Ασκήσεις Θεωρίας Παιγνίων

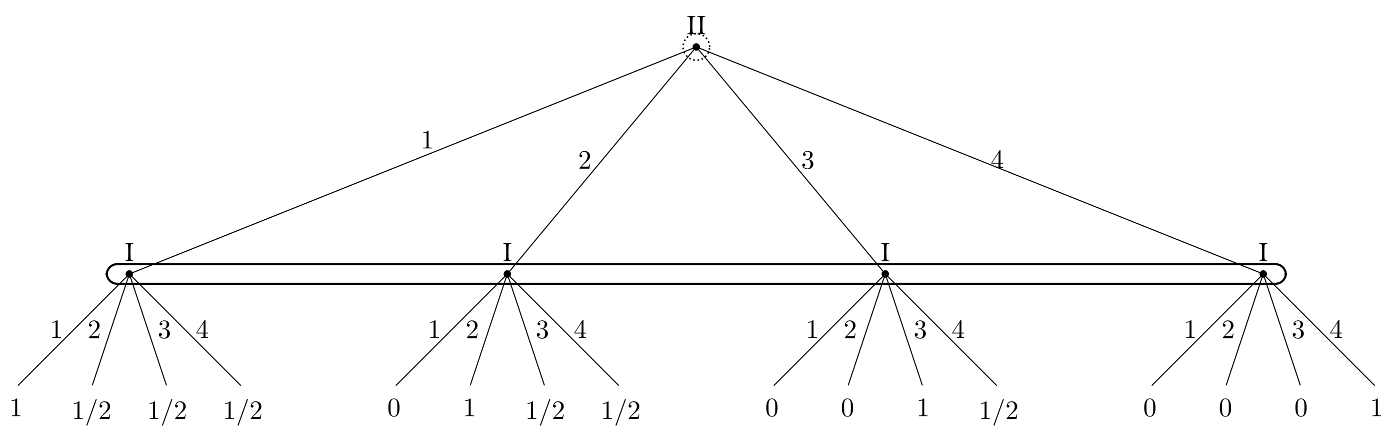
ΦΣ*

19 Νοεμβρίου 2020

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Ασκηση 1
Ο παίκτης II διαλέγει έναν αριθμό $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ και ο I προσπαθεί να μαντέψει ποιος αριθμός είναι αυτός. Αν μαντέψει σωστά κερδίζει 1 από τον II, αν μαντέψει μεγαλύτερο αριθμό κερδίζει 1/2 από τον II και αν μαντέψει λιγότερο δεν κερδίζει τίποτα. Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού, τα σύνολα στρατηγικών S^I και S^{II} και την συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα.

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η ακόλουθη :



Τα σύνολα στρατηγικών είναι:

$$S^I = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$S^{II} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Η συνάρτηση πληρωμής των 2 παικτών είναι:

S^{II}

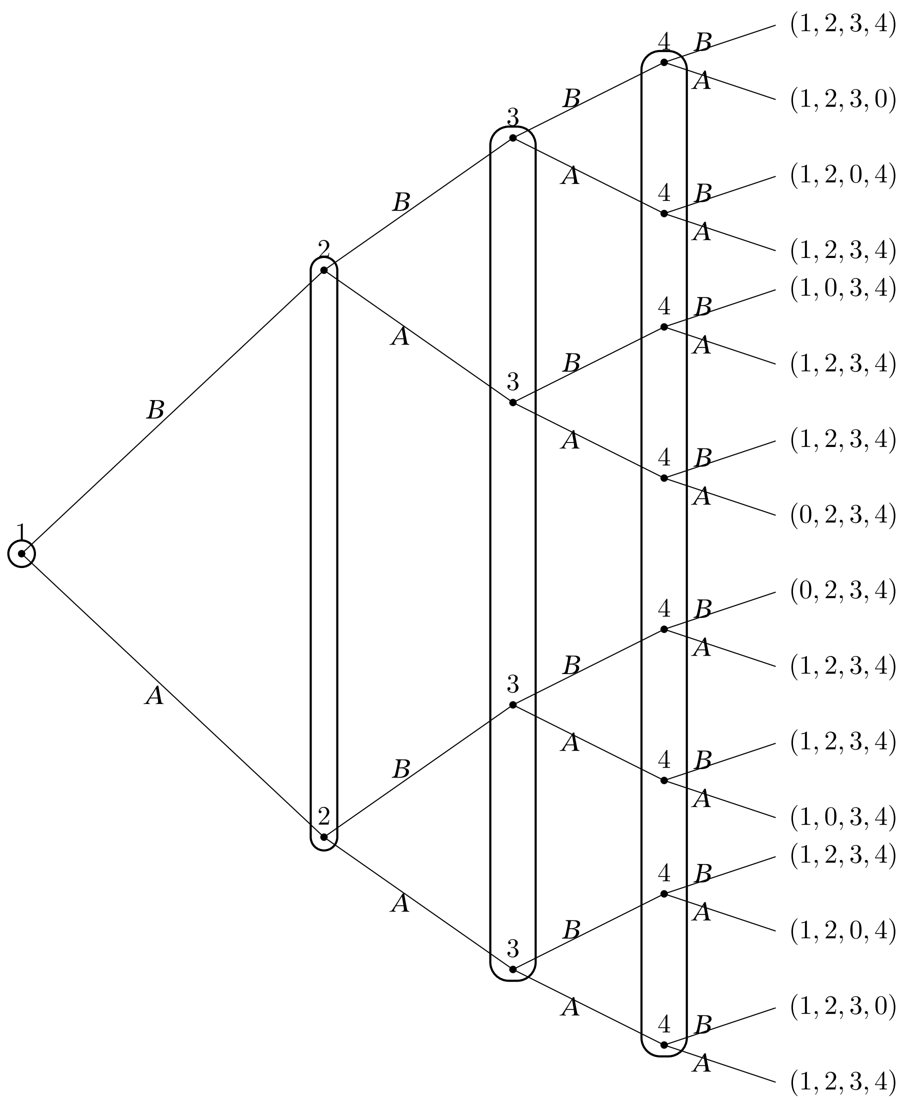
S^I		(1)	(2)	(3)	(4)
	(1)	1	1/2	1/2	1/2
	(2)	0	1	1/2	1/2
	(3)	0	0	1	1/2
	(4)	0	0	0	1

■

*s.phevos28@gmail.com

Άσκηση 2
Τέσσεις παίκτες, οι $1, 2, 3$ και 4, σηκώνουν ταυτόχρονα το χέρι τους μόλις δοθεί κάποιο σύνθημα ή το αριστερό (Α) ή το δεξί (Δ). Αν ένας παίκτης είναι ο μοναδικός με τη συγκεκριμένη επιλογή (π.χ διάλεξε ο Α ενώ όλοι οι άλλοι Δ), τότε αυτός παίρνει 0. Αλλιώς, αν υπάρχει και άλλος που σήκωσε το ίδιο χέρι, ο παίκτης παίρνει τον αριθμό του (π.χ. αν είχαμε (Α,Δ,Α,Α) όπου η i-συντεταγμένη δίνει την επιλογή του i-παίκτη, τότε η πληρωμή θα ήταν $(1, 0, 3, 4)$). Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή, τα σύνολα στρατηγικών και τη σύναρτηση πληρωμής του παιχνίδιου αυτού.

Λύση
Το δέντρο του παιχνιδιού είναι το εξής[1]:



Τα σύνολα στρατηγικών των παικτών είναι τα εξής:

$$S^1 = S^2 = S^3 = S^4 = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

■

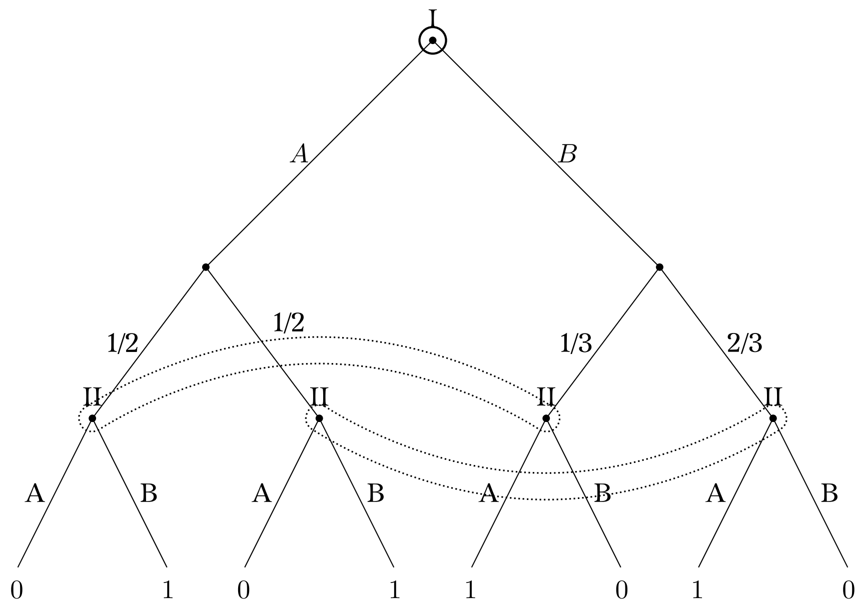
[1] Αναπαραστώντας το δέντρο του παιχνιδιού, δεν μπορούμε παρά να βάλουμε κάποιον παίκτη να επιλέγει πιο πριν από τους υπόλοιπους. Αυτό όμως σε καμία περίπτωση δεν επηρεάζει την ανεξαρτησία και την ταυτόχρονη επιλογή των παικτών, η οποία φαίνεται από τα σύνολα πληροφόρησης τους (ο παίκτης i ξέρει το ίδιο σε όποια κορυφή και αν βρίσκεται).

Άσκηση 3

Σε ένα παιχνίδι 2−παικτών 0−αθροίσματος ο I διαθέτει δύο νομίσματσα. Το νόμισμα A είναι τίμιο (η πιθανότητα σε μία ρίψη να έρθει κεφάλι ισούται με την πιθανότητα να έρθει γράμματα, δηλαδή και οι δύο πιθανότητες είναι 1/2), ενώ το άλλο (νόμισμα B) δεν είναι και έχει πιθανότητες 1/3 να έρθει κεφάλι και 2/3 να έρθει γράμματα. Το παιχνίδι παίζεται ως εξής:
Ο I πρώτα επιλέγει A ή B και το ρίχνει. Ο II, χωρίς να γνωρίζει την επιλογή του I, βλέπει το αποτέλεσμα της ρίψης (κεφάλι ή γράμματα) και στη συνέχεια μαντεύει αν το νόμισμα που έριξε ο I ήταν το A ή το B. Αν ο II μαντέψει σωστά, τότε πληρώνει 0 στον I. Αν ο II μαντέψει λάθος, τότε πληρώνει 1 στον I.
Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού καθώς και τα σύνολα στρατηγικών και τη συνάρτηση πληρωμής.

Λύση

Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:



Τα σύνολα στρατηγικών είναι τα εξής:

$$S^{\mathrm{I}} = \{A, B\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{(\mathrm{A},\mathrm{A}), (\mathrm{A},\mathrm{B}), (\mathrm{B},\mathrm{A}), (\mathrm{B},\mathrm{B})\}$$

Η συνάρτηση πληρωμής του παιχνιδιού (σε μορφή πίνακα) είναι:

S^{I} \ S^{II}	(A, A)	(A, B)	(B, A)	(B, B)
A	0	1/2	1/2	1
B	1	1/3	2/3	0

Για παράδειγμα, για την στρατηγική κατάσταση $s = (A, (\mathrm{A},\mathrm{B}))$ έχουμε:

$$h^{\mathrm{I}}(s) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1 = 1/2$$

■

Άσκηση 5
Έστω

Γ_{12}:

		S^{II} α	μ	δ
S^{I}	π	1	1	3
	κ	7	-1	5

Γ_{23}:

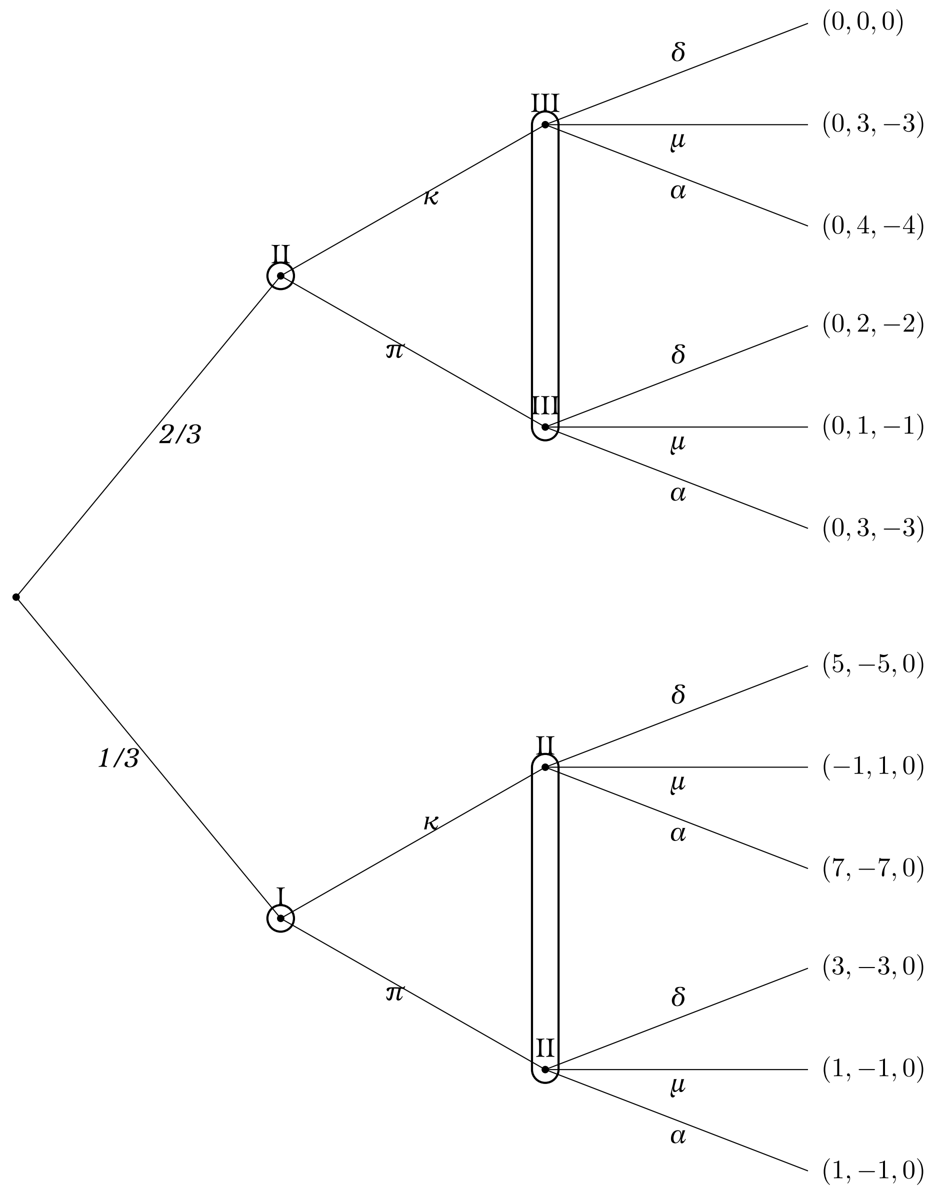
		S^{III} α	μ	δ
S^{II}	π	3	1	2
	κ	4	3	0

.

