Μπεϋζιανή Στατιστική
Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων

Βασίλης Κατσιάνος

1 Ιανουάριος 2017

Θέμα 1. Δίνονται παρατηρήσεις x_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ από ανεξάρτητες κατανομές $N(k_i\theta, \sigma^2)$, όπου k_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ γνωστές σταθερές, $\sigma^2 > 0$ γνωστό και θ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί η συζυγής prior κατανομή για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας.

β. Να βρεθεί η posterior κατανομή του θ χρησιμοποιώντας ως prior κατανομή για την $N(0, \sigma^2)$. Στη συνέχεια να βρεθεί η κατανομή πρόβλεψης για μία μελλοντική παρατήρηση y από την κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$.

γ. Να βρεθεί το 95% διάστημα αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας για το y.

Λύση.

α. Ορίζουμε την ακρίβεια $\tau = \sigma^{-2}$. Δεδομένης μίας μόνο παρατήρησης x_i από την κατανομή $N\left(k_i\theta, \tau^{-1}\right)$, η πιθανοφάνεια του θ δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
f(x_i \mid \theta) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - k_i\theta)^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{x_i^2 - 2x_ik_i\theta + k_i^2\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\tau^{-1}}\right\} \exp\left\{-\frac{k_i^2\theta^2 - 2x_ik_i\theta}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{k_i^2}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{k_ix_i}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\}.
\end{aligned}
$$

Τότε, η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$
\begin{aligned}
f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \\
&\propto \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{k_i^2}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{k_i x_i}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} \\
&= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{k_i^2}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{k_i x_i}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2\right\} \exp\left\{\frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\},
\end{aligned}
$$

όπου $\overline{k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2$ και $\overline{kx} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i$. Οπότε, σύμφωνα με τον συμβολισμό της εκθετικής οικογένειας κατανομών, έχουμε ότι $g(\theta) = \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2\right\}$, $t(x) = \frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}}$ και $c(\theta) = \theta$. Έτσι, κατασκευάζουμε μία συζυγή prior της μορφής:

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &\propto \exp\left\{-\frac{dn\overline{k^2}}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2\right\} \cdot e^{b\theta} \\
&= \exp\left\{-\frac{dn\overline{k^2}}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + b\theta\right\},
\end{aligned}
$$

η οποία είναι μέλος της κανονικής οικογένειας κατανομών.

β. Παρατηρούμε ότι η prior κατανομή του θ ανήκει στην οικογένεια των συζυγών prior κατανομών για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας, οπότε η posterior κατανομή του θ θα ανήκει και αυτή στην κανονική οικογένεια κατανομών. Μπορούμε να γράψουμε την prior κατανομή του θ ως εξής:

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του θ ως εξής:

$$
\begin{aligned}
f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2\right\} \exp\left\{\frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}} \left(\theta^2 - 2 \cdot \frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1} \cdot \theta\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\theta \mid x \sim N\left(\frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}, \frac{\tau^{-1}}{n\overline{k^2}+1}\right).$$

Η πιθανοφάνεια για τη μελλοντική παρατήρηση y είναι:

$$\begin{aligned} f(y \mid \theta) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\theta)^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{y}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\}, \end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} f(y \mid x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y \mid \theta) \cdot f(\theta \mid x) d\theta \\ &\propto \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{y}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} d\theta \\ &= \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+2}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{n\overline{kx}+y}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} d\theta \\ &= \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+2}{2\tau^{-1}} \left(\theta^2 - 2 \cdot \frac{n\overline{kx}+y}{n\overline{k^2}+2} \cdot \theta\right)\right\} d\theta \\ &\propto \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \exp\left\{\frac{n\overline{k^2}+2}{2\tau^{-1}} \left(\frac{n\overline{kx}+y}{n\overline{k^2}+2}\right)^2\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau^{-1}}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2\tau^{-1}\left(n\overline{k^2}+2\right)} \cdot y^2 + \frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}\left(n\overline{k^2}+2\right)} \cdot y\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}\left(n\overline{k^2}+2\right)} \cdot y^2 + \frac{n\overline{kx}}{\tau^{-1}\left(n\overline{k^2}+2\right)} \cdot y\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}\left(n\overline{k^2}+2\right)} \left(y^2 - 2 \cdot \frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1} \cdot y\right)\right\}. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$y \mid x \sim N\left(\frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}, \tau^{-1}\left(1 + \frac{1}{n\overline{k^2}+1}\right)\right).$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι, αν ορίσουμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X \sim N\left(0, \tau^{-1}\right)$ και $Y \sim N\left(\frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}, \frac{\tau^{-1}}{n\overline{k^2}+1}\right)$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$ δίνεται από τη συνέλιξη:

$$f_Z(y) = \int_{\mathbb{R}} f_X(\theta - y) \cdot f_Y(\theta) d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta-y)^2}{2\tau^{-1}}\right\} \cdot \sqrt{\frac{n\overline{k^2}+1}{2\pi\tau^{-1}}} \exp\left\{-\frac{n\overline{k^2}+1}{2\tau^{-1}}\left(\theta - \frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}\right)^2\right\} d\theta$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y \mid \theta) \cdot f(\theta \mid x) d\theta = f(y \mid x).$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή το άθροισμα των μέσων τιμών τους και διασπορά το άθροισμα των διασπορών τους. Επομένως,

$$y|x \sim N\left(\frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}, \tau^{-1}\left(1 + \frac{1}{n\overline{k^2}+1}\right)\right).$$

γ. Αφού η κανονική κατανομή είναι μονοκόρυφη και συμμετρική γύρω από το $\mu = \frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1}$, η περιοχή αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας θα είναι ένα συμμετρικό διάστημα της μορφής $(\mu - c, \mu + c)$. Ορίζουμε $s^2 = \tau^{-1}\left(1 + \frac{1}{n\overline{k^2}+1}\right)$. Επιπλέον, απαιτούμε:

$$\int_{\mu-c}^{\mu+c} f(y \mid x) dy = 1 - 0.05 \Rightarrow P\left(\mu - c < y < \mu + c \mid x\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$P\left(y \leqslant \mu - c \mid x\right) = P\left(y \geqslant \mu + c \mid x\right) = \frac{1-0.95}{2} \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{y-\mu}{s} \leqslant -\frac{c}{s} \middle| x\right) = P\left(\frac{y-\mu}{s} \geqslant \frac{c}{s} \middle| x\right) = 0.025 \Rightarrow \frac{c}{s} = Z_{0.025} \Rightarrow c = Z_{0.025} \cdot s.$$

Έπεται ότι το 95% διάστημα αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας για το $y \mid x$ είναι το:

$$\left(\frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1} - Z_{0.025} \cdot \sqrt{\tau^{-1}\left(1 + \frac{1}{n\overline{k^2}+1}\right)}, \frac{n\overline{kx}}{n\overline{k^2}+1} + Z_{0.025} \cdot \sqrt{\tau^{-1}\left(1 + \frac{1}{n\overline{k^2}+1}\right)}\right).$$

Θέμα 2. Για την αντιμετώπιση μίας ασθένειας υπάρχουν δύο διαθέσιμες θεραπείες A και B με κόστος 200 ευρώ και 500 ευρώ αντίστοιχα. Έχει διαπιστωθεί ότι η θεραπεία A δημιουργεί μία επιπλοκή στους ασθενείς που χαρακτηρίζονται από την έλλειψη ενός ενζύμου, η οποία απαιτεί αντιμετώπιση με χειρουργική επέμβαση κόστους 2000 ευρώ.

