

602. Συναρτησιακή Ανάλυση

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

**Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα - 2018**

Περιεχόμενα

1	Χώροι με νόρμα	1
2	Χώροι πεπερασμένης διάστασης	23
3	Γραμμικοί τελεστές και γραμμικά συναρτησοειδή	31
4	Θεώρημα Hahn-Banach	55
5	Χώροι Hilbert	75
6	Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach	85

Κεφάλαιο 1

Χώροι με νόρμα

1. Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X , αποδείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X , ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

Υπόδειξη. (α) Για την τομή: υποθέτουμε ότι $x, y \in Y \cap Z$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Αφού $x, y \in Y$ και ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X , παίρνουμε $\lambda x + \mu y \in Y$. Ομοίως, $\lambda x + \mu y \in Z$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in Y \cap Z$.

(β) Για την ένωση: αν $Y \subseteq Z$ τότε $Y \cup Z = Z$, ενώ αν $Z \subseteq Y$ τότε $Y \cup Z = Y$. Σε κάθε περίπτωση, ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X .

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X . Με την υπόθεση ότι υπάρχουν $y \in Y \setminus Z$ και $z \in Z \setminus Y$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αφού $y, z \in Y \cup Z$, έχουμε $y + z \in Y \cup Z$.

Αν $y + z \in Y$ τότε $(y + z) - y \in Y$ γιατί ο Y είναι υπόχωρος, δηλαδή $z \in Y$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $y + z \in Z$ τότε $(y + z) - z \in Z$ γιατί ο Z είναι υπόχωρος, δηλαδή $y \in Z$ το οποίο είναι πάλι άτοπο.

Αφού δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι $Y \setminus Z \neq \emptyset$ και $Z \setminus Y \neq \emptyset$, έχουμε είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η κλειστή θήκη \bar{Y} ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X .

Υπόδειξη. Έστω $z, w \in \bar{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Υπάρχουν $z_n, w_n \in Y$ με $z_n \rightarrow z$ και $w_n \rightarrow w$. Αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda z_n + \mu w_n \in Y$.

Όμως οι πράξεις του X είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα, άρα

$$\lambda z_n + \mu w_n \rightarrow \lambda z + \mu w.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda z + \mu w \in \bar{Y}$.

3. Αποδείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$\widehat{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}, \quad \text{int}(\widehat{B}(x, r)) = B(x, r) \quad \text{και} \quad \partial\widehat{B}(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r).$$

Υπόδειξη. Η $\widehat{B}(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο και $B(x, r) \subseteq \widehat{B}(x, r)$. Άρα,

$$\overline{B(x, r)} \subseteq \widehat{B}(x, r).$$

Αντίστροφα, έστω $y \in \widehat{B}(x, r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n(y - x)$, όπου (λ_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \rightarrow x + (y - x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n(y - x)\| = \lambda_n\|y - x\| < \|y - x\| \leq r,$$

δηλαδή $y_n \in B(x, r)$ και $y_n \rightarrow y$. Έπεται ότι $y \in \overline{B(x, r)}$, και αφού το $y \in \widehat{B}(x, r)$, $y \neq x$ ήταν τυχόν, $\widehat{B}(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$.

Η $B(x, r)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στην $\widehat{B}(x, r)$. Άρα, $B(x, r) \subseteq \text{int}(\widehat{B}(x, r))$. Αντίστροφα, έστω y εσωτερικό σημείο της $\widehat{B}(x, r)$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $B(y, \delta) \subseteq \widehat{B}(x, r)$. Τότε, αν $\|z\| < \delta$, έχουμε $\|y + z - x\| \leq r$. Επιλέγουμε $z = t(y - x)$ για $t > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $\|z\| < \delta$. Τότε,

$$\|y + z - x\| = \|(1 + t)(y - x)\| = (1 + t)\|y - x\| \leq r,$$

δηλαδή $\|y - x\| \leq \frac{r}{1+t} < r$, άρα $y \in B(x, r)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\partial\widehat{B}(x, r) = \widehat{B}(x, r) \setminus \text{int}(\widehat{B}(x, r)) = \widehat{B}(x, r) \setminus B(x, r) = S(x, r)$$

και

$$\partial B(x, r) = \overline{B(x, r)} \setminus B(x, r) = \widehat{B}(x, r) \setminus B(x, r) = S(x, r).$$

4. Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X . Αποδείξτε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X, \|\cdot\|')} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|)}$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X, \|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leq 1$. Άρα, $\|x\| \leq \|x\|' \leq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X, \|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X, \|\cdot\|')} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X, \|\cdot\|')} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\|' = 1 \implies \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X, \|\cdot\|')} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\| \leq 1 \implies \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leq 1.$$

Η $\|0\| \leq \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

5. Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X . Αποδείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

Υπόδειξη. Αφού $Y^\circ \neq \emptyset$, υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(y, r) \subseteq Y$. Ειδικότερα, $y \in Y$.

Έστω $x \in X$, $x \neq y$. Τότε, $y + \frac{r}{2} \frac{x-y}{\|x-y\|} \in B(y, r)$ (γιατί;), άρα

$$y + \frac{r}{2} \frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y.$$

Όμως ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X , οπότε χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $y \in Y$ παίρνουμε

$$\frac{r}{2} \frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y \implies x-y \in Y \implies x \in Y.$$

Το x ήταν τυχόν, άρα $Y = X$.

6. Έστω X χώρος Banach και (Y_n) ακολουθία γραμμικών υποχώρων του X με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο Y_{n_0} να είναι πυκνός στον X .

Υπόδειξη. Αφού $Y_n \subseteq \overline{Y_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n} \subseteq X,$$

δηλαδή

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}.$$

Από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{int}(\overline{Y_{n_0}}) \neq \emptyset$. Όμως, από την Άσκηση 2 ο $\overline{Y_{n_0}}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X , και αφού έχει μη κενό εσωτερικό από την Άσκηση 5 συμπεραίνουμε ότι $\overline{Y_{n_0}} = X$. Άρα, ο $\overline{Y_{n_0}}$ είναι πυκνός στον X .

7. Έστω X χώρος με νόρμα και $x, y \in X$ τέτοια ώστε $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a, b \geq 0$ ισχύει $\|ax+by\| = a\|x\| + b\|y\|$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \geq b$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|ax+by\| &= \|a(x+y) - (a-b)y\| \geq \|a(x+y)\| - \|(a-b)y\| = a\|x+y\| - (a-b)\|y\| \\ &= a(\|x\| + \|y\|) - (a-b)\|y\| = a\|x\| + b\|y\|. \end{aligned}$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει άμεσα από την τριγωνική ανισότητα:

$$\|ax+by\| \leq \|ax\| + \|by\| = a\|x\| + b\|y\|.$$

8. Έστω x_1, \dots, x_n μοναδιαία διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Αποδείξτε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \geq (1 - \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $j \leq n$ τέτοιο ώστε

$$|\lambda_j| = \max_{i \leq n} |\lambda_i|.$$

Ορίζουμε $\mu_i \in \mathbb{K}$ θέτοντας $\mu_j = \lambda_j$ και $\mu_i = -\lambda_i$ αν $i \neq j$. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} 2|\lambda_j| &= \|2\lambda_j x_j\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + (1 + \varepsilon) \max_{i \leq n} |\mu_i| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + (1 + \varepsilon)|\lambda_j|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \geq 2|\lambda_j| - (1 + \varepsilon)|\lambda_j| = (1 - \varepsilon) \max_{i \leq n} |\lambda_i|.$$

9. Έστω $\widehat{B}(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X . Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$(1) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_{n+1} = x_n$ αυτό είναι απλό (γιατί;) ενώ αν $x_{n+1} \neq x_n$ παρατηρούμε ότι

$$y = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} r_{n+1} \in \widehat{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \widehat{B}(x_n, r_n),$$

οπότε

$$\|y - x_n\| \leq r_n \implies \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leq r_n.$$

Από την (1) βλέπουμε ότι η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Πάλι από την (1) βλέπουμε ότι, αν $n < m$ τότε

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (r_{m-1} - r_m) + \dots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X . Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Αποδείξτε τώρα ότι $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}(x_n, r_n)$.

10. (α) Αποδείξτε ότι, αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_{\infty}.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε την εξής ανισότητα: αν $r \geq 1$ και $a, b \geq 0$, τότε $(a + b)^r \geq a^r + b^r$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geq 1$ και $a_1, \dots, a_n \geq 0$, τότε

$$(a_1 + \dots + a_n)^r \geq a_1^r + \dots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geq (|\xi_1|^p)^{r/p} + \dots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \dots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ (χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ανισότητα για τα $r/p > 1$ και $a_k = |\xi_k|^p$).

Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \dots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\ &\leq \left((|\xi_1|^p)^{r/p} + \dots + (|\xi_n|^p)^{r/p} \right)^{\frac{p}{r}} (1 + \dots + 1)^{1 - \frac{p}{r}} \\ &= \|x\|_r^p n^{1 - \frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leq \|x\|_r n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_{\infty}$ για κάθε $p \geq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \rightarrow 1$ όταν $p \rightarrow \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_{\infty}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

11. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_{∞} . Έστω $y_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y . Τι συμπεραίνετε;

Υπόδειξη. Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k = y_1 + \dots + y_k = \left(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{k^2}, 0, \dots \right) \rightarrow x = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

στον ℓ_∞ . Αν υπήρχε $y \in c_{00}$ για το οποίο $s_k \rightarrow y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον ℓ_∞) θα είχαμε $y = x \notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον c_{00} η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

12. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$. Αποδείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p , $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞ .

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.

Ορίζουμε $w = (\xi_1, \dots, \xi_N, 0, \dots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_p , $1 \leq p < +\infty$.

(β) Θεωρούμε το $x = (1, \dots, 1, \dots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geq N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geq |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x, 1) \cap c_{00} = \emptyset$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ_∞ .

13. Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Αποδείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Αποδείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leq 1$ για κάθε n . Υποθέτουμε ότι $x_n \rightarrow x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \rightarrow \xi_k$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^N |\xi_{nk}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| \leq 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |\xi_{nk}| \leq 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N , έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_∞ .

(β) Θα δείξουμε ότι το S έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ - άρα και στον ℓ_∞ . Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_{\ell_\infty} < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \dots < k_N < \dots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geq 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά ξ_k). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους k . Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_{\ell_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap B(x, \varepsilon) \subseteq S$.

(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο ℓ_1 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ (γιατί;). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$: αν το nS περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το S θα περιείχε μπάλα ακτίνας r/n , άτοπο από το (β).

Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του ℓ_1 με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

14. Στον ℓ_1 ορίζουμε

$$\|x\|' = 2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|.$$

Αποδείξτε ότι $n \|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι $n \|x\|' = 0 \implies x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \implies 2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geq 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_1 είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο ℓ_1 είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί). Έχουμε:

$$\|x\|' \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \frac{7}{2} \|x\|,$$

και

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k - \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + 2 \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &\leq 2 \left(\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| \right) \\ &= 2 \|x\|'. \end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2} \|x\| \leq \|x\|' \leq \frac{7}{2} \|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

15. Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k}$. Αποδείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά: αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε $|\xi_k| \rightarrow 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{2^k} = M < +\infty.$$

Τα αξιώματα της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

Θα ορίσουμε βασική ακολουθία στον $(c_0, \|\cdot\|')$, η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό θα δείξει ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in c_0$ (n μονάδες). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

δηλαδή η (x_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|'$. Έστω ότι υπάρχει $x = (\xi_k) \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\|' \rightarrow 0$. Αφού $\xi_k \rightarrow 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\xi_{k_0}| < 1/2$. Αν $n \geq k_0$, τότε

$$\|x_n - x\|' = \sum_{k=1}^n \frac{|1 - \xi_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k} \geq \frac{|1 - \xi_{k_0}|}{2^{k_0}} \geq \frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\|x_n - x\|' \rightarrow 0$.

16. Έστω X n -διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και x_1, \dots, x_m διανύσματα που παράγουν τον X . Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

Υπόδειξη. Τα x_i παράγουν τον X , επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε n

$$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Για την (N2): Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^m |\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \rightarrow 0$ για κάθε $i \leq m$. Θεωρούμε τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X . Τότε, $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i \rightarrow \sum_{k=1}^m 0 \cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για την (N3): Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ και $\|x\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^m (a\lambda_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |a\lambda_i| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon \implies \|ax\| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|ax\| \leq |a| \cdot \|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για την (N4): Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon.$$

Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\|x + y\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

17. Έστω X χώρος με νόρμα, με διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 2. Αν (x_n) είναι ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X , αποδείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός κλειστός υπόχωρος του X ο οποίος δεν περιέχει κανένα x_n .

Υπόδειξη. Θέτουμε $F = \text{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(α) Αν $\dim(F) = 1$, τότε υπάρχει $x_0 \in X \setminus F$ και αν θέσουμε $F_0 = \text{span}(\{x_0\})$ έχουμε $F_0 \cap F = \{0\}$ (οι ευθείες F_0 και F δεν ταυτίζονται, άρα το μόνο κοινό σημείο τους είναι το 0). Αφού $x_n \neq 0$, έχουμε $x_n \notin F_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε λοιπόν τον F_0 , ο οποίος είναι κλειστός υπόχωρος του X (διότι έχει πεπερασμένη διάσταση) και δεν περιέχει κανένα x_n .

(β) Έστω ότι $\dim(F) \geq 2$. Θεωρούμε $s \neq k$ ώστε τα x_s, x_k να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και τον υπόχωρο $Y = \text{span}(\{x_s, x_k\})$. Επίσης θεωρούμε το $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}$. Για κάθε $n \in M$ θεωρούμε τον υπόχωρο $F_n = \text{span}(\{x_n\})$ που παράγεται από το x_n . Παρατηρήστε ότι κάθε F_n , $n \in M$, είναι γνήσιος υπόχωρος του Y διότι $\dim(F_n) = 1 < 2 = \dim(Y)$, άρα $\text{int}_Y(F_n) = \emptyset$, όπου $\text{int}_Y(A)$ είναι το εσωτερικό του A στον $(Y, \|\cdot\|)$. Επίσης, κάθε F_n , $n \in M$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y . Ο Y είναι πλήρης, διότι έχει πεπερασμένη διάσταση, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Baire βρίσκουμε $x_0 \in Y \setminus \bigcup_{n \in M} F_n$. Όπως και στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι αν ορίσουμε $F_0 = \text{span}(\{x_0\})$ τότε έχουμε $x_n \notin F_0$ για κάθε $n \in M$. Επίσης, αν $n \notin M$ έχουμε $x_n \notin Y$, άρα και $x_n \notin F_0$.

Δηλαδή, ο $F_0 = \text{span}(\{x_0\})$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και δεν περιέχει κανένα x_n .

18. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και D πυκνό υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι το σύνολο $D' = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0 \right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της S_X .

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και D' πυκνό υποσύνολο της S_X . Αποδείξτε ότι το σύνολο $D = \{qx : x \in D', q \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(γ) Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν η μοναδιαία σφαίρα S_X του X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in S_X$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) από το D τέτοια ώστε $y_n \rightarrow x$. Ειδικότερα, $\|y_n\| \rightarrow \|x\| = 1$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, $n \geq n_0$. Έχουμε $x_n \in D'$ και

$$x_n = \frac{1}{\|y_n\|} \cdot y_n \rightarrow 1 \cdot x$$

από τη συνέχεια της $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$. Έπεται ότι το D' είναι πυκνό υποσύνολο της S_X .

(β) Έστω $x \in X$. Αν $x = 0$ τότε $x \in D$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$. Θεωρούμε το $y = \frac{x}{\|x\|} \in S_X$ και βρίσκουμε ακολουθία (y_n) στο D' ώστε $y_n \rightarrow y$. Επίσης, βρίσκουμε ακολουθία (q_n) ρητών με $q_n \rightarrow \|x\|$. Τότε, $q_n y_n \in D$ και

$$q_n y_n \rightarrow \|x\| \cdot y = x.$$

Έπεται ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(γ) Υποθέτουμε αρχικά ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και το σύνολο D' του ερωτήματος (α). Η απεικόνιση $\phi : D \setminus \{0\} \rightarrow D'$ με $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ είναι επί και το σύνολο $D \setminus \{0\}$ είναι αριθμησιμο, άρα το D' είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι η S_X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D' της S_X . Θεωρούμε το σύνολο D του ερωτήματος (β). Η απεικόνιση $\psi : \mathbb{Q} \times D' \rightarrow D$ είναι επί και τα σύνολα \mathbb{Q} και D' είναι αριθμήσιμα, άρα το $\mathbb{Q} \times D'$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Άρα το D είναι αριθμήσιμο, και έπεται ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

19. (α) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι αν $y_n \in X$ και $\|y_n\| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $D' = \{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(β) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι υπάρχουν $y_n \in X$ με $\|y_n\| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $D' = \{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα έχει πυκνό υποσύνολο το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $B(x, \varepsilon) \cap D$ είναι άπειρο: αν πάρουμε οποιοδήποτε $y \neq x$ στον X και για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ θεωρήσουμε τις μπάλες $B_i := B(u_i, \frac{\varepsilon}{2n})$ όπου $u_i = x + \frac{ke}{n} \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, τότε οι B_i είναι ξένες, περιέχονται στην $B(x, \varepsilon)$ και καθεμία τους περιέχει σημείο του D διότι το D είναι πυκνό. Άρα, η $B(x, \varepsilon)$ περιέχει τουλάχιστον n σημεία του D .

Έστω τώρα $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό βρίσκουμε $n > n_0$ ώστε $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\left\| x - \left(x_n + \frac{1}{n}y_n \right) \right\| \leq \|x - x_n\| + \frac{1}{n}\|y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $B(x, \varepsilon) \cap D' \neq \emptyset$.

(β) Ορίζουμε τα y_n επαγωγικά. Στο πρώτο βήμα θεωρούμε $y_1 \notin \text{span}\{x_1\}$ με $0 < \|y_1\| < 1$. Τότε, $x_1 + y_1 \neq 0$, άρα το $\{x_1 + y_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα y_1, \dots, y_n έτσι ώστε $\|y_i\| < 1$ και το σύνολο $A_n = \{x_1 + y_1, x_2 + \frac{1}{2}y_2, \dots, x_n + \frac{1}{n}y_n\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$X_n = \text{span}(A_n \cup \{x_{n+1}\})$$

και βρίσκουμε $y_{n+1} \in X \setminus X_n$ με $0 < \|y_{n+1}\| < 1$ (αυτό γίνεται, γιατί ο X είναι απειροδιάστατος, άρα περιέχει γνήσια τον X_n). Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A_{n+1} = \{x_1 + y_1, \dots, x_{n+1} + \frac{1}{n+1}y_{n+1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, αν

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \dots + \lambda_n \left(x_n + \frac{1}{n}y_n \right) + \lambda_{n+1} \left(x_{n+1} + \frac{1}{n+1}y_{n+1} \right) = 0,$$

τότε δεν μπορούμε να έχουμε $\lambda_{n+1} \neq 0$ γιατί θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\frac{1}{n+1}y_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}(x_1 + y_1) - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\left(x_n + \frac{1}{n}y_n\right) - x_{n+1},$$

δηλαδή θα είχαμε $y_{n+1} \in X_n$. Άρα, $\lambda_{n+1} = 0$ και τότε

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \cdots + \lambda_n\left(x_n + \frac{1}{n}y_n\right) = 0,$$

το οποίο δίνει $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ από τη γραμμική ανεξαρτησία του A_n .