πινακοπαιχνίδια μεταξύ των παικτών I και II (το Γ_{12}) και II και III (το Γ_{23}).

Έστω Γ το παιχνίδι τριών παικτών κατά το οποίο μία αρχική κίνηση τύχης επιλέγει ποιο από τα παραπάνω πινακοπαιχνίδια θα παιχθεί συγκεκριμένα, στο Γ επιλέγεται το Γ_{12} με πιθανότητα $1/3$ (και τότε η πληρωμή του III είναι 0) και το Γ_{23} με πιθανότητα $2/3$ (και τότε η πληρωμή του I είναι 0).
Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή του Γ.

Λύση
Υποθέτουμε ότι όλοι οι παίκτες βλέπουν την αρχική κίνηση της τύχης και το δέντρο του παιχνιδιού είναι το εξής:



■

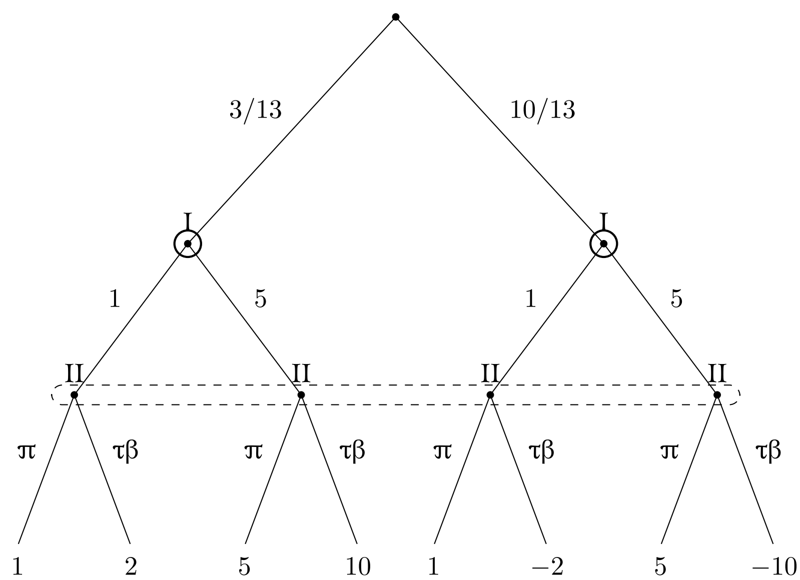
Άσκηση 6

Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι 0− αθροίσματος: Ο I τραβά ένα χαρτί από μία πλήρη τράπουλα 52 φύλων και αφού το δει στοιχηματίζει ή 1 μονάδα ωφέλειας ή 5 μονάδες ωφέλειας ότι το χαρτί αυτό είναι "φιγούρα" (δηλ. ρήγας, ντάμα ή βαλές - πιθανότητα 3/13). Στη συνέχεια ο II ή πάει "πάσο"(π) ή λέει " τα βλέπω"(τβ). Αν ο II πάει πάσο, ο I κερδίζει το ποσό που στοιχημάτισε, ανεξάρτητα από το χαρτί του. Αν ο II αποφασίσει να δει το χαρτί του I , τότε, αν ο I είχε όντως φιγούρα θα κερδίσει το διπλάσιο του ποσού που στοιχημάτισε ενώ αν δεν είχε, τότε ο I θα χάσει το διπλάσιο του ποσού που στοιχημάτισε.

Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή, σύνολα στρατηγικών και συνάρτηση πληρωμής.

Λύση

Η εκταταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:



Τα σύνολα στρατηγικών των παικτών είναι τα εξής:

$$S^{\mathrm{I}} = \{x_1, x_2\} \text{ με } x_1, x_2 \in \{1, 5\}$$

$$S^{\mathrm{II}} = \{\text{π}, \text{τβ}\}$$

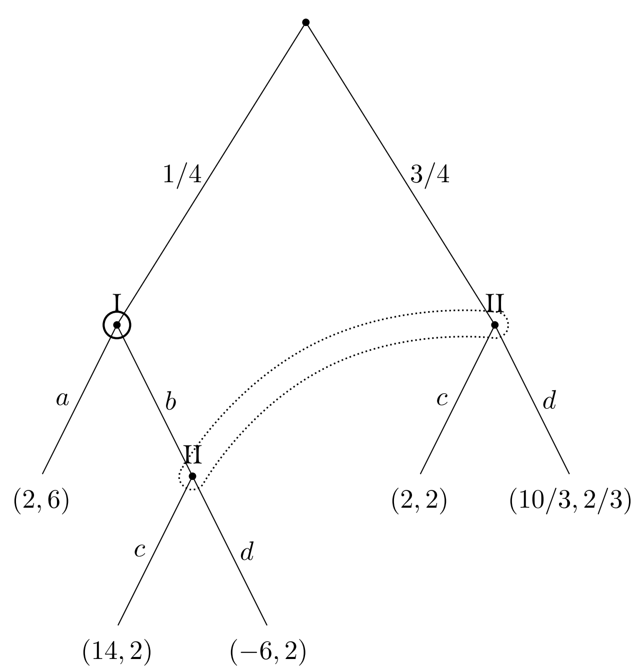
Η συνάρτηση πληρωμής του παιχνιδιού για τους παίκτες I και II δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

		S^{I}			
		1	5	1	5
S^{II}	π	1	5	1	5
	τβ	2	10	−2	−10

■

Άσκηση 7

Να δώσετε τη συνάρτηση πληρωμής του παρακάτω παιχνιδιού:



Λύση
Τα σύνολα στρατηγικών είναι τα εξής:

$$S^{\mathrm{I}} = \{a, b\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{c, d\}$$

Η συνάρτηση πληρωμής του παιχνιδιού για τους παίκτες I και II είναι:

S^{I} \ S^{II}	c	d
a	2	3
b	5	1

S^{I} \ S^{II}	c	d
a	3	2
b	2	1

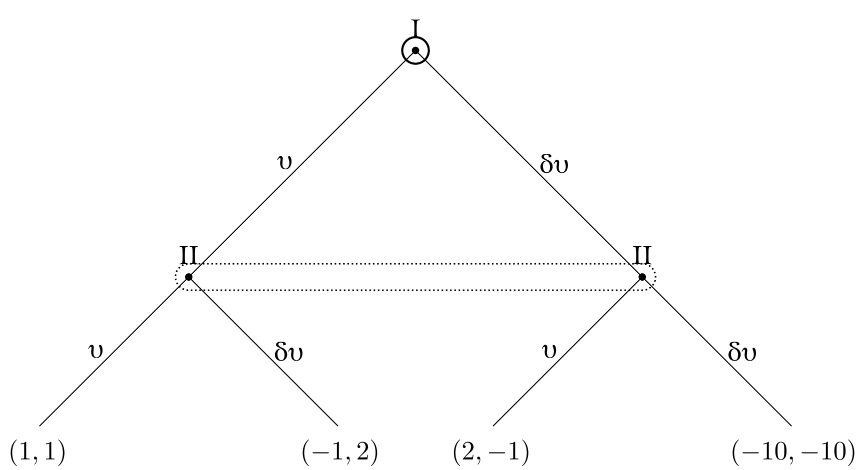
Υπολογίζουμε ενδεικτικά μερικές τιμές της συνάρτησης πληρωμής:

$$h^{\mathrm{I}}(a, c) = \frac{1}{4}2 + \frac{3}{4}2 = 2$$
$$h^{\mathrm{I}}(b, c) = \frac{1}{4}14 + \frac{3}{4}2 = 5$$
$$h^{\mathrm{II}}(a, d) = \frac{1}{4}6 + \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

■

Άσκηση 8
Παιχνίδι Chicken. Δύο παίκτες τοποθετούν τα αυτοκίνητα τους σε κάποια απόσταση το ένα απέναντι στο άλλο και στη συνέχεια επιταχύνουν. Επομένως, η σύγκρουση είναι αναπόφευκτη εκτός και αν κάποιος υποχωρήσει ("chickens out"). Οι πληρωμές καθορίζονται ως εξής:
Αν και οι δύο υποχωρήσουν, ο κάθε ένας παίκτης παίρνει 1. Αν υποχωρήσει μόνο ο ένας παίκτης, τότε αυτός με τα σιδερένια νεύρα παίρνει 2 και αυτός που υποχώρησε παίρνει -1. Αν κανείς δεν υποχωρήσει, τότε και οι δύο καταστρέφονται (πληρωμή -10 για τον καθένα). Να δώσετε τη συνάρτηση πληρωμής αυτού του διπινακοπαιχνιδιού.

Λύση
Συμβολίζοντας "δυ" την μη-υποχώρηση του παίκτη και "υ" την υποχώρηση,Το δέντρο του παιχνιδιού είναι το εξής:



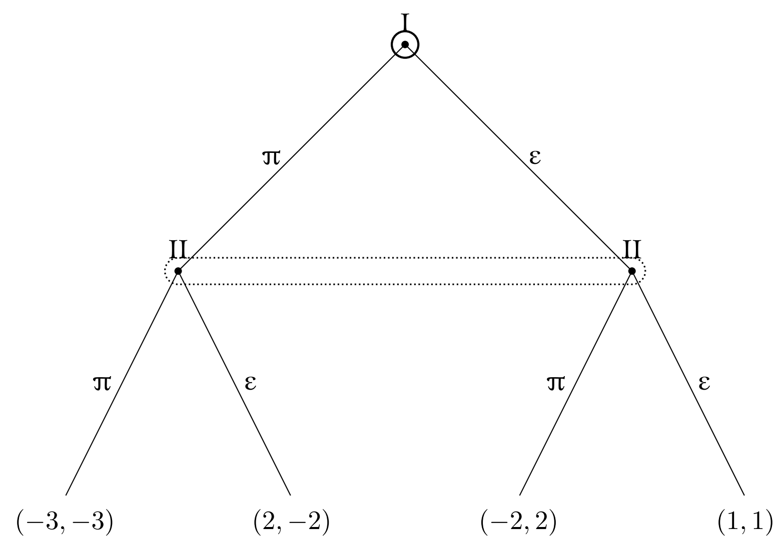
Η συνάρτηση πληρωμής του παιχνιδιού για τους παίκτες I και II είναι:

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & \upsilon & \delta\upsilon \\ \cline{3-4}
S^{\mathrm{I}} & \upsilon & 1 & -1 \\ \cline{3-4}
 & \delta\upsilon & 2 & -10 \\ \cline{3-4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & \upsilon & \delta\upsilon \\ \cline{3-4}
S^{\mathrm{I}} & \upsilon & 1 & 2 \\ \cline{3-4}
 & \delta\upsilon & -1 & -10 \\ \cline{3-4}
\end{array}
\quad .
$$

■

Άσκηση 9
Δύο γειτονικές χώρες επιλέγουν ανεξάρτητα η μία απο την άλλη και ταυτόχρονα την ειρηνική(ε) ή την πολεμική(π) στρατηγική. Αν επιλέξουν "π" και οι δύο, τότε οι πληρωμές κάθε μίας είναι -3 μονάδες ωφέλειας. Αν επιλέξουν "ε" και οι δύο, τότε οι πληρωμές είναι $+1$ μονάδες ωφέλειας για την κάθε μία. Τέλος, αν η μία επιλέξει "ε" και η άλλη "π", τότε η φιλειρηνική χώρα παίρνει -2 και η φιλοπόλεμη $+2$. Δώστε τη συνάρτηση πληρωμής.

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:



Τα σύνολα στρατηγικών είναι τα εξής:

$$S^{\mathrm{I}} = \{\pi, \varepsilon\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{\pi, \varepsilon\}$$

Η συνάρτηση πληρωμής του παιχνιδιού για τους παίκτες I και II είναι:

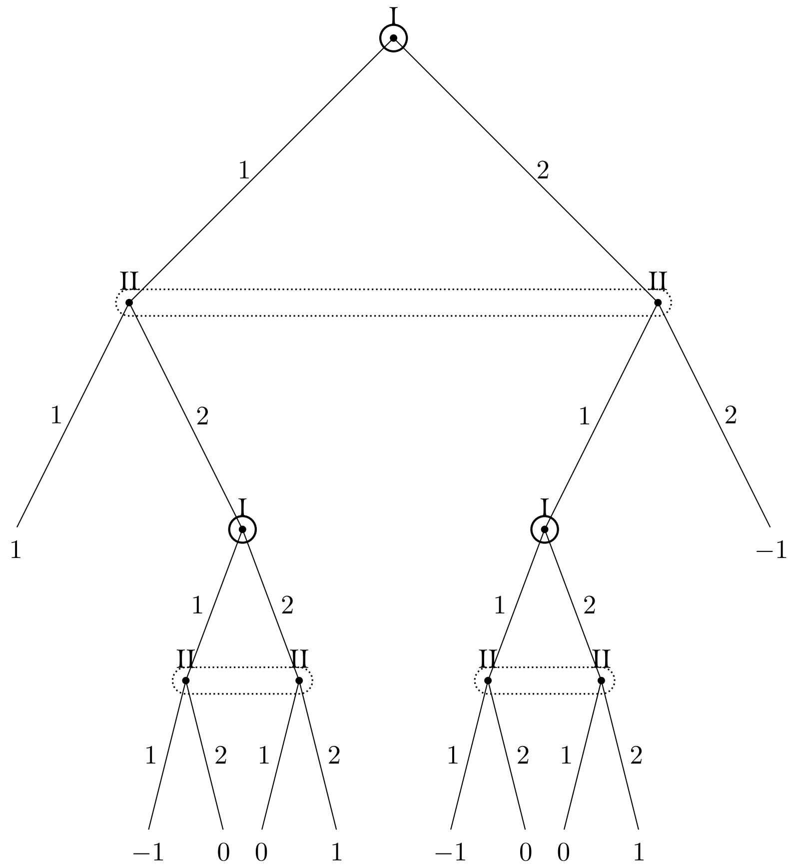
$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & \pi & \varepsilon \\ \cline{3-4}
S^{\mathrm{I}} & \pi & -3 & 2 \\ \cline{3-4}
 & \varepsilon & -2 & 1 \\ \cline{3-4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & \pi & \varepsilon \\ \cline{3-4}
S^{\mathrm{I}} & \pi & -3 & -2 \\ \cline{3-4}
 & \varepsilon & 2 & 1 \\ \cline{3-4}
\end{array}
\quad .
$$

■

Άσκηση 10
Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι: Προτάσσουν ένα ή δύο δάκτυλα ταυτόχρονα. Αν το άθροισμα είναι 2 κερδίζει ο I, αν το άθροισμα είναι 4 κερδίζει ο II και αν το άθροισμα είναι 3, τότε το παιχνίδι επαναλαμβάνεται. Στην επανάληψη, αν το άθροισμα είναι 2 κερδίζει ο II, αν είναι 4 κερδίζει ο I και αν είναι 3 έχουμε ισοπαλία. Δώστε την εκτεταμένη μορφή και τα σύνολα στρατηγικών. Στη συνέχεια να απλοποιήσετε τα σύνολα στρατηγικών και να βρείτε τη συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα.

