x)$. Έχουμε ότι y είναι αντικαστάσιμη από το x, συνεπώς από Α.Σ.2 έχουμε ότι

$$\forall y(Q(y) \to \forall z P(z)) \to Q(x) \to \forall z P(z).$$

Έτσι, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη

τ_1	$\forall y(Q(y) \to \forall z P(z)) \to Q(x) \to \forall z P(z)$	Α.Σ.2
τ_2	$\forall y(Q(y) \to \forall z P(z))$	υπόθεση
τ_3	$Q(x) \to \forall z P(z)$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$Q(x)$	υπόθεση
τ_5	$\forall z P(z)$	

Τέλος, έχουμε ότι $\forall z P(z)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x P(x)$, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

■

19. Αν Q είναι μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο, δείξτε ότι:

$$\vdash Q(y) \leftrightarrow \forall x(x = y \to Q(x)).$$

Λύση. Για να αποδείξουμε ότι $\vdash Q(y) \leftrightarrow \forall x(x = y \to Q(x))$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash Q(y) \to \forall x(x = y \to Q(x)) \quad \text{(i)}$$

και

$$\vdash \forall x(x = y \to Q(x)) \to Q(y) \quad \text{(ii)}.$$

(i) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash Q(y) \to \forall x(x = y \to Q(x))$, από το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Q(y) \vdash \forall x(x = y \to Q(x)) \ .$$

Αφού, η x δεν εμφανίζεται στον τύπο $Q(y)$, από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Q(y) \vdash x = y \to Q(x) \ .$$

Από το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{Q(y), x = y\} \vdash Q(x).$$

Τώρα, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη :

τ_1	$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$	λογικό αξίωμα
τ_2	$\forall x \forall y(x = y \to y = x) \to \forall y(x = y \to y = x)$	Α.Σ.2
τ_3	$\forall y(x = y \to y = x)$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$\forall y(x = y \to y = x) \to (x = y \to y = x)$	Α.Σ.2
τ_5	$x = y \to y = x$	τ_3, τ_4, M.P.
τ_6	$x = y$	υπόθεση
τ_7	$y = x$	τ_5, τ_6, M.P.
τ_8	$y = x \to (Q(y) \to Q(x))$	Α.Σ.6
τ_9	$Q(y) \to Q(x)$	τ_7, τ_8, M.P.
τ_{10}	$Q(y)$	υπόθεση
τ_{11}	$Q(x)$	τ_9, τ_{10}, M.P.

Συνεπώς έχουμε αποδείξει ότι $\{Q(y), x = y\} \vdash Q(x)$, άρα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(ii) Για να δείξουμε ότι $\vdash \forall x(x = y \to Q(x)) \to Q(y)$, από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x(x = y \to Q(x)) \vdash Q(y)$$

Τώρα, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη :

τ_1	$\forall x(x = y \to Q(x))$	υπόθεση
τ_2	$\forall x(x = y \to Q(x)) \to (y = y \to Q(y)$	Α.Σ.2
τ_3	$y = y \to Q(y)$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$y = y$	Α.Σ.5
τ_5	$Q(y)$	τ_3, τ_4, M.P.

■

20. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_1)$ και μεταβλητή x):

(α′) $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$.

(β′) $\vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$.

Λύση. (α′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \to \exists x\varphi \vee \exists x\psi \quad \text{(i)}$$

και

$$\vdash \exists x\varphi \vee \exists x\psi \to \exists x(\varphi \vee \psi) \quad \text{(ii)}$$

(i) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \to \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, από Θέωρημα Απαγωγής, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x(\neg\varphi \to \psi) \vdash \neg\exists x\varphi \to \exists x\psi$$

Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\neg\forall x\neg(\neg\varphi \to \psi) \vdash \forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi \ .$$

Από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\forall x\neg(\neg\varphi \to \psi), \forall x\neg\varphi\} \vdash \neg\forall x\neg\psi \ .$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x\neg\varphi, \forall x\neg\psi\} \vdash \forall x\neg(\neg\varphi \to \psi) \ .$$

Από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x\neg\varphi, \forall x\neg\psi\} \vdash \neg(\neg\varphi \to \psi) \ .$$

Από Α.Σ.2 έχουμε ότι $\forall x\neg\varphi \to \varphi$ και $\forall x\neg\psi \to \psi$, συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\neg\varphi \to \psi) \ .$$