Ορίζεται έτσι ακολουθία (y_n) τέτοια ώστε κάθε A_n να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Είναι τώρα εύκολο να δείξουμε ότι το σύνολο $D' = \{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(γ) Θεωρούμε αριθμησίμο πυκνό υποσύνολο $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X , και χρησιμοποιώντας το (β) βρίσκουμε $y_n \in X$ με $\|y_n\| < 1$ ώστε το σύνολο $D' = \{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από το (α) το D' είναι επίσης πυκνό στον X , άρα έχουμε το ζητούμενο.

20. Έστω X χώρος με νόρμα και $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται θ -δίκτυο για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ -δίκτυο για την B_X , αποδείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \geq 0$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

Υπόδειξη. Έστω $x \in B_X$. Υπάρχει $a_0 \in A$ ώστε $\|x - a_0\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x - a_0}{\theta} \in B_X$. Τότε, υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $\|\frac{x - a_0}{\theta} - a_1\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x}{\theta^2} - \frac{a_0}{\theta^2} - \frac{a_1}{\theta} \in B_X$. Επαγωγικά, επιλέγουμε $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ με την ιδιότητα

$$\frac{x}{\theta^{n+1}} - \frac{a_0}{\theta^{n+1}} - \cdots - \frac{a_n}{\theta} \in B_X \implies \|x - (a_0 + \theta a_1 + \cdots + \theta^n a_n)\| < \theta^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\theta^{n+1} \rightarrow 0$, αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n$ συγκλίνει στο x .

21. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω D πυκνό υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\|x_n\| \leq \frac{3\|x\|}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $x_1 \in D$ ώστε $\|x - x_1\| < \frac{\|x\|}{2}$. Τότε

$$\|x_1\| \leq \|x_1 - x\| + \|x\| < \frac{\|x\|}{2} + \|x\| = \frac{3\|x\|}{2}.$$

Επαγωγικά, αν $N \geq 2$ και έχουμε ορίσει τα $x_1, \dots, x_{N-1} \in D$, αφού το D είναι πυκνό μπορούμε να επιλέξουμε $x_N \in D$ ώστε

$$\left\| \left(x - \sum_{n=1}^{N-1} x_n \right) - x_N \right\| < \frac{\|x\|}{2^N}.$$

Αν $s_N = x_1 + \dots + x_N$, από την κατασκευή έχουμε $\|x - s_N\| < \frac{\|x\|}{2^N} \rightarrow 0$, άρα $s_N \rightarrow x$. Συνεπώς,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \|s_n - s_{n-1}\| = \|(s_n - x) - (s_{n-1} - x)\| \leq \|s_n - x\| + \|s_{n-1} - x\| \\ &< \frac{\|x\|}{2^n} + \frac{\|x\|}{2^{n-1}} = \frac{3\|x\|}{2^n}. \end{aligned}$$

22. Έστω X χώρος Banach και Y υπόχωρος του X . Αποδείξτε ότι: αν ο Y είναι G_δ υποσύνολο του X τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X .

Υπόδειξη. Έχουμε $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου κάθε A_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Αν θέσουμε $B_n = A_n \cap \bar{Y}$ τότε $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ και κάθε B_n είναι ανοικτό στον \bar{Y} , άρα ο Y είναι G_δ υποσύνολο του \bar{Y} . Αφού $B_n \supseteq Y$, κάθε B_n είναι πυκνό στον \bar{Y} , άρα το $A = \bar{Y} \setminus Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{Y} \setminus B_n)$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον \bar{Y} . Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in A$ και ορίζουμε $B = x_0 + Y$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq \bar{Y}$ και $B \cap Y = \emptyset$ (αν υπήρχε $x \in (x_0 + Y) \cap Y$ τότε θα είχαμε και $x_0 \in Y$). Άρα, $B \subseteq A$. Τότε, το B είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον \bar{Y} , άρα και το $Y = B - x_0$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον \bar{Y} . Όμως, $\bar{Y} = Y \cup A$ και οδηγούμαστε σε άτοπο από το θεώρημα του Baire.

23. Να συγκρίνετε τις ακόλουθες νόρμες στον $\mathcal{C}^1[0, 1]$:

(α) $\|f\| = \| |f| + |f'| \|_\infty$ και $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(β) $\|f\|_\infty$ και $\|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| dt$.

(γ) $\|f\|_\infty$ και $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$. Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$|f(x)| + |f'(x)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_1,$$

και παίρνοντας supremum ως προς x παίρνουμε

$$\|f\| = \| |f| + |f'| \|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Αντίστροφα παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα $\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Έπεται ότι $\|f\|_1 \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty$. Παρατηρώντας ότι

$$|f(0)| \leq |f(0)| + |f'(0)| \leq \|f\| \quad \text{και} \quad \|f'\|_\infty \leq \|f\|$$

(εξηγήστε γιατί) συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_1 \leq 3\|f\|$. Δηλαδή, οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty + \int_0^1 \|f\|_\infty dt = 2\|f\|_\infty.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, αλλά αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ τότε $\|f_n\|_\infty = 1$ ενώ $\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = 1 + n$. Άρα,

$$\sup \left\{ \frac{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty} : f \in \mathcal{C}^1[0,1], f \neq 0 \right\} = +\infty.$$

24. Έστω $\mathcal{C}^k[0,1]$ ο χώρος όλων των $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχουν k συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{0 \leq s \leq k} \left(\max_{t \in [0,1]} |f^{(s)}(t)| \right).$$

Αποδείξτε ότι ο $\mathcal{C}^k[0,1]$ είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι (f_n) είναι μια βασική ακολουθία στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Γράφουμε $g^{(s)}$ για την s -οστή παράγωγο της g . Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n^{(s)} - f_m^{(s)}\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $s = 0, 1, \dots, k$, όπου $\|\cdot\|_\infty$ η συνήθης νόρμα στον $\mathcal{C}[0,1]$. Ο $\mathcal{C}[0,1]$ είναι πλήρης, άρα υπάρχουν συνεχείς $f = f^{(0)}, f_s : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n^{(s)} \rightarrow f_s$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (της Πραγματικής Ανάλυσης), η f_s είναι παραγωγίσιμη για κάθε $s = 0, 1, \dots, k-1$ και $(f_s)' = f_{s+1}$. Δηλαδή, $f_s = f^{(s)}$ για κάθε $s = 0, 1, \dots, k$. Αφού η $f^{(k)} = f_k$ είναι συνεχής, έχουμε $f \in \mathcal{C}^k[0,1]$. Τέλος,

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n^{(s)} - f^{(s)}\|_\infty : s = 0, 1, \dots, k\} \rightarrow 0.$$

Δηλαδή, $f_n \rightarrow f$ στον $\mathcal{C}^k[0,1]$.

25. Έστω $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \right\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι ο $BV[0,1]$ είναι γραμμικός χώρος. Οι ιδιότητες της νόρμας έπονται άμεσα από τον ορισμό. Η υπόθεση ότι $f(0) = 0$ εξασφαλίζει την $V(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$: από την $V(f) = 0$ συμπεραίνουμε αρχικά ότι η f είναι σταθερή, και αφού $f(0) = 0$ έχουμε ότι η f μηδενίζεται παντού στο $[0,1]$.

Έστω (f_m) βασική ακολουθία στον $BV[0,1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $s, m \geq m_0$ τότε

$$(1) \quad V(f_s - f_m) < \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι

$$(2) \quad \|f_s - f_m\|_\infty \leq V(f_s - f_m).$$

Πράγματι, αν $g \in BV[0,1]$ και αν $t \in (0,1]$, θεωρώντας τη διαμέριση $\{0 < t \leq 1\}$ βλέπουμε ότι $|g(t)| = |g(t) - g(0)| + |g(1) - g(t)| \leq V(g)$, άρα $\|g\|_\infty \leq V(g)$.

Από την (2) έπεται ότι η (f_m) είναι βασική ακολουθία στον $B[0,1]$ άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in B[0,1]$ (επίσης, η f είναι συνεχής από δεξιά ως ομοιόμορφο όριο συναρτήσεων που είναι συνεχείς από δεξιά). Σταθεροποιώντας $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $m \geq m_0$ και αφήνοντας το $s \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |(f - f_m)(t_i) - (f - f_m)(t_{i-1})| &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |(f_s - f_m)(t_i) - (f_s - f_m)(t_{i-1})| \\ &\leq \liminf_{s \rightarrow \infty} V(f_s - f_m) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $V(f - f_m) \rightarrow 0$ όταν το $m \rightarrow \infty$. Ειδικότερα, $V(f) \leq V(f - f_{m_0}) + V(f_{m_0}) < \infty$, δηλαδή $f \in BV[0,1]$.

26. Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_\alpha([0,1])$ τον χώρο των Hölder συνεχών συναρτήσεων με εκθέτη α : δηλαδή, $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ αν και μόνο αν $f(0) = 0$ και

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in [0,1], x \neq y \right\} < +\infty.$$

(α) Αποδείξτε ότι ο $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι χώρος Banach.

(β) Έστω $\lambda_\alpha([0,1])$ το σύνολο των $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ που ικανοποιούν την

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = 0 \text{ για κάθε } y \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\Lambda_\alpha([0,1])$. Ποιός είναι ο $\lambda_\alpha([0,1])$ στην περίπτωση $\alpha = 1$;

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ είναι νόρμα (απλό). Επίσης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|^\alpha} \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha},$$

άρα $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε βασική ακολουθία (f_n) στον $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Ελέγχουμε ότι $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ και $\|f_n - f\|_{\Lambda_\alpha} \rightarrow 0$.

Για τον $\lambda_\alpha([0, 1])$ παρατηρήστε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε οι $g_n(t) = t^n$ ανήκουν στον $\lambda_\alpha([0, 1])$ (άρα έχει άπειρη διάσταση) ενώ αν $f \in \lambda_1([0, 1])$ τότε $|f'(x)| = \left| \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = 0$ για κάθε x , άρα η f είναι σταθερή, και λόγω της $f(0) = 0$ αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.

27. Έστω c_0 ο γραμμικός χώρος των ακολουθιών $x = (\xi_k)$ που συγκλίνουν στο 0. Αν $x = (\xi_k) \in c_0$, υπάρχει μετάθεση των φυσικών $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ώστε η $(|\xi_{\pi(n)}|)$ να είναι φθίνουσα, και η ακολουθία (ξ'_n) με $\xi'_n = |\xi_{\pi(n)}|$ ορίζεται μονοσήμαντα από την (ξ_n) .

Για κάθε $x \in c_0$, ορίζουμε

$$\|x\| = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^m \xi'_n : m \in \mathbb{N} \right\},$$

και θέτουμε $d_0 = \{x \in c_0 : \|x\| < +\infty\}$. Αποδείξτε ότι ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Είναι χώρος Banach;

Υπόδειξη. Ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα: δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα (ελέγξτε όμως και τα άλλα αξιώματα της νόρμας). Παρατηρήστε ότι, αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in d_0$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^m (x + y)'_k \leq \sum_{k=1}^m \xi'_k + \sum_{k=1}^m \eta'_k.$$

Πράγματι, αν $(x + y)'_k = |\xi_{j_k} + \eta_{j_k}|$ τότε

$$\sum_{k=1}^m (x + y)'_k = \sum_{k=1}^m |\xi_{j_k} + \eta_{j_k}| \leq \sum_{k=1}^m |\xi_{j_k}| + \sum_{k=1}^m |\eta_{j_k}| \leq \sum_{k=1}^m \xi'_k + \sum_{k=1}^m \eta'_k,$$

γιατί οποιεσδήποτε m απόλυτες τιμές όρων π.χ. της (ξ_k) έχουν άθροισμα το πολύ ίσο με $\xi'_1 + \dots + \xi'_m$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x + y)'_k : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \xi'_k \right\} + \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \eta'_k \right\} \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

(β) Ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης: έστω (x^ℓ) βασική ακολουθία στον d_0 . Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\ell_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: αν $\ell, s \geq \ell_0$, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^\ell - x^s)'_k < \varepsilon$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|\xi_m^\ell - \xi_m^s| \leq (x^\ell - x^s)'_1 < \varepsilon,$$

δηλαδή $\|x^\ell - x^s\|_\infty < \varepsilon$. Ειδικότερα, η $(\xi_m^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία για κάθε m και ορίζεται το $\xi_m = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \xi_m^\ell \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, $\lim_{s \rightarrow \infty} \|x^s - x\|_\infty = 0$ (από την πληρότητα του ℓ_∞). Θέτουμε

$x = (\xi_m)$ και δείχνουμε ότι $\|x^\ell - x\| \rightarrow 0$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, για το ℓ_0 που ορίσαμε παραπάνω έχουμε: για κάθε $\ell \geq \ell_0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $s > \ell_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^\ell - x)'_k &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^\ell - x^s)'_k + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^s - x)'_k \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^s - x)'_k \\ &\leq \varepsilon + \sqrt{m} \|x^s - x\|_\infty. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $s \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^\ell - x)'_k \leq \varepsilon$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\|x^\ell - x\| = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x^\ell - x)'_k : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon$$

για κάθε $\ell \geq \ell_0$. Αυτό δείχνει ότι $\|x^\ell - x\| \rightarrow 0$.

28. Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του l_∞ . Αποδείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in l_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$. Είναι πάντα σωστό ότι υπάρχει $y_x \in c_0$ ώστε $d(x, c_0) = \|x - y_x\|$;

Υπόδειξη. Έστω $x = (\xi_k) \in l_\infty$, και $\alpha = \limsup_k |\xi_k|$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x - y\|_\infty \geq \alpha$ για κάθε $y \in c_0$. Έστω $y = (\eta_k) \in c_0$, και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\eta_k \rightarrow 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq k_0$, $|\eta_k| < \varepsilon$. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει υπακολουθία της $(|\xi_k|)$ που συγκλίνει στο α . Άρα, υπάρχει $k \geq k_0$ ώστε $|\xi_k| - \alpha < \varepsilon$. Τότε,

$$|\xi_k - \eta_k| \geq |\xi_k| - |\eta_k| > \alpha - \varepsilon - \varepsilon = \alpha - 2\varepsilon,$$

άρα $\|x - y\|_\infty > \alpha - 2\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|x - y\|_\infty \geq \alpha$. Αφού το $y \in c_0$ ήταν τυχόν, $d(x, c_0) = \inf\{\|x - y\|_\infty : y \in c_0\} \geq \alpha$.

Δείχνουμε τώρα ότι μπορούμε να επιλέξουμε $y_x \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x - y_x\|_\infty = \alpha$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : |\xi_k| > \alpha + 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

και θέτουμε

$$B_0 = A_1, \quad B_n = A_{n+1} \setminus A_n = \{k \in \mathbb{N} : \alpha + 1/n \geq |\xi_k| > \alpha + 1/(n+1)\}.$$

Κάθε A_n είναι πεπερασμένο σύνολο, αλλιώς $n |\xi_k|$ θα είχε υπακολουθία που θα συνέκλινε σε αριθμό μεγαλύτερο από α . Άρα, και κάθε B_n είναι πεπερασμένο. Ορίζουμε $y_x = (\eta_k)$ ως εξής:

(1) Αν $k \in B_n$, θέτουμε $\eta_k = \xi_k + \alpha$ αν $\xi_k < 0$ και $\eta_k = \xi_k - \alpha$ αν $\xi_k > 0$. Σε κάθε περίπτωση, $|\xi_k - \eta_k| = \alpha$ και $|\eta_k| \leq \frac{1}{n}$, εκτός ίσως από τα $k \in B_0$, τα οποία όμως είναι πεπερασμένα το πλήθος και δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση της (η_k) .

(2) Αν $k \notin \cup B_n$, θέτουμε $\eta_k = 0$, οπότε $|\xi_k - \eta_k| \leq \alpha$ αφού γι' αυτά τα k έχουμε $|\xi_k| \leq \alpha$.

Όπως ορίσαμε το $y_x = (\eta_k)$, έχουμε $\|x - y_x\|_\infty \leq \alpha$. Μένει να δείξουμε ότι $y_x \in c_0$: έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $1/n_0 < \varepsilon$. Αν $k_0 = \max\{k : k \in \cup_{n=0}^{n_0} B_n\}$, τότε για κάθε $k > k_0$ ισχύει $|\eta_k| \leq 1/n_0 < \varepsilon$. Άρα, $\eta_k \rightarrow 0$, δηλαδή $y_x \in c_0$. Από τα παραπάνω, $\alpha \leq d(x, c_0) \leq \|x - y_x\|_\infty \leq \alpha$, δηλαδή $\|y_x - x\|_\infty = d(x, c_0)$.

29. Έστω K φραγμένο υποσύνολο του c_0 . Αποδείξτε ότι το K είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ ισχύει

$$|\xi_n| \leq \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $x^1, \dots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leq N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_\infty = \sup\{|\xi_n - \xi_n^j| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon/2.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, N$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n^j| = 0$, άρα υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε: για κάθε $n \geq n_j$,

$$|\xi_n^j| < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leq N$ ώστε $\|x - x^j\|_\infty < \varepsilon/2$, και για κάθε $n \geq n_0$ γράφουμε

$$|\xi_n| \leq |\xi_n - \xi_n^j| + |\xi_n^j| \leq \|x - x^j\|_\infty + |\xi_n^j| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ να ισχύει

$$|\xi_n| \leq \varepsilon.$$

Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_\infty \leq M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \dots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon/2$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, \dots) : y_n \in \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \text{ για κάθε } n = 1, \dots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του c_0 : κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον c_0 , και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο (εξηγήστε γιατί). Έστω $x = (\xi_n)$ στο K . Γνωρίζουμε ότι $|\xi_n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n > n_0$. Επίσης, για κάθε $n = 1, \dots, n_0$ έχουμε $|\xi_n| \leq M$, άρα υπάρχει $i_n \in \{0, 1, \dots, m\}$ τέτοιος ώστε $|\xi_n - t_{i_n}| < \varepsilon/2$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \dots, t_{i_{n_0}}, 0, \dots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\|x - y\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ (εξηγήστε γιατί).

30. Έστω $1 \leq p < \infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p . Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το K είναι ολικά φραγμένο, μπορούμε να βρούμε $x^1, \dots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leq N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, N$ υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε

$$\sum_{k=n_j}^{\infty} |\xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leq N$ ώστε $\|x - x_j\|_p^p < (\varepsilon/2)^p$, και για κάθε $n \geq n_0$ γράφουμε

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k^j|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ολικά φραγμένο (ως κλειστό υποσύνολο του ℓ_p θα είναι και πλήρες, άρα συμπαγές). Θα μιμηθούμε το επιχείρημα της προηγούμενης άσκησης. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_p \leq M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \dots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, \dots) : y_k \in \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \text{ για κάθε } k = 1, \dots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του ℓ_p : κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον ℓ_p , και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_p < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $x = (\xi_k)$ στο K . Γνωρίζουμε ότι $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p$. Επίσης, για κάθε $k = 1, \dots, n_0$ έχουμε $|\xi_k| \leq M$, άρα υπάρχει $i_k \in \{0, 1, \dots, m\}$ τέτοιος ώστε

$|\xi_k - t_{i_n}|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \dots, t_{i_{n_0}}, 0, \dots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\|x - y\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - t_{i_k}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

31. Έστω X χώρος Banach και K συμπαγές υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X τέτοια ώστε $x_n \rightarrow 0$ και $K \subseteq \overline{\text{conv}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$, όπου $\text{conv}(A)$ είναι η κυρτή θήκη του A (το μικρότερο κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A - ισοδύναμα, το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών σημείων του A).