(Υπόδειξη: Ο κάθε παίκτης θα κρατήσει 4 στρατηγικές)

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η ακόλουθη:



Τα σύνολα στρατηγικών των παικτών είναι:

$$\underbrace{S^{\mathrm{I}} = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),\ldots,(2,2,2)\}}_{8 \text{ στρατηγικές καταστάσεις}}$$

$$\underbrace{S^{\mathrm{II}} = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),\ldots,(2,2,2)\}}_{8 \text{ στρατηγικές καταστάσεις}}$$

Η συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα αρχικά είναι ένα παιχνίδι 8×8. Σε αυτό όμως γίνονται α-πλοποιήσεις. Για παράδειγμα, ο αναγνώστης ας ελέγξει ότι η πληρωμή στην στρατηγική κατάσταση $(1,1,1)$ είναι ίδια με την στρατηγική κατάσταση $(1,1,2)$, αφού αν ο πρώτος παίκτης παίξει 1 στις δύο πρώτες του κινήσεις, τότε το παιχίδι δεν θα έρθει ποτέ στο τρίτο σύνολο πληροφόρησης του παίκτη I και συνεπώς μπορούμε να συμβολίσουμε αυτές τις στρατηγικές καταστάσεις με $(1,1,x)$. Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο, θα καταλήξουμε στις στρατηγικές καταστάσεις $(1,2,x),(2,x,1),(2,x,2)$ για τον παίκτη I και τα ίδια ισχύουν και για τον παίκτη II.
Η συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα τελικά είναι η εξής:

		S^{II}			
		$(1,x,1)$	$(1,x,2)$	$(2,1,x)$	$(2,2,x)$
S^{I}	$(1,1,x)$	1	1	-1	0
	$(1,2,x)$	1	1	0	1
	$(2,x,1)$	-1	0	-1	-1
	$(2,x,2)$	0	1	-1	-1

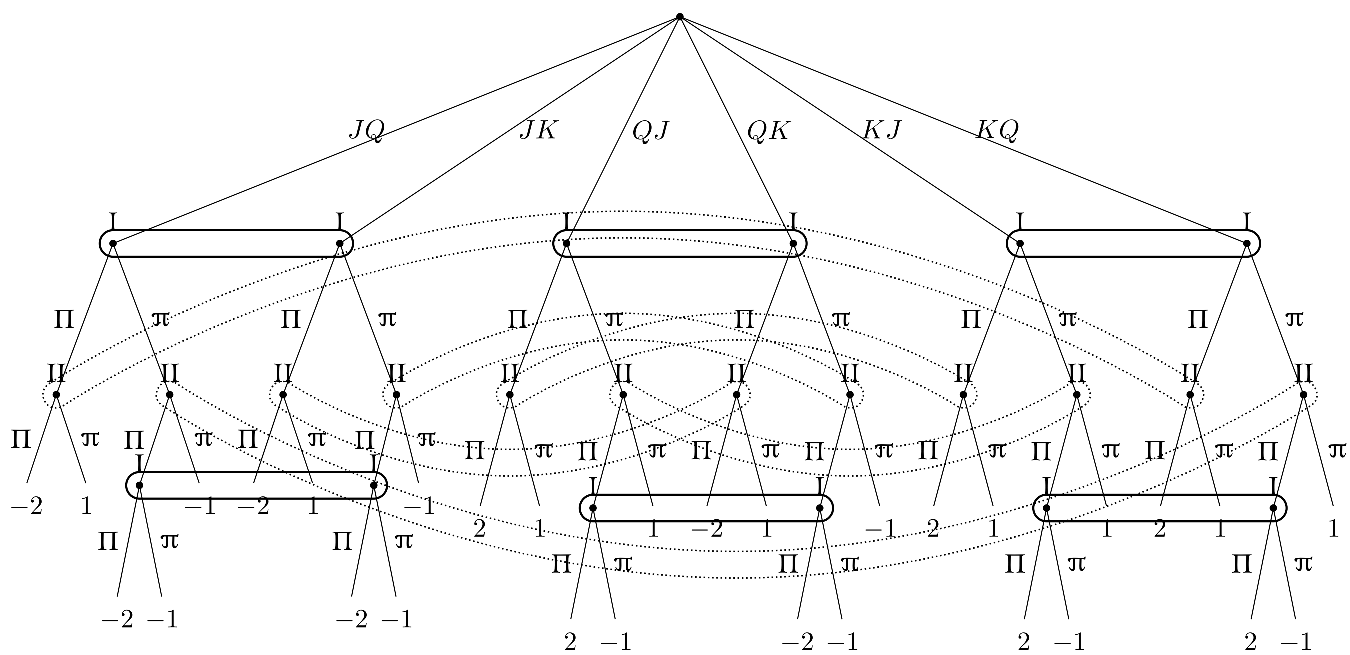
■

Άσκηση 11

Πόκερ με 3 *φύλλα (ή αλλιώς Πόκερ του Κουν)*: Κάθε ένας από δύο παίκτες αρχικά ποντάρει απο 1 μονάδα. Κατόπιν τους δίνεται ένα χαρτί στην τύχη από ένα πακέτο που περιέχει μόνο τρία χαρτιά, έναν Ρήγα(K), μία Ντάμα(Q) και έναν Βαλέ(J). Θεωρούμε ότι $K > Q > J$. Στη συνέχεια οι παίκτες επιλέγουν διαδοχικά (πρώτα ο I και μετά ο II γνωρίζοντας την απόφαση του I) αν θα ποντάρουν μία μονάδα ακόμη ή θα πάνε πάσο. Δύο διαδοχικά πονταρίσματα ή δύο διαδοχικά πάσο τερματίζουν το παιχνίδι, οπότε τότε ο παίκτης με το ψηλότερο χαρτί παίρνει τα χρήματα του τραπεζιού. Επίσης αν κάποιος παίκτης πάει πάσο μετά το ποντάρισμα του προηγούμενου, τότε αυτός χάνει και το παιχνίδι τελειώνει. (Αν κάποιος έχει πάει πάσο, το παιχνίδι δεν τελείωσε και ο επόμενος ποντάρισε, τότε ο προηγούμενος παίκτης ή θα πάει πάσο ή και πάλι θα ποντάρει. Σε κάθε περίπτωση, σύμφωνα με τους κανόνες, το παιχνίδι θα λήξει τότε).
Δώστε την εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού και τα σύνολα στρατηγικών. Επιλέξτε δύο στρατηγικές καταστάσεις και δώστε τη συνάρτηση πληρωμής σε αυτές. Εξετάστε αν υπάρχουν απλοποιήσεις στρατηγικών.

Λύση

Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής (Π=Ποντάρω, π=πάσο):



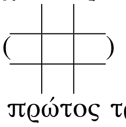
Τα σύνολα στρατηγικών $S^{\mathrm{I}}, S^{\mathrm{II}}$ είναι όλες οι διατεταγμένες εξάδες της μορφής

$$(x_1, x_2, \ldots, x_6) \text{ με } x_i \in \{\pi, \Pi\}$$

Υπάρχουν αρκετές απλοποιήσεις στρατηγικών, θα παραθέσουμε ενδεικτικά δύο από αυτές. Αρχικά, απλοποιήσεις στρατηγικών έχουμε στην στρατηγική του παίκτη I, καθώς όποτε σε ένα από τα j κατά σειρά (από αριστερά προς τα δεξία και από πάνω προς τα κάτω) σύνολα πληροφόρησης του, με $j \in \{1,2,3\}$ επιλέγει Π, η απάντηση του στο $j+3$ δεν επηρεάζει την πληρωμή του. Επίσης ελέγξτε ότι αν ένας παίκτης έχει K, ποτέ δεν θα παίξει δεύτερο πάσο.
Τέλος, θα υπολογίσουμε ενδεικτικά την πληρωμή για μία στρατηγική κατάσταση.

$$h^{\mathrm{I}}((\pi,\Pi,\pi,\Pi,\pi,\Pi),(\pi,\pi,\pi,\pi,\Pi,\Pi,\Pi)) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(-2) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(1) = \frac{3}{6}$$

■

Άσκηση 13
Στο παιχνίδι τρίλιζα ο παίκτης I τοποθετεί ένα πετραδάκι σε κάποια από τις 9 θέσεις ενός 3×3 πίνακα () , κατόπιν ο II τοποθετεί ένα πετραδάκι κ.ο.κ. Κερδίζει όποιος πετύχει να τοποθετήσει πρώτος τρία πετραδάκια σε οριζόντια, κάθετη ή διαγώνια διάταξη. Ο I κάνει την πρώτη κίνηση, αλλά επείγοντες λόγοι τον αναγκάζουν να δώσει οδηγίες σε έναν αντικαταστάτη του για τις επόμενες δύο κινήσεις, πριν να δει την κίνηση του II (θα επιστρέψει αφού ο II κάνει και την τρίτη του κίνηση).

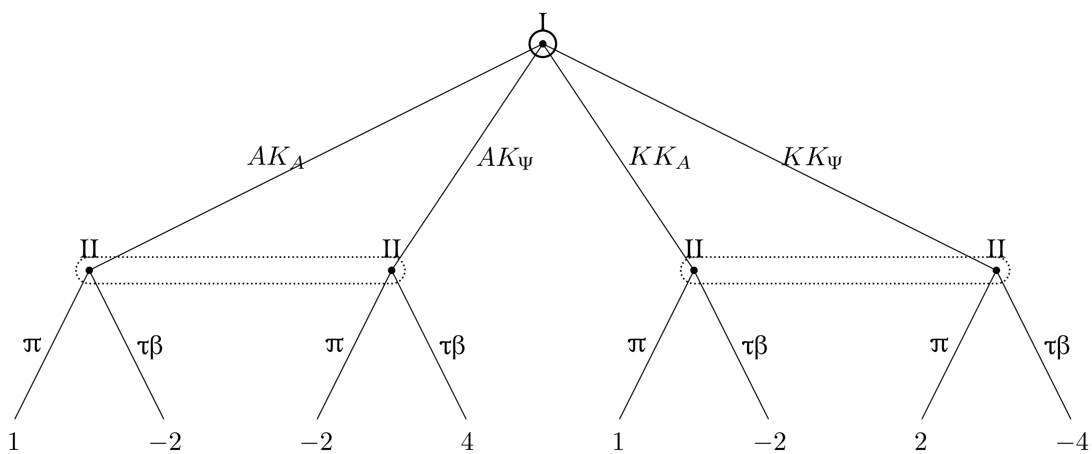
Μοντελοποιήστε το πρόβλημα των οδηγιών που θα δώσει ο I στον αντικαταστάτη του σαν παιχνίδι: Δείξτε ότι η οδηγία μπορεί να παρασταθεί σαν διατεταγμένη n-άδα. Ποιος ο αριθμός n; Πόσες οδηγίες διαθέτει ο I;

Λύση
Όταν ο I επιλέξει οποιδήποτε τετραγωνάκι απο τα 9 (πρώτη κίνηση του I), τότε ο II θα έχει 8 διαθέσιμες επιλογές. Σε κάθε μία από αυτές τις επιλογές, ο I θα έχει 7 διαθέσιμες κινήσεις. Άρα για τη δεύτερη του κίνηση, οι οδηγιές που θα αφήσει ο I στον αντικαταστάτη του θα πρέπει να περιέχουν $7 + 7 + \cdots + 7 = 7^8$ επιλογές. Μετά την δεύτερη κίνηση, ο II έχει 7^8 σύνολα πληροφόρησης και στο καθένα από αυτά έχει 6 δυνατές αποφάσεις. Άρα τα σύνολα πληροφόρησης του I στην τρίτη του κίνηση είναι 6^{7^8}. Άρα ο I θα πρέπει να αφήσει στον αντικαταστάτη του ένα σχέδιο με $7^8 + 5^{6^{7^8}}$ οδηγίες.
Η οδηγία μπορεί να παρασταθεί σαν διατεταγμένη $n-$άδα ($S^{\mathrm{I}} = \dots$) με $n = 8 + 6^{7^8}$, όπου το 8 συμβολίζει τα σύνολα πληροφόρησης του I στην δεύτερη του κίνηση και το 6^{7^8} συμβολίζει τα σύνολα πληροφόρησης του I στην τρίτη του κίνηση.

■

Άσκηση 14
Δύο παίκτες παίζουν χαρτιά. Ο I έχει τρία χαρτιά (έναν άσσο και δύο ρηγάδες). Ξεσκαρτάρει ένα από τα τρία χωρίς να το δει ο II και στη συνέχεια ανακοινώνει ή "Άσσος-Ρήγας" ή "Δύο Ρηγάδες" (ο "Άσσος-Ρήγας" είναι καλύτερο χέρι από το "Δύο-Ρηγάδες"). Ο II μπορεί ή να πάει πάσο ή να πει " τα βλέπω". Οι πληρωμές καθορίζονται ως εξής:
Αν ο I ανακοινώσει την αλήθεια για το χέρι του και ο II πάει πάσο, τότε ο I κερδίζει 1 από τον II. Αν ο I ανακοινώσει καλύτερο χέρι από το αληθινό και ο II πάει πάσο τότε ο I κερδίζει 2 από τον II. Αν ο I ανακοινώσει χειρότερο χέρι από το αληθινό και ο II πάει πάσο, τότε ο II κερδίζει 2 από τον I. Τέλος αν ο II πει " τα βλέπω", οι παραπάνω πληρωμές διπλασιάζονται και αντιστρέφονται, δηλαδή αυτός που κέρδιζε πριν τώρα χάνει. Να δώσετε την εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού αυτού, τα σύνολα στρατηγικών των δύο παικτών και τη συνάρτηση πληρωμής.