α. Η ανίχνευση του ενζύμου στον οργανισμό είναι αδύνατη. Ποια θεραπεία θα πρέπει να επιλέξει να προσφέρει (με βάση το κόστος) το σύστημα υγείας, αν είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ασθενών με έλλειψη του ενζύμου στη χώρα είναι 5%;

β. Μια αιματολογική εξέταση που μετράει τη συγκέντρωση μίας ουσίας στο αίμα έχει αποδειχθεί ότι συνδέεται με την παρουσία του ενζύμου ως εξής: αν το ένζυμο υπάρχει στον οργανισμό, τότε η συγκέντρωση υπερβαίνει ένα κατώφλι γ με πιθανότητα 0.9, ενώ, αν το ένζυμο απουσιάζει, τότε η συγκέντρωση της ουσίας υπερβαίνει το κατώφλι με πιθανότητα 0.2. Αν πραγματοποιηθεί αυτή η θεραπεία, ποια θεραπεία θα πρέπει να επιλέγεται από το σύστημα υγείας για ασθενείς με συγκέντρωση ουσίας που υπερβαίνει και δεν υπερβαίνει αντίστοιχα το κατώφλι;

γ. Συμφέρει το σύστημα υγείας να υποβάλει όλους τους ασθενείς στην εξέταση πριν προχωρήσει στην επιλογή θεραπείας, αν το κόστος της θεραπείας είναι αμελητέο και 30 ευρώ αντίστοιχα;

Λύση.

α. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε:

- Τον παραμετρικό χώρο $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, όπου τα θ_1 και θ_2 αντιστοιχούν στο άτομο να έχει το ένζυμο και να μην το έχει αντίστοιχα.
- Το σύνολο των πράξεων $A = \{a_1, a_2\}$, όπου τα a_1 και a_2 αντιστοιχούν στην προσφορά της θεραπείας A και την προσφορά της θεραπείας B αντίστοιχα.
- Η συνάρτηση απώλειας ορίζεται στον παρακάτω πίνακα:

$L(\theta, a)$	θ_1	θ_2
a_1	200	2200
a_2	500	500

Η στρατηγική λήψης της απόφασης είναι να αξιολογήσουμε τη μέση απώλεια για κάθε πράξη και να διαλέξουμε την πράξη που έχει το ελάχιστο δυνατό μέσο κόστος. Αυτό θα είναι το ίδιο για κάθε άτομο σε αυτήν την περίπτωση. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον υπολογισμό της μέσης απώλειας για κάθε πράξη, βασισμένο πάνω στην prior κατανομή του θ.

$f(\theta)$	0.95	0.05	
$L(\theta, a)$	θ_1	θ_2	$E_\theta\left[L(\theta, a)\right]$
a_1	200	2200	$0.95 \cdot 200 + 0.05 \cdot 2200 = 300$
a_2	500	500	$0.95 \cdot 500 + 0.05 \cdot 500 = 500$

Το συμπέρασμα είναι ότι συμφέρει το σύστημα υγείας να επιλέξει να προσφέρει τη θεραπεία A για όλα τα άτομα. Το μέσο κόστος είναι 300 ευρώ ανά άτομο.

β. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα x_1, x_2 να υπερβαίνει και να μην υπερβαίνει η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα το κατώφλι γ αντίστοιχα. Για το παράδειγμά μας, ο πίνακας που φαίνεται στην επόμενη σελίδα δείχνει τον τρόπο υπολογισμού του κανόνα απόφασης. Υπολογίζουμε για καθένα από τα ενδεχόμενα x_1, x_2 την αντίστοιχη posterior $f(\theta \mid x)$. Για καθεμία από αυτές, υπολογίζουμε μετά τη μέση posterior απώλεια για κάθε πράξη. Τέλος, επιλέγουμε την καλύτερη απόφαση, δηλαδή αυτή με την ελάχιστη μέση posterior απώλεια για αυτήν την έκβαση.

Οπότε, συνοψίζοντας, αν παρατηρηθεί ότι υπερβαίνει η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα το κατώφλι γ σε ένα άτομο, τότε η απόφαση κατά Bayes είναι να του προσφέρουμε τη

	θ_1	θ_2				
$f(\theta)$	0.95	0.05				
$f(x_1 \mid \theta)$	0.9	0.2				
$f(x_2 \mid \theta)$	0.1	0.8				
			$f(x)$			
$f(x_1, \theta)$	0.855	0.01	0.865			
$f(x_2, \theta)$	0.095	0.04	0.135			
			$\rho(a, x)$			
			a_1	a_2	$d(x)$	$\rho(d(x), x)$
$f(\theta \mid x_1)$	0.9884	0.0116	223.1214	500	a_1	223.1214
$f(\theta \mid x_2)$	0.7037	0.2963	792.5926	500	a_2	500

θεραπεία A, ενώ αν παρατηρηθεί ότι δεν υπερβαίνει η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα το κατώφλι γ σε ένα άτομο, τότε η απόφαση είναι να του προσφέρουμε τη θεραπεία B.

γ. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ρίσκο που συνδέεται με αυτήν την πολιτική, σταθμίζοντας σύμφωνα με την αβεβαιότητα των παρατηρήσεων x. Για το παράδειγμά μας, αυτό γίνεται:

$$\mathrm{BR}(d) = \rho(d(x_1), x_1) f(x_1) + \rho(d(x_2), x_2) f(x_2) = 223.1214 \cdot 0.865 + 500 \cdot 0.135 = 260.5.$$

Αυτό είναι μικρότερο από το ελάχιστο μέσο κόστος των 300 ευρώ ανά άτομο που πήραμε χρησιμοποιώντας μόνο την prior πληροφορία, χωρίς γνώση του x, οπότε συμφέρει το σύστημα υγείας να υποβάλει όλους τους ασθενείς στην εξέταση πριν προχωρήσει στην επιλογή θεραπείας, αν το κόστος της εξέτασης είναι αμελητέο. Στην περίπτωση όπου κοστίζει 30 ευρώ, συμφέρει πάλι το σύστημα υγείας να υποβάλει όλους τους ασθενείς στην εξέταση πριν προχωρήσει στην επιλογή θεραπείας, εφόσον η εξέταση κοστίζει σε ευρώ ανά άτομο λιγότερο από τη διαφορά $300 - 260.5 = 39.5$.

Θέμα 3. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τον αριθμό αφίξεων πελατών ανά ώρα σε ένα κατάστημα για n πρωινές ώρες λειτουργίας του καταστήματος και $X_{n+1}, \ldots, X_m$ τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τον αριθμό αφίξεων πελατών ανά ώρα στο κατάστημα για $m - n$ απογευματινές ώρες λειτουργίας.