Υπόδειξη. Το K είναι συμπαγές, άρα το $2K$ είναι συμπαγές και ειδικότερα ολικά φραγμένο. Υπάρχει λοιπόν πεπερασμένο σύνολο $A_1 \subseteq 2K$ τέτοιο ώστε

$$2K \subseteq \bigcup_{a \in A_1} B\left(a, \frac{1}{4}\right).$$

Ορίζουμε

$$K_2 = \bigcup_{a \in A_1} \left[-a + 2K \cap \widehat{B}\left(a, \frac{1}{4}\right) \right].$$

Παρατηρήστε ότι

$$K_2 \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Επίσης, το K_2 είναι συμπαγές (εξηγήστε γιατί), άρα το $2K_2$ είναι συμπαγές και ειδικότερα ολικά φραγμένο. Υπάρχει λοιπόν πεπερασμένο σύνολο $A_2 \subseteq 2K_2$ τέτοιο ώστε

$$2K_2 \subseteq \bigcup_{a \in A_2} B\left(a, \frac{1}{4^2}\right).$$

Ορίζουμε

$$K_3 = \bigcup_{a \in A_2} \left[-a + 2K_2 \cap \widehat{B}\left(a, \frac{1}{4^2}\right) \right],$$

και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρήστε ότι

$$K_3 \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4^2}\right).$$

Στο n -οστό βήμα θεωρούμε το $2K_n$ και το καλύπτουμε με μπάλες ακτίνας $\frac{1}{4^n}$ που έχουν κέντρα από κάποιο πεπερασμένο σύνολο $A_n \subseteq 2K_n$. Ορίζουμε το K_{n+1} όπως παραπάνω και έχουμε

$$K_{n+1} \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4^n}\right).$$

Έστω $x \in K$. Από την κατασκευή, υπάρχει $a_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $2x - a_1 \in K_2$. Τότε, $4x - 2a_1 \in 2K_2$, άρα υπάρχει $a_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $4x - 2a_1 - a_2 \in K_3$. Ομοίως, $8x - 4a_1 - 2a_2 \in 2K_3$, άρα

υπάρχει $a_3 \in A_3$ τέτοιο ώστε $8x - 4a_1 - 2a_2 - a_3 \in K_4$. Οι σχέσεις αυτές μας λένε ισοδύναμα ότι

$$x - \frac{a_1}{2} \in \frac{1}{2}K_2, \quad x - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} \in \frac{1}{2^2}K_3, \quad x - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_3}{2^3} \in \frac{1}{2^3}K_4, \quad \dots$$

Γενικά,

$$x - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} \in \frac{1}{2^n}K_{n+1},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} \rightarrow x \implies \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} \rightarrow x.$$

Έπεται ότι $x \in \overline{\text{c\o p n}}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)$. Θεωρούμε την ακολουθία (x_m) που προκύπτει αν πάρουμε σαν πρώτους όρους τα σημεία του A_1 , επόμενους τα σημεία του A_2 , επόμενους τα σημεία του A_3 και ούτω καθεξής. Από την κατασκευή, έχουμε

$$a \in A_n \implies a \in 2K_n \implies \|a\| \leq \frac{2}{4^n},$$

άρα $x_m \rightarrow 0$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Κεφάλαιο 2

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο X . Να δείξετε ότι αν (x_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων του X και $x \in X$, τότε $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $\|x_n - x\|' \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Άμεσο, αφού υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Για παράδειγμα, αν $\|x_n - x\|' \rightarrow 0$ τότε

$$0 \leq \|x_n - x\| \leq \frac{1}{a} \|x_n - x\|' \rightarrow 0,$$

άρα $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή έπεται όμοια από την $\|x_n - x\|' \leq b\|x_n - x\|$.

2. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο X . Αποδείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f: B_{(X, \|\cdot\|)} \rightarrow B_{(X, \|\cdot\|')}$. Δηλαδή, $n f$ είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και $n f^{-1}$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $f: B_{(X, \|\cdot\|)} \rightarrow B_{(X, \|\cdot\|')}$ με $f(\vec{0}) = \vec{0}$ και

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'} x, \quad x \neq \vec{0}.$$

(α) Η f είναι καλά ορισμένη: αν $x \in B_{(X, \|\cdot\|)}$, $x \neq \vec{0}$, τότε $\|x\| \leq 1$ άρα

$$\|f(x)\|' = \frac{\|x\|}{\|x\|'} \|x\|' = \|x\| \leq 1,$$

δηλαδή $f(x) \in B_{(X, \|\cdot\|')}$. Αν $x = \vec{0}$, τότε $f(x) = \vec{0} \in B_{(X, \|\cdot\|')}$.

(β) Δείχνουμε πρώτα τη συνέχεια της f : αν $x_n \rightarrow x_0$ ως προς την $\|\cdot\|$ και $x_0 \neq \vec{0}$, τότε από την ισοδυναμία των νορμών παίρνουμε $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, $x_n \rightarrow x_0$ ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;) και $\|x_n\|' \rightarrow \|x_0\|' > 0$, οπότε από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού ως προς την $\|\cdot\|'$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n) = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'} x_n \rightarrow \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|'} x_0 = f(x_0)$$

ως προς την $\|\cdot\|'$.

Αν $\|x_n\| \rightarrow 0$ τότε $\|x_n\|' \rightarrow 0$ από την ισοδυναμία των νορμών, και $\|x_n\|/\|x_n\|' \leq 1/a$ αν $x_n \neq \vec{0}$ ή $f(x_n) = \vec{0}$ αν $x_n = \vec{0}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\|f(x_n)\|' \leq \frac{1}{a}\|x_n\|' \leq \frac{b}{a}\|x_n\| \rightarrow 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \rightarrow \vec{0} = f(\vec{0})$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής.

(γ) Η f είναι επί: αν $y \neq \vec{0}$ και $\|y\|' \leq 1$, τότε το $x = (\|y\|'/\|y\|)y$ έχει νόρμα $\|x\| = \|y\|' \leq 1$ και (ελέγξτε το)

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = y.$$

(δ) Η f είναι ένα προς ένα: αν $f(x) = f(x_1)$ και $x \neq \vec{0}$, τότε $x_1 \neq \vec{0}$ (γιατί;) και

$$(*) \quad \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|'}x_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα x, x_1 είναι συγγραμμικά και μάλιστα $x = tx_1$, $t > 0$. Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{t\|x\|}{t\|x\|'}tx \implies x = tx \implies t = 1,$$

οπότε $x_1 = x$. Αν πάλι $x = \vec{0}$ και $f(x_1) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, είναι φανερό ότι $x_1 = \vec{0} = x$.

(ε) Η $f^{-1} : B_{(X, \|\cdot\|')} \rightarrow B_{(X, \|\cdot\|)}$ ορίζεται από την

$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|'}{\|y\|}y.$$

Όπως στο (β) δείχνουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Άρα, η f είναι ομοιομορφισμός.

3. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leq p < q < +\infty$, ο ℓ_p περιέχεται γνήσια στον ℓ_q , και ο ℓ_q περιέχεται γνήσια στον c_0 .

(β) Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον ℓ_p ($p < q$).

(γ) Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1 \leq p < +\infty} \ell_p$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, άρα $|\xi_k| \rightarrow 0$. Για μεγάλα k έχουμε $0 \leq |\xi_k| < 1$ και αφού $p < q$ βλέπουμε ότι $0 \leq |\xi_k|^q \leq |\xi_k|^p$. Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Άρα, $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Το $x = (1/k^{1/p}) \in \ell_q \setminus \ell_p$ (γιατί;).

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots)$ (η μονάδες και μετά μηδενικά). Τότε,

$$\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \rightarrow +\infty$$

όταν $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή, δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_p \leq b\|x\|_q$ για κάθε $x \in \ell_p$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, οι δύο νόρμες δεν είναι ισοδύναμες.

(γ) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$. Τότε, $\xi_k \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$, όμως το κριτήριο συμπίκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p \geq 1$. Άρα $x = \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0 \setminus \cup_{p \geq 1} \ell_p$.

4. Στον χώρο $\mathcal{C}[0, 1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(α) K είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, f τυχούσα στον $\mathcal{C}[0, 1]$.

(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, f σταθερή.

(γ) $K = \{g \in \mathcal{C}[0, 1] : g \geq 0, \int_0^1 g(t) dt \geq g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ και $M = \max\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, $m = \min\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_0 \in K$ με $g_0(x) = \frac{M+m}{2}$ στο $[0, 1]$. Τότε,

$$\|f - g_0\| = \max \left\{ \left| f(x) - \frac{M+m}{2} \right| : x \in [0, 1] \right\} = \max \left\{ M - \frac{M+m}{2}, \frac{M+m}{2} - m \right\} = \frac{M-m}{2}.$$

Αν $g \in K$, τότε $g(x) = c \in \mathbb{R}$ στο $[0, 1]$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) $c < m \implies \|f - g\| = M - c > M - m \geq \frac{M-m}{2}$.

(ii) $c > M \implies \|f - g\| = c - m > M - m \geq \frac{M-m}{2}$.

(iii) $m \leq c \leq M \implies \|f - g\| = \max\{M - c, c - m\} \geq \frac{M-m}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\|f - g\| \geq \frac{M-m}{2} = \|f - g_0\|$. Συνεπώς, $d(f, K) = \frac{M+m}{2} = d(f, g_0)$.

(β) Έστω $f(x) = c$, $x \in [0, 1]$. Τότε, για κάθε $g(x) = ax$ στο K έχουμε $\|f - g\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |c - ax| \geq |c|$ και για την $g_0 \equiv 0$ έχουμε $g_0 \in K$ και $\|f - g_0\| = |c|$. Συνεπώς, $d(f, K) = |c|$. Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $c \geq 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $0 \leq a \leq 2c$ (και μόνον αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f - g\| = c = d(f, K)$.

(ii) Αν $c < 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $2c \leq a \leq 0$ (και μόνο αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f - g\| = |c| = d(f, K)$.

(γ) Αν $g \in K$, τότε $\|g - f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} g(x)$. Όμως,

$$(*) \quad 1 \leq g(0) + 1 \leq \int_0^1 g(t) dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} g(x).$$

Άρα $\|g - f\| \geq 1$, και αφού η $g \in K$ ήταν τυχούσα, $d(f, K) \geq 1$. Έστω ότι υπάρχει $g \in K$ για την οποία $\|g - f\| = 1$. Τότε έχουμε ισότητα στην (*), άρα $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t) dt = g(0) + 1 = 1$, οπότε η g είναι συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$, $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t) dt = 1$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί;).

Από την άλλη πλευρά, $d(f, K) = 1$. Πράγματι, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε g_ε με $g_\varepsilon(0) = 0$, $g \equiv 1 + \delta$ στο $[\varepsilon, 1]$ και g_ε γραμμική στο $[0, \varepsilon]$. Αν $\delta = \frac{\varepsilon/2}{1 - (\varepsilon/2)}$, τότε $\int_0^1 g_\varepsilon(t) dt = 1$. Άρα, $g_\varepsilon \in K$ και

$$\|g - f\| = 1 + \delta = 1 + \frac{\varepsilon/2}{1 - (\varepsilon/2)}.$$

Έπεται ότι

$$d(f, K) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\varepsilon/2}{1 - (\varepsilon/2)} \right) = 1.$$

Άρα $d(f, K) = 1$, αλλά δεν υπάρχει $g \in K$ με την ιδιότητα $\|f - g\| = d(f, K)$.

5. Αποδείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x, Y) = 1$.

Υπόδειξη. Έστω $v \in X \setminus Y$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, είναι κλειστός υπόχωρος του X , και αφού $v \notin Y$ έχουμε $d(v, Y) = a > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n \in Y$ με την ιδιότητα

$$a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$$

(θυμηθείτε τον ορισμό της $d(v, Y)$). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|y_n - y_1\| \leq \|y_n - v\| + \|v - y_1\| < 2a + 1 + \frac{1}{n} \leq 2a + 2.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (y_n) περιέχεται στην $\widehat{B}(y_1, 2a + 2)$ που είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) με $y_{k_n} \rightarrow y \in Y$.

Τότε, $\|v - y\| = \lim \|v - y_{k_n}\| = a$. Δηλαδή, υπάρχει πλησιέστερο προς το v σημείο του Y . Συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Riesz. Ορίζουμε $x = \frac{1}{a}(v - y)$. Τότε $\|x\| = 1$ και για κάθε $z \in Y$

$$\|x - z\| = \left\| \frac{v - y}{a} - z \right\| = \left\| \frac{v - (y + az)}{a} \right\| = \frac{\|v - (y + az)\|}{a} \geq \frac{d(v, Y)}{a} = 1,$$

γιατί $y + az \in Y$ (ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X). Δείξαμε ότι $d(x, Y) \geq 1$ και αφού $d(x, Y) \leq \|x - \vec{0}\| = \|x\| = 1$, συμπεραίνουμε ότι $d(x, Y) = 1$.

6. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και ένα $\varepsilon > 0$.

(α) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Να δείξετε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

Υπόδειξη: Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1 + \varepsilon/2)$ και είναι ξένες ανά δύο.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ε -δίκτυο για την B_X με πληθάρημο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις μπάλες $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i = 1, \dots, k$. Αν V είναι ο όγκος της $B(0, 1)$, τότε ο όγκος της $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ είναι $V(\frac{\varepsilon}{2})^n$ για κάθε $i = 1, \dots, k$.

Αφού $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$, οι $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ είναι ξένες, άρα η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ έχει όγκο

$$U = k \cdot V \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^n.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάποιο $i \leq k$, τότε $\|y\| \leq \|x_i\| + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή

$$\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) B(0, 1).$$

Έπεται ότι

$$k \cdot V\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = U \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n V,$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε την κλάση όλων των συνόλων $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$, $k \in \mathbb{N}$, που ικανοποιούν την $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$. Από το (α) κάθε τέτοιο σύνολο έχει πλήθος στοιχείων το πολύ ίσο με $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$, άρα ανάμεσά τους υπάρχει κάποιο με μέγιστο πληθάριθμο. Παίρνουμε ένα τέτοιο $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Τότε, το $\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι ε -δίκτυο για την B_X : αν υπήρχε $y \in B_X$ με $\|y - x_i\| \geq \varepsilon$ για κάθε $i \leq k$, τότε το $\{y, x_1, \dots, x_k\}$ θα ήταν στην κλάση μας και θα είχε περισσότερα από k στοιχεία.

Από την κατασκευή και το (α), το ε -δίκτυο που φτιάξαμε έχει το πολύ $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$ στοιχεία.

7. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.

(β) Το ερώτημα απαιτεί κάποια γνώση Θεωρίας Μέτρου. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

(i) Το μ είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε $x \in X$ και κάθε Borel υποσύνολο A του X .

(ii) $\mu(A) > 0$ για κάθε ανοικτό, μη κενό $A \subseteq X$.

(iii) Υπάρχει μη κενό ανοικτό $A_0 \subseteq X$ με $\mu(A_0) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Από το Λήμμα του Riesz μπορούμε να βρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ στην B_X με την ιδιότητα $\|y_n - y_m\| > \frac{2}{3}$ αν $n \neq m$. Θέτουμε $x_n = \frac{3y_n}{4}$. Τότε, $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ (εξηγήστε γιατί) και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ είναι ξένα: αν, για κάποια $n \neq m$, υπήρχε $y \in X$ με $\|y - x_n\| \leq \frac{1}{4}$ και $\|y - x_m\| \leq \frac{1}{4}$, τότε θα είχαμε $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2}$, οπότε $\|y_n - y_m\| = \frac{4}{3}\|x_n - x_m\| \leq \frac{2}{3}$, το οποίο είναι άτοπο.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μέτρο μ το οποίο ικανοποιεί τα (i)–(iii). Το A_0 είναι ανοικτό, επομένως υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x_0, r) \subset A_0$. Από τα (ii) και (iii) βλέπουμε ότι $0 < \mu(B(x_0, r)) < \infty$. Αφού το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, έπεται ότι $0 < \mu(B(0, r)) < \infty$. Εφαρμόζοντας το (α) μπορούμε να βρούμε $x_n \in B(0, r)$ ώστε οι μπάλες $B(x_n, r/5)$ να είναι ξένες και να περιέχονται στην $B(0, r)$. Χρησιμοποιώντας πάλι τα (i) και (ii) βλέπουμε ότι υπάρχει $t > 0$ ώστε $\mu(B(x_n, r/5)) = t$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως τότε,

$$+\infty > \mu(B(0, r)) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r/5)\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(x_n, r/5)) = \sum_{n=1}^{\infty} t.$$

Αυτό είναι άτοπο.

8. Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν περιέχει συμπαγές σύνολο με μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Γνωρίζουμε τότε ότι η B_X είναι συμπαγές σύνολο και ότι

$$\text{int}(B_X) = B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\} \neq \emptyset.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $K \subseteq X$ συμπαγές, με $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(x_0, r) \subseteq K$. Αν ορίσουμε $K_1 = -x_0 + K$ τότε

$$B(0, r) = -x_0 + B(x_0, r) \subseteq -x_0 + K = K_1.$$

Έπεται ότι

$$B(0, 1) = \frac{1}{r}B(0, r) \subseteq \frac{1}{r}K_1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές. Αρχικά, η συνάρτηση $f : X \rightarrow X$ με $f(y) = -x_0 + y$ είναι συνεχής, και αφού το K είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $K_1 = -x_0 + K = f(K)$ είναι συμπαγές. Έπειτα, η συνάρτηση $g : X \rightarrow X$ με $g(y) = \frac{1}{r}y$ είναι συνεχής, και αφού το K_1 είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές.

Τώρα, αφού $B(0, 1) \subseteq \frac{1}{r}K_1$ και το $\frac{1}{r}K_1$ είναι κλειστό, βλέπουμε ότι

$$B_X = \overline{B(0, 1)} \subseteq \frac{1}{r}K_1,$$

άρα η B_X , ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγής. Αναγκαστικά, ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

9. Έστω X χώρος Banach. Αν $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου κάθε A_n είναι συμπαγές υποσύνολο του X , αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \geq 1$ θεωρούμε το σύνολο $B_{n,k} := kA_n$. Παρατηρούμε (δείτε και την προηγούμενη άσκηση) ότι κάθε $B_{n,k}$ είναι συμπαγές. Επίσης, η οικογένεια $\{B_{n,k} : n, k \geq 1\}$ είναι αριθμήσιμη.

Γράφουμε

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} kA_n = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Από την δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire μπορούμε να βρούμε $n_0, k_0 \geq 1$ ώστε το σύνολο B_{n_0, k_0} να έχει μη κενό εσωτερικό. Αφού το B_{n_0, k_0} είναι συμπαγές, εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

10. Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται ισοπλευρικό αν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\|x - y\| = a$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι:

- (α) Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε κάθε ισοπλευρικό υποσύνολό του είναι πεπερασμένο.
- (β) Στον ℓ_∞^n υπάρχει ισοπλευρικό σύνολο με 2^n στοιχεία.
- (γ) Στον ℓ_p^n , όπου $n \geq 2$ και $p > 1$, υπάρχει ισοπλευρικό σύνολο με $n + 1$ στοιχεία.