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής (τβ ="τα βλέπω", π =πάσο, οι δείκτες A και Ψ συμβολίζουν αν ο I λέει αλήθεια ή ψέμμα):



Τα σύνολα στρατηγικών των παικτών είναι:

$$S^{\mathrm{I}} = \{AK_A, AK_\Psi, KK_A, KK_\Psi\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{\text{π}, \text{τβ}\}$$

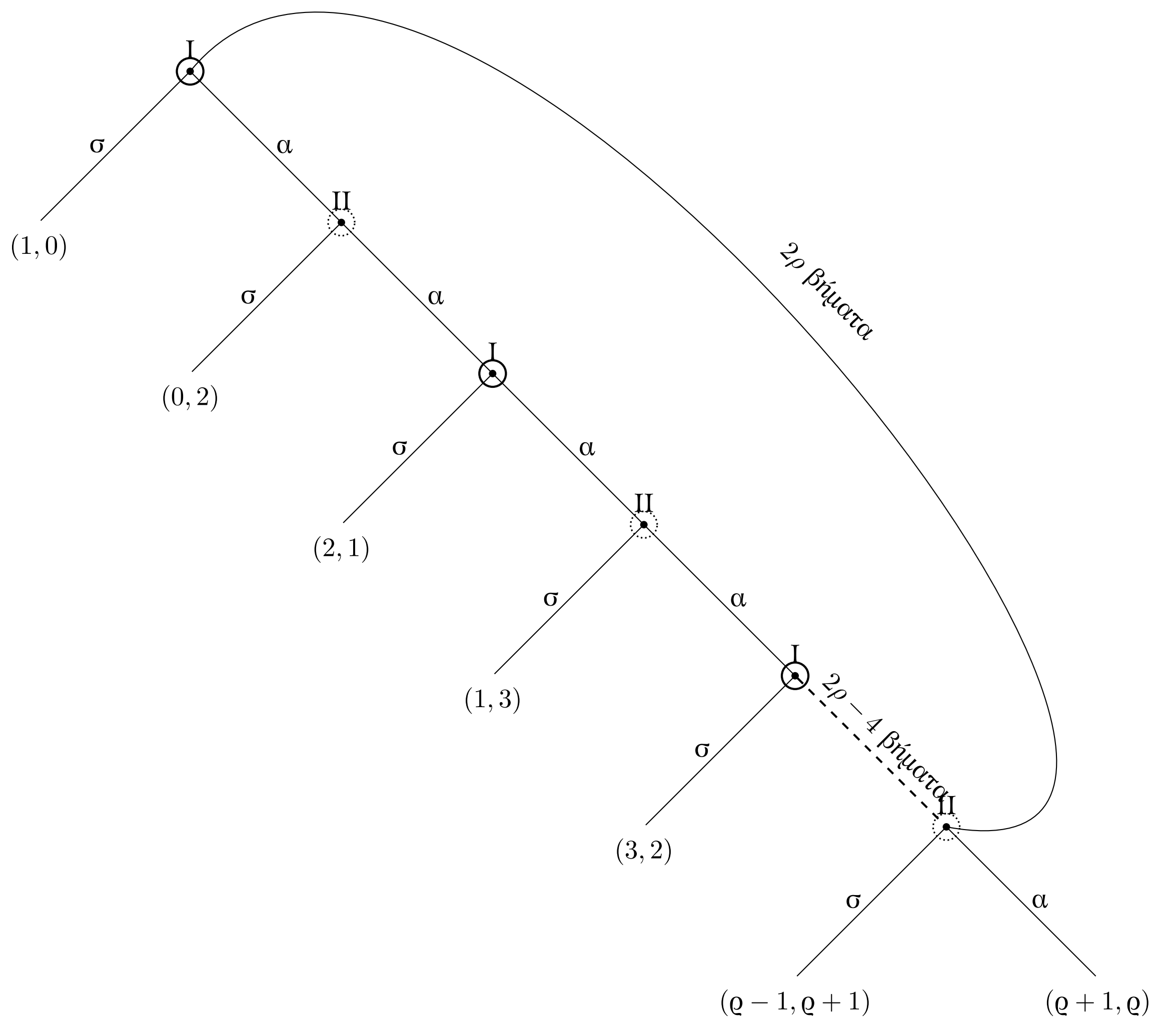
Η συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα τελικά είναι η εξής:

		S^{II}	
		π	τβ
S^{I}	AK_A	1	-2
	AK_Ψ	-2	4
	KK_A	1	-2
	KK_Ψ	2	-4

■

Άσκηση 15
Στο παιχνίδι 2 παικτών τέλεια πληροφόρησης "σαρανταποδαρούσα" πρώτος κινείται ο Ι που μπορεί ή να σταματήσει το παιχνίδι με πληρωμή $(1, 0)$ ή να δώσει την κίνηση του στον ΙΙ. Ο ΙΙ μπορεί ή να σταματήσει το παιχνίδι με πληρωμή $(0, 2)$ ή να δώσει την κίνηση του στον Ι, κ.ο.κ. Γενικά, αν το παιχνίδι βρεθεί στη θέση $(2\kappa - 1)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, την κίνηση έχει ο Ι που μπορεί ή να σταματήσει το παιχνίδι (σ) με πληρωμή $(\kappa, \kappa - 1)$ ή να αφήσει (α) το παιχνίδι να έρθει στην επόμενη θέση 2κ. Αν το παιχνίδι βρεθέι στη θέση 2κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$, την κίνηση έχει ο ΙΙ που μπορεί ή να σταματήσει το παιχνίδι (σ) με πληρωμή $(\kappa - 1, \kappa + 1)$ ή να αφήσει (α) το παιχνίδι να έρθει στην επόμενη θέση $2\kappa + 1$, όπου την κίνηση θα πάρει ο Ι, κ.ο.κ. Υποθέτουμε ότι το παιχνίδι τελειώνει στη θέση 2ϱ, για κάποιο $\varrho \in \mathbb{N}$, όπου ο ΙΙ επιλέγει ή (σ) με πληρωμή $(\varrho - 1, \varrho + 1)$ ή (α) με πληρωμή $(\varrho + 1, \varrho)$.
Να δώσετε το δένδρο του παιχνιδιού και να βρείτε τα S^{I} και S^{II}. Μπορείτε να απλοποιήσετε τις στρατηγικές των παικτών; Να δώσετε τη συνάρτηση πληρωμής αυτού του δι-πινακοπαιχνιδιού.

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:



Οι στρατηγικές των παικτών είναι:

$$S^{\mathrm{I}} = \{(x_1, x_3, \ldots, x_{2\rho-1}), \text{με } x_i = \{\sigma, \alpha\} \text{ και } i = 1, 3, \ldots, 2\rho - 1\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{(x_2, x_4, \ldots, x_{2\rho}), \text{με } x_i = \{\sigma, \alpha\} \text{ και } i = 2, 4, \ldots, 2\rho\}$$

Αν σε οποιαδήποτε από τις i στρατηγικές, με $i \in \{1, \ldots, \varrho\}$ ο I ή ο II επιλέξουν σ, τότε οι επόμενες κινήσεις των παικτών δεν έχουν νόημα (το παιχνίδι σταματάει) και άρα τα σύνολα στρατηγικών α-πλοποιούνται κατάλληλα. Έτσι έχουμε τα σύνολα στρατηγικών (με x συμβολίζονται οι στρατηγικές που απλοποιούνται)

$$S^{\mathrm{I}} = \underbrace{\{(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \sigma, x), (\alpha, \alpha, \ldots, \sigma, x, x), \ldots, (\sigma, x, \ldots, x)\}}_{\rho \text{ κινήσεις}}$$

$$S^{\mathrm{II}} = \underbrace{\{(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \sigma, x), (\alpha, \alpha, \ldots, \sigma, x, x), \ldots, (\sigma, x, \ldots, x)\}}_{\rho \text{ κινήσεις}}$$

Η συνάρτηση πληρωμής λοιπόν θα είναι ένας πίνακας διαστάσεων $\rho \times \rho$. Κατά σειρά, δίνονται οι πίνακες πληρωμών για τους παίκτες I και II.

S^{I} \ S^{II}	$(α, α, \ldots, α, α, α)$	$(α, α, \ldots, α, α, σ)$	$(α, α, \ldots, α, σ, x)$	$\ldots$	$(σ, x, \ldots, x)$
$(α, α, \ldots, α, α, α)$	$\rho + 1$	$\rho - 1$	$\rho - 2$	$\rho - μ$	0
$(α, α, \ldots, α, α, σ)$	$κ$	$κ$	$\rho - 2$	$\rho - μ$	0
$(α, α, \ldots, α, σ, x)$	$κ - 1$	$κ - 1$	$κ - 1$	$\rho - μ$	0
$\ldots$	$κ - λ$	$κ - λ$	$κ - λ$	$κ - λ$	0
$(σ, x, \ldots, x)$	1	1	1	1	1

S^{I} \ S^{II}	$(α, α, \ldots, α, α, α)$	$(α, α, \ldots, α, α, σ)$	$(α, α, \ldots, α, σ, x)$	$\ldots$	$(σ, x, \ldots, x)$
$(α, α, \ldots, α, α, α)$	ρ	$\rho + 1$	ρ	$\rho - μ$	2
$(α, α, \ldots, α, α, σ)$	$κ - 1$	$κ - 1$	ρ	$\rho - μ$	2
$(α, α, \ldots, α, σ, x)$	$κ - 2$	$κ - 2$	$κ - 2$	$\rho - μ$	2
$\ldots$	$κ - λ$	$κ - λ$	$κ - λ$	$κ - λ$	2
$(σ, x, \ldots, x)$	0	0	0	0	0

■

Άσκηση 16
Ένα Γερμανικό Απόσπασμα που φυλά μία απομονωμένη αποθήκη πυρομαχικών (Στερεά Ελλάδα - 1944) πληροφορείται ότι ένα Αντάρτικο τάγμα θα επιτεθεί στα πυρομαχικά. Για τοπογραφικούς λόγους και για λόγους ασφαλείας οι Γερμανοί δεν μπορούν να αμυνθούν μέσα στην αποθήκη και αποφασίζουν να υπερασπιστούν ένα από τα δύο περάσματα που οδηγούν σε αυτή(Να υπερασπιστούν και τα δύο μαζί δεν μπορούν γιατί τους λείπουν οι δυνάμεις).
Αν οι Γερμανοί υπερασπιστούν το σωστό πέρασμα (αυτό δηλαδή απ'όπου έρχονται οι Αντάρτες) τότε θα κερδίσουν τη μάχη μίας και οι Αντάρτες δεν έχουν αρκετά πυρομαχικά (πληρωμή 1 για τους Γερμανούς και -1 για τους Αντάρτες). Αν οι Γερμανοί υπερασπιστούν το λάθος πέρασμα τότε οι Αντάρτες καταλαμβάνουν τα πυρομαχικά. Τώρα και οι δύο αντίπαλοι πρέπει να σχεδιάσουν τι θα κάνουν στη συνέχεια.

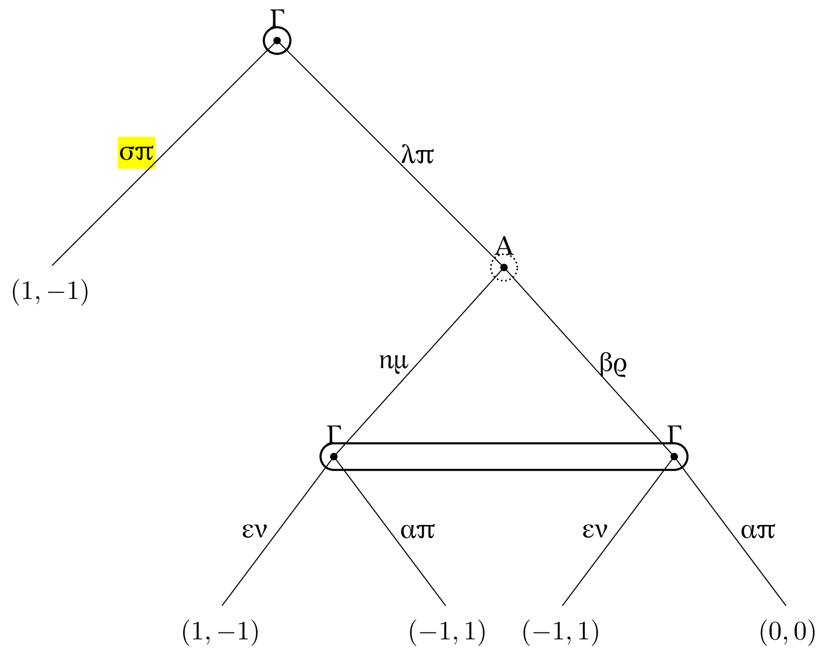
Οι Αντάρτες μπορούν είτε να φύγουν αμέσως μετά τα πυρομαχικά (ημερήσια επιχείρηση) είτε να περιμένουν να πέσει το σκοτάδι για καλύτερη κάλυψη. Οι Γερμανοί μπορούν είτε να στήσουν ενέδρα στο πέρσμα που τώρα πλέον γνωρίζουν ότι θα χρησιμοποιήσουν οι Αντάρτες είτε να επιστρέψουν αμέσως στην αποθήκη με την ελπίδα να προλάβουν τους Αντάρτες εκεί.

Αν οι Αντάρτες πέσουν σε ενέδρα τη μέρα, θα καταστραφούν (πληρωμή 1 για τος Γερμανούς και -1 για τους Αντάρτες). Αν οι Αντάρτες πέσουν σε ενέδρα τη νύχτα, θα καταφέρουν να ξεγλυστρίσουν με μικρές απώλειες (πληρωμή -1 για τους Γερμανούς και 1 για τους Αντάρτες).

Αν οι Γερμανοί επιτεθούν πίσω στην αποθήκη και οι Αντάρτες έχουν ήδη φύγει (δηλαδή έχουν επιλέξει την ημερήσια υποχώρηση) οι Αντάρτες παίρνουν 1 και οι Γερμανοί -1. Αν οι Γερμανοί επιτεθούν στην αποθήκη και βρουν τους Αντάρτες εκεί να περιμένουν να έρθει η νύχτα, θα επακολουθήσει αιματοχυσία με βαρειές απώλειες και για τις δύο πλευρές (Αντάρτες 0 και Γερμανοί 0).

Σας ζητείτε να σχεδιάσετε το δέντρο αυτού του παιχνιδιού.

Λύση
Συμβολίζουμε με $'Α'$ τους Αντάρτες, $'Γ'$ τους Γερμανούς, με $'λπ'$ το λάθος πέρασμα, με $'σπ'$ το σωστό πέρασμα, με $'ημ'$ οι Αντάρτες να φύγουν αμέσως (ημερήσια επιχείρηση), με $'βρ'$ οι Αντάρτες να φύγουν νύχτα, με $'εν'$ να στήσουν ενέδρα οι Γερμανοί στο πέρασμα όπου θα φύγουν οι Αντάρτες και $'απ'$ οι Γερμανοί να γυρίσουν πίσω στην αποθήκη με την ελπίδα να προλάβουν τους Αντάρτες. Το δέντρο του παιχνιδιού είναι το εξής:


Γ
σπ
λπ
(1, −1)
Α
ηµ
βϱ
Γ
Γ
εν
απ
εν
απ
(1, −1)
(−1, 1)
(−1, 1)
(0, 0)

■

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Άσκηση 1

Βεβαιωθείτε ότι γνωρίζετε την κανονική μορφή των παιχνιδιών των Ασκήσεων 2.10.1, 2.10.3, 2.10.4, 2.10.6 , 2.10.7, 2.10.8, 2.10.9, 2.10.10, 2.10.14, 2.10.16 (ουσιαστικά τους πίνακες των παιχνιδιών αυτών). Περιγράψτε τις μεικτές στρατηγικές των παικτών στα παιχνίδια αυτά.

Λύση

Πηγαίντε στον πίνακα πληρωμών της εκάστοτε άσκησης και ορίστε μία κατανομή πιθανότητας $\tilde{S}^{\mathrm{I}}$ πάνω στο S^{I} ως εξής:

$$\tilde{S}^{\mathrm{I}} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{|S^{\mathrm{I}}|}),\ \text{με} \sum_{i=1}^{|S^{\mathrm{I}}|} x_i = 1 \text{ και } x_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \dots, |S^{\mathrm{I}}|\}\}$$

Κάντε το ίδιο για τους υπόλοιπους παίκτες του παιχνιδιού.
Τι σημαίνει μεικτή στρατηγική; Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να το εξηγήσετε σε έναν φίλο σας με ένα παράδειγμα (νόμισμα κορώνα-γράμματα για 2 στρατηγικές, ζάρι για 6 στρατηγικές και βάλτε φαντασία για τις υπόλοιπες).