Τώρα, από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi \quad \text{και} \quad \{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi$$

το οποίο είναι άμεσο ότι ισχύει, συνεπώς έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(ii) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \exists x\varphi \vee \exists x\psi \to \exists x(\varphi \vee \psi)$, από το Θέωρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x\varphi \vee \exists x\psi \vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\exists x\varphi \to \exists x\psi \vdash \exists x(\neg\varphi \to \psi)$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi \vdash \neg\forall x\neg(\neg\varphi \to \psi) \ .$$

Ισοδύναμα, από γνωστή στρατηγική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi \vdash \neg\varphi \to \psi \ .$$

Από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi \ .$$

Θεωρούμε μεταβλητή z, που δεν εμφανίζεται στους τύπους $\neg\varphi$ και $\neg\psi$. Γνωρίζουμε ότι

$$\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi \equiv \forall z\neg\varphi \to \neg\forall z\neg\psi \ ,$$

συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall z\neg\varphi \to \neg\forall z\neg\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi \ .$$

Τώρα, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη

τ_1	$\neg\varphi \to \forall z\neg\varphi$	Α.Σ.4
τ_2	$\neg\varphi$	υπόθεση
τ_3	$\forall z\neg\varphi$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$\forall z\neg\varphi \to \neg\forall z\neg\psi$	υπόθεση
τ_5	$\neg\forall z\neg\psi$	τ_3, τ_4, M.P.
τ_6	$\neg\psi \to \forall z\neg\psi$	Α.Σ.4
τ_7	$(\neg\psi \to \forall z\neg\psi) \to (\neg\forall z\neg\psi \to \neg\neg\psi)$	Α.Σ.1
τ_8	$\neg\forall z\neg\psi \to \neg\neg\psi$	τ_6, τ_7, M.P.
τ_9	$\neg\neg\psi$	τ_5, τ_8, M.P.
τ_{10}	$\neg\neg\psi \to \psi$	Α.Σ.1
τ_{11}	ψ	τ_9, τ_{10}, M.P.

Συνεπώς, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

(β′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$, από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$$

Από Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \lor \forall x\psi \vdash \varphi \lor \psi \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\forall x\varphi \to \forall x\psi \vdash \neg\varphi \to \psi \ .$$

Από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\forall x\varphi \to \forall x\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi \ .$$

Τώρα, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη :

τ_1	$\forall x\varphi \to \varphi$	Α.Σ.2
τ_2	$(\forall x\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\forall x\varphi)$	Α.Σ.1
τ_3	$\neg\varphi \to \neg\forall x\varphi$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$\neg\varphi$	υπόθεση
τ_5	$\neg\forall x\varphi$	τ_3, τ_4, M.P.
τ_6	$\neg\forall x\varphi \to \forall x\psi$	υπόθεση
τ_7	$\forall x\psi$	τ_5, τ_6, M.P.
τ_8	$\forall x\psi \to \psi$	Α.Σ.2
τ_9	ψ	τ_7, τ_8, M.P.

Συνεπώς, έχουμε δείξει το ζητούμενο.

■

21. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_1)$ και μεταβλητή x):

(α′) $\vdash \exists x(\varphi \land \psi) \to \exists x\varphi \land \exists x\psi$.

(β′) $\vdash \forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$.

Λύση. (α′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \exists x(\varphi \land \psi) \to \exists x\varphi \land \exists x\psi$, από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x(\varphi \land \psi) \vdash \exists x\varphi \land \exists x\psi \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\forall x\neg(\varphi \land \psi) \vdash \neg\forall x\neg\varphi \land \neg\forall x\neg\psi$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\forall x(\neg\varphi \lor \neg\psi) \vdash \neg(\forall x\neg\varphi \lor \forall x\neg\psi) \ .$$

Από Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg\varphi \lor \forall x\neg\psi \vdash \forall x(\neg\varphi \lor \neg\psi)$$

το οποίο ισχύει από Άσκηση 5.20 (β′).

(β΄) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash \neg\exists x\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi \wedge \neg\exists x\neg\psi \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε

$$\vdash \neg\exists x(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\exists x\neg\varphi \vee \exists x\neg\psi) \ .$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash \exists x(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi \vee \exists x\neg\psi$$

το οποίο ισχύει από Άσκηση 5.20 (α΄).