Για το (γ) δοκιμάστε το $\{e_1, \dots, e_n, r(e_1 + \dots + e_n)\}$ για κατάλληλο $r \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση και περιέχει άπειρο ισοπλευρικό σύνολο. Τότε υπάρχουν άπειρη ακολουθία (x_n) στον X και $a > 0$ ώστε: αν $m \neq n$ τότε $\|x_n - x_m\| = a$. Παρατηρούμε ότι η (x_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\widehat{B}(x_1, a)$ (η συμπαγεία έπεται από την υπόθεση ότι $\dim(X) < \infty$) άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) . Αυτό οδηγεί σε άτοπο: η (x_{k_n}) θα ήταν βασικά, άρα θα μπορούσαμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ να ισχύει $\|x_{k_m} - x_{k_n}\| < \frac{a}{2}$ ενώ ταυτόχρονα $\|x_{k_m} - x_{k_n}\| = a$.

(β) Θεωρούμε το $A = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_j \in \{0, 1\}\}$. Το A έχει 2^n στοιχεία και είναι ισοπλευρικό υποσύνολο του ℓ_∞^n : αν $a, a' \in A$ και $a \neq a'$ τότε

$$\|a - a'\|_\infty = \max\{|a_j - a'_j| : j = 1, \dots, n\} = 1$$

(εξηγήστε γιατί).

(γ) Για κάθε $r > 0$ θεωρούμε το σύνολο $A_r = \{e_1, \dots, e_n, r(e_1 + \dots + e_n)\}$, το οποίο έχει $n + 1$ σημεία (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $n \geq 2$, άρα $\frac{1}{r}(e_1 + \dots + e_n) \neq e_j$ για κάθε $1 \leq j \leq n$). Παρατηρούμε ότι αν $1 \leq i, j \leq n$ και $i \neq j$ τότε

$$\|e_i - e_j\|_p^p = 2,$$

ενώ για κάθε $1 \leq j \leq n$ ισχύει

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{r}(e_1 + \dots + e_n) - e_j \right\|_p^p &= \left\| \left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}, \frac{1}{r} - 1, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right) \right\|_p^p \\ &= (n-1) \frac{1}{r^p} + |1-r|^p \frac{1}{r^p} = \frac{(n-1) + |1-r|^p}{r^p}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(r) = 2r^p - (n-1) - |1-r|^p$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} (2r^p - (n-1) - (r-1)^p) = +\infty$ και $g(0) = -(n-1) - 1 < 0$. συνεπώς, υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιος ώστε $g(r_0) = 0$, δηλαδή

$$2 = \frac{(n-1) + |1-r|^p}{r^p}.$$

Έπεται ότι το A_{r_0} είναι ισοπλευρικό υποσύνολο του ℓ_p^n με $n + 1$ στοιχεία.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικοί τελεστές και γραμμικά συναρτησοειδή

1. Ορίζουμε $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: για κάθε $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \dots)$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \dots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

Υπόδειξη. (α) Ο T ορίζεται καλά, γιατί

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty,$$

δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$. Για τη νόρμα του T_n έχουμε $\|T_n\| \leq \|T\| \cdots \|T\| = \|T\|^n \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geq \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$ (συνήθως συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \rightarrow \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$.

2. Ορίζουμε $F : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Αποδείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

Υπόδειξη. Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το F είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} (a\xi_k + b\eta_k) = a \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k + b \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geq 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1.$$

3. Έστω $T : \mathcal{C}[0,1] \rightarrow \mathcal{C}[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T .

(γ) Είναι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{C}[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = \left| \int_0^t f(s) ds \right| \leq \int_0^t |f(s)| ds \leq \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leq \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tf)(t)| \leq \|f\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Για την γραμμικότητα του T παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [T(af + bg)](t) &= \int_0^t (af(s) + bg(s)) ds = a \int_0^t f(s) ds + b \int_0^t g(s) ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf) + b(Tg)](t), \end{aligned}$$

άρα $T(af + bg) = a(Tf) + b(Tg)$. Η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \implies (Tf)' = (Tg)' \implies f = g.$$

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T . Πράγματι, αν $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in \mathcal{C}[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t g'(s) ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in \mathcal{R}(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f'_n(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

(γιατί); Έπεται ότι ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί);

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0, 1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geq \|Tf\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

4. Στον $\mathcal{C}[-1, 1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F: \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^1 g(s) ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2) + g(-1/2) - 2g(0)}{2}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $g \in \mathcal{C}[0, 1]$ έχουμε

$$|F(g)| = \left| \int_{-1}^1 g(s) ds - g(0) \right| \leq \int_{-1}^1 |g(s)| ds + |g(0)| \leq 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in \mathcal{C}[-1, 1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1, -\varepsilon]$ και $[\varepsilon, 1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon, 0]$ και $[0, \varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned} \|F\| \geq |F(g_\varepsilon)| &= \left| \int_{-1}^1 g_\varepsilon(s) ds + 1 \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^0 g_\varepsilon(s) ds + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(s) ds + \int_\varepsilon^1 ds + 1 \right| \\ &= |(1 - \varepsilon) + 0 + 0 + (1 - \varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|F\| \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (3 - 2\varepsilon) = 3.$$

Άρα, $\|F\| = 3$.

(β) Για κάθε $g \in \mathcal{C}[0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |F(g)| &= \left| \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0) \right| \leq \frac{|g(1/2)|}{2} + \frac{|g(-1/2)|}{2} + |g(0)| \\ &\leq \frac{\|g\|}{2} + \frac{\|g\|}{2} + \|g\| = 2\|g\|. \end{aligned}$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 2$. Ορίζουμε $g \in \mathcal{C}[-1, 1]$ θέτοντας $g \equiv 1$ στα $[-1, -1/2]$ και $[1/2, 1]$, $g(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2, 0]$ και $[0, 1/2]$. Τότε $\|g\| = 1$ και

$$\|F\| \geq |F(g)| = \left| \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) \right| = 2.$$

Άρα, $\|F\| = 2$.

5. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, όπου $x = (x_k) \in c_0$. Αποδείξτε ότι $f \in c_0^*$ και υπολογίστε την $\|f\|$.

Υπόδειξη. Έστω $x = (x_k) \in c_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $|x_k| \leq \|x\|_{\infty}$ για κάθε k ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leq \|x\|_{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \|x\|_{\infty} < \infty,$$

άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leq \frac{1}{2} \|x\|_{\infty}.$$

Έπεται ότι $f \in c_0^*$ και $\|f\| \leq \frac{1}{2}$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in c_0$ (οι πρώτες N συντεταγμένες του x_N είναι ίσες με 1 και οι υπόλοιπες ίσες με 0). Έχουμε $\|x_N\|_{\infty} = 1$, άρα

$$\|f\| \geq |f(x_N)| = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^N}{1 - \frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι $\|f\| \geq \frac{1}{2}$. Άρα, τελικά, $\|f\| = \frac{1}{2}$.

6. Αποδείξτε ότι οι γραμμικοί τελεστές $S, T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ με $S(x) = (x_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ και $T(x) = x + S(x)$ είναι φραγμένοι και υπολογίστε τη νόρμα τους.

Υπόδειξη. Έστω $x = (x_k)_{k \geq 1} \in \ell_1$. Έχουμε $S(x) = (x_2, x_3, \dots)$, άρα

$$\|S(x)\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1.$$

Έπεται ότι ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leq 1$. Θεωρώντας το $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ παρατηρούμε ότι $S(e_2) = e_1$ και $\|e_2\|_1 = 1$, άρα

$$\|S\| \geq \|S(e_2)\|_1 = \|e_1\|_1 = 1.$$

Συνεπώς, $\|S\| = 1$.

Για τον T παρατηρούμε ότι $\|T(x)\|_1 = \|x + S(x)\|_1 \leq \|x\|_1 + \|S(x)\|_1 \leq 2\|x\|_1$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 2$. Αν $x = (x_k)$ με $x_1 = 0$, $x_k \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$ και $\|x\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 1$, έχουμε

$$\|T\| \geq \|T(x)\|_1 = \|(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2 \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2.$$

Έπεται ότι $\|T\| = 2$.

7. Έστω X ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \rightarrow X$, με $(Tf)(t) = f(t - a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο T γραμμικός; Φραγμένος;

Υπόδειξη. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} [T(\lambda f + \mu g)](t) &= (\lambda f + \mu g)(t - a) = \lambda f(t - a) + \mu g(t - a) \\ &= \lambda(Tf)(t) + \mu(Tg)(t) = [\lambda Tf + \mu Tg](t), \end{aligned}$$

άρα $T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$, δηλαδή ο T είναι γραμμικός. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = |f(t - a)| \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| = \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |(Tf)(t)| \leq \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος.

8. Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ με

$$(Tf)(t) = t \int_0^1 f(s) ds, \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Αποδείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;

(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

Υπόδειξη. (α) Η γραμμικότητα των T και S ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = \left| t \int_0^1 f(s) ds \right| \leq t \int_0^1 |f(s)| ds \leq t \|f\| \int_0^1 ds = t \|f\| \leq \|f\|$$

για κάθε $t \in [0, 1]$, άρα $\|Tf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leq 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0, 1]$, άρα $\|Sf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leq 1$.

(β) Έχουμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = t \int_0^1 (Sf)(s) ds = t \int_0^1 sf(s) ds,$$

και

$$[(S \circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2 \int_0^1 f(s) ds.$$

Δεν ισχύει ότι $T \circ S = S \circ T$. Αν ισχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = [(S \circ T)(f)](t) \implies t \int_0^1 s ds = t^2 \int_0^1 ds \implies \frac{t}{2} = t^2$$

για κάθε $t \in [0, 1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T \circ S\| \leq 1/2$ και $\|S \circ T\| \leq 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:

$$\|T\| = \|S\| = \|S \circ T\| = 1, \quad \|T \circ S\| = \frac{1}{2}.$$

Επαληθεύστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς.

9. Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x, y)f(y) dy.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \leq (b - a) \max\{|\phi(x, y)| : (x, y) \in \Delta\}.$$

Υπόδειξη. Η Tf είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο T ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x, y), (x_1, y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x, y) - \phi(x_1, y_1)| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x, y), (x_1, y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x, y) - \phi(x_1, y)| < \varepsilon$. Έστω $x < x_1$ στο $[a, b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned} |(Tf)(x_1) - (Tf)(x)| &= \left| \int_a^{x_1} \phi(x_1, y)f(y) dy - \int_a^x \phi(x, y)f(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_x^{x_1} \phi(x_1, y)f(y) dy \right| + \left| \int_a^x [\phi(x_1, y) - \phi(x, y)]f(y) dy \right| \\ &\leq \int_x^{x_1} |\phi(x_1, y)| \cdot |f(y)| dy + \int_a^x |\phi(x_1, y) - \phi(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \left(\max_{\Delta} |\phi| \right) \|f\| (x_1 - x) + \|f\| \varepsilon (x - a) \\ &< \left[\left(\max_{\Delta} |\phi| \right) + b - a \right] \varepsilon \|f\|. \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η Tf είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &= \left| \int_a^x \phi(x, y)f(y) dy \right| \leq \int_a^x |\phi(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \left(\max_{\Delta} |\phi| \right) \|f\| (x - a) \leq \left[(b - a) \max_{\Delta} |\phi| \right] \|f\|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\| \leq \left[(b-a) \max_{\Delta} |\phi| \right] \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq (b-a) \max_{\Delta} |\phi|$.

10. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{C}^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $\mathcal{C}^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Αποδείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \rightarrow (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ με $f(0) = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t f'(s) ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^t 1^2 ds \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds \right) t dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\ &\leq \|f\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leq \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση. Έστω τώρα τυχούσα $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0) = 0$, άρα $\|g\|_2 \leq \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2 \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leq \|g\|_2 + |f(0)| \leq \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \rightarrow (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leq 1$.

11. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \rightarrow Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

Υπόδειξη. (\implies) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \rightarrow Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leq 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Αν $y \in B_Y$, αφού ο T είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leq 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.

Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.

(\Leftarrow) Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε,

$$y = T(\|y\|x) \in T(X).$$

Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.

Ο T είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε

$$\|T(x/\|x\|)\| > 1 \implies T(x/\|x\|) \notin B_Y,$$

ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.

Αφού ο T είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

12. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $x_n, x \in X$. Αποδείξτε ότι, αν $T_n \rightarrow T$ και $x_n \rightarrow x$, τότε $T_n x_n \rightarrow Tx$.

Υπόδειξη. Οι (T_n) και (x_n) είναι φραγμένες ακολουθίες στους $\mathcal{B}(X, Y)$ και X αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leq M, \quad \|x_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - Tx_n + Tx_n - Tx\| \\ &\leq \|(T_n - T)(x_n)\| + \|Tx_n - Tx\| \\ &\leq \|T_n - T\| \cdot \|x_n\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \\ &\leq M\|T_n - T\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_n x_n \rightarrow Tx$.

13. Έστω X, Y χώροι με νορμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(β) Το σύνολο $T^{-1}(S_Y) = \{x \in X : \|Tx\|_Y = 1\}$ είναι κλειστό.

Υπόδειξη. (α) \implies (β): Η S_Y είναι κλειστό υποσύνολο του Y και ο $T : X \rightarrow Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, άρα συνεχής συνάρτηση. Έπεται ότι το σύνολο $T^{-1}(S_Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης.

(β) \implies (α): Αρχικά παρατηρούμε ότι $T(0) = 0 \notin S_Y$, άρα $0 \notin T^{-1}(S_Y)$. Αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0, \delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε $z \in B(0, \delta)$ έχουμε: $\|T(z)\|_Y < 1$ ή $\|T(z)\|_Y > 1$.

Έστω ότι υπάρχει $z_0 \in B(0, \delta)$ με $\|T(z_0)\|_Y > 1$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1}{\|T(z_0)\|_Y} < 1$. Τότε, $\|\lambda z_0\|_X = \lambda \|z_0\|_X < \lambda \delta < \delta$, δηλαδή $\lambda z_0 \in B(0, \delta)$, $\|T(\lambda z_0)\|_Y = \lambda \cdot \|T(z_0)\|_Y = 1$, δηλαδή $\lambda z_0 \in T^{-1}(S_Y)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $B(0, \delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \emptyset$.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι για κάθε $z \in B(0, \delta)$ ισχύει $\|T(z)\| < 1$. Τότε, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\left\| T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right) \right\| < 1$ διότι $\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|_X} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Δηλαδή,

$$\frac{\delta}{2\|x\|_X} \|T(x)\|_Y < 1 \implies \|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta} \|x\|_X,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$.

14. Έστω $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(\widehat{B}(0, \delta)) \neq \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έστω ότι το F είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x \in \widehat{B}(0, 1)$ έχουμε

$$|F(x)| \leq \|F\| \cdot \|x\| \leq \|F\|,$$

δηλαδή, $F(\widehat{B}(0, 1)) \subseteq [-\|F\|, \|F\|]$. Άρα, για $\delta = 1$ έχουμε $F(\widehat{B}(0, \delta)) \neq \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(\widehat{B}(0, \delta)) \neq \mathbb{R}$ για κάποιο $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(\widehat{B}(0, \delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του \mathbb{R} (από τη γραμμικότητα του F - εξηγήστε). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του \mathbb{R} , πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leq \delta \implies |F(x)| \leq M.$$

Έπεται ότι το F είναι φραγμένο: αν $x \neq 0$, τότε

$$\left| F\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right| \leq M \implies |F(x)| \leq \frac{2M}{\delta} \|x\|.$$

15. Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

Υπόδειξη. Αν $F(x) = 1$, τότε $1 = F(x) \leq \|F\| \cdot \|x\|$, άρα $\|x\| \geq \frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \geq \frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0 < \varepsilon < \|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| = 1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon) = a_\varepsilon > \|F\| - \varepsilon$ (γιατί:). Τότε, $F(x_\varepsilon/a_\varepsilon) = 1$ και

$$\left\| \frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon} \right\| = \frac{1}{a_\varepsilon} < \frac{1}{\|F\| - \varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\|}.$$

16. Έστω $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \rightarrow 0$ στον X , τότε $n\{ \|Tx_n\| \}$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο T δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

άρα $x_n \rightarrow 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geq \varepsilon \sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

δηλαδή $n\{ \|Tx_n\| \}$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο T είναι φραγμένος.

17. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια βάση Hamel του X . Ο X είναι απειροδιάστατος, επομένως μπορούμε να γράψουμε αυτή τη βάση στη μορφή

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

[Ξεχωρίζουμε δηλαδή ένα άπειρο αριθμίσμο υποσύνολο μιάς βάσης του X και το αριθμούμε.] Αφού τα x_n, y_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάθε x_n είναι μη μηδενικό. Ορίζουμε $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ πρώτα στα στοιχεία της βάσης του X , θέτοντας

$$F(x_n) = n\|x_n\|, \quad F(y_i) = 0.$$

Κατόπιν επεκτείνουμε γραμμικά σε ολόκληρο το χώρο X (κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων x_n και κάποιων y_i - εξηγήστε). Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, όμως δεν είναι φραγμένο γιατί τότε θα είχαμε

$$\|F\| \geq \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

18. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα (πάνω από το \mathbb{R}). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι φραγμένο. Χρησιμοποιώντας το, αποδείξτε ότι υπάρχουν κυρτά και πυκνά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε, τα σύνολα $A = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ και $B = \{x \in X : f(x) < 0\}$ είναι μη κενά, κυρτά, ξένα και $X = A \cup B$. Αφού το f δεν είναι φραγμένο, γνωρίζουμε ότι ο $\text{Ker}(f)$ είναι πυκνός (και γνήσιος) υπόχωρος του X . Ο $\text{Ker}(f)$ περιέχεται στο A , άρα $\overline{A} \supseteq \overline{\text{Ker}(f)} = X$, δηλαδή το A είναι πυκνό. Επίσης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) < 0$, και τότε $x_0 + \text{Ker}(f) \subseteq B$: αν $x \in x_0 + \text{Ker}(f)$ τότε $f(x) = f(x_0) < 0$. Όμως, $\overline{x_0 + \text{Ker}(f)} = x_0 + \overline{\text{Ker}(f)} = X$, άρα

$$\overline{B} \supseteq \overline{x_0 + \text{Ker}(f)} = X.$$

Δηλαδή, το B είναι κι αυτό πυκνό υποσύνολο του X .

19. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω $\{e_i\}_{i \in I}$ (υπεραριθμησίμην) βάση Hamel του X .

(α) Ορίζουμε μια νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) e_i$ (για κάποιους $\alpha_i(x) \in \mathbb{K}$) με το σύνολο $I(x) = \{i \in I : \alpha_i(x) \neq 0\}$ πεπερασμένο.