Άσκηση 2

Στο παιχνίδι της Άσκηση 2.10.10 μπορείτε να εντοπίσετε το ΣΣΙ (σε καθαρές στρατηγικές); Είναι η στρατηγική κατάσταση όπου: Ο Ι αρχικά προτάσσει ένα δάκτυλο και αν το παιχνίδι επαναληφθεί τότε προτάσσει δύο δάκτυλα ενώ ο ΙΙ αρχικά προτάσσει δύο δάκτυλα και αν το παιχνίδι επαναληφθεί τότε προτάσει ένα δάκτυλο. Να δείξετε ότι η στρατηγική αυτή κατάσταση έχει την ιδιότητα του ΣΣΙ.

Λύση

Ας θυμηθούμε τον πίνακα πληρωμών του παιχνιδιού:

		S^{II}			
		$(1,x,1)$	$(1,x,2)$	$(2,1,x)$	$(2,2,x)$
S^{I}	$(1,1,x)$	1	1	-1	0
	$(1,2,x)$	1	1	0	1
	$(2,x,1)$	-1	0	-1	-1
	$(2,x,2)$	0	1	-1	-1

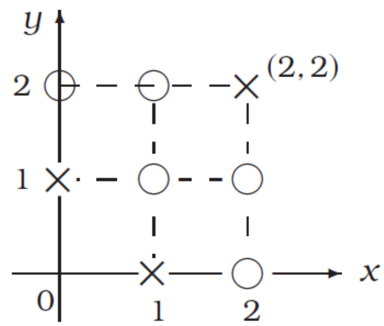
Σε κόκκινο κύκλο βρίσκονται τα Σημεία Στρατηγικής Ισορροπίας (ΣΣΙ). Ας εξετάσουμε γιατί συμβαίνει αυτό:
Ο παίκτης Ι, προσπαθώντας να απαντήσει βέλτιστα στον ΙΙ όταν αυτός δείχνει 2 δάχτυλα, έχει τις επιλογές να δείξει 1 ή 2 δάχτυλα. Δεδομένου ότι αν δεν κερδίσει, προτιμάει τουλάχιστον να μην χάσει, θα επιλέξει να δείξει 1 δάχτυλο, διότι μόνο έτσι είναι δυνατόν να αποσωβήσει την ήττα (άμα το άθροισμα είναι 4 στον πρώτο γύρο νικάει ο ΙΙ). Στον δεύτερο γύρο ο Ι, όταν ο ΙΙ δείχνει 1 δάκτυλο, για να βελτιστοποιήσει την πληρωμή του θα προτιμήσει πάλι να μην χάσει, άρα θα δείξει 2 δάκτυλα. Άρα ο Ι με την στρατηγική κατάσταση $(1,2)$ απαντά βέλτιστα στον ΙΙ αν εκείνος παίξει $(2,1)$.
Αντίστροφα ο ΙΙ, όταν ο Ι προτάσσει ένα δάκτυλο, μπορεί είτε να χάσει (δείχνοντας 1 δάχτυλο) είτε να φέρει ισοπαλία. Με βάση τα προηγούμενα θα προτιμήσει το δεύτερο, άρα θα επιλέξει να προτάξει 2 δάχτυλα. Στον δεύτερο γύρο ο ΙΙ, όταν ο Ι δείξει 2 δάχτυλα, έχει την δυνατότητα ή να φέρει ισοπαλία (δείχνοντας 1 δάχτυλο) ή να χάσει(δείχνοντας 2 δάχτυλα, το άθροισμα 4 στον δεύτερο γύρο σημαίνει νίκη του Ι). Άρα, ο Ι θα προτάξει 1 δάχτυλο στο δεύτερο γύρο και η στρατηγική κατάσταση $(2,1)$ αποτελεί βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική $(1,2)$ του Ι. Συνεπώς, το σημείο αυτό αποτελεί Σημείο Στρατηγικής Ισορροίας (ΣΣΙ).

■

Άσκηση 3

Δύο σωροί με δύο σπίρτα ο κάθε ένας τοποθετούνται πάνω σε ένα τραπέζι. Δύο παίκτες, οι Ι και ΙΙ , παίρνουν εναλλάξ όσα σπίρτα θέλουν αλλά από ένα μόνο σωρό (ξεκινά ο Ι). ΄Οταν έρθει η σειρά ενός παίκτη, αυτός πρέπει υποχρεωτικά να πάρει τουλάχιστον ένα σπίρτο. Αυτός που θα πάρει τελευταίος χάνει. Λύστε το παιχνίδι αυτό μέσω δυναμικού προγραμματισμού. Μπορείτε να γενικεύσετε για δύο σωρούς όπου ο πρώτος έχει K και ο δεύτερος L σπίρτα;

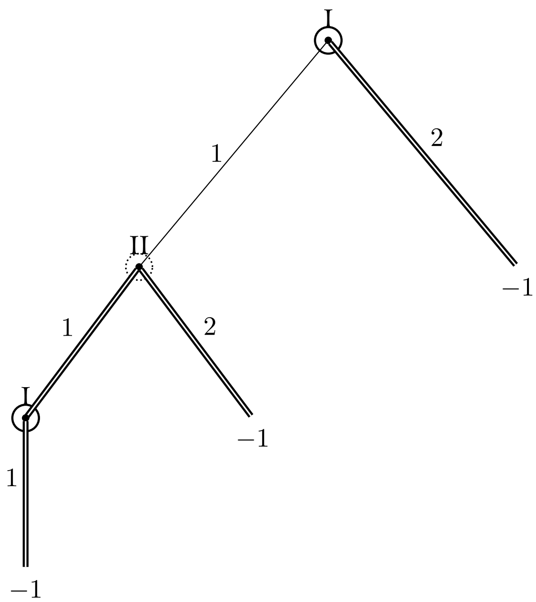
Παρατήρηση: Προσέξτε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να παρασταθεί από ένα πλέγμα



Υπάρχει ένας δείκτης (πιόνι) τοποθετημένος αρχικά στη θέση $(2,2)$ (γενικότερα στη θέση (K,L)). Οι παίκτες μετακινούν εναλλάξ τον δείκτη από την εκάστοτε θέση του, έστω (x,y), στη θέση $(x–k,y)$ ή στη θέση $(x,y–l)$ με $k \in \{1,\ldots,x\}$ και $l \in \{1,...,y\}$. Λύση μέσω δυναμικού προγραμματισμού σημαίνει ότι λύνουμε με επαγωγή από το τέλος $((0,0))$ προς την αρχή $((K,L))$. Οι θέσεις $(1,0)$ και $(0,1)$ χάνουν, δηλαδή εάν ένας παίκτης έχει την κίνηση και ο δείκτης βρίσκεται στις θέσεις αυτές, τότε ο παίκτης θα χάσει. Τις σημειώνουμε με ×. Κάθε θέση που βρίσκεται προς τα δεξιά στην οριζόντια ευθεία ή προς τα πάνω στην κατακόρυφη ευθεία από μία θέση που χάνει, θα κερδίζει, αφού εάν ένας παίκτης έχει την κίνηση θα μπορεί να μετακινήσει τον δείκτη στη θέση που χάνει. Σημειώνουμε επομένως όλες τις θέσεις με συντεταγμένες $(1,y)$ και $(x,1)$ με o, ως θέσεις που κερδίζουν. Τέλος, μία θέση για την οποία όλες οι αριστερά (οριζοντίως) και κάτω (καθέτως) θέσεις κερδίζουν, θα χάνει (π.χ. η $(2,2)$). Έτσι μπορούμε να συμπληρώσουμε όλο το πλέγμα και να δούμε ότι ο I θα κερδίζει τότε και μόνον τότε όταν ή $K \neq L$ και $max(K,L) > 1$ ή $K = L = 1$.

Το παραπάνω πρόβλημα για αυθαίρετο αριθμό σωρών και αυθαίρετο αρχικό αριθμό σπίρτων σε κάθε σωρό λέγεται Nim και είναι λυμένο από τις αρχές του 20ού αιώνα. Για μία όμορφη συζήτηση της περιοχής αυτής και γενικότερα των συνδυαστικών παιχνιδιών, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις σημειώσεις του T. S. Ferguson (2000).

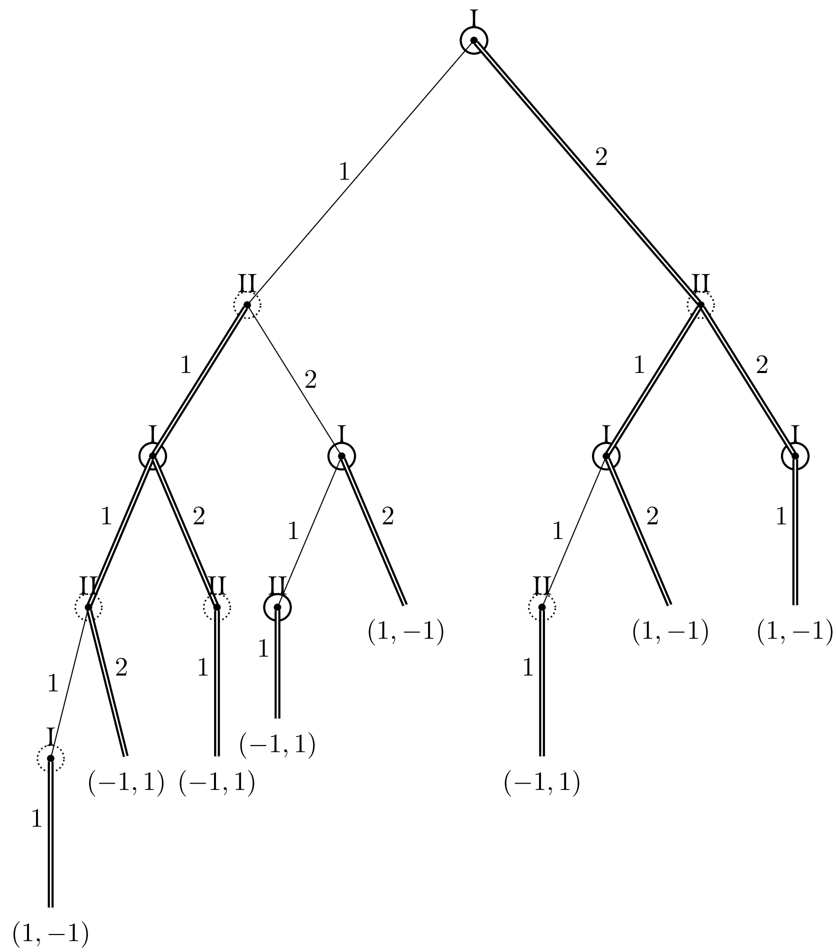
Λύση
Έστω ότι ξεκινάει πρώτος ο I. Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:



Για την γενίκευση δείτε την παρατήρηση.

Άσκηση 4
Δύο παίκτες πάιρνουν εναλλάξ 1 ή 2 πέτρες από έναν σωρό από 5 πέτρες. Όποιος πάρει τελευταίος κερδίζει 1 μονάδα ωφέλειας από τον άλλο παίκτη. Λύστε το παιχνίδι αυτό μέσω δυναμικού προγραμματισμού.
Μπορείτε να γενικεύσετε για σωρό από n πέτρες;

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:

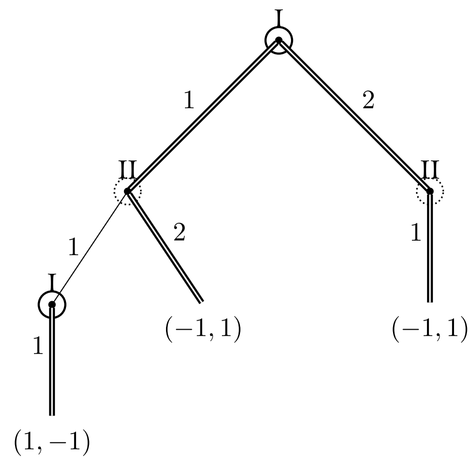


Λύσαμε το πρόβλημα με προς τα πίσω αντικατάσταση χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό[2]. Με διπλή γραμμή φαίνονται τα μονοπάτια που μας δίνουν το ΣΣΙ όπου η πληρωμή είναι $(1, -1)$. Ας προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε τη γενίκευση για n πέτρες. Με κάποιες πράξεις και δουλεύοντας με αντίστοιχη μεθοδολογία όπως σε αυτήν την άσκηση, θα παρατηρήσετε ότι ο I νικάει για $n = 2, 4, 5, 7$ και χάνει για $n = 3, 6$. Υποψιαζόμαστε από τα παραπάνω ότι ο παίκτης I χάνει στα πολλαπλάσια του 3 (και άρα νικάει ο II). Άρα, όποτε ένας παίκτης βρίσκεται σε θέση που είναι πολλαπλάσιο του 3, έχει πληρωμή $(-1, 1)$. Πάμε να το αποδείξουμε αυστηρά αυτό.
Ισχυρισμός: Ο παίκτης I χάνει στις θέσεις $3n$ ενώ νικάει διαφορετικά (στις θέσεις $3n + 1$ και $3n + 2$ δηλαδή) , με $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Με επαγωγή

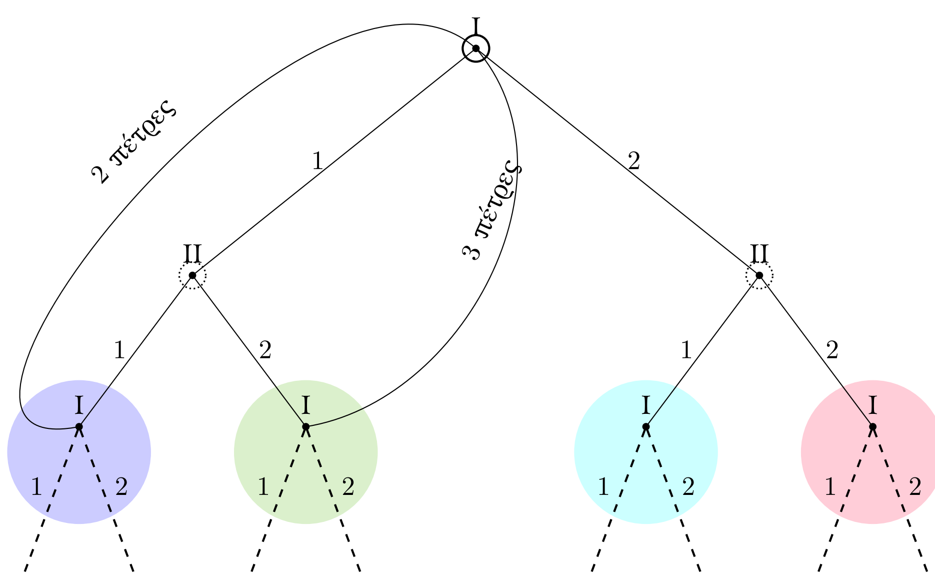
Βάση: Θα κάνουμε αναλυτικά την απόδειξη για $n = 1$.