α. Αν $X_i \sim \text{Poisson}(\theta_1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $X_i \sim \text{Poisson}(\theta_2)$ για $i = n+1, n+2, \ldots, m$, να βρεθεί συζυγής prior για την παράμετρο (θ_1, θ_2). Να υπολογιστεί η από κοινού posterior κατανομή του (θ_1, θ_2) χρησιμοποιώντας τη συζυγή prior, καθώς και οι περιθώριες posterior κατανομές των παραμέτρων θ_1, θ_2.

β. Να βρεθεί η περιθώρια πιθανοφάνεια για το παραπάνω μοντέλο M_1 αν ως prior κατανομή του (θ_1, θ_2) χρησιμοποιηθεί η $f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1) f(\theta_2)$ με $\theta_1 \sim \text{Gamma}(1, 1)$ και $\theta_2 \sim \text{Gamma}(1, 1)$.

γ. Αν ως εναλλακτικό μοντέλο θεωρήσουμε το M_2: $X_i \sim \text{Poisson}(\theta)$ για $i = 1, 2, \ldots, m$ με prior κατανομή $\theta \sim \text{Gamma}(1, 1)$ και υποθέσουμε ότι τα δύο μοντέλα είναι a priori ισοπίθανα, να βρεθεί η posterior πιθανότητα του M_1.

Λύση.

α. Η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$\begin{aligned}
f(x \mid \theta_1, \theta_2) &= \prod_{i=1}^{m} f(x_i \mid \theta_1, \theta_2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_1, \theta_2) \cdot \prod_{i=n+1}^{m} f(x_i \mid \theta_1, \theta_2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta_1} \frac{\theta_1^{x_i}}{x_i!} \cdot \prod_{i=n+1}^{m} e^{-\theta_2} \frac{\theta_2^{x_i}}{x_i!} \\
&= e^{-n\theta_1} \theta_1^{s(n)} \cdot e^{-(m-n)\theta_2} \theta_2^{s(m)-s(n)} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!} \\
&\propto e^{-n\theta_1 - (m-n)\theta_2} \cdot e^{s(n)\log\theta_1 + [s(m)-s(n)]\log\theta_2},
\end{aligned}$$

όπου $s(t) = \sum_{i=1}^{t} x_i$. Οπότε, σύμφωνα με τον συμβολισμό της εκθετικής οικογένειας κατανομών, έχουμε ότι $g(\theta_1, \theta_2) = e^{-n\theta_1 - (m-n)\theta_2}$, $t_1(x) = s(n)$, $c_1(\theta_1, \theta_2) = \log\theta_1$, $t_2(x) = s(m) - s(n)$ και $c_2(\theta_1, \theta_2) = \log\theta_2$. Έτσι, κατασκευάζουμε μία συζυγή prior της μορφής:

$$\begin{aligned}
f(\theta_1, \theta_2) &\propto \left[e^{-n\theta_1 - (m-n)\theta_2}\right]^d \cdot e^{b_1 \log\theta_1 + b_2 \log\theta_2} \\
&= \theta_1^{b_1} e^{-dn\theta_1} \cdot \theta_2^{b_2} e^{-d(m-n)\theta_2},
\end{aligned}$$

η οποία παραγοντοποιείται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της οικογένειας κατανομών Γάμμα. Επομένως, η συζυγής prior κατανομή για το (θ_1, θ_2) παίρνει τη μορφή $\theta_1 \sim \text{Gamma}(p_1, q_1)$ και $\theta_2 \sim \text{Gamma}(p_2, q_2)$ με θ_1, θ_2 ανεξάρτητες.

Από κοινού prior των θ_1 και θ_2:

$$\begin{aligned}
f(\theta_1, \theta_2) &= f(\theta_1) \cdot f(\theta_2) \\
&= \frac{q_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \theta_1^{p_1 - 1} e^{-q_1\theta_1} \cdot \frac{q_2^{p_2}}{\Gamma(p_2)} \theta_2^{p_2 - 1} e^{-q_2\theta_2} \\
&\propto \theta_1^{p_1 - 1} e^{-q_1\theta_1} \cdot \theta_2^{p_2 - 1} e^{-q_2\theta_2}.
\end{aligned}$$

Εφόσον χρησιμοποιούμε συζυγή prior, η posterior κατανομή του (θ_1, θ_2) θα ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών με την prior. Δηλαδή, οι θ_1, θ_2 θα είναι a posteriori ανεξάρτητες και οι περιθώριες posterior κατανομές τους θα ανήκουν στην οικογένεια κατανομών Γάμμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
f(\theta_1, \theta_2 \mid x) &\propto f(\theta_1, \theta_2) \cdot f(x \mid \theta_1, \theta_2) \\
&\propto \theta_1^{p_1 - 1} e^{-q_1\theta_1} \cdot \theta_2^{p_2 - 1} e^{-q_2\theta_2} \cdot e^{-n\theta_1} \theta_1^{s(n)} \cdot e^{-(m-n)\theta_2} \theta_2^{s(m)-s(n)} \\
&= \theta_1^{s(n) + p_1 - 1} e^{-(n + q_1)\theta_1} \cdot \theta_2^{s(m) - s(n) + p_2 - 1} e^{-(m - n + q_2)\theta_2},
\end{aligned}$$

η οποία παραγοντοποιείται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της οικογένειας κατανομών Γάμμα. Επομένως, παίρνουμε ότι $\theta_1|x \sim \text{Gamma}\left(s(n)+p_1, n+q_1\right)$ και $\theta_2|x \sim \text{Gamma}\left(s(m)-s(n)+p_2, m-n+q_2\right)$ με θ_1, θ_2 a posteriori ανεξάρτητες.

β. Θέτοντας $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 1$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2 \mid x) &\propto f(\theta_1, \theta_2) \cdot f(x \mid \theta_1, \theta_2) \\ &= \theta_1^{s(n)} e^{-(n+1)\theta_1} \cdot \theta_2^{s(m)-s(n)} e^{-(m-n+1)\theta_2} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

Περιθώρια πιθανοφάνεια του M_1:

$$\begin{aligned} f(x \mid M_1) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\theta_1, \theta_2) \cdot f(x \mid \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \theta_1^{s(n)} e^{-(n+1)\theta_1} \cdot \theta_2^{s(m)-s(n)} e^{-(m-n+1)\theta_2} d\theta_1 d\theta_2 \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!} \\ &= \int_0^\infty \theta_1^{s(n)} e^{-(n+1)\theta_1} d\theta_1 \cdot \int_0^\infty \theta_2^{s(m)-s(n)} e^{-(m-n+1)\theta_2} d\theta_2 \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!} \\ &= \frac{\Gamma(s(n)+1)}{(n+1)^{s(n)+1}} \cdot \frac{\Gamma(s(m)-s(n)+1)}{(m-n+1)^{s(m)-s(n)+1}} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

γ. Prior του θ:

$$f(\theta) = e^{-\theta}.$$

Πιθανοφάνεια του M_2:

$$\begin{aligned} f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{m} f(x_i \mid \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{m} e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \\ &= \theta^{s(m)} e^{-m\theta} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

Posterior του θ:

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\ &= e^{-\theta} \cdot \theta^{s(m)} e^{-m\theta} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!} \\ &= \theta^{s(m)} e^{-(m+1)\theta} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