■

22. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα (για κάθε φ, ψ, μεταβλητές x, y και P, Q μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα):

(α΄) $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$.

(β΄) $\vdash \exists x(P(y) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(y) \wedge \exists x Q(x)$.

Λύση. (α΄) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$,εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαγωγής διαδοχικά, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \exists x\varphi\} \vdash \exists x\psi \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \neg\forall x\neg\varphi\} \vdash \neg\forall x\neg\psi \ .$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\neg\psi\} \vdash \forall x\neg\varphi.$$

Από το Θεώρημα Γενίκευσης αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\neg\psi\} \vdash \neg\varphi.$$

Πράγματι, έχουμε την εξής τυπική απόδειξη :

τ_1	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	Α.Σ.2
τ_2	$\forall x(\varphi \to \psi)$	υπόθεση
τ_3	$\varphi \to \psi$	τ_1, τ_2, M.P.
τ_4	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Α.Σ.1
τ_5	$\neg\psi \to \neg\varphi$	τ_3, τ_4, M.P.
τ_6	$\forall x\neg\psi \to \neg\psi$	Α.Σ.2
τ_7	$\forall x\neg\psi$	υπόθεση
τ_8	$\neg\psi$	τ_6, τ_7, M.P.
τ_9	$\neg\varphi$	τ_5, τ_8, M.P.

Έτσι, το ζητούμενο έχει δειχθεί.

(β′) Για να αποδείξουμε ότι $\vdash \exists x(P(y) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(y) \wedge \exists x Q(x)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\vdash \exists x \neg (P(y) \to \neg Q(x)) \leftrightarrow \neg(P(y) \to \neg \exists x Q(x)) \ .$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαντιστροφής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash (P(y) \to \neg \exists x Q(x)) \leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(y) \to \neg Q(x)) \ .$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash (P(y) \to \forall x \neg Q(x)) \leftrightarrow \forall x (P(y) \to \neg Q(x))$$

το οποίο ισχύει, αφού x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο τύπο $P(y)$, άρα ισχύει ότι

$$(P(y) \to \forall x \neg Q(x)) \equiv \forall x (P(y) \to \neg Q(x)) \ .$$

Συνεπώς, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

■

23. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε τύπο φ, οποιεσδήποτε μεταβλητές x, y, αν η x είναι αντικαταστάσιμη από την y στον φ, τότε

$$\vdash x = y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*),$$

όπου φ^* είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας τη x, σε μερικές ή όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της, με y.

Λύση. Αν x είναι αντικαταστάσιμη στον τύπο φ, από την y, προκύπτει ότι y είναι αντικαταστάσιμη, τότε ο τύπος φ προκύπτει από τον τύπο φ^* αντικαθιστώντας τη y, σε μερικές ή όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της, με x. (1)

Επίσης, ακολουθώντας την απόδειξη της Άσκησης 14. (β′) έχουμε ότι $x = y \vdash y = x$ (2).

Τώρα, για να δείξουμε ότι $\vdash x = y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vdash x = y \to (\varphi \to \varphi^*) \quad \text{(i)}$$

και

$$\vdash x = y \to (\varphi^* \to \varphi) \quad \text{(ii)}$$

(i) Η πρώτη σχέση είναι σαφές ότι είναι λογικό αξίωμα, άρα και τυπικό θεώρημα, από Α.Σ.6.

(ii) Για να δείξουμε ότι $\vdash x = y \to (\varphi^* \to \varphi) \quad$ (ii), από Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{x = y, \varphi^*\} \vdash \varphi \ .$$

Τώρα, από (2) έχουμε ότι υπάρχει τυπική απόδειξη $\tau_1, \cdots, \tau_n$, όπου τ_n είναι ο τύπος $y = x$, και t_j είναι λογικό αξίωμα ή ο τύπος $x = y$ ή προκύπτει από Μ.Ρ., για κάθε $j = 1, \cdots, n$.

Συνεπώς, έχουμε την παρακάτω τυπική απόδειξη

$$\begin{array}{lll}
\tau_1 & & \\
\vdots & & \\
\tau_n & y = x & \\
\tau_{n+1} & y = x \to (\varphi^* \to \varphi) & (1), \text{Α.Σ.6} \\
\tau_{n+2} & \varphi^* \to \varphi & \tau_n, \tau_{n+1}, \text{M.P.} \\
\tau_{n+3} & \varphi^* & \text{υπόθεση} \\
\tau_{n+4} & \varphi &
\end{array}$$

■

24. Αποδείξτε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων:

 (α′) Αν T είναι ένα σύνολο τύπων, φ ένας τύπος και $T \vdash \varphi$, τότε $T \models \varphi$.