[2]σελ $43 - 58$, "Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας" Κ.Μπλολιδάκης, Εκδόσεις Σοφία 2009



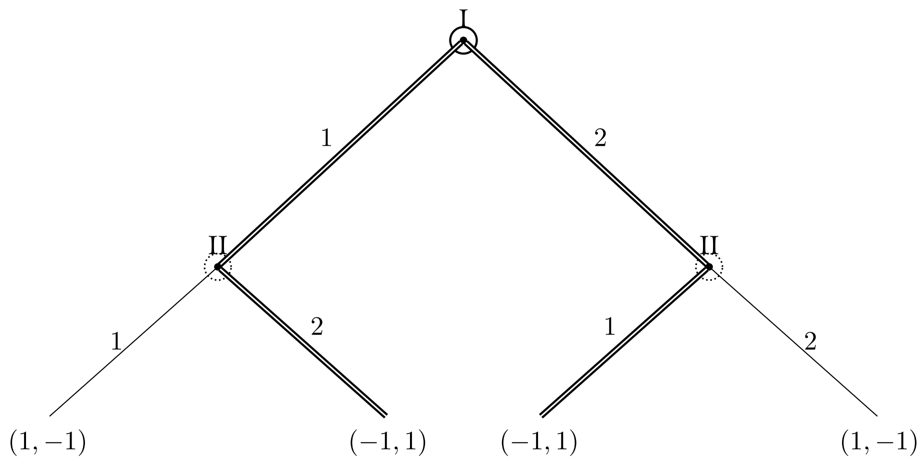
Ο παίκτης I λοιπόν χάνει με απόλυτη βεβαιότητα για $n = 1$.

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι για $3n$ ο I χάνει ενώ για $3n + 1, 3n + 2$ ο I κερδίζει. Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα για $3(n + 1), 3(n + 1) + 1, 3(n + 1) + 2$.
Επαγωγικό Βήμα: Για $3(n + 1)$ έχουμε[3]:



Το μπλε υποπαχνίδι (το πρώτο απο αριστερά προς τα δεξιά) είναι της μορφής $3n + 2$ $(3(n + 1) - 2)$, άρα από την Επαγωγική Υπόθεση έχει τιμή $(1, -1)$ (αφού ο παίκτης I κερδίζει), ενώ το πράσινο (το δεύτερο με την ίδια σειρά) υποπαιχνίδι είναι της μορφής $3n$ άρα από την Επαγωγική Υπόθεση έχει τιμή $(-1, 1)$ (αφού ο παίκτης I χάνει). Όμοια αποδεικνύεται ότι το γαλάζιο υποπαιχνίδι έχει τιμή $(-1, 1)$ και το κόκκινο $(1, -1)$.
Επειδή το ΣΣΙ είναι τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια, το νέο μας δένδρο θα είναι το εξής:

[3] Τα σύνολα πληροφόρησης στα έγχρωμα υποπαιχνίδια παραμένουν όπως πριν (εν προκειμένω, μονοσύνολα). Αυτή η αμεταβλητότητα σε σχέση με το μαύρο ανάλογο τους ισχύει και για τα υπόλοιπα έγχρωμα υποπαιχνίδια, καθ'όλη τη διάρκεια του εγγράφου.

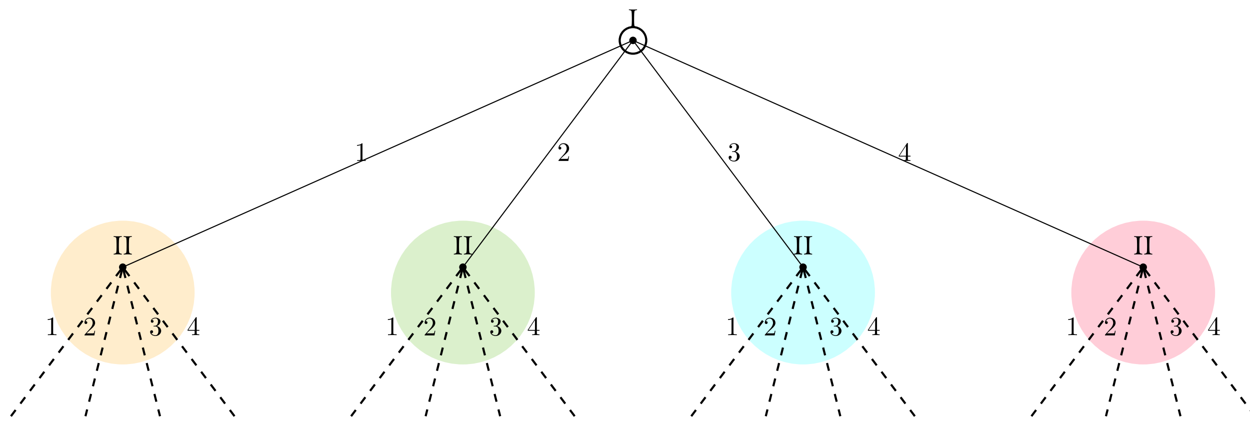


Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ο παίκτης I χάνει στη $3(n+1)$ θέση και έτσι τελειώσαμε το επαγωγικό βήμα. Δουλεύουμε όμοια για τις άλλες 2 περιπτώσεις και βρίσκουμε ότι σε αυτές ο παίκτης I νικάει .

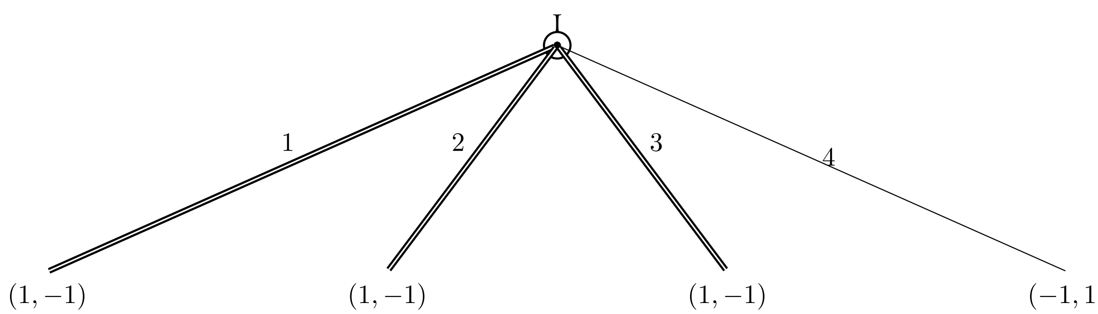
■

Άσκηση 5
Σε ένα τραπέζι βρίσκεται ένας σωρός από n σπίρτα. Δύο παίκτες παίρνουν από 1 έως 4 σπίρτα (όσα θέλουν) διαδοχικά. Αυτός που θα πάρει τελευταίος χάνει. Λύστε το παιχνίδι μέσω δυναμικού προγραμματισμού.

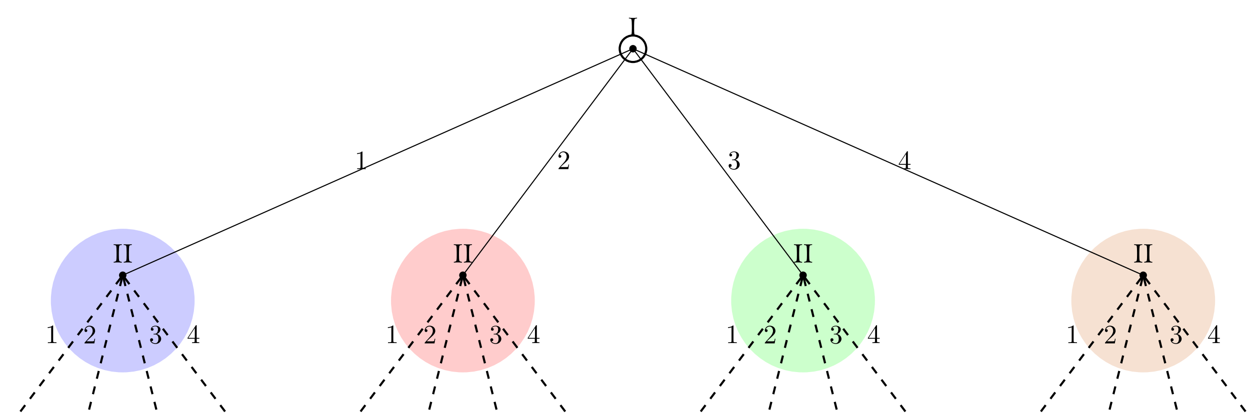
Λύση
Αρχικά, παρατηρούμε ότι το παιχνίδι είναι τέλειας πληροφόρησης, άρα λύνεται με δυναμικό προγραμματισμό. Θα λύσουμε την άσκηση με επαγωγή. Μία ιδέα είναι να κάνουμε επαγωγή $modulo 4$. Δοκιμάστε και δείτε τις περιπτώσεις για $n = 4, 5, \ldots, 12$ σπίρτα. Θα παρατηρήσετε ότι ο πρώτος παίκτης νικάει για $4, 5, 7$ σπίρτα αλλά χάνει για 6. Συνεχίζοντας τις δοκιμές, παρατηρούμε ότι για $8, 9, 10, 12$ σπίρτα νικάει ο πρώτος παίκτης, ενώ για 11 χάνει (και άρα νικάει ο δεύτερος). Από το μοτίβο που παρουσιάζεται λοιπόν, αποφασίζουμε να κάνουμε επαγωγή $modulo 5$.
Ισχυρισμός: Ο παίκτης που ξεκινάει με αριθμό σπίρτων της μορφής $n = 5\kappa + 1$ χάνει, ενώ στις άλλες περιπτώσεις κερδίζει.
Απόδειξη: Με επαγωγή
Βάσης της Επαγωγής: Αποδείξτε τον ισχυρισμό για $\kappa = 1$.
Επαγωγική Βήμα: Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για αριθμό σπίρτων της μορφής $n = 5(\kappa+1), 5(\kappa+1)+2, 5(\kappa+1)+3, 5(\kappa+1)+4$, δηλαδή ότι για αυτά ο πρώτος παίκτης κερδίζει ενώ για $n = 5(\kappa+1)+1$ ο πρώτος παίκτης χάνει . Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει για $n = 5(\kappa+1)$.
Έστω $n = 5\kappa + 5$ σπίρτα. Ας κάνουμε το δέντρο του παιχνιδιού .



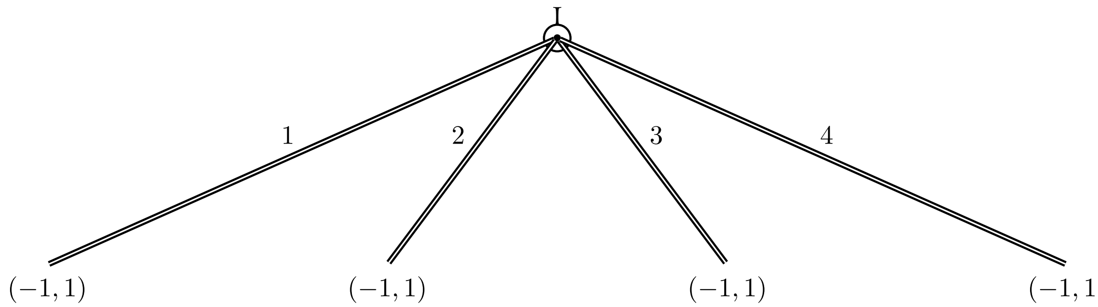
Ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις. Στο πορτοκαλί παιχνίδι (πρώτο κατα σειρά) ο παίκτης II ξεκινάει με $5κ + 4$ σπίρτα. Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο παίκτης που ξεκινάει με αυτόν τον αριθμό των σπιρτων χάνει. Άρα το πορτοκαλί παιχνίδι έχει πληρωμή $(1, -1)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το πράσινο παιχνίδι έχει πληρωμή $(1, -1)$, το γαλάζιο $(1, -1)$ και το κόκκινο $(-1, 1)$ γιατί εκεί ο II θα έχει $5κ + 1$ σπίρτα. Το δέντρο που προκύπτει λοιπόν είναι το εξής:



Έχουμε αποδείξει λοιπόν την επαγωγική υπόθεση για την πρώτη περίπτωση. Ας εξετάσουμε και την περίπτωση $n = 5(κ + 1) + 1$. Ας κάνουμε το δέντρο του παιχνιδιού.



Εδώ το μπλε υποπαιχνίδι (πρώτο κατά σειρά) είναι της μορφής $n = 5(κ + 1)$, το οποίο αποδείξαμε προηγουμένως ότι ο παίκτης που βρίσκεται στη θέση αυτή κερδίζει, άρα το μπλε υποπαιχνίδι έχει τιμή $(-1, 1)$. Το κόκκινο υποπαιχνίδι είναι της μορφής $n = 5\kappa + 4$, για το οποίο γνωρίζουμε από την επαγωγική υπόθεση ότι ο παίκτης που βρίσκεται στη θέση αυτή κερδίζει, άρα το κόκκινο υποπαιχνίδι έχει τιμή $(-1, 1)$. Συνεχίζοντας όμοια βρίσκουμε ότι και τα άλλα δύο υποπαιχνίδια έχουν τιμή $(-1, 1)$ και το δέντρο που προκύπτει είναι το εξής:



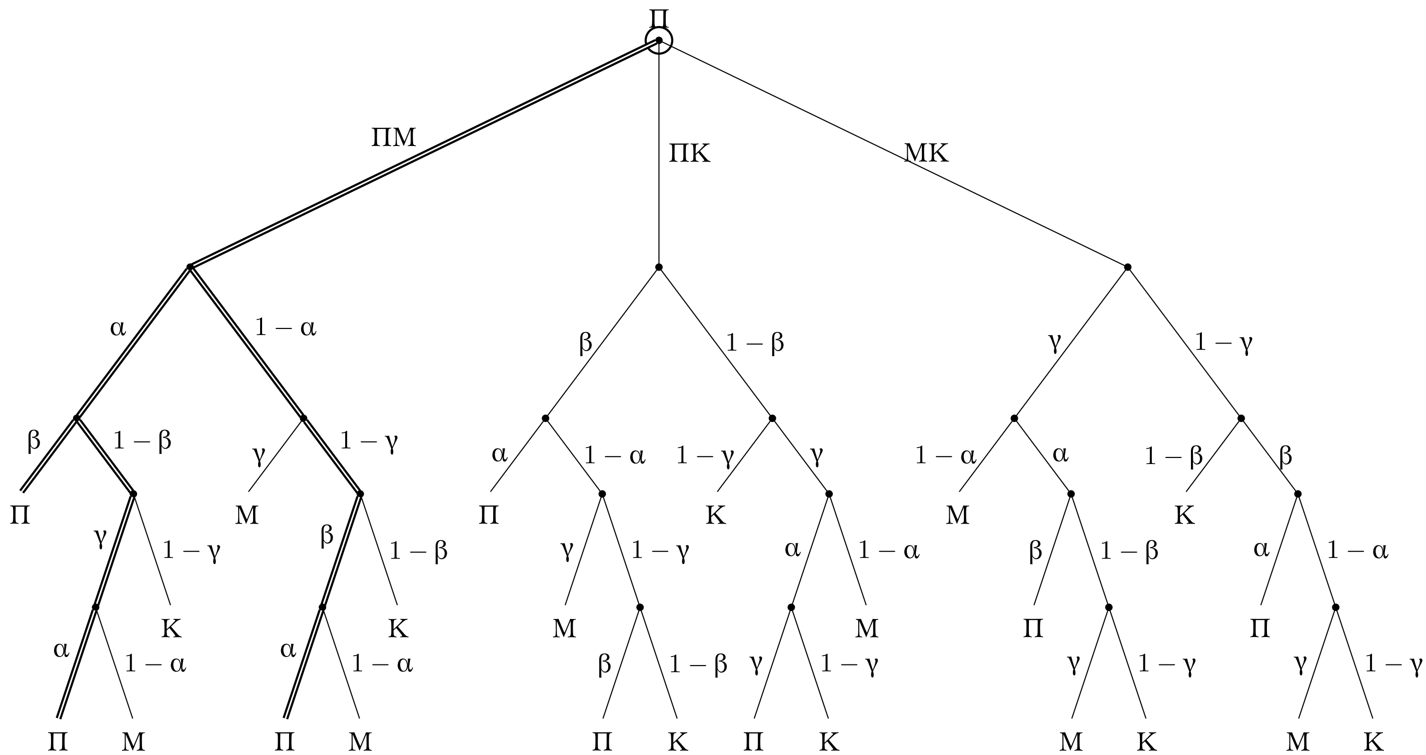
Βλέπουμε λοιπόν ότι ο παίκτης I δεν μπορεί να αποφύγει την ήττα και μοιραία χάνει. Ομοίως αποδευκνύονται και οι άλλες τρεις σχέσεις της επαγωγικής υπόθεσης[4]

■

Άσκηση 6
Τρίτη Μαθηματική Ολυμπιάδα- Η.Π.Α. Ένας πατέρας (Π), μία μητέρα (Μ) και μία κόρη (Κ) αποφασίζουν να διοργανώσουν μία σειρά αγώνων κυπέλλου στην οικογένειά τους σε κάποιο επιτραπέζιο παιχνίδι 2-παικτών στο οποίο ή κερδίζεις ή χάνεις (π.χ.τάβλι). Επειδή ο πατέρας είναι ο χειρότερος πάικτης από τους τρεις, του δίνεται η δυνατότητα να επιλέξει αυτός το ζευγάρι του α' αγώνα(ή ΠΚ ή ΠΜ ή ΜΚ). Ο νικητής κάθε αγώνα πρόκειται κατόπιν να αντιμετωπίσει τον παίκτη που δεν έπαιξε σ'εκείνο τον αγώνα, κ.ο.κ. Ο πρώτος παίκτης που θα κερδίσει δύο αγώνες κερδίζει το κύπελλο. Θα υποθέσουμε ότι σε έναν αγώνα ο πατέρας κερδίζει τη μητέρα με πιθανότητα α, την κόρη με πιθανότητα β και τέλος ότι η μητέρα κερδίζει την κόρη με πιθανότητα γ. Οι πιθανότητες αυτές θεωρούνται σταθερές σε όλη τη διάρκεια του κυπέλλου. Να δείξετε ότι αν α $>$ β, τότε ο πατέρας θα προτιμήσει ο πρώτος αγώνας να είναι μεταξύ αυτού και της μητέρας.
Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο πατέρας το κύπελλο αν ακολουθήσει τη στρατηγική του ΣΣΙ;

Λύση
Η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού είναι η ακόλουθη:

[4]Περισσότερα για τέτοιου είδους παιχνίδια μπορείτε να βρείτε στον σύνδεσμο https://en.wikipedia.org/wiki/Nim#The_subtraction_game



Αν ο Π επιλέξει ΠΜ η ολική πιθανότητα [5] να κερδίσει θα είναι

$$\alpha\beta + \alpha(1-\beta)\gamma\alpha + (1-\alpha)(1-\gamma)\beta\alpha$$

Αντίστοιχα αν ο Π επιλέξει ΠΚ η ολική πιθανότητα να κερδίσει θα είναι

$$\beta\alpha + \beta(1-\alpha)(1-\gamma)\beta + (1-\beta)\gamma\alpha$$

και αν επιλέξει ΜΚ η ολική πιθανότητα να κερδίσει θα είναι

$$\gamma\alpha\beta + (1-\gamma)\beta\alpha$$

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αν επιλέξει ΜΚ η ολική πιθανότητα είναι μικρότερη από τις άλλες 2 και με επίλυση της ανισότητας

$$\alpha\beta + \alpha(1-\beta)\gamma\alpha + (1-\alpha)(1-\gamma)\beta\alpha > \gamma\alpha\beta + (1-\gamma)\beta\alpha$$

καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\alpha\beta(1-\alpha) > \alpha\gamma(\beta-\alpha)$$

που ισχύει αφού $\alpha\beta > \alpha\gamma$ και $(1-\alpha) > 0 > (\beta-\alpha)$ για $\alpha > \beta > \gamma$.
Η πιθανότητα να νικήσει ο πατέρας στο ΣΣΙ λοιπόν ειναι είναι $\alpha\beta + \alpha(1-\beta)\gamma\alpha + (1-\alpha)(1-\gamma)\beta\alpha$.

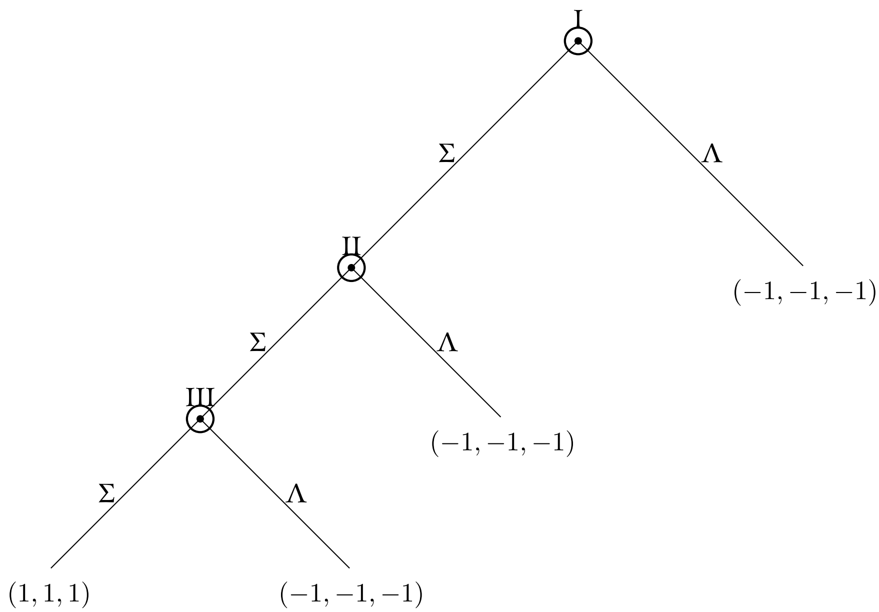
■

Άσκηση 7
Μία μητέρα έχει τρία παιδιά. Κάθε πρωί φεύγει για τη δουλειά αφήνοντας τα παιδιά στο σπίτι όπου υπάρχει ένα βάζο με γλυκό. Αν κάποια από τα παιδιά (ένα ή περισσότερα) φάνε το γλυκό, η μητέρα που δε διαθέτει χρόνο για ανακρίσεις θα τα τιμωρήσει όλα (πληρωμή $(-1,-1,-1)$). Αν όμως κανένα δε φάει από το γλυκό, η μητέρα θα τα ανταμείψει όλα (πληρωμή $(1,1,1)$). Υποθέτουμε ότι

[5] σελ. 500 – 502 Μηλολιδάκης (2009) ή και σελ. 80 ”Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων” Sheldon Ross, εκδόσεις Κλειδάριθμος 2010

κανένα παιδί δεν κερδίζει τίποτα εάν φάει γλυκό (εκτός από την τιμωρία). Κάθε παιδί διαθέτει δύο στρατηγικές, τη λαίμαργη (Λ) και τη συνετή (Σ), όπου στην πρώτη τρώει από το γλυκό και στη δεύτερη όχι. Δώστε όλες τις στρατηγικές καταστάσεις του παιχνιδιού και προσδιορίστε από αυτές τα ΣΣΙ. Μπορείτε να γενικεύσετε για n παιδιά;

Λύση
Θα συμβολίσουμε τα παιδιά με I,II και III αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ξεκινάει ο παίκτης I και το δέντρο του παιχνιδιού είναι το εξής:



Το σύνολο S των (απλοποιημένων) στρατηγικών καταστάσεων του παιχνιδιού είναι το εξής:

$$S = \{(\Lambda, x, x), (\Sigma, \Lambda, x), (\Sigma, \Sigma, \Lambda), (\Sigma, \Sigma, \Sigma)\}$$

Αφού επαληθεύσετε τις στρατηγικές καταστάσεις (ελέγξτε αν στην θέση κάποιου x βάλουμε Σ ή Λ αλλάξει κάτι). Από τα στοιχεία του συνόλου του S που έχουμε , παρατηρούμε ότι το μόνο που δίνει θετική πληρωμή (άρα κέρδος) για τον κάθε παίκτη, είναι αν ακολουθήσουν την τελευταία στρατηγική. Σε αυτή, ο κάθε παίκτης απαντά βέλτιστα στον άλλον, αφού, αν έστω και ένας επιλέξει να αλλάξει την επιλογή του (και να παίξει Λ αντ'αυτού) , τότε θα ζημειωθεί χάνοντας 1 μονάδα ωφέλειας[6]. Συνεπώς, η θέση (Σ, Σ, Σ) αποτελεί ΣΣΙ.

Γενικεύοντας για n παιδιά, γνωρίζουμε ότι κάθε φορά που ένα παιδί τρώει, τότε αυτομάτως όλα τα άλλα χάνουν. Συνεπώς, το ΣΣΙ θα παραμείνει μοναδικό και θα είναι ίσο με

$$x^\star = \underbrace{\{(\Sigma, \Sigma, \ldots, \Sigma)\}}_{n \text{ φορές}}$$

■

Άσκηση 8
Ένας "παιγνοθεωρητικός" διατυπώνει το εξής πρόβλημα: n παίκτες, ο κάθε ένας χωριστά επιλέγουν έναν αριθμό στο διάστημα $[0, 100]$. Αν $x_i \in [0, 100]$ είναι η επιλογή του $i-$ παίκτη, $i = 1, \ldots, n$, έστω $M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} x_i$ και έστω $A := \{j : |x_j - M/2| = \min\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i - M/2|\}$ (δηλ. A είναι το σύνολο των παικτών

[6] Είναι σημαντικό να προσέχετε πως ορίζουμε τις μονάδες ωφέλειας. Εδώ θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι, αν το πρώτο παιδί φάει από το γλυκό, αφού δεν γλιτώνουν την τιμωρία τα άλλα δύο, καλύτερα να φάνε και αυτά για να ικανοποιήσουν τον ουρανίσκο τους. Έχουμε υποθέσει όμως στην εκφώνηση ότι κανένα παιδί δεν κερδίζει κάτι εάν φάει γλυκό. Σε αυτό το πλαίσιο λοιπόν, η στρατηγική τον παικτών έχει λογική.

που βρίσκονται πλησιέστερα στο $M/2$). Η πληρωμή του $h^{\mathrm{I}}(x)$ του $i-$ παίκτη για $x = (x_1, \ldots, x_n)$ δίνεται από την

$$h^{\mathrm{I}}(x) = \begin{cases} x_i/|A| \text{ αν } i \in A \\ 0 \text{ αν } i \notin A \end{cases}$$

όπου $|A|$ ο πληθάριθμος του συνόλου A.

Ο παιγνιοθεωρητικός λύνει το πρόβλημα και ισχυρίζεται ότι το $x_0 = (0, \ldots, 0)$ αποτελεί ΣΣΙ. Κατά την γνώμη σας είναι ορθός ο ισχυρισμός του; (Υπόδ: αν και το παιχνίδι δεν είναι πεπερασμένο, αυτό βεβαίως δεν επηρεάζει τον ορισμό του ΣΣΙ που θα χρησιμοποιήσετε για να ελέγξετε τον ισχυρισμό). Θεωρήστε στη συνέχεια την πεπερασμένη εκδοχή του παραπάνω προβλήματος με $n = 2$ και $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}, i = 1, 2$. Εξετάζοντας τη βέλτιστη απάντηση κάθε φορά του κάθε παίκτη προς τον συμπαίκτη του να συμπεράνετε ότι τα $(1, 1)$ και $(2, 2)$ είναι ΣΣΙ.

Λύση
Απαντώντας στο πρώτο ερώτημα, θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός του παιγνοθεωρητικού δεν είναι σωστός. Ας θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι παίκτες $1, 2, \ldots, n-1$ επιλέγουν 0. Τότε ο $n-$ οστός παίκτης <u>δεν</u> θα έχει το 0 σαν βέλτιστη απάντηση, αφού αν επιλέξει 100, τότε η πληρωμή του θα είναι $100/n$, όπου $|A| = n$. Αφού $100/n > 0$, γίνεται εμφανές ότι η στρατηγική κατάσταση $(0, 0, \ldots, 0)$ δεν αποτελεί ΣΣΙ.
Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα, θα φτιάξουμε τις συναρτήσεις των βέλτιστων απαντήσεων. Έχουμε

$$BR^1(y) = \begin{cases} y - 1 \text{ για } y = 3, \ldots, 100 \\ 1 \text{ ή } 2 \text{ για } y = 2 \\ 1 \text{ για } y = 1 \\ 100 \text{ για } y = 0 \end{cases}$$

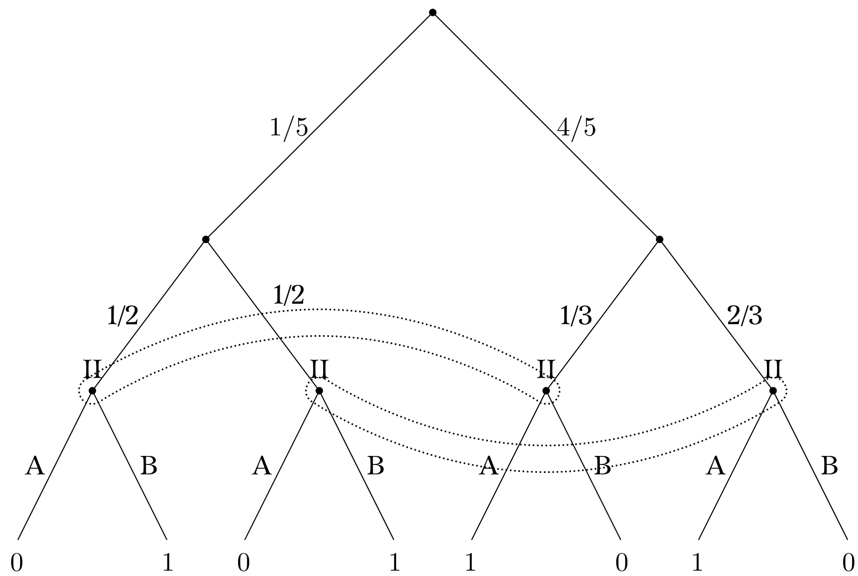
$$BR^2(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ για } x = 3, \ldots, 100 \\ 1 \text{ ή } 2 \text{ για } x = 2 \\ 1 \text{ για } x = 1 \\ 100 \text{ για } x = 0 \end{cases} .$$

Λίγα λόγια για το πως προέκυψαν οι συναρτήσεις βέλτιστων απαντήσεων.
Αν ο δεύτερος παίκτης επιλέξει $3, \ldots, 100$, τότε ο πρώτος παίκτης θα θέλει να "μπει" στο σύνολο A για να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του (αλλιώς θα πάρει 0) , δηλαδή να είναι πιο κοντά στο $M/2$. Αν επιλέξει y, τότε $M = y$ και θα "μπει" με τον άλλο παίκτης στο A, άρα $|A| = 2$ και θα έχει πληρωμή $y/2$. Αν όμως παίξει $y - 1$, τότε πάλι $M = y$ άρα θα είναι πιο κοντά μόνο αυτός στο $M/2 = y/2$, οπότε θα έχει πληρωμή $y - 1$. Ισχύει $y - 1 > y/2$ $(y > 2)$, άρα $y - 1$ είναι η βέλτιστη απάντηση στον 2. Δουλεύουμε αντίστοιχα στα υπόλοιπα και έχουμε ότι $(x, y) = (1, 1)$ οι παίκτες απαντούν βέλτιστα ο ένας στον άλλον. Ομοίως για $(x, y) = (2, 2)$.
Το $(x, y) = (1, 2)$ όμως δεν είναι ΣΣΙ διότι ο 2 δεν απαντά βέλτιστα στον 1 (ελέγξτε το).