Περιθώρια πιθανοφάνεια του M_2:

$$f(x \mid M_2) = \int_0^\infty f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \theta^{s(m)} e^{-(m+1)\theta} d\theta \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{x_i!} \\
&= \frac{\Gamma(s(m)+1)}{(m+1)^{s(m)+1}} \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{x_i!}.
\end{aligned}
$$

Posterior πιθανότητα του M_1:

$$
\begin{aligned}
P(M_1 \mid x) &= \frac{P(M_1) \cdot f(x \mid M_1)}{P(M_1) \cdot f(x \mid M_1) + P(M_2) \cdot f(x \mid M_2)} \\
&= \frac{f(x \mid M_1)}{f(x \mid M_1) + f(x \mid M_2)}.
\end{aligned}
$$

2 Σεπτέμβριος 2013

Θέμα 1. α. Μία παράμετρος θ έχει posterior κατανομή $f(\theta \mid x)$. Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει μία περιοχή $C_\alpha(x)$, ώστε να είναι η μικρότερη $100(1-\alpha)\%$ περιοχή αξιοπιστίας για το θ;

β. Έστω ότι $x \mid \theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta\theta)$, όπου α, β είναι γνωστές θετικές σταθερές και θ είναι άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί η συζυγής prior κατανομή για την παράμετρο θ, καθώς και η prior του Jeffreys για το θ.

γ. Έστω παρατηρήσεις x_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ από ανεξάρτητες κατανομές $\text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i\theta)$, όπου α_i, β_i είναι γνωστές θετικές σταθερές και θ είναι άγνωστη παράμετρος. Χρησιμοποιώντας μία $\text{Gamma}(p, q)$ prior για το θ, να βρεθεί η posterior κατανομή του θ.

Λύση.

α. Η περιοχή πρέπει να είναι της μορφής $C_\alpha(x) = \{\theta \in \Theta : f(\theta \mid x) \geqslant \gamma\}$, όπου το γ επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίσει ότι:

$$
\int_{C_\alpha(x)} f(\theta \mid x) d\theta = 1 - \alpha.
$$

Τέτοιες περιοχές καλούνται περιοχές αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας.

β. Η πιθανοφάνεια του θ δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
f(x \mid \theta) &= \frac{\beta^\alpha \theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta\theta x} \\
&\propto \theta^\alpha e^{-\beta x \theta}.
\end{aligned}
$$

Σύμφωνα με τον συμβολισμό της εκθετικής οικογένειας κατανομών, έχουμε ότι $g(\theta) = \theta^\alpha$, $t(x) = \beta x$ και $c(\theta) = -\theta$. Έτσι, κατασκευάζουμε μία συζυγή prior της μορφής:

$$
f(\theta) \propto \theta^{d\alpha} e^{-b\theta},
$$

η οποία είναι μέλος της οικογένειας κατανομών Γάμμα.

Σχετικά με την prior του Jeffreys, έχουμε ότι:

$$\ell(\theta) = \log f(x \mid \theta) = \alpha \log \theta - \beta x \theta + c \Rightarrow$$

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{\alpha}{\theta} - \beta x \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{\alpha}{\theta^2}.$$

Επομένως,

$$I(\theta) = -E\left[\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2}\right] = -E\left(-\frac{\alpha}{\theta^2}\right) = \frac{\alpha}{\theta^2} \propto \theta^{-2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $J(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \propto \theta^{-1}$ για $\theta > 0$.

γ. Η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$\begin{aligned} f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \theta^{\alpha_i} e^{-\beta_i x_i \theta} \\ &= \theta^{n\overline{\alpha}} e^{-n\overline{\beta x}\theta}, \end{aligned}$$

όπου $\overline{\alpha} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ και $\overline{\beta x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Παρατηρούμε ότι η prior κατανομή του θ ανήκει στην οικογένεια των συζυγών prior κατανομών για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας, οπότε η posterior κατανομή του θ θα ανήκει και αυτή στην οικογένεια κατανομών Γάμμα. Μπορούμε να γράφουμε την prior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \theta^{p-1} e^{-q\theta} \\ &\propto \theta^{p-1} e^{-q\theta}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\ &\propto \theta^{p-1} e^{-q\theta} \cdot \theta^{n\overline{\alpha}} e^{-n\overline{\beta x}\theta} \\ &= \theta^{n\overline{\alpha}+p-1} e^{-\left(n\overline{\beta x}+q\right)\theta}. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\theta \mid x \sim \text{Gamma}\left(n\overline{\alpha} + p, n\overline{\beta x} + q\right)$.

Θέμα 2. Έστω χρονολογικές παρατηρήσεις x_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ από ανεξάρτητες κατανομές Poisson$(t_i\theta)$, όπου t_i γνωστές θετικές σταθερές και θ είναι άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί η συζυγής prior κατανομή για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας, καθώς και η posterior κατανομή του θ χρησιμοποιώντας τη συζυγή prior. Στη συνέχεια να βρεθεί η κατανομή πρόβλεψης για μία μελλοντική παρατήρηση y από την κατανομή Poisson$(k\theta)$, όπου k γνωστή θετική σταθερά.

β. Να βρεθεί η περιθώρια πιθανοφάνεια για το παραπάνω μοντέλο M_1 αν χρησιμοποιηθεί μία Gamma(p, q) prior κατανομή για το θ. Αν ως εναλλακτικό μοντέλο M_2 θεωρήσουμε ότι οι x_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις από την κατανομή Poisson$(k\theta)$, να υπολογίσετε την posterior πιθανότητα του M_1. Να θεωρήσετε την ίδια prior για το θ κάτω από τα μοντέλα M_1 και M_2, καθώς και ότι τα δύο μοντέλα είναι a priori ισοπίθανα.

γ. Να βρεθεί ως μία σταθερά κανονικοποίησης η prior του Jeffreys για το θ, καθώς και για τον μετασχηματισμό $\phi = \frac{1}{\theta}$. Επίσης, να υπολογιστεί η posterior κατανομή του ϕ.

Λύση.

α. Δεδομένης μίας μόνο παρατήρησης x_i από την κατανομή Poisson $(t_i\theta)$, η πιθανοφάνεια του θ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} f(x_i \mid \theta) &= e^{-t_i\theta}\frac{t_i^{x_i}\theta^{x_i}}{x_i!} \\ &\propto \theta^{x_i}e^{-t_i\theta}. \end{aligned}$$

Τότε, η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$\begin{aligned} f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-t_i\theta}\frac{t_i^{x_i}\theta^{x_i}}{x_i!} \\ &= \theta^{n\overline{x}}e^{-n\bar{t}\theta}\prod_{i=1}^{n}\frac{t_i^{x_i}}{x_i!} \\ &\propto \theta^{n\overline{x}}e^{-n\bar{t}\theta} \\ &= e^{-n\bar{t}\theta}e^{n\overline{x}\log\theta}, \end{aligned}$$

όπου $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ και $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Οπότε, σύμφωνα με τον συμβολισμό της εκθετικής οικογένειας κατανομών, έχουμε ότι $g(\theta) = e^{-n\bar{t}\theta}$, $t(x) = n\overline{x}$ και $c(\theta) = \theta$. Έτσι, κατασκευάζουμε μία συζυγή prior της μορφής:

$$\begin{aligned} f(\theta) &\propto e^{-dn\bar{t}\theta}e^{b\log\theta} \\ &= \theta^{b}e^{-dn\bar{t}\theta} \\ &= \theta^{p-1}e^{-q\theta}, \end{aligned}$$

όπου $p = b + 1$ και $q = dn\bar{t}$, η οποία είναι η κατανομή Gamma(p, q). Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\ &\propto \theta^{p-1}e^{-q\theta} \cdot \theta^{n\overline{x}}e^{-n\bar{t}\theta} \end{aligned}$$

$$= \theta^{n\overline{x}+p-1} e^{-(n\overline{t}+q)\theta}.$$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\theta \mid x \sim \text{Gamma}\big(n\overline{x}+p, n\overline{t}+q\big)$.