 (β′) Κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων είναι και συνεπές.

Λύση. Έστω ότι αν T είναι ένα σύνολο τύπων, φ ένας τύπος και $T \vdash \varphi$, τότε $T \models \varphi$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει T ικανοποιήσιμο, αλλά όχι συνεπές. Δηλαδή, υπάρχει υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση v, που ικανοποιεί το T και $\varphi \in T(\Gamma_1)$, ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$. Συνεπώς, ισχύει ότι $T \models_{\mathfrak{A}} \varphi$ και $T \models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi$, συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων είναι και συνεπές. Έστω ότι υπάρχουν T σύνολο τύπων και $\varphi \in T(\Gamma_1)$, ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \not\models \varphi$. Άρα, υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση v, που ικανοποιεί το T, αλλά όχι τον τύπο φ. Έτσι, έχουμε ότι το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο, άρα και συνεπές. Όμως, έχουμε ότι $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ και $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. ■

27. Θεωρούμε την γλώσσα Γ_1, η οποία έχει δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα, τα $+$ και $\cdot$. Έστω $\mathcal{N}$ η δομή για την γλώσσα Γ_1, που ορίζεται ως εξής:

 - το σύμπαν της δομής είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$,
 - στα συναρτησιακά σύμβολα αντιστοιχούν οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{N}$.

 Δείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις είναι ορίσιμη στην δομή $\mathcal{N}$.

 (α′) $\{0\}$.

 (β′) $\{1\}$

 (γ′) $\{(m, n) \mid n$ είναι ο διάδοχος του m στο $\mathbb{N}\}$.

 (δ′) $\{(m, n) \mid m < n$ στο $\mathbb{N}\}$.

Λύση. (α′) Ορίζουμε $\varphi(x_1)$ να είναι ο τύπος $\forall x_2\,(x_2 + x_1 = x_2)$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν v αποτίμηση και $v(x_1) = n$, τότε

$$\begin{aligned} &\models_{\mathcal{N}} \varphi[n] && \text{ανν} \\ &\models_{\mathcal{N}} \forall x_2\,(x_2 + x_1 = x_2)\,[n] && \text{ανν} \\ &\text{για κάθε } m \in \mathbb{N}:\; m + n = m && \text{ανν} \\ &v(x_1) = n = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\{0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \models_{\mathcal{N}} \varphi[n]\}$.

(β′) Ορίζουμε $\varphi(x_1)$ να είναι ο τύπος $\forall x_2\,(x_2 \cdot x_1 = x_2)$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν v αποτίμηση και $v(x_1) = n$, τότε

$$\begin{aligned} &\models_{\mathcal{N}} \varphi[n] && \text{ανν} \\ &\models_{\mathcal{N}} \forall x_2\,(x_2 \cdot x_1 = x_2)\,[n] && \text{ανν} \\ &\text{για κάθε } m \in \mathbb{N}:\; m \cdot n = m && \text{ανν} \\ &v(x_1) = n = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\{0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \models_{\mathcal{N}} \varphi[n]\}$.

(γ′) Ορίζουμε $\varphi(x_1, x_2)$ να είναι ο τύπος $\exists x_3\,[x_2 = x_1 + x_3 \wedge \forall x_4\,(x_4 \cdot x_3 = x_4)]$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν v αποτίμηση, $v(x_1) = m$ και $v(x_2) = n$, τότε

$$\begin{aligned} &\models_{\mathcal{N}} \varphi[m, n] && \text{ανν} \\ &\models_{\mathcal{N}} \exists x_3\,[x_2 = x_1 + x_3 \wedge \forall x_4\,(x_4 \cdot x_3 = x_4)]\,[m, n] && \text{ανν} \\ \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}:\; &n = k + m \text{ και για κάθε } \lambda \in \mathbb{N}:\; \lambda \cdot k = \lambda && \text{ανν} \\ &n = m + 1 && \text{ανν} \\ &n \;\text{ είναι ο διάδοχος του } m \text{ στο } \mathbb{N} \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\{(m, n) \mid n \text{ είναι ο διάδοχος του } m \text{ στο } \mathbb{N}\} = \{(m, n) \mid \models_{\mathcal{N}} \varphi[m, n]\}$.