Θέτουμε $\|0\|' = 0$ και

$$\|x\|' = \sum_{i \in I} |\alpha_i(x)| = \sum_{i \in I(x)} |\alpha_i(x)|$$

αν $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα, που δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

(β) Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $f_i : X \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$f_i(x) = f_i \left(\sum_{i \in I} \alpha_i(x) e_i \right) = \alpha_i(x).$$

Αποδείξτε ότι κάθε f_i είναι γραμμικό συναρτησοειδές, αλλά υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in I$ ώστε το f_i να μην είναι φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Οι ιδιότητες $\|\lambda x\|' = |\lambda| \cdot \|x\|'$ και $\|x + y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$ ελέγχονται εύκολα. Επίσης, $\|x\|' = \sum_{i \in I} |\alpha_i(x)| \geq 0$ για κάθε $x \in X$. Αν υποθέσουμε ότι $\|x\|' = 0$ τότε $\alpha_i(x) = 0$ για κάθε $i \in I$, άρα $x = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) e_i = 0$. Συνεπώς, η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X (ελέγξτε όλους τους παραπάνω ισχυρισμούς).

Αφού ο X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach, το σύνολο $\{e_i\}_{i \in I}$ είναι υπεραιριθμήσιμο. Παρατηρούμε ότι αν $i \neq j$, $i, j \in I$, τότε $e_i - e_j = 1 \cdot e_i + (-1) \cdot e_j$ (αυτή είναι η μοναδική του αναπαράσταση ως πεπερασμένου γραμμικού συνδυασμού των e_i), άρα

$$\|e_i - e_j\|' = 2.$$

Έπεται ότι ο $(X, \|\cdot\|')$ δεν είναι διαχωρίσιμος (εξηγήστε γιατί). Αν όμως οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ήταν ισοδύναμες, τότε αφού ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος θα είχαμε ότι και ο $(X, \|\cdot\|')$ είναι

διαχωρίσμος (εξηγήστε γιατί) το οποίο είναι άτοπο. Άρα, οι δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δεν είναι ισοδύναμες.

(β) Η γραμμικότητα των f_i ελέγχεται εύκολα.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε μια ακολουθία $(e_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ διαφορετικών ανά δύο στοιχείων της βάσης Hamel του X . Παρατηρήστε ότι $e_{i_k} \neq 0$, αφού τα e_{i_k} είναι στοιχεία της βάσης. Αν $v_k = \frac{e_{i_k}}{2^k \|e_{i_k}\|}$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty,$$

και αφού ο X είναι χώρος Banach, η ακολουθία $s_N = \sum_{k=1}^N v_k$ συγκλίνει στο $x = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \in X$.

Τώρα, γράφουμε το x στη μορφή $x = \sum_{j \in I(x)} \alpha_j(x) e_j$, όπου το $I(x)$ είναι πεπερασμένο. Αφού τα e_{i_k} είναι άπειρα το πλήθος, υπάρχει $i_n \in I$ τέτοιος ώστε $i_n \notin I(x)$.

Θεωρούμε το f_{i_n} και υποθέτουμε ότι είναι φραγμένο, άρα συνεχής απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι

$$f_{i_n}(x) = \alpha_{i_n}(x) = 0,$$

διότι $i_n \notin J(x)$ άρα $\alpha_{i_n}(x) = 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $N \geq n$ έχουμε

$$f_{i_n}(s_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k \|e_{i_k}\|} f_{i_n}(e_{i_k}) = \frac{1}{2^n \|e_{i_n}\|},$$

διότι $f_{i_n}(e_{i_k}) = 0$ αν $k \neq n$ και $f_{i_n}(e_{i_n}) = 1$. Αν το f_{i_n} ήταν συνεχής απεικόνιση, θα είχαμε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{i_n}(s_N) = \frac{1}{2^n \|e_{i_n}\|} = f(x) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

20. Αποδείξτε ότι το σύνολο $Y = \{x = (x_n) \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ είναι πυκνός διανυσματικός υπόχωρος του c_0 .

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ ως υπόχωρο του c_0 . Είναι γνωστό (ελέγξτε το) ότι $\overline{c_{00}} = c_0$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (ουσιαστικά έχουμε άθροισμα πεπερασμένων το πλήθος μη μηδενικών όρων). Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική.

Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_{\infty} = 1$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leq \|f\| \cdot \|x_N\|_{\infty} = \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\text{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$).

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\text{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\text{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του c_0 παίρνουμε

$$\bar{Y}^{c_0} \supseteq \overline{\text{Ker}(f)}^{c_0} \supseteq \overline{\text{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}.$$

Άρα,

$$\bar{Y}^{c_0} \supseteq \overline{c_{00}}^{c_0} = c_0.$$

Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του c_0 .

21. Έστω $1 < p < \infty$ και $Y = \left\{ x = (x_k) \in \ell_p : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Αποδείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p .

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ ως υπόχωρο του ℓ_p . Είναι γνωστό (ελέγξτε το) ότι $\overline{c_{00}} = \ell_p$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_p) \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (ουσιαστικά έχουμε άθροισμα πεπερασμένων το πλήθος μη μηδενικών όρων). Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική.

Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_\infty = N^{1/p}$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leq \|f\| \cdot \|x_N\|_\infty = \|f\| \cdot N^{1/p} \implies N^{1/q} \leq \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\text{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$).

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\text{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\text{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του ℓ_p παίρνουμε

$$\bar{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{\text{Ker}(f)}^{\ell_p} \supseteq \overline{\text{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = c_{00}.$$

Άρα,

$$\bar{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{c_{00}}^{\ell_p} = \ell_p.$$

Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p .

22. Αποδείξτε ότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1 .

Υπόδειξη. Για κάθε $y \in \ell_1$, η απεικόνιση $f_y : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. Πράγματι,

$$|f_y(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sup_n |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

Ορίζουμε $T : \ell_1 \rightarrow c_0^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_1$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ όπου $x_k = \text{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε $\|x(N)\|_\infty \leq 1$ και $f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^N |y_k|$, οπότε $\|f_y\| \geq |f_y(x(N))| = \sum_{k=1}^N |y_k|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geq \|y\|_1$, άρα

$$\|T(y)\|_{c_0^*} = \|f_y\| = \|y\|_1.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in c_0^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_1$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$). Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ όπου $x_k = \text{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε, $\|x(N)\|_\infty \leq 1$ και

$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^N \text{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^N |y_k|,$$

άρα $\sum_{k=1}^N |y_k| = |f(x(N))| \leq \|f\|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_1$ και $\|y\|_1 \leq \|f\|$.

Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y . Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\text{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον c_0 και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον c_0 .

23. Έστω c ο χώρος των συγκλινοσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.

(α) Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι.

(β) Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(γ) Αποδείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1 .

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $T : c \rightarrow c_0$ με $T(x) = (\xi, \xi_1 - \xi, \xi_2 - \xi, \dots)$, όπου $\xi = \lim \xi_k$. Από τον ορισμό του T είναι φανερό ότι $T(x) \in c_0$, δηλαδή ο T είναι καλά ορισμένος.

(i) Ο T είναι ένα προς ένα: αν $T(x) = T(y)$, τότε $\xi = \lim \xi_k = \lim \eta_k = \eta$ και $\xi - \xi_m = \eta - \eta_m$ για κάθε m , οπότε $\xi_m = \eta_m$, $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = y$.

(ii) Ο T είναι επί: αν $y = (\eta_k) \in c_0$, τότε $x = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_3, \dots) \in c$ γιατί $\eta_1 + \eta_k \rightarrow \eta_1$, και $T(x) = y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(iii) Ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq 2$: παρατηρούμε αρχικά ότι αν $x = (\xi_k) \in c$ τότε $|\xi| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| \leq \|x\|_c$. Επίσης, $|\xi - \xi_k| \leq |\xi| + |\xi_k| \leq 2\|x\|_c$ για κάθε k , άρα

$$\|T(x)\|_{c_0} = \max\{|\xi|, \sup\{|\xi - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\}\} \leq 2 \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} = 2\|x\|_c.$$

(iv) Ομοίως ελέγχουμε ότι $\|T^{-1}\| \leq 2$. Άρα, οι c και c_0 είναι ισόμορφοι.

(β) Έστω $T : c_0 \rightarrow c$ ισομετρικός ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι $T(e_n) \in c_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: θα είχαμε $T(c_0) \subseteq c_0$ ενώ ο T είναι επί.

Γράφουμε $T(e_n) = (x_{nm})_{m=1}^{\infty}$. Έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T(e_{n_0}) \notin c_0$. Τότε, $\lim_m x_{n_0 m} = \ell \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ell > 0$ (αν $\ell < 0$, εργαζόμαστε όμοια). Επίσης, $\ell \leq 1$ αφού $\sup_m |x_{n_0 m}| = \|T(e_{n_0})\| = 1$. Υπάρχει m_0 ώστε: για κάθε $m \geq m_0$, $x_{n_0 m} > \frac{\ell}{2}$.

Παρατηρήστε ότι: για κάθε n υπάρχει $m(n)$ ώστε $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$ (γιατί $\sup_m |x_{nm}| = \|T(e_n)\| = \|e_n\| = 1$). Επίσης, $n_1 \neq n_2 \implies m(n_1) \neq m(n_2)$. Αλλιώς, για κάποιο από τα $y = \pm e_{n_1} \pm e_{n_2}$ θα είχαμε $\|T(y)\| > 2 - \ell \geq 1$ ενώ $\|y\| = 1$.

Υπάρχει λοιπόν n ώστε $m(n) \geq m_0$ και $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$. Τότε, για ένα από τα $y = e_{n_0} \pm e_n$ έχουμε $\|T(y)\| \geq |x_{n_0 m(n)}| + |x_{nm(n)}| > \frac{\ell}{2} + (1 - \frac{\ell}{2}) = 1$ ενώ $\|y\| = 1$. Αυτό είναι άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι $c = c_0 \oplus \text{span}\{e_0\}$, όπου $e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Κάθε $x \in c$ γράφεται στη μορφή $x = x_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_0) e_n$, όπου $x_0 = \lim_n x_n$. Αν $f \in c^*$ τότε

$$f(x) = x_0 f(e_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_0) f(e_n) = x_0 \left(f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$$

(αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|$ συγκλίνει). Θέτουμε $a_0 = f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)$ και $a_n = f(e_n)$, $n \geq 1$. Η απεικόνιση $T : c^* \rightarrow \ell_1$ με $T(f) = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

24. Ορίστε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: $n \|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_{\infty}$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Υπόδειξη. Έστω (e_n) η βάση του c_{00} . Ορίζουμε $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ θέτοντας $T(e_n) = n e_n$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο T είναι 1-1 και επί. Ορίζουμε μια δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|_s$ στον c_{00} , θέτοντας $\|x\|_s = \|T(x)\|_{\infty}$. Ελέγξτε ότι $n \|\cdot\|_s$ είναι νόρμα.

Οι $\|\cdot\|_s$ και $\|\cdot\|_{\infty}$ δεν είναι ισοδύναμες: $\|e_n\|_s = \|n e_n\|_{\infty} = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, ο $T : (c_{00}, \|\cdot\|_s) \rightarrow (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ είναι ισομετρία: αν $x \in c_{00}$ τότε $\|T(x)\|_{\infty} = \|x\|_s$.

25. Έστω X χώρος Banach και έστω (f_n) μια ακολουθία μη μηδενικών συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $f_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n = n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$, δηλαδή $x \in \text{Ker}(f_n)$. Τότε,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(f_n).$$

Αφού κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\text{Ker}(f_n)$ είναι κλειστό. Ο X είναι πλήρης, άρα από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο υπόχωρος $\text{Ker}(f_{n_0})$ να έχει μη κενό εσωτερικό. Όμως τότε, $\text{Ker}(f_{n_0}) = X$ (γνωστό από τη θεωρία). Δηλαδή, $f_{n_0} \equiv 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι όλα τα f_n είναι μη μηδενικά.

26. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, ο X χώρος Banach, και έστω $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ και το $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Αφού ο X είναι πλήρης, τα σύνολα F_n είναι κλειστά και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq F_{n_0}$. Άρα, το

$$T(B(x_0, \delta)) \subseteq T(F_{n_0})$$

είναι φραγμένο υποσύνολο του Y . Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $z \in B(x_0, \delta)$ ισχύει $\|Tz\|_Y \leq M$. Τότε, για κάθε $w \in B(0, \delta)$ έχουμε $x_0 + w \in B(x_0, \delta)$ και $x_0 \in B(x_0, \delta)$, άρα

$$\|Tw\|_Y = \|T(x_0 + w) - T(x_0)\|_Y \leq \|T(x_0 + w)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \leq 2M.$$

Τέλος, για κάθε $x \in X \setminus \{0\}$ έχουμε $\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \delta)$, άρα

$$\|T(x)\|_Y = \frac{2\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y \leq \frac{4M}{\delta} \|x\|,$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος.

27. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (F_n) κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και κάθε $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y . Είναι ο T απαραίτητα φραγμένος;

Υπόδειξη. Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ θεωρούμε τα σύνολα

$$F_n := \{x = (x_k) : |x_k| \leq n \text{ αν } k \leq n \text{ και } x_k = 0 \text{ αν } k > n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο: αν $x^{(s)} = (x_k^{(s)})_{k=1}^{\infty} \in F_n$, $s = 1, 2, \dots$, και $x^{(s)} \rightarrow x$ για κάποιο $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$, τότε για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x_k^{(s)} = x_k,$$

διότι $|x_k^{(s)} - x_k| \leq \|x^{(s)} - x\|_{\infty} \rightarrow 0$. Όμως, αν $k \leq n$ έχουμε $|x_k^{(s)}| \leq n$ για κάθε s , άρα

$$|x_k| = \lim_{s \rightarrow \infty} |x_k^{(s)}| \leq n,$$

και όμοια, αν $k < n$ έχουμε $x_k^{(s)} = 0$ για κάθε s , άρα

$$x_k = \lim_{s \rightarrow \infty} x_k^{(s)} = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in F_n$, και από τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι το F_n είναι κλειστό.

Δείχνουμε ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $x = (x_k) \in c_{00}$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_k = 0$ για κάθε $k > m$. Επίσης, υπάρχει $s \in \mathbb{N}$ ώστε $\max\{|x_1|, \dots, |x_m|\} \leq s$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $n \geq \max\{m, s\}$ τότε έχουμε $|x_k| \leq n$ για κάθε $k \leq n$ (διότι $|x_k| \leq s \leq n$ αν $k \leq m$ και $|x_k| = 0 \leq n$

αν $k > m$) και $x_k = 0$ για κάθε $k > n$ (διότι, αν $k > n$ έχουμε $k > m$). Άρα, $x \in F_n$, και αφού το $x \in c_{00}$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα, θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί η ακολουθία (x_k) είναι τελικά μηδενική (άρα, οι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος). Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός. Αν $x \in F_n$ τότε

$$|T(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Όμως, ο T δεν είναι φραγμένος: υποθέτουμε ότι $\|T\| < \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots)$ (με n μονάδες στην αρχή και μηδενικά μετά). Τότε, $\|x_n\|_{\infty} = 1$, άρα

$$\|T\| \geq |T(x_n)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n 1 \right| = n,$$

το οποίο είναι άτοπο (το \mathbb{N} θα ήταν άνω φραγμένο από την $\|T\|$).

28. Έστω $T \in B(X, Y)$ (X είναι χώρος Banach). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T είναι κλειστός υπόχωρος του Y .

Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(T)$ με $y_n \rightarrow y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $y_n = T(x_n)$. Από την υπόθεση, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\alpha} \|T(x_n) - T(x_m)\| = \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\|.$$

Η (y_n) είναι συγκλίνουσα άρα βασική ακολουθία. Από την ανισότητα

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\|, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

συμπεραίνουμε (εξηγήστε γιατί) ότι η (x_n) είναι επίσης βασική. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Ο T είναι συνεχής, άρα $T(x_n) \rightarrow T(x)$. Δηλαδή, $y_n \rightarrow T(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $y = T(x) \in \mathcal{R}(T)$. Συνεπώς, ο $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστό σύνολο (το γεγονός ότι είναι υπόχωρος του Y ισχύει γενικά).

29. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|T(x)\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $T : X \rightarrow T(X)$ είναι 1-1. Αν $x, z \in X$ και $T(x) = T(z)$, τότε

$$0 = \|T(x) - T(z)\| = \|T(x - z)\| \geq m\|x - z\|,$$

άρα $\|x - z\| = 0$ και έπεται ότι $x = z$. Άρα, ο $T : X \rightarrow T(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Έστω $y \in T(X)$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$, και $x = T^{-1}(y)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για το $y = T(x)$, έχουμε

$$\|y\| = \|T(x)\| \geq m\|x\| = m\|T^{-1}(y)\|.$$

Δηλαδή,

$$\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m} \|y\|$$

για κάθε $y \in T(X)$. Έπεται ότι ο $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

30. Έστω X και Y δύο n -διάστατοι χώροι με νόρμα.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει πεπερασμένο $A \subset S_X$ το οποίο είναι δ -δίκτυο για την S_X : δηλαδή, για κάθε $x \in S_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \delta$.

(β) Έστω $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $0 < \delta < \frac{1}{4}$ και κάποιο δ -δίκτυο A της S_X ισχύει το εξής: για κάθε $a \in A$ ισχύει $\frac{1}{1+\delta} \leq \|T(a)\|_Y \leq 1 + \delta$. Αποδείξτε ότι

$$\|T\| \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \quad \text{και} \quad \|T^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta} \right)^{-1}.$$

Υπόδειξη. (α) Η σφαίρα S_X είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X , άρα συμπαγές σύνολο διότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Συνεπώς, η S_X είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Τότε, για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $A \subset S_X$ ώστε

$$S_X \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \delta).$$

Έπεται ότι για κάθε $x \in S_X$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in B(a, \delta)$, δηλαδή $\|x - a\| < \delta$.

(β) Έστω $x \in X$. Υπάρχει $a \in A$ ώστε $\|x - a\| < \delta$, άρα

$$\|T(x) - T(a)\| \leq \|T\| \|x - a\| < \|T\| \delta,$$

και από την υπόθεση παίρνουμε

$$\|T(x)\| \leq \|T(a)\| + \|T(x) - T(a)\| \leq 1 + \delta + \|T\| \delta.$$

Αφού $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in S_X\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|T\| \leq 1 + \delta + \|T\| \delta,$$

απ' όπου παίρνουμε την

$$\|T\| \leq \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Τώρα, για κάθε $x \in S_X$ και για $a \in A$ με $\|x - a\| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T(a) - (T(a) - T(x))\| \geq \|T(a)\| - \|T(a) - T(x)\| \geq \frac{1}{1+\delta} - \|T\| \delta \\ &\geq \frac{1}{1+\delta} - \frac{1+\delta}{1-\delta} \delta. \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι θετική διότι $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Αυτό δείχνει ότι ο T είναι ένα προς ένα και ότι

$$\|T^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta} \right)^{-1}.$$

31. (α) Έστω X χώρος Banach και έστω $T \in B(X, X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \rightarrow X$ με $S_y(x) = y + T(x)$. Αποδείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

(β) Δίνονται $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s, t)f(s)ds$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Υπόδειξη. (α) Το x_0 ορίζεται καλά γιατί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$ συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n(y)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| \cdot \|y\| < +\infty$$

από την υπόθεση. Λόγω συνέχειας του T έχουμε

$$S_y(x_0) = y + T\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)\right) = y + T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{n+1}(y) = y + \sum_{k=1}^{\infty} T^k(y) = x_0,$$

δηλαδή το x_0 είναι σταθερό σημείο της S_y .