Η πιθανοφάνεια για τη μελλοντική παρατήρηση y είναι:

$$f(y \mid \theta) = e^{-k\theta} \frac{k^y \theta^y}{y!},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
f(y \mid x) &= \int_0^\infty f(y \mid \theta) \cdot f(\theta \mid x) d\theta \\
&= \int_0^\infty e^{-k\theta} \frac{k^y \theta^y}{y!} \cdot \frac{(n\overline{t}+q)^{n\overline{x}+p}}{\Gamma(n\overline{x}+p)} \theta^{n\overline{x}+p-1} e^{-(n\overline{t}+q)\theta} d\theta \\
&= \frac{k^y}{y!} \cdot \frac{(n\overline{t}+q)^{n\overline{x}+p}}{\Gamma(n\overline{x}+p)} \int_0^\infty \theta^{y+n\overline{x}+p-1} e^{-(k+n\overline{t}+q)\theta} d\theta \\
&= \frac{k^y}{y!} \cdot \frac{(n\overline{t}+q)^{n\overline{x}+p}}{\Gamma(n\overline{x}+p)} \cdot \frac{\Gamma(y+n\overline{x}+p)}{(k+n\overline{t}+q)^{y+n\overline{x}+p}} \\
&= \frac{\Gamma(y+n\overline{x}+p)}{y! \cdot \Gamma(n\overline{x}+p)} \left(\frac{n\overline{t}+q}{k+n\overline{t}+q}\right)^{n\overline{x}+p} \left(\frac{k}{k+n\overline{t}+q}\right)^y.
\end{aligned}$$

Για $p \in \mathbb{N}$, η παραπάνω κατανομή είναι αρνητική διωνυμική με πλήθος αποτυχιών $n\overline{x}+p$ και πιθανότητα επιτυχίας $\frac{k}{k+n\overline{t}+q}$.

β. Περιθώρια πιθανοφάνεια του M_1:

$$\begin{aligned}
f(x \mid M_1) &= \int_0^\infty f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{q^p}{\Gamma(p)} \theta^{p-1} e^{-q\theta} \cdot \theta^{n\overline{x}} e^{-n\overline{t}\theta} d\theta \cdot \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{x_i}}{x_i!} \\
&= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \theta^{n\overline{x}+p-1} e^{-(n\overline{t}+q)\theta} d\theta \cdot \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{x_i}}{x_i!} \\
&= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(n\overline{x}+p)}{(n\overline{t}+q)^{n\overline{x}+p}} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{x_i}}{x_i!}.
\end{aligned}$$

Πιθανοφάνεια του M_2:

$$\begin{aligned}
f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i \mid \theta) \\
&= \prod_{i=1}^n e^{-k\theta} \frac{k^{x_i} \theta^{x_i}}{x_i!} \\
&= \theta^{n\overline{x}} e^{-nk\theta} \cdot k^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}.
\end{aligned}$$

Posterior του θ:

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\ &= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \theta^{p-1} e^{-q\theta} \cdot \theta^{n\overline{x}} e^{-nk\theta} \cdot k^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \\ &= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \cdot \theta^{n\overline{x}+p-1} e^{-(nk+q)\theta} \cdot k^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

Περιθώρια πιθανοφάνεια του M_2:

$$\begin{aligned} f(x \mid M_2) &= \int_0^\infty f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) d\theta \\ &= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \theta^{n\overline{x}+p-1} e^{-(nk+q)\theta} d\theta \cdot k^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \\ &= \frac{q^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(n\overline{x}+p)}{(nk+q)^{n\overline{x}+p}} \cdot k^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}. \end{aligned}$$

Posterior πιθανότητα του M_1:

$$\begin{aligned} P(M_1 \mid x) &= \frac{P(M_1) \cdot f(x \mid M_1)}{P(M_1) \cdot f(x \mid M_1) + P(M_2) \cdot f(x \mid M_2)} \\ &= \frac{f(x \mid M_1)}{f(x \mid M_1) + f(x \mid M_2)} = \frac{(n\overline{t}+q)^{-(n\overline{x}+p)} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x_i}}{(n\overline{t}+q)^{-(n\overline{x}+p)} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x_i} + (nk+q)^{-(n\overline{x}+p)} k^{n\overline{x}}}. \end{aligned}$$

γ. Σχετικά με την prior του Jeffreys για το θ, έχουμε ότι:

$$\ell(\theta) = \log f(x \mid \theta) = n\overline{x} \log \theta - n\overline{t}\theta + c \Rightarrow$$

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{n\overline{x}}{\theta} - n\overline{t} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n\overline{x}}{\theta^2},$$

όπου:

$$E(\overline{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \theta = \overline{t}\theta.$$

Επομένως,

$$I(\theta) = -E\left[\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2}\right] = \frac{n\overline{t}\theta}{\theta^2} = \frac{n\overline{t}}{\theta} \propto \theta^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $J_\Theta(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \propto \theta^{-\frac{1}{2}}$ για $\theta > 0$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου της prior του Jeffreys, παίρνουμε ότι:

$$\left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| = \left|\frac{d}{d\phi} \frac{1}{\phi}\right| = \left|-\frac{1}{\phi^2}\right| = \frac{1}{\phi^2},$$

οπότε:

$$J_\Phi(\phi) = J_\Theta(\theta)\left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| = J_\Theta\left(\frac{1}{\phi}\right)\frac{1}{\phi^2} \propto \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{\phi^2} = \phi^{-\frac{3}{2}}, \quad \phi > 0.$$

Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του ϕ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(\phi \mid x) &\propto J_\Phi(\phi) \cdot f(x \mid \phi) \\ &\propto \phi^{-\frac{3}{2}} \cdot \phi^{-n\overline{x}} \exp\left\{-\frac{n\overline{t}}{\phi}\right\} \\ &= \phi^{-n\overline{x}-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{n\overline{t}}{\phi}\right\}, \end{aligned}$$

η οποία είναι μία κατανομή Inv-Gamma $\left(n\overline{x} + \frac{1}{2}, n\overline{t}\right)$.

3 Οκτώβριος 2011

Θέμα 1. Έστω παρατηρήσεις x_i για $i = 1, 2, \ldots, T$ από ανεξάρτητες κατανομές $\text{Bin}(N_i, \theta)$, όπου N_i είναι γνωστοί φυσικοί αριθμοί και $\theta \in (0, 1)$ είναι άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρείτε και να αναγνωρίσετε την οικογένεια των συζυγών prior κατανομών για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας, καθώς και την posterior κατανομή του θ χρησιμοποιώντας μία συζυγή prior.

β. Ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για να είναι η $C_\alpha(x)$ η μικρότερη $100(1-\alpha)\%$ περιοχή αξιοπιστίας για το θ αν η posterior κατανομή του θ είναι αυτή που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Σε αυτήν την περίπτωση ποια περιμένετε να είναι η μορφή της $C_\alpha(x)$;

γ. Να βρεθεί ως μία σταθερά κανονικοποίησης η prior του Jeffreys για το θ, καθώς και για τον μετασχηματισμό $\phi = \frac{1}{\theta}$. Είναι η prior του Jeffreys για το θ συζυγής;

δ. Χρησιμοποιώντας μία $\text{Beta}(p, q)$ prior για το θ, να βρείτε και να αναγνωρίσετε την κατανομή πρόβλεψης για μία μελλοντική παρατήρηση y από την κατανομή $\text{Bin}(K, \theta)$.

Λύση.

α. Δεδομένης μίας μόνο παρατήρησης x_i από την κατανομή $\text{Bin}\,(N_i, \theta)$, η πιθανοφάνεια του θ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} f(x_i \mid \theta) &= \binom{N_i}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{N_i - x_i} \\ &\propto (1-\theta)^{N_i}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x_i} \\ &= (1-\theta)^{N_i}\exp\left\{x_i \log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}. \end{aligned}$$

Τότε, η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$\begin{aligned} f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{N_i - x_i} \\ &= \theta^{n\overline{x}}(1-\theta)^{n\overline{N}-n\overline{x}} \\ &= (1-\theta)^{n\overline{N}} \exp\left\{n\overline{x}\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}, \end{aligned}$$

όπου $\overline{N} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} N_i$. Οπότε, σύμφωνα με τον συμβολισμό της εκθετικής οικογένειας κατανομών, έχουμε ότι $g(\theta) = (1-\theta)^{n\overline{N}}$, $t(x) = n\overline{x}$ και $c(\theta) = \log\frac{\theta}{1-\theta}$. Έτσι, κατασκευάζουμε μία συζυγή prior της μορφής:

$$\begin{aligned} f(\theta) &\propto \left[(1-\theta)^{n\overline{N}}\right]^{d} \exp\left\{b\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\} \\ &= \theta^{b}(1-\theta)^{dn\overline{N}-b} \\ &= \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}, \end{aligned}$$

όπου $p = b+1$ και $q = dn\overline{N} - b + 1$, η οποία είναι η κατανομή Beta(p,q). Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta)\cdot f(x \mid \theta) \\ &\propto \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}\cdot\theta^{n\overline{x}}(1-\theta)^{n\overline{N}-n\overline{x}} \\ &= \theta^{n\overline{x}+p-1}(1-\theta)^{n\overline{N}-n\overline{x}+q-1}. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\theta \mid x \sim \text{Beta}\left(n\overline{x}+p, n\overline{N}-n\overline{x}+q\right)$.

β. Η περιοχή πρέπει να είναι της μορφής $C_\alpha(x) = \{\theta \in \Theta : f(\theta \mid x) \geqslant \gamma\}$, όπου το γ επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίσει ότι:

$$\int_{C_\alpha(x)} f(\theta \mid x)d\theta = 1-\alpha.$$

Τέτοιες περιοχές καλούνται περιοχές αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας. Αφού η κατανομή Βήτα είναι μονοκόρυφη για $n\overline{x}+p > 1$ και $n\overline{N}-n\overline{x}+q > 1$, η περιοχή αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας θα είναι ένα διάστημα της μορφής (a,b).

γ. Σχετικά με την prior του Jeffreys για το θ, έχουμε ότι:

$$\ell(\theta) = \log f(x \mid \theta) = n\overline{x}\log\theta + (n\overline{N}-n\overline{x})\log(1-\theta) + c \Rightarrow$$

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{n\overline{x}}{\theta} - \frac{n\overline{N}-n\overline{x}}{1-\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n\overline{x}}{\theta^2} - \frac{n\overline{N} - n\overline{x}}{(1-\theta)^2},$$

όπου:

$$E(\overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i\theta = \overline{N}\theta.$$

Επομένως,

$$I(\theta) = -E\left[\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2}\right] = \frac{n\overline{N}\theta}{\theta^2} + \frac{n\overline{N} - n\overline{N}\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{n\overline{N}}{\theta} + \frac{n\overline{N}}{1-\theta} = \frac{n\overline{N}}{\theta(1-\theta)} \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $J_\Theta(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \propto \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}$ για $\theta \in (0,1)$, η οποία είναι η κατανομή Beta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Παρατηρούμε ότι η prior του Jeffreys για το θ ανήκει στην οικογένεια των συζυγών κατανομών για αυτό το μοντέλο πιθανοφάνειας.

Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου της prior του Jeffreys, παίρνουμε ότι:

$$\left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| = \left|\frac{d}{d\phi}\frac{1}{\phi}\right| = \left|-\frac{1}{\phi^2}\right| = \frac{1}{\phi^2},$$

οπότε:

$$J_\Phi(\phi) = J_\Theta(\theta)\left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| = J_\Theta\left(\frac{1}{\phi}\right)\frac{1}{\phi^2} \propto \phi^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\phi^2} = \phi^{-1}(\phi-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi > 1.$$

δ. Η πιθανοφάνεια για τη μελλοντική παρατήρηση y είναι:

$$f(y \mid \theta) = \binom{K}{y}\theta^y(1-\theta)^{K-y},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
f(y \mid x) &= \int_0^1 f(y \mid \theta) \cdot f(\theta \mid x) d\theta \\
&= \int_0^1 \binom{K}{y}\theta^y(1-\theta)^{K-y} \cdot \frac{\theta^{n\overline{x}+p-1}(1-\theta)^{n\overline{N}-n\overline{x}+q-1}}{B(n\overline{x}+p, n\overline{N}-n\overline{x}+q)} d\theta \\
&= \binom{K}{y}\frac{1}{B(n\overline{x}+p, n\overline{N}-n\overline{x}+q)}\int_0^1 \theta^{y+n\overline{x}+p-1}(1-\theta)^{K-y+n\overline{N}-n\overline{x}+q-1} d\theta \\
&= \binom{K}{y}\frac{B(y+n\overline{x}+p, K-y+n\overline{N}-n\overline{x}+q)}{B(n\overline{x}+p, n\overline{N}-n\overline{x}+q)},
\end{aligned}$$

η οποία είναι μία Βήτα-διωνυμική κατανομή.

4 Ιούνιος 2011

Θέμα 1. Θεωρήστε τη συνάρτηση απώλειας $L(\theta, a) = w(\theta)(\theta - a)^2$, όπου $w(\theta)$ είναι μία μη-αρνητική συνάρτηση.

α. Να δείξετε ότι ο βέλτιστος σημειακός εκτιμητής ως προς αυτήν τη συνάρτηση απώλειας είναι ο:

$$\frac{E\left[w(\theta)\theta \mid x\right]}{E\left[w(\theta) \mid x\right]}.$$

β. Βρείτε τον βέλτιστο σημειακό εκτιμητή για την παράμετρο θ αν $\theta \mid x \sim \mathrm{Beta}(p, q)$ και η συνάρτηση απώλειας είναι η $L(\theta, a) = \theta(\theta - a)^2$.