■

Άσκηση 9
Στο παιχνίδι της άσκησης 2.10.3, αν ο I διαλέγει με πιθανότητα $1/5$ το A και πιθανότητα $4/5$ το B, ποια θα είναι η βέλτιστη απάντηση του II;

Λύση
Ανατρέχοντας στη λύση της άσκησης 2.10.3, παρατηρούμε τα εξής: Τώρα, η κίνηση του παίκτη I αντικαταστείτε από μία κίνηση της τύχης. Τώρα το δέντρο του παιχνιδιού θα έχει ως εξής:



Στον πίνακα πληρωμών του παιχνιδιού της λύσης της άσκησης 2.3.10, παρατηρούμε ότι, αν ο I παίξει A, τότε για να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του ο II θα πρέπει να παίξει και αυτός A, ώστε να έχει πληρωμή 0 (να μην χάσει δηλαδή, θυμηθείτε έχουμε π.π). Αν ο I παίξει B, τότε η βέλτιστη απάντηση του II θα είναι να παίξει και αυτός B, για τον ίδιο λόγο με πριν.

Τώρα που δεν αποφασίζει ο I αλλά η φύση, θα αλλάξει τις απαντήσεις του ο II;

Για να απαντήσουμε σε αυτό, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε κάποιες πιθανότητες. Συγκεκριμένα:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} < \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} \text{ και } \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} < \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

Αυτά μας δείχνουν ότι: Στο "μονοπάτι της κορώνας", δηλαδή στις περιπτώσεις που ο II βλέπει κορώνα και καλείται να αποφασίσει (το πρώτο σύνολο πληροφόρησης του), η βέλτιστη απάντηση για τον II θα είναι να παίξει B, γιατί πιο 'συχνά'(δηλαδή με μεγαλύτερο πιθανότητα) θα αποφύγει τη ζημία με αυτόν τον τρόπο. Αντίστοιχα, δουλεύοντας στο άλλο μονοπάτι (το δεύτερο σύνολο πληροφόρησης του), αυτός θα απαντήσει βέλτιστα παίζοντας B, για τον ίδιο λόγο με πριν (πληρωμή 0 αντί για -1).
Άρα σε κάθε περίπτωση, η βέλτιστη απάντηση του II θα είναι η B.

■

Άσκηση 10
Σε ένα παιχνίδι 2−παικτών 0-αθροίσματος ο II επιλέγει έναν αριθμό j με $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και ο I προσπαθεί να τον μαντέψει. Εάν ο I τον βρει, τότε κερδίζει 1. Αν ο I μαντέψει αριθμό μεγαλύτερο του j, τότε η πληρωμή του I είναι -1, ενώ αν επιλέξει αριθμό μικρότερο του j, τότε η πληρωμή του είναι 0. Δώστε απ'ευθείας τον πίνακα (κανονική μορφή) του παιχνιδιού αυτού.

Λύση
Ο πίνακας του παιχνιδιού είναι ο εξής:

		S^{II}					
		1	2	3	4	…	n
	1	1	0	0	0	0	0
	2	-1	1	0	0	0	0
S^{I}	3	-1	-1	1	0	0	0
	4	-1	-1	-1	1	0	0
	⋮	-1	-1	-1	-1	1	0
	n	-1	-1	-1	-1	-1	1

■

Άσκηση 11
Δώστε την κανονική μορφή του διπινακοπαιχνιδιού (δ.π.π) μεταξύ των γειτονικών χωρών της Άσκησης 2.10.9

Λύση
Η κανονική μορφή του δ.π.π έχει δοθεί στην λύση της αντίστοιχης άσκησης (υπάρχουν όντως όλα τα μέρη της κανονικής μορφής στη λύση;)

Άσκηση 12
Δύο παίκτες διαλέγουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο από έναν ακέραιο στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Εκείνος που διάλεξε τον μεγαλύτερο κερδίζει 1 μονάδα ωφέλειας από τον άλλο (αν διαλέξουν τον ίδιο, τότε το αποτέλεσμα είναι 0). Βρείτε το ΣΣΙ.

Λύση
Για να βρούμε το ΣΣΙ θα κάνουμε τον πίνακα του παιχνιδιου:

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c|}
 & & \multicolumn{6}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 100 \\
\cline{3-8}
 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\cline{3-8}
 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\cline{3-8}
S^{\mathrm{I}} & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
\cline{3-8}
 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
\cline{3-8}
 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
\cline{3-8}
 & 100 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\cline{3-8}
\end{array}
$$

Ας μελετήσουμε τις κινήσεις των δύο παικτών. Αν ο ΙΙ επιλέξει 1, τότε ο Ι θα μεγιστοποιήσει την πληρωμή του αν παίξει $\{2, 3, \ldots, 100\}$. Αν ο Ι επιλέξει $\{2, 3, \ldots, 100\}$ τότε ο ΙΙ θα θέλει κάθε φορά να επιλέξει κάποιον μεγαλύτερο αριθμό απο τον Ι για να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του. Αν επιλέξει όμως ο Ι 100, τότε ο ΙΙ θα πρέπει να επιλέξει και αυτός 100, αφού σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θα χάσει μία μονάδα ωφέλειας. Αντίστοιχα, αν ο ΙΙ επιλέξει 100, τότε ο Ι θα πρέπει να επιλέξει και αυτός 100, γιατί σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θα χάσει και αυτός μία μονάδα ωφέλειας. Η στρατηγική κατάσταση $x^{\star} = (100, 100)$ είναι λοιπόν Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας και η τιμή του παιχνιδιού είναι 0 (το παιχνίδι δηλαδή είναι τίμιο).

■

Άσκηση 13
Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο ΙΙ τοποθετεί ένα αντικείμενο σε μία από n θέσεις, έτσι ώστε το αντικείμενο της j θέσης αξίζει a_j. Ο Ι επιλέγει μία από τις n θέσεις και εάν μεν η θέση αυτή είναι κενή, τότε παίρνει 0, ενώ αν έχει αντικείμενο, τότε παίρνει την αξία του. Να δώσετε την κανονική μορφή του παιχνιδιού θεωρώντας το σαν παιχνίδι $0-$αθροίσματος (ο ΙΙ πληρώνει τον Ι).

Λύση
Τα σύνολα στρατηγικών των παικτών Ι και ΙΙ είναι τα εξής:

$$S^{\mathrm{I}} = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$S^{\mathrm{II}} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Δίνεται παρακάτω η συνάρτηση πληρωμής σε μορφή πίνακα:

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c|}
 & & \multicolumn{6}{c}{S^{\mathrm{II}}} \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\
\cline{3-8}
 & 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{3-8}
 & 2 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{3-8}
S^{\mathrm{I}} & 3 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{3-8}
 & 4 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\
\cline{3-8}
 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_k & 0 \\
\cline{3-8}
 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \\
\cline{3-8}
\end{array}
$$

■

Άσκηση 14

Έστω το δ.π.π

$$A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του t υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές;

Λύση

Για να απαντήσουμε σε αυτό, θα πρέπει να μελετήσουμε τις βέλτιστες απαντήσεις των δύο παικτών. Θα τις γράψουμε σε μορφή συνάρτησης:

$$\begin{Bmatrix} BR^{\mathrm{I}}(1) = 1, \text{ αν } t \geq 2 \text{ ή } 2 \\ BR^{\mathrm{I}}(2) = 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} BR^{\mathrm{II}}(1) = 1 \\ BR^{\mathrm{II}}(2) = 2 \end{Bmatrix} \qquad .$$

Μελετώντας λίγο προσεκτικά τις συναρτήσεις, παρατηρούμε ότι , το μόνο πιθανό Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας είναι το $x^\star = (1,1)$ (Δείτε για παράδειγμα τη στρατηγική κατάσταση $(2,1)$. Παρατηρίστε ότι, όταν ο παίκτης ΙΙ παίζει 1, ο παίκτης Ι θα παίξει 2. Όταν ο παίκτης ΙΙ παίξει 2 όμως, η $BR^{\mathrm{II}}(2) = 2 \neq 1$, άρα το (2,1) <u>δεν</u> μπορεί να είναι ΣΣΙ. Επαληθεύστε μόνοι σας και τα υπόλοιπα.). Για να είναι λοιπόν το $x^\star$ ΣΣΙ, θα πρέπει ο παίκτης Ι να επιλέξει 1 και όχι 2. Αυτό, όπως βλέπουμε και από τη συνάρτηση, θα συμβαίνει μόνο εάν $t \geq 2$, με $t \in \mathbb{R}$.

■

Άσκηση 15

Χρησιμοποιήστε δυναμικό προγραμματισμό για να λύσετε το παιχνίδι "σαρανταποδαρούσα" (βλ. άσκηση 2.10.15).

Λύση

Αφού το παιχνίδι είναι τέλειας πληροφόρησης (*τότε και μόνον τότε*) μπορώ να το λύσω με τη μέθοδο της "προς τα πίσω αντικατάστασης". Ξεκινάμε με τον παίκτη ΙΙ, ο οποίος στην τελευταια θέση θα επιλέξει 'σ' καθώς του επιφέρει μεγαλύτερη πληρωμή από την 'α' ($\varrho+1 > \varrho$). Πηγαίνοντας 1 θέση πίσω (δηλαδή στη θέση $2\varrho - 1$), εκει αποφασίζει ο Ι, όπου αν παίξει 'σ' έχει πληρωμή $(\varrho, \varrho - 1)$ και αν παίξει 'α' έχει πληρωμή $(\varrho - 1, \varrho)$. Εκεί ο Ι θα επιλέξει βέλτιστα αν επιλέξει να παίξει 'σ'. Συνεχίζοντας στην επόμενη θέση, αν παίξει 'σ' ο ΙΙ θα έχει πληρωμή $(\varrho - 2, \varrho)$ και $(\varrho, \varrho - 1)$ διαφορετικά. Συμπεραίνουμε ότι πάλι ο παίκτης ΙΙ θα επιλέξει βέλτιστα αν επιλέξει 'σ' . Συνεχίζοντας επαγωγικά, παρατηρούμε ότι οι παίκτες μεγιστοποιούν την πληρωμή τους κάθε φορά παίζοντας 'σ', και άρα η λύση του παιχνιδιού είναι $(1,0)$.

■

Άσκηση 16

Το Παινίδι της Πολεοδομίας. Ένα σύνολο από N γείτονες, με $|N| = n$, αποφασίζουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, αφενός αν θα "κλείσουν" τους ημιϋπαίθριους χώρους τους και αφετέρου, ποιούς από τους υπόλοιπους θα καταγγείλουν στην πολεοδομία ότι παραβιάζουν τον οικοδομικό κανονισμό. Οι δυνατές πληρωμές για έναν παίκτη είναι: a αν έκλεισε τον ημιϋπαίθριο χώρο του και κανένας από τους υπόλοιπους παίκτες δεν τον κατήγγειλε, b αν δεν έκλεισε τον ημιϋπαιθριο χώρο του και c αν έκλεισε τον ημιϋπαίθριο χώρο του και κάποιος από τους υπόλοιπους τον κατάγγειλε. Υποθέτουμε ότι $a > b > c$.

(α) Αν $A := \{\text{π}, \text{δπ}\}$, όπου π σημαίνει "παρανομώ" και δπ σημαίνει " δεν παρανομώ", να εξηγήσετε γιατί το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του $i-$ παίκτη είναι το $S^{\mathrm{I}} = \{(x_i, K_i) : x_i \in A \;\&\; K_i \subset N\}$. Ποια η ερμηνεία του συνόλου K_i;

(β) Έστω η στρατηγική κατάσταση $s = ((x_1, K_1), \ldots, (x_n, K_n))$ και ας συμβολίσουμε το $\Delta(s)$ το σύνολο των παικτών που δεν παρανομούν στην s, δηλαδή $\Delta(s) := \{i | i \in N \;\&\; x_i = \text{δπ}\}$. Έστω επίσης $\mathrm{K}(s)$ το σύνολο των παικτών που υφίστανται καταγγελία στην s, δηλαδή $\mathrm{K}(s) := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Να δώσετε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η στρατηγική κατάσταση s να είναι ΣΣΙ.

Λύση
(α) Το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του i-παίκτη είναι αυτό διότι έχει στη διάθεση του δύο κινήσεις. Η πρώτη είναι αν θα επιλέξει να παρανομήσει ή όχι(π και δπ αντίστοιχα). Η δεύτερη είναι αν θα επιλέξει να καταγγείλει κάποιον άλλον παίκτη και συγκεκριμένα ποιους από τους άλλους παίκτες θα καταγγείλει. Συνεπώς το σύνολο K_i είναι το σύνολο των παικτών που υφίστανται καταγγελία από τον παίκτη i και είναι υποσύνολο του N.

(β) Για να είναι η στρατηγική κατάσταση s Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας θα πρέπει (όπως είναι εμπειρικά αντιληπτό από τους περισσότερους Έλληνες πολίτες) ο παίκτης i που δεν θα κλείσει τον ημιϋπαίθριο χώρο του να μην υποστεί καταγγελία και αντίστοιχα αν ο παίκτης i κλείσει τον ημιϋπαίθριο χώρο του να υποστεί καταγγελία (θυμηθείτε $a > b > c$). Συνεπώς η s θα είναι ΣΣΙ αν και μόνο αν $\mathrm{K}(s) = \Delta(s)$.

■