(δ′) Ορίζουμε $\varphi(x_1, x_2)$ να είναι ο τύπος $\exists x_3\,[x_2 = x_1 + x_3 \wedge \neg(x_3 + x_3 = x_3)]$.Τώρα, παρατηρούμε ότι αν v αποτίμηση, $v(x_1) = m$ και $v(x_2) = n$, τότε

$$\begin{aligned} &\models_{\mathcal{N}} \varphi[m, n] && \text{ανν} \\ &\models_{\mathcal{N}} \exists x_3\,[x_2 = x_1 + x_3 \wedge \neg(x_3 + x_3 = x_3)]\,[m, n] && \text{ανν} \\ \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}:\; &n = k + m \text{ και } \kappa + \kappa \neq \kappa && \text{ανν} \\ &n = m + k \text{ και } k \neq 0 && \text{ανν} \\ &m < n \text{ στο } \mathbb{N} \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\{(m, n) \mid m < n \text{ στο } \mathbb{N}\} = \{(m, n) \mid \models_{\mathcal{N}} \varphi[m, n]\}$.

■

28. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα, τα $+$ και $\cdot$. Έστω $\mathcal{R}$ η δομή για την γλώσσα που ορίζεται ως εξής:

- το σύμπαν της δομής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $|\mathcal{R}| = \mathbb{R}$,

- στα συναρτησιακά σύμβολα αντιστοιχούν οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

Να γράψετε έναν τύπο που ορίζει στη δομή $\mathcal{R}$

(α′) το διάστημα $[0, \infty)$.

(β′) το σύνολο $\{2\}$.

Λύση. (α′) Ορίζουμε $\varphi(x_1)$ να είναι ο τύπος $\exists x_2\,(x_1 = x_2 \cdot x_2)$. Τότε, αν v αποτίμηση με $v(x_1) = x$, τότε

$$\begin{array}{ll} \models_{\mathcal{R}} \varphi[x] & \text{ανν} \\ \models_{\mathcal{R}} \exists x_2\,(x_1 = x_2 \cdot x_2)\,[x] & \text{ανν} \\ \text{υπάρχει } y \in \mathbb{R}:\ x = y^2 & \text{ανν} \\ x \geq 0 & \end{array}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \models_{\mathcal{R}} \varphi[x]\}$.

(β′) Ορίζουμε $\varphi(x_1)$ να είναι ο τύπος $\exists x_2\,[x_1 = x_2 + x_2 \wedge \forall x_3\,(x_3 \cdot x_2 = x_3)]$. Τότε, αν v αποτίμηση με $v(x_1) = x$, τότε

$$\begin{array}{rl} \models_{\mathcal{R}} \varphi[x] & \text{ανν} \\ \models_{\mathcal{R}} \exists x_2\,[x_1 = x_2 + x_2 \wedge \forall x_3\,(x_3 \cdot x_2 = x_3)] & \text{ανν} \\ \text{υπάρχει } y \in \mathbb{R} : x = y + y \text{ και για κάθε } z \in \mathbb{R}:\ z \cdot y = z & \text{ανν} \\ v(x_1) = x = 2 & \end{array}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\{2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \models_{\mathcal{R}} \varphi[x]\}$.

■

29. Δείξτε ότι η πράξη της πρόσθεσης $\mathcal{P} = \{(m, n, k) \mid k = m + n\}$ δεν είναι ορίσιμη στη δομή $(\mathbb{N}, \cdot)$.

(*Υπόδειξη*: Θεωρήστε έναν αυτομορφισμό της $(\mathbb{N}, \cdot)$, ο οποίος εναλλάσει μεταξύ τους δύο πρώτους αριθμούς.)