Λύση.

α. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση της posterior μέσης απώλειας:

$$\rho(a, x) = E\left[L(\theta, a) \mid x\right] = E\left[w(\theta) \mid x\right] a^2 - 2E\left[w(\theta)\theta \mid x\right] a + E\left[w(\theta)\theta^2 \mid x\right],$$

η οποία είναι μία παραβολή ως προς α με $E\left[w(\theta) \mid x\right] > 0$, οπότε παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο. Υπολογίζουμε το σημείο ολικού ελαχίστου ως εξής:

$$\frac{\partial \rho(a, x)}{\partial a} = 2E\left[w(\theta) \mid x\right] a - 2E\left[w(\theta)\theta \mid x\right] = 0 \Leftrightarrow a = \frac{E\left[w(\theta)\theta \mid x\right]}{E\left[w(\theta) \mid x\right]},$$

οπότε αυτός είναι και ο βέλτιστος σημειακός εκτιμητής ως προς αυτή τη συνάρτηση απώλειας.

β. Θέτοντας $w(\theta) = \theta$ για $\theta \in (0, 1)$, βλέπουμε ότι ο βέλτιστος σημειακός εκτιμητής για την παράμετρο θ είναι ο:

$$\widehat{\theta} = \frac{E\left(\theta^2 \mid x\right)}{E\left(\theta \mid x\right)},$$

όπου:

$$\begin{aligned}
E(\theta \mid x) &= \int_0^1 \theta \cdot \frac{\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)} d\theta = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 \theta^{p}(1-\theta)^{q-1} d\theta \\
&= \frac{B(p+1, q)}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p}{p+q}, \\
E\left(\theta^2 \mid x\right) &= \int_0^1 \theta^2 \cdot \frac{\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)} d\theta = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 \theta^{p+1}(1-\theta)^{q-1} d\theta \\
&= \frac{B(p+2, q)}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)},
\end{aligned}$$

οπότε:

$$\widehat{\theta} = \frac{p+1}{p+q+1}.$$

Θέμα 2. α. Μία παράμετρος θ έχει posterior κατανομή $\mathrm{Beta}(p, p)$ για $p > 1$. Πότε η $C_\alpha(x)$ είναι η μικρότερη $100(1-\alpha)\%$ περιοχή αξιοπιστίας για το θ σε αυτήν την περίπτωση και ποια είναι η μορφή της;

β. Αν η posterior του θ είναι η $\mathrm{Beta}(2, 2)$, μπορεί η $100(1-\alpha)\%$ περιοχή αξιοπιστίας μέγιστης πυκνότητας να υπολογιστεί αναλυτικά; Να δείξετε ότι σε αυτήν την περίπτωση το διάστημα $(0.1, 0.9)$ είναι η 94.4% περιοχή υψηλότερης πυκνότητας για το θ.

Λύση.

α. Αφού η κατανομή Beta(p,p) για $p>1$ είναι μονοκόρυφη και συμμετρική γύρω από το $\frac{1}{2}$, η περιοχή αξιοπιστίας υψηλότερης πυκνότητας θα είναι ένα συμμετρικό διάστημα της μορφής $\left(\frac{1}{2}-c, \frac{1}{2}+c\right)$. Επιπλέον, απαιτούμε:

$$\int_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} f(x \mid \theta) d\theta = \int_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} \frac{\theta^{p-1}(1-\theta)^{p-1}}{B(p,p)} d\theta = 1-\alpha.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$B(2,2) = \frac{[\Gamma(2)]^2}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6},$$

οπότε:

$$\int_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} 6\theta(1-\theta) d\theta = 1-\alpha \Rightarrow 6\left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{2}+c\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}+c\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}-c\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}-c\right)^3 = 1-\alpha \Rightarrow 3c - 4c^3 = 1-\alpha.$$

Άρα, η $100(1-\alpha)\%$ περιοχή αξιοπιστίας μέγιστης πυκνότητας δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Για $c = 0.4$, παίρνουμε ότι:

$$1-\alpha = 3 \cdot 0.4 - 4 \cdot 0.4^3 = 0.944,$$

οπότε το διάστημα $(0.1, 0.9)$ είναι η 94.4% περιοχή υψηλότερης πυκνότητας για το θ.

5 Φεβρουάριος 2009

Θέμα 1. Έστω τυχαίο δείγμα $x_1, \ldots, x_n$ από την κατανομή $N\left(\theta, \tau^{-1}\right)$, όπου το τ είναι γνωστό. Ως prior κατανομή για το θ θεωρήστε την παρακάτω μίξη κανονικών κατανομών:

$$f(\theta) = p\sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_1)^2}{2c_1^{-1}}\right\} + (1-p)\sqrt{\frac{c_2}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_2)^2}{2c_2^{-1}}\right\}.$$

Υπολογίστε την posterior κατανομή του θ. Είναι η παραπάνω prior συζυγής για το θ;

Λύση.

Ορίζουμε:

$$f_i(\theta) = \sqrt{\frac{c_i}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_i)^2}{2c_i^{-1}}\right\}, \quad i = 1,2.$$

Δεδομένης μίας μόνο παρατήρησης x_i από την κατανομή $N\left(\theta, \tau^{-1}\right)$, η πιθανοφάνεια του θ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x_i \mid \theta) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\tau^{-1}}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2}{2\tau^{-1}}\right\}$$
$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{x_i}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\}.$$

Τότε, η πιθανοφάνεια ολόκληρου του δείγματος είναι:

$$\begin{aligned}
f(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\overline{x^2} - 2n\overline{x}\theta + n\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{n}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{n\overline{x}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\},
\end{aligned}$$

όπου $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Μπορούμε να γράψουμε την prior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned}
f_i(\theta) &= \sqrt{\frac{c_i}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2 - 2\mu_i\theta + \mu_i^2}{2c_i^{-1}}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2c_i^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{\mu_i}{c_i^{-1}} \cdot \theta\right\}.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα την posterior κατανομή του θ ως εξής:

$$\begin{aligned}
f_i(\theta \mid x) &\propto f_i(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2c_i^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{\mu_i}{c_i^{-1}} \cdot \theta\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{n}{2\tau^{-1}} \cdot \theta^2 + \frac{n\overline{x}}{\tau^{-1}} \cdot \theta\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n\tau + c_i}{2} \cdot \theta^2 + (n\overline{x}\tau + \mu_i c_i) \cdot \theta\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n\tau + c_i}{2}\left(\theta^2 - 2 \cdot \frac{n\overline{x}\tau + \mu_i c_i}{n\tau + c_i} \cdot \theta\right)\right\},
\end{aligned}$$