Αν τα x_0 και x_1 είναι διαφορετικά σταθερά σημεία της S_y , τότε $y + T(x_0) = x_0$ και $y + T(x_1) = x_1$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$T(x_0 - x_1) = T(x_0) - T(x_1) = x_0 - x_1.$$

Τότε, επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$T^n(x_0 - x_1) = x_0 - x_1$$

για κάθε n , δηλαδή $\|T^n\| \geq 1$ για κάθε n (γιατί:). Αυτό είναι άτοπο αφού από την υπόθεση έχουμε $\|T^n\| \rightarrow 0$. Άρα, η S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

(β) Θεωρούμε τον τελεστή $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ με $(Tf)(t) = \int_0^t K(s, t)f(s) ds$, $0 \leq t \leq 1$. Ελέγξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος: η Tf είναι συνεχής συνάρτηση και ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $S_g : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ με $S_g(f) = g + Tf$. Η εξίσωση του Volterra έχει συνεχή λύση αν η S_g έχει σταθερό σημείο. Από το (α) αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$.

Έστω $M = \max\{|K(s, t)| : 0 \leq s, t \leq 1\}$. Δείχνουμε επαγωγικά ότι: για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|(T^n f)(t)| \leq \frac{M^n}{n!} \|f\|_{\infty} t^n.$$

Το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} |(T^{n+1}f)(t)| &= \left| \int_0^t K(s,t)(T^n f)(s) ds \right| \leq M \int_0^t |(T^n f)(s)| ds \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{n!} \|f\|_\infty \int_0^t s^n ds \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_\infty t^{n+1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T^n\| \leq M^n/n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$.

32. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και ένα προς ένα τελεστής $T : X^* \rightarrow c_0$.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X . Ορίζουμε $T : X^* \rightarrow c_0$ με

$$T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f(x_n)|/n \leq \|f\| \cdot \|x_n\|/n = \|f\|/n \rightarrow 0$, γραμμικός, και για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\|T(f)\|_{c_0} = \sup_n \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \sup_n \frac{\|f\|}{n} = \|f\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$.

Αν $T(f) = T(g)$ για κάποια $f, g \in X^*$, τότε $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε n , και αφού το $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της B_X , έχουμε $f \equiv g$ στην B_X . Άρα, $f = g$ και αυτό δείχνει ότι ο T είναι ένα προς ένα.

33. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \rightarrow X$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της B_X και ορίζουμε $T : \ell_1 \rightarrow X$ με $T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ για $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ο T είναι καλά ορισμένος: αν $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_{\ell_1} < \infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει και το $T(a) \in X$ ορίζεται καλά. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Επίσης, για κάθε $a \in \ell_1$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \leq \|a\|_{\ell_1},$$

άρα

$$\|T(a)\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\| \leq \|a\|_{\ell_1}.$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leq 1$. Μάλιστα ισχύει και $\|T\| \geq \|T(e_n)\| = \|x_n\|$ για κάθε n , άρα $\|T\| = 1$ (αφού η $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ είναι πυκνή στην B_X έχουμε $\sup_n \|x_n\| = 1$ - εξηγήστε γιατί).

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in \frac{1}{2}B_X$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x - x_{k_1}\| < \frac{1}{2}$. Τότε, $2(x - x_{k_1}) \in B_X$ άρα μπορούμε να βρούμε $k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$\|2(x - x_{k_1}) - x_{k_2}\| < \frac{1}{2} \implies \left\| x - \left(x_{k_1} + \frac{1}{2}x_{k_2} \right) \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον $k_2 > k_1$ διότι το σύνολο $B(2(x - x_{k_1}), 1/2) \cap D$ είναι άπειρο (εξηγήστε γιατί). Επαγωγικά, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών ώστε, για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n} \right) \right\| < \frac{1}{2^N}$$

(εξηγήστε το επαγωγικό βήμα). Έπεται ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n} = T(a_x),$$

όπου $a_x = (a_m)_{m=1}^\infty$ είναι η ακολουθία με $a_m = \frac{1}{2^{n-1}}$ αν $m = k_n$ και $a_m = 0$ αν $m \neq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι $a_x \in \ell_1$ αφού $\|a_x\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$).

Αφού $T(\ell_1) \supseteq B_X$ και ο T είναι γραμμικός, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ο T είναι επί.

34. Έστω X γραμμικός χώρος και $g, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με την ιδιότητα $\bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(f_k) \subseteq \text{Ker}(g)$. Τότε, υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $g = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ με

$$T(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

και το γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : T(X) \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$\psi(T(x)) = g(x).$$

Ο $T(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{K}^n και το ψ είναι καλά ορισμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $T(X)$: αν $T(x_1) = T(x_2) \in T(X)$, τότε $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, άρα $x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(f_k)$. Από την υπόθεση, $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(g)$, δηλαδή $g(x_1) = g(x_2)$. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα.

Η ψ επεκτείνεται σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\Psi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε: για κάθε $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\Psi(t_1, \dots, t_n) = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n.$$

Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$g(x) = \psi(T(x)) = \Psi(f_1(x), \dots, f_n(x)) = a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x).$$

Δηλαδή, $g = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$.

35. (Κριτήριο του Schur) Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i, j . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leq b p_j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \leq c p_i.$$

Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T((\xi_i)_i) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right)_i$$

είναι φραγμένος και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ταυτόχρονα ότι ο T ορίζεται καλά και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$. Έστω $x = (\xi_i) \in \ell_2$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{ij} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j \sqrt{a_{ij}}}{\sqrt{p_j}} \sqrt{a_{ij} p_j} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij}}{p_j} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \right), \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij} c p_i}{p_j} = c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \\ &\leq bc \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} = bc \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Από την $\|Tx\|_2^2 \leq bc \|x\|_2^2$ έπεται ότι $\|T\| \leq \sqrt{bc}$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

36. (Ανισότητα του Hilbert) Αν $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left| \sum_{i,j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1} \right| \leq \pi \sum_{i=0}^n x_i^2.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $g_j(x) = 1/[(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}]$ είναι κυρτή για κάθε $j = 0, 1, 2, \dots$, οπότε, για $i = 0, 1, 2, \dots$, έχουμε

$$\frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}$$

(γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i + \frac{1}{2} + j + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i + \frac{1}{2}}} &< \sum_{i=0}^{\infty} \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x + j + \frac{1}{2}) \sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + j + \frac{1}{2}) \sqrt{x}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(υπολογίστε το). Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Schur, με

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j + 1} = \frac{1}{i + \frac{1}{2} + j + \frac{1}{2}}, \quad p_i = \frac{1}{\sqrt{i + \frac{1}{2}}}, \quad b = c = \pi.$$

Θεωρούμε τον τελεστή $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, με

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{i + j + 1} \right)_{i=0}^{\infty}.$$

Αν $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, τότε

$$\left| \sum_{i,j=0}^n \frac{x_i x_j}{i + j + 1} \right| = \langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\|_2 \|x\|_2 \leq \|T\| \cdot \|x\|_2^2 \leq \pi \sum_{i=0}^n x_i^2.$$

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Hahn-Banach

1. Αποδείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Υπόδειξη. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, και $p(x) = |f(x)|$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x + y) = |f(x + y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y).$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \geq 0$, τότε

$$p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| = \lambda p(x).$$

Άρα, το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

2. Αποδείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Υπόδειξη. Έστω $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \geq 0$, ισχύουν οι

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \|x\|,$$

από τις γνωστές ιδιότητες της νόρμας.

3. Έστω p ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο X . Ορίζουμε $Z = \text{span}\{x_0\}$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Αποδείξτε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leq p(x)$, $x \in Z$.

Υπόδειξη. Το f είναι προφανώς γραμμικό, γιατί αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = ax_0, y = bx_0 \in Z$, τότε

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda a + \mu b)x_0) = (\lambda a + \mu b)p(x_0) \\ &= \lambda(ap(x_0)) + \mu(bp(x_0)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Για την ανισότητα $f(x) \leq p(x)$ παρατηρούμε ότι: αν $a \geq 0$, τότε $f(ax_0) = ap(x_0) = p(ax_0)$, ενώ αν $a < 0$, τότε

$$f(ax_0) = -f((-a)x_0) = -p(-ax_0) \leq p(ax_0),$$

αφού κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές ικανοποιεί την $-p(-z) \leq p(z)$.

4. Αποδείξτε ότι $p(x) = \limsup_n \xi_n$, όπου $x = (\xi_n) \in \ell_\infty$ ορίζει ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞ .

Υπόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του \limsup : αν $x \in \ell_\infty$ και $\lambda \geq 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \limsup_n (\lambda x_n) = \lambda \limsup_n x_n = \lambda p(x),$$

και αν $x, y \in \ell_\infty$ τότε

$$p(x + y) = \limsup_n (x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n = p(x) + p(y).$$

5. Έστω X χώρος με νόρμα, και $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $p(0) = 0$ και το p είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε $x_0 \in X$.

(β) Αν $p(x) \geq 0$ έξω από μιά σφαίρα $\{x : \|x\| = r\}$, $r > 0$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. (α) Το p είναι συνεχές στο 0 και $p(0) = 0$, άρα για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|z\| < \delta \implies |p(z)| < \varepsilon.$$

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\|x - x_0\| < \delta$, τότε και $\|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta$, οπότε

$$|p(x - x_0)| < \varepsilon, \quad |p(x_0 - x)| < \varepsilon.$$

Από την υποπροσθετικότητα του p ,

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0) \leq |p(x - x_0)| < \varepsilon$$

και

$$p(x_0) - p(x) \leq p(x_0 - x) \leq |p(x_0 - x)| < \varepsilon,$$

άρα $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$. Δηλαδή, το p είναι συνεχές στο x_0 .

(β) Έστω $r > 0$, και ας υποθέσουμε ότι για κάποιο x_0 με $\|x_0\| = r$ ισχύει $p(x_0) < 0$. Τότε,

$$p(2x_0) = p(x_0 + x_0) \leq p(x_0) + p(x_0) = 2p(x_0) < 0.$$

Όμως, $\|2x_0\| = 2r \neq r$, άρα $2x_0 \notin \{x : \|x\| = r\}$. Από την υπόθεσή μας, $p(2x_0) \geq 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $p(x) \geq 0$ και στην $\{x : \|x\| = r\}$.

Αν $r = 0$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \notin 0$. Όμως, $p(0) = p(0 + 0) \leq 2p(0)$ άρα $p(0) \geq 0$. Δηλαδή, $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

6. Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ συνάρτηση τέτοια ώστε (α) $p(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, και (β) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι p είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο $B = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$ είναι κυρτό.

Υπόδειξη. Έστω ότι η p είναι νόρμα: τότε ικανοποιεί και την $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω $x, y \in B$ και $t \in (0, 1)$. Έχουμε

$$p((1-t)x + ty) \leq p((1-t)x) + p(ty) = (1-t)p(x) + tp(y) \leq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1,$$

άρα $(1-t)x + ty \in B$. Έπεται ότι το B είναι κυρτό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το B είναι κυρτό. Από τις υποθέσεις της άσκησης, η p ικανοποιεί όλες οι ιδιότητες της νόρμας εκτός από την τριγωνική ανισότητα. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι αν $x, y \in X$ τότε $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (αν για παράδειγμα $x = 0$ τότε η $p(0+y) \leq p(0) + p(y)$ ισχύει ως ισότητα αφού $0+y = y$ και $p(0) = 0$). Τότε, $p(x) > 0$ και $p(y) > 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{x}{p(x)} \in B$ και $\frac{y}{p(y)} \in B$. Για παράδειγμα,

$$p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = \frac{1}{p(x)} \cdot p(x) = 1$$

(εφαρμόζουμε την ιδιότητα (β) με $\lambda = \frac{1}{p(x)} > 0$). Άρα, $\frac{x}{p(x)} \in B$ από τον ορισμό του B .

Επιλέγουμε $t = \frac{p(y)}{p(x)+p(y)} \in (0, 1)$, οπότε $1-t = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$. Αφού το B είναι κυρτό, έχουμε

$$(1-t)\frac{x}{p(x)} + t\frac{y}{p(y)} \in B \implies \frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y) \in B.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{p(x)+p(y)}p(x+y) = p\left(\frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y)\right) \leq 1,$$

δηλαδή $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

7. Έστω X γραμμικός χώρος και $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Υπόδειξη. Παίρνουμε τυχόν $x_0 \neq 0$ στον X . Θεωρούμε τον $Z = \text{span}\{x_0\}$, και ορίζουμε $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(ax_0) = ap(x_0)$. Από την Άσκηση 3, το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z , και ικανοποιεί την $g(z) \leq p(z)$ στον Z .

Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, που επεκτείνει το g , και ικανοποιεί την

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Τέλος,

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) \implies f(x) \geq -p(-x), \quad x \in X.$$

Δηλαδή, $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

8. Έστω X γραμμικός χώρος και $p_1, p_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x),$$

για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η p είναι ημινόρμα. Ο $W = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times X$. Αν ορίσουμε $\psi_0 : W \rightarrow \mathbb{K}$ με $\psi_0(x, x) = f(x)$, τότε το ψ_0 είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον W και φράσσεται από την p : έχουμε

$$|\psi_0(x, x)| = |f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x) = p(x, x)$$

για κάθε $(x, x) \in W$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, το ψ_0 επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$|\psi(x_1, x_2)| \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in X \times X$. Ορίζουμε $f_1 : X \rightarrow \mathbb{K}$ με $f_1(x) = \psi(x, 0)$ και $f_2 : X \rightarrow \mathbb{K}$ με $f_2(x) = \psi(0, x)$. Τα f_1, f_2 είναι γραμμικά συναρτησοειδή και

$$f(x) = \psi_0(x, x) = \psi(x, x) = \psi(x, 0) + \psi(0, x) = f_1(x) + f_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f = f_1 + f_2$. Επίσης, $|f_1(x)| = |\psi(x, 0)| \leq p(x, 0) = p_1(x) + p_2(0) = p_1(x)$ για κάθε $x \in X$ και, όμοια, $|f_2(x)| \leq p_2(x)$ για κάθε $x \in X$.

9. Αποδείξτε ότι αν ο X έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο X^* έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Υπόδειξη. Έστω x_1, \dots, x_n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X . Ξέρουμε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών a_1, \dots, a_n , υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_j) = a_j$, $j = 1, \dots, n$.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f_1, \dots, f_n \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Τα f_1, \dots, f_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \dots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j \leq n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \dots + t_n f_n)(x_j) = t_1 f_1(x_j) + \dots + t_n f_n(x_j) = t_j \cdot 1 = t_j.$$

Άρα, $t_1 = \dots = t_n = 0$.

10. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X , τέτοιος ώστε: αν $f \in X^*$ και $f|_Y \equiv 0$, τότε $f \equiv 0$. Αποδείξτε ότι $Y = X$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X \setminus Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός και $x \notin Y$, υπάρχει $f \in X^*$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$f(y) = 0, \quad y \in Y, \quad \|f\| = 1, \quad f(x) \neq 0.$$

(βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η υπόθεση μας λέει ότι

$$f|_Y \equiv 0 \implies f \equiv 0.$$

Άρα, $Y = X$.

11. Έστω Y υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X . Ορίζουμε

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \text{Ker}(f)\}.$$

Αποδείξτε ότι $\bar{Y} = \bigcap \{\text{Ker}(f) : f \in A\}$.

Υπόδειξη. Έστω $y \in \bar{Y}$. Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $y_n \rightarrow y$. Για κάθε $f \in A$ έχουμε $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(y) = \lim f(y_n) = 0.$$

Δηλαδή, $y \in \text{Ker}(f)$. Αφού το $f \in A$ ήταν τυχόν, $y \in \bigcap \{\text{Ker}(f) : f \in A\}$. Αφού το $y \in \bar{Y}$ ήταν τυχόν,

$$\bar{Y} \subseteq \bigcap \{\text{Ker}(f) : f \in A\}.$$

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $z \in \bigcap \{\text{Ker}(f) : f \in A\} \setminus \bar{Y}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, $g(z) \neq 0$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in \bar{Y}$. Τότε, $g \in A$ και $z \notin \text{Ker}(g)$, το οποίο είναι άτοπο.

12. Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι: $x \in \overline{\text{span}(A)}$ αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f(x) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $x \in \overline{\text{span}(A)}$. Έστω $f \in X^*$ με $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$. Λόγω γραμμικότητας του f συμπεραίνουμε ότι $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \text{span}(A)$, και λόγω συνέχειας του f συμπεραίνουμε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \overline{\text{span}(A)}$ (εξηγήστε με την αρχή της μεταφοράς ή χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο $\text{Ker}(f)$ είναι κλειστός και περιέχει τον $\text{span}(A)$). Ειδικότερα, $f(x) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$ ισχύει $f(x) = 0$ και ότι $x \notin \overline{\text{span}(A)}$. Ειδικότερα, $x \neq 0$ (γιατί;). Από βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $g \in X^*$ τέτοιο ώστε $g|_{\overline{\text{span}(A)}} \equiv 0$, $\|g\| = 1$ και $g(x) = \|x\| > 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g|_A \equiv 0$ και $g(x) \neq 0$.

13. Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X . Αποδείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ με $f|_Y \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X . Έστω $f \in X^*$ με $f|_Y \equiv 0$. Τότε, $Y \subseteq \text{Ker}(f)$ και αφού ο $\text{Ker}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X συμπεραίνουμε ότι $X = \bar{Y} \subseteq \text{Ker}(f)$, δηλαδή $\text{Ker}(f) = X$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f \equiv 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f|_Y \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$. Έστω ότι ο Y δεν είναι πυκνός υπόχωρος του X . Τότε, ο \bar{Y} είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X . Από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \neq 0$, $f \in X^*$ ώστε $f|_{\bar{Y}} \equiv 0$. Αυτό είναι άτοπο (από την υπόθεση θα είχαμε $f \equiv 0$).

14. Έστω X χώρος με νόρμα, και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^* . Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\liminf_n f_n(x) \leq f(x) \leq \limsup_n f_n(x), \quad x \in X.$$

Υπόδειξη. Το $p(x) = \limsup f_n(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον X . Αν $x, y \in X$, τότε $p(x+y) = \limsup f_n(x+y) = \limsup [f_n(x) + f_n(y)] \leq \limsup f_n(x) + \limsup f_n(y) = p(x) + p(y)$, και αν $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda x) = \limsup f_n(\lambda x) = \limsup [\lambda f_n(x)] = \lambda \limsup f_n(x) = \lambda p(x).$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση 7: υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\liminf f_n(x) = -\limsup f_n(-x) \leq f(x) \leq \limsup f_n(x), \quad x \in X.$$

15. Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X και $f \in Y^*$. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A(f) := \{g \in X^* : g|_Y = f \text{ και } \|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}\}$$

είναι μη κενό και κυρτό.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Hahn-Banach γνωρίζουμε ότι υπάρχει $g_0 \in X^*$ τέτοιο ώστε $g_0|_Y = f$ και $\|g_0\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Τότε $g_0 \in A(f)$, άρα το $A(f)$ είναι μη κενό.