Λύση. Θεωροούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, που ορίζεται ως εξής :

$$f(n) = \begin{cases} 3k, & \text{αν } n = 2k \\ 2k, & \text{αν } n = 3k \\ n, & \text{αν } 2, 3 \not| n \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι f είναι αυτομορφισμός της δομής $(\mathbb{N}, \cdot)$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $(1, 2, 3) \in \mathcal{P}$, αλλά από τρόπο που ορίστηκε ο f, ισχύει ότι $(f(1), f(2), f(3)) \notin \mathcal{P}$. Συνεπώς, ισχύει ότι η πράξη $\mathcal{P}$ δεν είναι ορίσιμη στη δομή $(\mathbb{N}, \cdot)$. ■

30. Αν $\mathcal{K}$ είναι μια κλάση δομών για την γλώσσα Γ_1, τότε ορίζουμε ως θεωρία της $\mathcal{K}$ (και συμβολίζουμε με $\mathrm{Th}\mathcal{K}$) το σύνολο όλων των προτάσεων οι οποίες είναι αληθής σε κάθε μέλος του $\mathcal{K}$. Με άλλα λόγια,

$$\mathrm{Th}\mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \text{ είναι πρόταση και } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ για κάθε } \mathfrak{A} \text{ του } \mathcal{K}\}\,.$$

Έστω T, Σ δύο σύνολα προτάσεων και $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ δύο κλάσεις δομών της γλώσσας Γ_1. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α′) Αν $T \subseteq \Sigma$, τότε $\mathrm{Mod}\Sigma \subseteq \mathrm{Mod}T$.

(β′) Αν $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, τότε $\mathrm{Th}\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{K}$.

(γ′) $T \subseteq \mathrm{ThMod}T$ και $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ModTh}\mathcal{K}$.

(δ′) $\mathrm{Mod}T = \mathrm{ModThMod}T$ και $\mathrm{Th}\mathcal{K} = \mathrm{ThModTh}\mathcal{K}$.

Λύση. (α′) Έστω $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}\Sigma$, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\varphi \in \Sigma$. Αφού $T \subseteq \Sigma$, ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\varphi \in T$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}T$.

(β′) Έστω $\varphi \in \mathrm{Th}\mathcal{L}$· δηλαδή $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}$.Αφού $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\varphi \in \mathrm{Th}\mathcal{K}$.

(γ′) Έχουμε ότι $\varphi \in \mathrm{ThMod}T$ αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}T$. Τώρα, αν $\varphi \in T$ είναι σαφές από τον ορισμό του $\mathrm{Mod}T$, ότι $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}T$, άρα ισχύει ότι $\varphi \in \mathrm{ThMod}T$.

Έχουμε ότι $\mathfrak{A} \in \mathrm{ModTh}\mathcal{K}$ αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Th}\mathcal{K}$. Τώρα, αν $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, από τον ορισμό του $\mathrm{Th}\mathcal{K}$, έχουμε ότι $\mathfrak{A} \models \varphi$, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Th}\mathcal{K}$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ModTh}\mathcal{K}$.

(δ′) Αφού, από (γ′) ισχύει ότι $T \subseteq \mathrm{ThMod}T$, τότε από (α′) ισχύει ότι $\mathrm{ModThMod}T \subseteq \mathrm{Mod}T$. Τώρα, από (γ′) είναι είναι σαφές ότι $\mathrm{Mod}T \subseteq \mathrm{ModTh}(\mathrm{Mod}T)$, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

Αφού, από (γ′) ισχύει ότι $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ModTh}\mathcal{K}$, από (β′) ισχύει ότι $\mathrm{ThModTh}\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{K}$. Τώρα, από (γ′) είναι σαφές ότι $\mathrm{Th}\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ThMod}(\mathrm{Th}\mathcal{K})$, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

■

31. Έστω $\mathfrak{A}$ μια δομή. Αποδείξτε ότι η κλάση των δομών που είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες της $\mathfrak{A}$ είναι $\Sigma\mathrm{K}_\Delta$.

(*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι είναι $\mathrm{ModTh}\mathfrak{A}$.)

Λύση. Θεωρούμε $\mathcal{K} = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$, η κλάση των δομών που είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες με την $\mathfrak{A}$. Τότε, έχουμε τις εξής ισοδυναμίες

$$\begin{gathered}\mathfrak{B} \in \mathcal{K} \textbf{ ανν } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \\ \textbf{ανν } \text{για } \varphi \text{ πρόταση ισχύει ότι } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ αν και μόνο αν } \mathfrak{B} \models \varphi \\ \textbf{ανν } \mathfrak{B} \in \mathrm{ModTh}\mathfrak{A}\end{gathered}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathcal{K} = \mathrm{ModTh}\mathfrak{A}$, συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{K}$ είναι $\Sigma\mathrm{K}_\Delta$. ■