η οποία είναι η κατανομή:
$$N\left(\frac{n\overline{x}\tau + \mu_i c_i}{n\tau + c_i}, \frac{1}{n\tau + c_i}\right).$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f_i(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_i(\theta) \cdot f(x \mid \theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{c_i}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2 - 2\mu_i\theta + \mu_i^2}{2c_i^{-1}}\right\} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\overline{x^2} - 2n\overline{x}\theta + n\theta^2}{2\tau^{-1}}\right\} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{c_i}{2\pi}} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu_i^2 c_i + n\overline{x^2}\tau}{2}\right\} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{n\tau + c_i}{2}\left(\theta^2 - 2 \cdot \frac{n\overline{x}\tau + \mu_i c_i}{n\tau + c_i} \cdot \theta\right)\right\} d\theta
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{c_i}{2\pi}} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\overline{x^2}\tau + \mu_i^2 c_i}{2}\right\} \sqrt{\frac{n\tau + c_i}{2\pi}} \exp\left\{\frac{n\tau + c_i}{2}\left(\frac{n\overline{x}\tau + \mu_i c_i}{n\tau + c_i}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{\tau^{\frac{n}{2}}\sqrt{c_i(n\tau + c_i)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left\{\frac{(n\overline{x}\tau + \mu_i c_i)^2}{2(n\tau + c_i)} - \frac{n\overline{x^2}\tau + \mu_i^2 c_i}{2}\right\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &\propto f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \\ &= pf_1(\theta)f(x \mid \theta) + (1-p)f_2(\theta)f(x \mid \theta) \\ &= pf_1(x)f_1(\theta \mid x) + (1-p)f_2(x)f_2(\theta \mid x), \end{aligned}$$

όπου:

$$f_i(\theta \mid x) = \frac{f_i(\theta) \cdot f(x \mid \theta)}{f_i(x)}, \quad i = 1, 2.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x) &= \frac{pf_1(x)f_1(\theta \mid x) + (1-p)f_2(x)f_2(\theta \mid x)}{pf_1(x) + (1-p)f_2(x)} \\ &= p^* f_1(\theta \mid x) + (1-p^*)f_2(\theta \mid x), \end{aligned}$$

όπου:

$$p^* = \frac{pf_1(x)}{pf_1(x) + (1-p)f_2(x)}.$$

Συνεπώς, η posterior ανήκει στην ίδια οικογένεια μίξεων κατανομών με την prior, δηλαδή η prior που χρησιμοποιήσαμε είναι συζυγής για το θ.

Θέμα 2. Οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 ακολουθούν από κοινού την τριωνυμική κατανομή με παραμέτρους θ_1 και θ_2 αν η από κοινού συνάρτηση πιθανότητάς τους είναι:

$$f(x_1, x_2 \mid \theta_1, \theta_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} (1 - \theta_1 - \theta_2)^{n - x_1 - x_2},$$

όπου $x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ και $x_1 + x_2 \leqslant n$. Για τις παραμέτρους ισχύουν ότι $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ και $\theta_1 + \theta_2 < 1$. Επιπλέον, $E(X_1) = n\theta_1$ και $E(X_2) = n\theta_2$.

α. Έστω ότι το θ_2 είναι γνωστό. Να βρεθεί ως μία σταθερά κανονικοποίησης η prior του Jeffreys για το θ_1. Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\phi = \frac{\theta_1}{1-\theta_2}$, να δείξετε ότι η prior του Jeffreys για το ϕ είναι η Beta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

β. Έστω τώρα ότι το θ_2 είναι άγνωστο. Υποθέστε μία από κοινού Dirichlet prior με παραμέτρους a, b και c για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2, δηλαδή:

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \theta_1^{a-1} \theta_2^{b-1} (1 - \theta_1 - \theta_2)^{c-1}.$$

Υπολογίστε την από κοινού posterior κατανομή των θ_1 και θ_2 δεδομένων των παρατηρήσεων x_1 και x_2. Επίσης, υπολογίστε την περιθώρια posterior του θ_1.

Λύση.

α. Σχετικά με την prior του Jeffreys για το θ_1, έχουμε ότι:

$$\ell(\theta_1) = \log f(x_1, x_2 \mid \theta_1) = x_1 \log \theta_1 + (n - x_1 - x_2) \log(1 - \theta_1 - \theta_2) + c \Rightarrow$$

$$\frac{d\ell(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{x_1}{\theta_1} - \frac{n - x_1 - x_2}{1 - \theta_1 - \theta_2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\ell(\theta_1)}{d\theta_1^2} = -\frac{x_1}{\theta_1^2} - \frac{n - x_1 - x_2}{(1 - \theta_1 - \theta_2)^2}.$$

Επομένως,

$$I(\theta_1) = -E\left[\frac{d^2\ell(\theta_1)}{d\theta_1^2}\right] = \frac{n\theta_1}{\theta_1^2} + \frac{n - n\theta_1 - n\theta_2}{(1 - \theta_1 - \theta_2)^2} = \frac{n}{\theta_1} + \frac{n}{1 - \theta_1 - \theta_2} \propto \theta_1^{-1}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $J_{\Theta_1}(\theta_1) \propto \sqrt{I(\theta_1)} \propto \theta_1^{-\frac{1}{2}}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{-\frac{1}{2}}$. Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου της prior του Jeffreys, παίρνουμε ότι:

$$\left|\frac{d\theta_1}{d\phi}\right| = 1 - \theta_2,$$

οπότε:

$$J_\Phi(\phi) = J_{\Theta_1}(\theta_1)\left|\frac{d\theta_1}{d\phi}\right| \propto J_{\Theta_1}\left((1 - \theta_2)\phi\right) \propto \phi^{-\frac{1}{2}}\left[1 - (1 - \theta_2)\phi - \theta_2\right]^{-\frac{1}{2}} \propto \phi^{-\frac{1}{2}}(1 - \phi)^{-\frac{1}{2}},$$

η οποία είναι η κατανομή Beta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2 \mid x_1, x_2) &\propto f(\theta_1, \theta_2) \cdot f(x_1, x_2 \mid \theta_1, \theta_2) \\ &\propto \theta_1^{a-1}\theta_2^{b-1}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{c-1} \cdot \theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{n-x_1-x_2} \\ &= \theta_1^{x_1+a-1}\theta_2^{x_2+b-1}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{n-x_1-x_2+c-1}, \end{aligned}$$

η οποία είναι η κατανομή Dirichlet$(x_1 + a, x_2 + b, n - x_1 - x_2 + c)$.

Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $\psi = \frac{\theta_2}{1-\theta_1}$, παίρνουμε την περιθώρια posterior του θ_1:

$$\begin{aligned} f(\theta_1 \mid x_1, x_2) &= \int_0^{1-\theta_1} f(\theta_1, \theta_2 \mid x_1, x_2) d\theta_2 \\ &\propto \theta_1^{x_1+a-1} \int_0^{1-\theta_1} \theta_2^{x_2+b-1}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{n-x_1-x_2+c-1} d\theta_2 \\ &= \theta_1^{x_1+a-1} \int_0^1 (1 - \theta_1)^{x_2+b-1}\psi^{x_2+b-1}\left[1 - \theta_1 - (1 - \theta_1)\psi\right]^{n-x_1-x_2+c-1}(1 - \theta_1)d\psi \\ &= \theta_1^{x_1+a-1}(1 - \theta_1)^{x_2+b-1+n-x_1-x_2+c-1+1} \int_0^1 \psi^{x_2+b-1}(1 - \psi)^{n-x_1-x_2+c-1} d\psi \\ &\propto \theta_1^{x_1+a-1}(1 - \theta_1)^{n-x_1+b+c-1}, \end{aligned}$$

η οποία είναι η κατανομή Beta$(x_1 + a, n - x_1 + b + c)$.