Έστω $g_1, g_2 \in A(f)$ και $t \in (0, 1)$. Αφού ο X^* είναι διανυσματικός χώρος, έχουμε $(1-t)g_1 + tg_2 \in X^*$. Επίσης, για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} |(1-t)g_1(x) + tg_2(x)| &\leq (1-t)|g_1(x)| + t|g_2(x)| \leq ((1-t)\|g_1\|_{X^*} + t\|g_2\|_{X^*})\|x\| \\ &= ((1-t)\|f\|_{Y^*} + t\|f\|_{Y^*})\|x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$(1-t)g_1 + tg_2|_Y = (1-t)g_1|_Y + tg_2|_Y = (1-t)f + tf = f,$$

και

$$\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} = \sup_{x \in S_X} |(1-t)g_1(x) + tg_2(x)| \geq \sup_{y \in S_Y} |(1-t)g_1(y) + tg_2(y)| = \sup_{y \in S_Y} |f(y)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Άρα, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$, και έπεται ότι $(1-t)g_1 + tg_2 \in A(f)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $A(f)$ είναι κυρτό.

16. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής, αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < +\infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι $\|T\| = M$.

Υπόδειξη. Το δεξιό μέλος ισούται με

$$M = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} f(Tx) \right) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y,$$

από το θεώρημα Hahn-Banach (για το $Tx \in Y$). Όμως, ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < +\infty,$$

και τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|$.

17. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα, και $X \neq \{0\}$. Αποδείξτε ότι αν ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης, τότε ο Y είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$. Έστω (y_n) βασική ακολουθία στον Y . Ορίζουμε $T_n : X \rightarrow Y$ με $T_n(x) = f(x)y_n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\|_Y = \left(\sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| \right) \cdot \|y_n - y_m\| \\ &= \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

δηλαδή, η (T_n) είναι βασική ακολουθία στον $B(X, Y)$. Αφού ο $B(X, Y)$ έχει υποτεθεί πλήρης, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow Y$ τέτοιος ώστε $T_n \rightarrow T$, δηλαδή

$$(*) \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x)y_n), \quad x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $y = T(x)$, έχουμε $y_n \rightarrow y$ από την (*).

18. Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \dots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\|_{X^*} = 1 \right\} = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : |a_i| \leq 1 \right\}.$$

Υπόδειξη. Συμβολίζουμε με A, B και C τα τρία supremum στην εκφώνηση της άσκησης.

Για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| = x^* \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) \leq \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| \leq B.$$

Συνεπώς, $A \leq B$.

Για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$ μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_i = \pm 1$ ώστε $|x^*(x_i)| = \varepsilon_i x^*(x_i)$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) = x^* \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right) \leq \|x^*\|_{X^*} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \leq A.$$

Συνεπώς, $B \leq A$ και έχουμε αποδείξει ότι $A = B$.

Η ανισότητα $A \leq C$ είναι προφανής αν παρατηρήσουμε ότι

$$\left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} \subseteq \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : |a_i| \leq 1 \right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τη συνάρτηση $G : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(a_1, \dots, a_n) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Παρατηρούμε ότι η G είναι συνεχής και κυρτή (εξηγήστε τις λεπτομέρειες), άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια κορυφή $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, του κύβου $[-1, 1]^n$ (για μια αυστηρή απόδειξη, δείξτε πρώτα ότι κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in [-1, 1]^n$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός σημείων της μορφής $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την κυρτότητα της f). Δηλαδή, για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in [-1, 1]^n$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = G(a_1, \dots, a_n) \leq \sup\{G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = \pm 1\} = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} = A.$$

Συνεπώς, $C \leq A$.

19. Έστω Y πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X . Αποδείξτε ότι οι X^* και Y^* είναι ισομετρικά ισομορφικοί.

Υπόδειξη. Αφού ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X , γνωρίζουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ (και γενικότερα, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Y \rightarrow Z$, όπου Z χώρος με νόρμα) έχει μοναδική επέκταση σε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $g : X \rightarrow \mathbb{K}$. Επιπλέον, λόγω της πυκνότητας του Y στον X , βλέπουμε εύκολα ότι $\|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ (για παράδειγμα, δείξτε πρώτα ότι η B_Y είναι πυκνή στην B_X , οπότε $\|g\|_{X^*} = \sup\{\|g(x)\| : x \in B_X\} = \sup\{\|g(x)\| : x \in B_Y\} = \sup\{\|f(x)\| : x \in B_Y\} = \|f\|_{Y^*}$).

Ορίζουμε $T : Y^* \rightarrow X^*$ με $T(f) = g$, όπου g η μοναδική αυτή επέκταση του f . Αποδεικνύουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $f_1, f_2 \in Y^*$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, τότε $g := t_1 T(f_1) + t_2 T(f_2) \in X^*$ και $g|_Y = t_1 T(f_1)|_Y + t_2 T(f_2)|_Y = t_1 f_1 + t_2 f_2$. Αφού $T(t_1 f_1 + t_2 f_2)|_Y = t_1 f_1 + t_2 f_2$, λόγω μοναδικότητας της επέκτασης συμπεραίνουμε ότι $T(t_1 f_1 + t_2 f_2) = t_1 T(f_1) + t_2 T(f_2)$.

Από την $\|T(f)\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ έχουμε ότι ο T είναι ισομετρία.

Τέλος, ο T είναι επί: αν $g \in X^*$ τότε $g|_Y \in Y^*$ και το g είναι η μοναδική φραγμένη επέκταση του f . Άρα, $g = T(f)$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

20. Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $E_n = \overline{\text{span}}\{x_k : k \neq n\}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει ακολουθία (f_n) στον X^* ώστε $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.

(β) Για κάθε n ισχύει $x_n \notin E_n$.

Υπόδειξη. (α) \implies (β): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_k \in \text{Ker}(f_n)$ για κάθε $k \neq n$ (από την υπόθεση έχουμε $f_n(x_k) = 0$ αν $k \neq n$) και αφού ο $\text{Ker}(f_n)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X έπεται ότι $\text{span}\{x_k : k \neq n\} \subseteq \text{Ker}(f_n)$. Όμως, $f_n \in X^*$ άρα ο $\text{Ker}(f_n)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X . Άρα, $E_n = \overline{\text{span}\{x_k : k \neq n\}} \subseteq \text{Ker}(f_n)$. Δηλαδή, $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in E_n$. Αφού $f_n(x_n) = 1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_n \notin E_n$.

(β) \implies (α): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο E_n είναι κλειστός υπόχωρος του X και $x_n \notin E_n$, από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x_n) \neq 0$ και $f_n|_{E_n} \equiv 0$. Πολλαπλασιάζοντας, αν χρειαστεί, το f_n με κατάλληλο $\lambda \neq 0$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n(x_n) = 1$. Αφού $x_k \in E_n$ για κάθε $k \neq n$, έχουμε $f_n(x_k) = 0$ για κάθε $k \neq n$. Δηλαδή, $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία (f_n) που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ικανοποιεί το (α).

21. Έστω $X \neq \{0\}$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και (x_n) πυκνή ακολουθία στον X . Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (f_n) στον X^* με $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$ για κάθε n . Αποδείξτε επίσης ότι κάθε τέτοια ακολουθία διαχωρίζει τα σημεία του X και ικανοποιεί την $\sup_n |f_n(x)| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$ είναι γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach. Για να δείξουμε ότι (f_n) διαχωρίζει τα σημεία του X αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $0 \neq z \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(z) \neq 0$ (κατόπιν, αν μας δώσουν $x, y \in X$ με $x \neq y$ θεωρούμε το $z = x - y \neq 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_n(x) - f_n(y) = f_n(x - y) = f_n(z) \neq 0$, δηλαδή $f_n(x) \neq f_n(y)$).

Έστω $z \neq 0$ και ας υποθέσουμε ότι $f_n(z) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|z - x_n\| < \frac{1}{2}\|z\|$. Τότε,

$$\|x_n\| = |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(z)| = |f_n(x_n - z)| \leq \|f_n\| \cdot \|x_n - z\| < \frac{1}{2}\|z\|.$$

Όμως,

$$\|x_n\| \geq \|z\| - \|x_n - z\| > \|z\| - \frac{1}{2}\|z\|$$

και κατάλίγουμε σε άτοπο.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε $x \neq 0$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|x\|$ επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_N - x\| < \varepsilon$. Όπως πριν, έχουμε $\|x_N\| > \|x\| - \varepsilon$ και

$$\|x\| - \varepsilon < \|x_N\| = |f_N(x_N)| \leq |f_N(x)| + |f_N(x_N - x)| \leq |f_N(x)| + \|f_N\| \cdot \|x_N - x\| < |f_N(x)| + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\sup_n |f_n(x)| \geq |f_N(x)| > \|x\| - 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|x\|/2)$ ήταν τυχόν, έχουμε $\sup_n |f_n(x)| \geq \|x\|$.

Η αντίστροφη ανισότητα είναι απλή: για κάθε n έχουμε $|f_n(x)| \leq \|f_n\| \cdot \|x\| = \|x\|$, άρα $\sup_n |f_n(x)| \leq \|x\|$.

22. Έστω Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του χώρου Banach X . Αποδείξτε ότι:

- (α) Η απεικόνιση $T : X^* \rightarrow Y^*$ με $T(f) = f|_Y$ είναι γραμμική, φραγμένη και επί του Y^* .
 (β) Υπάρχει μια 1-1 (όχι αναγκαστικά γραμμική) απεικόνιση $\varphi : Y^* \rightarrow X^*$ με $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$.
 (γ) Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε και ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη. (α) Αν $f \in X^*$ τότε η $T(f) = f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{K}$ είναι γραμμική απεικόνιση και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$|(Tf)(y)| = |f(y)| \leq \|f\|_{X^*} \|y\|,$$

δηλαδή $T(f) \in Y^*$ και $\|T(f)\|_{Y^*} \leq \|f\|_{X^*}$. Επίσης, αν $f, g \in X^*$ και $a, b \in \mathbb{K}$ τότε

$$T(af + bg) = af + bg|_Y = af|_Y + bg|_Y = aT(f) + bT(g),$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leq 1$. Για να δείξουμε ότι ο T είναι επί, θεωρούμε $g \in Y^*$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f|_Y = g$. Τότε, $T(f) = g$.

(β) Για κάθε $y^* \in Y^*$ επιλέγουμε $f_{y^*} \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_{y^*}|_Y = y^*$ και $\|f_{y^*}\| = \|y^*\|$ (θεώρημα Hahn-Banach) και ορίζουμε $\varphi(y^*) = f_{y^*}$. Τότε, $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$. Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι 1-1: έστω $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ με $\varphi(y_1^*) = \varphi(y_2^*)$. Τότε,

$$y_1^* = \varphi(y_1^*)|_Y = \varphi(y_2^*)|_Y = y_2^*.$$

Άρα, η φ είναι 1-1.

(γ) Έστω $D := \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^* . Ορίζουμε $y_n^* = x_n^*|_Y \in Y^*$ και θα δείξουμε ότι το $E := \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y^* .

Έστω $y^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*|_Y = y^*$. Από την πυκνότητα του D στον X^* υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^* - x_n^*\|_{X^*} < \varepsilon$. Τότε, $(x^* - x_n^*)|_Y = y^* - y_n^*$ και

$$\begin{aligned} \|y^* - y_n^*\|_{Y^*} &= \sup_{x \in B_Y} |y^*(x) - y_n^*(x)| = \sup_{x \in B_Y} |x^*(x) - x_n^*(x)| \leq \sup_{x \in B_X} |x^*(x) - x_n^*(x)| \\ &= \|x^* - x_n^*\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $y_n^* \in E$, βλέπουμε ότι $y^* \in \bar{E}$. Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y^* = \bar{E}$. Αφού το E είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του Y^* , ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

23. Έστω Y μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X . Αποδείξτε ότι:

- (α) Ο $T : X^* \rightarrow Y^*$ με $T(f) = f|_Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.
- (β) $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, $\|T\| = 1$ και ο T είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1 αν ο Y είναι κλειστός.
- (γ) Αν ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X τότε ο T είναι ισομετρία (δείξτε πρώτα ότι η B_Y είναι πυκνό υποσύνολο της B_X).

Υπόδειξη. Όταν λέμε ότι ο Y είναι μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του X εννοούμε ότι $Y \neq \{0\}$ και $Y \neq X$.

(α) Το είδαμε στο (α) της προηγούμενης άσκησης (Άσκηση 22).

(β) Πάλι στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι $\|T(f)\|_{Y^*} \leq \|f\|_{X^*}$ για κάθε $f \in X^*$. Άρα, $\|T\| \leq 1$ και $T(B_{X^*}) \subseteq B_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αν $g \in B_{Y^*} \setminus \{0\}$ υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f|_Y = g$ και $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*} \leq 1$ (θεώρημα Hahn-Banach). Άρα, $g = T(f) \in T(B_{X^*})$, το οποίο αποδεικνύει ότι $B_{Y^*} \subseteq T(B_{X^*})$. Αυτό δείχνει και ότι $\|T\| \geq \frac{\|f\|_{X^*}}{\|g\|_{Y^*}} = 1$, δηλαδή $\|T\| = 1$. Έχουμε τώρα δείξει ότι $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι επί.

Έστω ότι ο $Y \neq \{0\}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X . Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f \neq 0$ και $f|_Y \equiv 0$. Τότε, $T(f) = T(0) = 0$ ενώ $f \neq 0$. Άρα, ο T δεν είναι 1-1.

(γ) Έστω ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X . Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{B_Y} = B_X$: θεωρούμε $x \neq 0$ με $\|x\| < 1$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ βρίσκουμε $y \in Y$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$. Τότε,

$$\|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| < \|x\| + \varepsilon < 1,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap B_Y \neq \emptyset$. Άρα, $x \in \overline{B_Y}$. Αυτό δείχνει ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα $B(0, 1)$ του X περιέχεται στην $\overline{B_Y}$, άρα $B_X = \overline{B(0, 1)} \subseteq \overline{B_Y}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι απλός: έχουμε $B_Y \subseteq B_X$, άρα $\overline{B_Y} \subseteq \overline{B_X} = B_X$.

Τώρα, για κάθε $f \in X^{\text{ast}}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\|T(f)\|_{Y^*} = \sup\{|(Tf)(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|_{X^*},$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε τη συνέχεια της f και το γεγονός ότι $\overline{B_Y} = B_X$ (εξηγήστε γιατί τα δύο supremum είναι ίσα).

24. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική ισομετρία $T : X \rightarrow \ell_\infty$.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_X . Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$f_n(x_n) = \|f_n\| = 1.$$

Ορίζουμε $T : X \rightarrow \ell_\infty$ με

$$T(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f_n(x)| \leq \|x\|$ για κάθε n , γραμμικός, και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| \leq \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in S_X$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x - x_n\| < \varepsilon$, οπότε $|f_n(x) - f_n(x_n)| \leq \|f_n\| \cdot \|x - x_n\| < \varepsilon$, άρα

$$|f_n(x)| > |f_n(x_n)| - \varepsilon = 1 - \varepsilon,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| > 1 - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T(x)\| = 1$ για κάθε $x \in S_X$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι ισομετρία.

25. Έστω X χώρος Banach, (x_i) ακολουθία στον X και (c_i) ακολουθία στο \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| \leq M \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. (α) \implies (β): Έστω $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Τότε,

$$f \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i,$$

άρα

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| = \left| f \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \right| \leq \|f\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|,$$

δηλαδή ισχύει το (β) με $M = \|f\|$.

(β) \implies (α): Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \text{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ του X . Κάθε $x \in Y$ γράφεται (όχι αναγκαστικά μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιους $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Παρατηρούμε ότι αν το ίδιο x γράφεται και στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$, τότε αν για παράδειγμα $m > n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) c_i + \sum_{i=n+1}^m \beta_i c_i \right| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) x_i + \sum_{i=n+1}^m \beta_i x_i \right\| \\ &= M \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| = M \|x - x\| = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $\sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$. Όμοια ελέγχουμε ότι αυτό ισχύει και αν $m < n$ ή $m = n$. Έπεται ότι η σύναρτηση $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$f_0(x) = f_0 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i,$$

όπου $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, είναι καλά ορισμένη. Παρατηρήστε ότι $f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ εξηγήστε γιατί). Από τον ορισμό της f_0 μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι είναι γραμμική. Τέλος, από την υπόθεση έχουμε ότι αν $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in Y$ τότε

$$|f_0(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| = M \|x\|,$$

δηλαδή $f_0 \in Y^*$ και $\|f_0\|_{Y^*} \leq M$. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f_0 σε κάποιο $f \in X^*$ με $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} \leq M$.

Αφού $x_i \in Y$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε $f(x_i) = f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

26. Έστω X χώρος με νόρμα και W γραμμικός υπόχωρος του X . Υποθέτουμε ότι μια νόρμα $|\cdot|$ στον W είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στον W . Να δείξετε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X , ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$, της οποίας ο περιορισμός στον W να είναι η $|\cdot|$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε $a|x| \leq \|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in W$.

Για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$ έχουμε $|f(x)| \leq |x| \leq \frac{1}{a}\|x\|$ δηλαδή το f είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο στον W και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επιλέξουμε επέκταση $G_f : (X, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{K}$ με $\|G_f\| \leq 1/a$. Ορίζουμε $|\cdot|'$ στον X με

$$|x|' = \max \left\{ \frac{1}{b}\|x\|, \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} \right\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|\cdot|'$ είναι νόρμα στον X . Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\|x\| \leq b|x|'$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, αν $\|x\| = 1$ τότε $|G_f(x)| \leq \frac{1}{a}$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$, οπότε $|x|' \leq \frac{1}{a}$. Έπεται ότι

$$a|x|' \leq \|x\| \leq b|x|', \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $x \in W$. Έχουμε $\frac{1}{b}\|x\| \leq |x|$ και $|G_f(x)| = |f(x)| \leq |x|$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$. Άρα, $|x|' \leq |x|$. Όμως,

$$|x|' \geq \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = \sup\{|f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = |x|.$$

Άρα, τελικά, $|x| = |x|'$ για κάθε $x \in W$.

27. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Αποδείξτε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.

Υπόδειξη. Η $f \circ T : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμική σαν σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, και για κάθε $x \in X$,

$$|[T^*(f)](x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

δηλαδή $T^*(f) \in X^*$ και $\|T^*(f)\| \leq \|T\| \cdot \|f\|$. Αυτό δείχνει ότι ο T^* ορίζεται καλά, και

$$(*) \quad \|T^*\| \leq \|T\|.$$

Η γραμμικότητα του T^* ελέγχεται εύκολα:

$$T^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda(f \circ T) + \mu(g \circ T) = \lambda T^*(f) + \mu T^*(g).$$

Για την ισότητα των $\|T\|$ και $\|T^*\|$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach: Έστω $x \in X$. Τότε, $Tx \in Y$ και υπάρχει $f \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $f(y) = \|y\| = \|Tx\|$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|Tx\| = f(y) &= (f \circ T)(x) = [T^*(f)](x) \leq \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T\| \leq \|T^*\|$, και από την (*) έχουμε το ζητούμενο.

28. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο T είναι ισομορφισμός τότε ο T^* είναι ισομορφισμός.

(β) Οι χώροι c_0 και $\mathcal{C}[0, 1]$ δεν είναι ισομορφικοί.

Υπόδειξη. (α) Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$. Έστω ότι $T^*(y_1^*) = T^*(y_2^*)$ για κάποια $y_1^*, y_2^* \in Y^*$. Τότε, $y_1^*(Tx) = y_2^*(Tx)$ για κάθε $x \in X$, και αφού ο $T : X \rightarrow Y$ είναι επί έπεται ότι $y_1^*(y) = y_2^*(y)$ για κάθε $y \in Y$, δηλαδή $y_1^* = y_2^*$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T^* είναι 1-1.

Δείχνουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y^* : Y \rightarrow \mathbb{K}$ με $y^*(y) = x^*(T^{-1}(y))$. Αφού ο T είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι ο $T^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι συνεχής απεικόνιση, άρα η $y^* = x^* \circ T^{-1}$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, δηλαδή $y^* \in Y^*$. Παρατηρούμε ότι

$$T^*(y^*) = y^* \circ T = x^* \circ T^{-1} \circ T = x^*.$$

Άρα $x^* \in T^*(Y^*)$ και αφού το $x^* \in X^*$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι ο T^* είναι επί.

Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(T^*)^{-1}$ είναι φραγμένος. Από το γεγονός ότι ο T είναι ισομορφισμός έχουμε

$$\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\| \implies T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\| B_X \implies B_Y \subseteq \|T^{-1}\| T(B_X).$$

Έπεται ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει

$$\|T^*(y^*)\|_{X^*} = \sup\{|y^*(Tx)| : x \in B_X\} \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \sup\{|y^*(y)| : \|y\| \leq 1\} = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|y^*\|_{Y^*}.$$

Ισοδύναμα, αφού ο T^* είναι επί, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\|(T^*)^{-1}(x^*)\|_{Y^*} \leq \|T^{-1}\| \|x^*\|_{X^*},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $(T^*)^{-1} : X^* \rightarrow Y^*$ είναι φραγμένος. Άρα, ο T^* είναι ισομορφισμός.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : c_0 \rightarrow \mathcal{C}[0,1]$. Τότε, ο $T^* : (\mathcal{C}[0,1])^* \rightarrow c_0^*$ είναι ισομορφισμός, από το (α), δηλαδή οι $(\mathcal{C}[0,1])^*$ και c_0^* είναι ισομορφικοί. Γνωρίζουμε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_1 , ο οποίος είναι διαχωρίσιμος, άρα ο c_0^* είναι διαχωρίσιμος. Έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ είναι διαχωρίσιμος.

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $t \in [0,1]$ θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\delta_t : \mathcal{C}[0,1] \rightarrow \mathbb{K}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε δ_t είναι φραγμένο και ότι $\|\delta_t\| = 1$. Επίσης, αν $t, s \in [0,1]$ και $t \neq s$ τότε

$$\|\delta_t - \delta_s\| = \sup\{|\delta_t(f) - \delta_s(f)| : \|f\| \leq 1\} = \sup\{|f(t) - f(s)| : \|f\| \leq 1\} = 2,$$

διότι μπορούμε να ορίσουμε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(s) = 1$, $f(t) = -1$ και $\|f\| = 1$ (δώστε παράδειγμα). Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν υπεραριθμίσια το πλήθος σημεία στη μοναδιαία σφαίρα του $(\mathcal{C}[0,1])^*$ που ανά δύο έχουν απόσταση ίση με 2, και από αυτό γνωρίζουμε ότι έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

29. Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \dots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$ -δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $j = 1, \dots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^k \text{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς,

αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^k \text{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \dots = y_k^*(x) = 0.$$

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \|y + \lambda x\| &\geq \|y_j + \lambda x\| - \|y - y_j\| \geq \|y_j + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq y_j^*(y_j + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έπεται το συμπέρασμα για κάθε $y \in F$: Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $0 \neq y \in F$, τότε $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \frac{y}{\|y\|} + \lambda \frac{x}{\|y\|} \right\|,$$

δηλαδή $\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$.

30. Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

- (α) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε $\dim(X^*) = n$.
- (β) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε ο X είναι αυτοπαθής.
- (γ) Αν ο X είναι απειροδιάστατος τότε ο X^* είναι απειροδιάστατος.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε μια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του X και τα γραμμικά συναρτησοειδή $f_k : X \rightarrow \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$ με

$$f_k(x) = f_k \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = a_i.$$

Κάθε $f_k \in X^*$ διότι $\dim(X) < \infty$. Επίσης, αν $f \in X^*$ και αν θέσουμε $t_i = f(e_i)$, για κάθε $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in X$ έχουμε

$$f(x) = f \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n t_i f_i(x),$$

δηλαδή $f = \sum_{i=1}^n t_i f_i \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $X^* = \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

Επίσης, τα f_1, \dots, f_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \dots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \dots + t_n f_n)(e_i) = \sum_{k=1}^n t_k f_k(e_i) = t_i,$$

διότι $f_k(e_i) = 0$ αν $k \neq i$ και $f_i(e_i) = 1$.

Δείξαμε ότι τα f_1, \dots, f_n είναι βάση του X^* , άρα $\dim(X^*) = n$.

(β) Θεωρούμε τη φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \rightarrow X^{**}$. Γνωρίζουμε ότι η τ είναι γραμμική ισομετρία, άρα είναι 1-1. Από το (α) έχουμε $\dim(X^*) = n$, άρα πάλι από το (α) παίρνουμε $\dim(X^{**}) = \dim((X^*)^*) = \dim(X^*) = n$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X) < \infty$, άρα η τ είναι επί. Συνεπώς, ο X είναι αυτοπαθής.

(γ) Έστω ότι $\dim(X^*) = n < \infty$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X^*) = n < \infty$. Όμως, η $\tau : X \rightarrow \tau(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $\tau(X)$ είναι υπόχωρος του X^{**} , άρα $\dim(X) = \dim(\tau(X)) \leq \dim(X^{**}) < \infty$.

31. Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι αυτοπαθής και Y είναι κλειστός υπόχωρος του X τότε ο Y είναι αυτοπαθής.

(β) Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \rightarrow X^{**}$ είναι επί και πρέπει να δείξουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau_1 : Y \rightarrow Y^{**}$ είναι επί. Έστω $y^{**} : Y^* \rightarrow \mathbb{K}$ στον Y^{**} . Ορίζουμε $x^{**} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y).$$

Το x^{**} είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον X^* (ελέγξτε το) και

$$\begin{aligned} \sup\{|x^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\} &= \sup\{|y^{**}(x^*|_Y)| : \|x^*\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|y^{**}(y^*)| : \|y^*\| \leq 1\} = \|y^{**}\|, \end{aligned}$$

(για τη μεσαία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $\|x^*\| \leq 1$ τότε $\|x^*|_Y\| \leq 1$, άρα $\{x^*|_Y : \|x^*\| \leq 1\} \subseteq \{y^* : \|y^*\| \leq 1\}$). Άρα, $x^{**} \in X^{**}$.

Αφού ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Δηλαδή, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y).$$

Θα δείξουμε ότι $x \in Y$. Αν $x \notin Y$ τότε, αφού ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X , υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*|_Y \equiv 0$ και $x^*(x) \neq 0$. Τότε, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι

$$0 = y^{**}(x^*|_Y) = x^*(x) \neq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x) = y^{**}$. Έστω $y^* \in Y^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*|_Y = y^*$. Γράφουμε

$$[\tau_1(x)](y^*) = y^*(x) = x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y) = y^{**}(y^*).$$

Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\tau_1(x) = y^{**}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι κάθε $y^{**} \in Y^{**}$ γραφεται ως $y^{**} = \tau_1(x)$ για κάποιο $x \in Y$. Άρα, $\tau_1(Y) = Y^{**}$, δηλαδή ο Y είναι αυτοπαθής.

(β) Έστω $\tau : X \rightarrow X^{**}$ και $\tau_1 : X^* \rightarrow X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tau(X) = X^{**}$. Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$. Ζητάμε $x_0^* \in X^*$ ώστε $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Ορίζουμε το x_0^* ως εξής: αν $x \in X$ τότε $\tau(x) \in X^{**}$, οπότε θέτουμε

$$x_0^*(x) := (x_0^{***})(\tau(x)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το x_0^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αφού

$$|x_0^*(x)| = |(x_0^{***})(\tau(x))| \leq \|x_0^{***}\| \cdot \|\tau(x)\| = \|x_0^{***}\| \cdot \|x\|,$$

βλέπουμε ότι $x_0^* \in X^*$ και $\|x_0^*\| \leq \|x_0^{***}\|$.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Άρα,

$$\begin{aligned} [\tau_1(x_0^*)](x^{**}) &= x^{**}(x_0^*) = [\tau(x)](x_0^*) = x_0^*(x) = x_0^{***}(\tau(x)) \\ &= x_0^{***}(x^{**}). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\tau_1(X^*) = X^{***}$ και ας υποθέσουμε ότι $\tau(X) \neq X^{**}$. Τότε, ο $\tau(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} άρα υπάρχει μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x_0^{***} \in X^{***}$ ώστε $x_0^{***}(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_0^*(x) = [\tau(x)](x_0^*) = [\tau_1(x_0^*)](\tau(x)) = x_0^{***}(\tau(x)) = 0,$$

δηλαδή $x_0^* = 0$. Όμως τότε, $x_0^{***} = \tau_1(x_0^*) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

32. Έστω X χώρος με νόρμα και K κυρτό υποσύνολο του X με $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

(α) Αποδείξτε ότι αν $x_1 \in \text{int}(K)$ και $x_2 \in \bar{K}$ τότε $(1-t)x_1 + tx_2 \in \text{int}(K)$ για κάθε $0 < t < 1$.

(β) Αποδείξτε ότι τα $\text{int}(K)$ και \bar{K} είναι κυρτά σύνολα.

(γ) Αποδείξτε ότι $\overline{\text{int}(K)} = \bar{K}$ και $\text{int}(\bar{K}) = \text{int}(K)$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $0 < t < 1$ και $z = (1-t)x_1 + tx_2$. Γράφουμε

$$x_1 = \frac{1}{1-t}(z - tx_2).$$

Αφού $x_2 \in \bar{K}$, υπάρχει ακολουθία (u_k) στο K ώστε $u_k \rightarrow x_2$. Ορίζουμε

$$v_k = \frac{1}{1-t}(z - tu_k).$$

Τότε, $v_k \rightarrow x_1$. Αφού $x_1 \in \text{int}(K)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x_1, \delta) \subseteq K$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $v_k \in B(x_1, \delta)$ για κάθε $k \geq k_0$. Σταθεροποιούμε ένα $k \geq k_0$ και βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ ώστε $B(v_k, \delta_1) \subseteq B(x_1, \delta) \subseteq K$. Τότε, το σύνολο $U := (1-t)B(v_k, \delta_1) + tu_k$ είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί) και, από την κυρτότητα του K και το γεγονός ότι $u_k \in K$ παίρνουμε

$$U := (1-t)B(v_k, \delta_1) + tu_k \subseteq (1-t)K + tK = K.$$

Αφού $z = (1-t)v_k + tu_k \in U \subseteq K$ και το U είναι ανοικτό, έπεται ότι $z \in \text{int}(K)$.

(β) Έστω $x_1, x_2 \in \text{int}(K)$. Έστω $t \in (0, 1)$ και $z_t = (1-t)x_1 + tx_2$. Θα δείξουμε ότι $z_t \in \text{int}(K)$, οπότε το $\text{int}(K)$ είναι κυρτό.

Υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε $B(x_1, \delta_1) \subseteq K$ και $B(x_2, \delta_2) \subseteq K$. Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε $B(x_1, \delta) \subseteq K$ και $B(x_2, \delta) \subseteq K$. Θα δείξουμε ότι $B(z_t, \delta) \subseteq K$, απ' όπου έπεται ότι $z_t \in \text{int}(K)$.

Έστω $y \in B(z_t, \delta)$, δηλαδή $\|y - z_t\| < \delta$. Ορίζουμε $x_{1,t} = x_1 + (y - z_t)$ και $x_{2,t} = x_2 + (y - z_t)$. Τότε, $\|x_1 - x_{1,t}\| = \|x_2 - x_{2,t}\| = \|y - z_t\| < \delta$, άρα $x_{1,t} \in B(x_1, \delta) \subseteq K$ και όμοια $x_{2,t} \in K$. Όμως, $(1-t)x_{1,t} + tx_{2,t} = (1-t)x_1 + (1-t)(y - z_t) + tx_2 + t(y - z_t) = y + (1-t)x_1 + tx_2 - z_t = y$, άρα $y = (1-t)x_{1,t} + tx_{2,t} \in K$ από την κυρτότητα του K .

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x_1, x_2 \in \bar{K}$ και $0 < t < 1$. Υπάρχουν ακολουθίες $(u_k), (v_k)$ στο K τέτοιες ώστε $u_k \rightarrow x_1$ και $v_k \rightarrow x_2$. Αφού το K είναι κυρτό, για κάθε k έχουμε $(1-t)u_k + tv_k \in K$ και $(1-t)u_k + tv_k \rightarrow (1-t)x_1 + tx_2$, άρα $(1-t)x_1 + tx_2 \in \bar{K}$, και έπεται ότι το \bar{K} είναι κυρτό.

(γ) Έχουμε $\text{int}(K) \subseteq K$, άρα $\overline{\text{int}(K)} \subseteq \bar{K}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \bar{K}$. Αφού $\text{int}(K) \neq \emptyset$, υπάρχει $y \in \text{int}(K)$. Από το (α), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_k := \frac{1}{k}y + \frac{k-1}{k}x \in \text{int}(K)$. Όμως,

$$z_k = \frac{1}{k}y + \frac{k-1}{k}x \rightarrow x.$$

Άρα, $x \in \overline{\text{int}(K)}$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, αρχικά έχουμε $K \subseteq \bar{K}$ άρα $\text{int}(K) \subseteq \text{int}(\bar{K})$. Αντίστροφα, έστω $x \in \text{int}(\bar{K})$. Σταθεροποιούμε κάποιο $y \in \text{int}(K)$. Αν $y = x$ έχουμε $x \in \text{int}(K)$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq x$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq \bar{K}$ και $y \notin B(x, \delta)$. Θα δείξουμε ότι $B(x, \delta/2) \subseteq K$, οπότε $x \in \text{int}(K)$. Έστω $z \in B(x, \delta/2)$. Παρατηρήστε ότι $z \neq y$ διότι $y \notin B(x, \delta)$. Θεωρούμε το $v := z + \frac{\delta}{2} \frac{z-y}{\|z-y\|} \in B(x, \delta)$ (εφαρμόστε την τριγωνική ανισότητα) άρα $v \in \bar{K}$. Όμως, αν θέσουμε $\lambda = \frac{\delta}{2\|z-y\|} > 0$ και $t = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, έχουμε

$$(1-t)v + ty = \frac{1}{1+\lambda}(z + \lambda(z-y)) + \frac{\lambda}{1+\lambda}y = z.$$

Από το (α) έπεται ότι $z \in \text{int}(K)$.

33. Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το \mathbb{R} και A, B μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα του X με την ιδότητα

$$0 \notin \overline{A - B}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Υπόδειξη. Αφού $0 \notin \overline{A - B}$, μπορούμε να βρούμε συμμετρική περιοχή $U = D(0, \delta)$ του 0 ώστε $(U + U) \cap (A - B) = \emptyset$, οπότε $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$. Τα $A + U, B + U$ είναι ξένα, ανοικτά και κυρτά, συνεπώς διαχωρίζονται γνήσια: υπάρχουν συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(w) > \lambda \text{ αν } w \in A + U \text{ και } f(w) < \lambda \text{ αν } w \in B + U.$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει $z \in U$ με $f(z) > 0$. Τότε, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x - z \in A + U$ άρα $f(x) - f(z) = f(x - z) > \lambda$ και για κάθε $y \in B$ έχουμε $y + z \in B + U$ άρα $f(y) + f(z) = f(y + z) < \lambda$. Έπεται ότι

$$\sup_{y \in B} f(y) \leq \lambda - f(z) < \lambda + f(z) \leq \inf_{x \in A} f(x).$$

Κεφάλαιο 5

Χώροι Hilbert

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι:

(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x - ay\|^2 \implies \|x\|^2 + 2a\langle x, y \rangle + \|ay\|^2 = \|x\|^2 - 2a\langle x, y \rangle + \|ay\|^2,$$

δηλαδή,

$$a\langle x, y \rangle = 0.$$

Παίρνοντας $a = 1$, βλέπουμε ότι $x \perp y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 = \|x - ay\|^2.$$

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 \geq \|x\|^2 \implies \|x\|^2 + 2a\langle x, y \rangle + a^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

δηλαδή,

$$2a\langle x, y \rangle + a^2\|x\|^2 \geq 0.$$

Διαιρώντας με a και παίρνοντας $a \rightarrow 0^+$, βλέπουμε ότι $\langle x, y \rangle \geq 0$, ενώ παίρνοντας $a \rightarrow 0^-$, βλέπουμε ότι $\langle x, y \rangle \leq 0$. Άρα, $\langle x, y \rangle = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 \geq \|x\|^2.$$

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H , και $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$. Αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Υψώνουμε την $\|x_n - y_n\|$ στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - y_n\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n \rangle \\ &\leq 2 - 2\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. Αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Υψώνουμε την $\|x_n - x\|$ στο τετράγωνο, και εφαρμόζουμε την υπόθεση για $y = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle \\ &\rightarrow \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X , με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι:

$$(α) A \subseteq A^{\perp\perp}, \quad (β) B^\perp \subseteq A^\perp, \quad (γ) A^{\perp\perp\perp} = A^\perp.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in A$. Από τον ορισμό του A^\perp , για κάθε $y \in A^\perp$ έχουμε $\langle x, y \rangle = 0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$x \in (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}.$$

Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, έχουμε $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(β) Αν $x \in B^\perp$, τότε $x \perp y$ για κάθε $y \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αυτό σημαίνει ότι $x \perp y$ για κάθε $y \in A$, άρα $x \in A^\perp$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (α) για το A^\perp στη θέση του A , έχουμε

$$A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$, το (β) μάς δίνει

$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp.$$

Επομένως, $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

5. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H . Αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

Υπόδειξη. Ο $Y^{\perp\perp}$ είναι (πάντα) κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H , άρα, αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τότε ο Y είναι κλειστός.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: ξέρουμε ότι $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. Έστω $x \in Y^{\perp\perp}$. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert και ο Y κλειστός υπόχωρός του, το x γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$. Όμως, $x \in Y^{\perp\perp}$ και $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, άρα

$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$

Αφού $z \in Y^{\perp\perp} \cap Y^\perp$, έχουμε $z \perp z$. Άρα, $z = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y \in Y$, και αφού το $x \in Y^{\perp\perp}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y = Y^{\perp\perp}$.

6. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Αποδείξτε ότι

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp, \quad (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}.$$

Υπόδειξη. Αφού $M, N \subseteq M + N$, έχουμε $(M + N)^\perp \subseteq M^\perp, N^\perp$, άρα

$$(M + N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in M^\perp \cap N^\perp$ και $w \in M + N$. Τότε, $w = m + n$ για κάποια $m \in M$ και $n \in N$, και αφού $x \perp m, n$ παίρνουμε

$$\langle x, w \rangle = \langle x, m \rangle + \langle x, n \rangle = 0,$$

δηλαδή, $x \perp w$. Έπεται ότι $x \in (M + N)^\perp$, δηλαδή

$$M^\perp \cap N^\perp \subseteq (M + N)^\perp.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη, βάζουμε στην πρώτη τους M^\perp, N^\perp στη θέση των M, N : έχουμε

$$M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = (M^\perp + N^\perp)^\perp,$$

και αφού οι M, N είναι κλειστοί, παίρνουμε

$$M \cap N = (M^\perp + N^\perp)^\perp.$$

Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα, βλέπουμε ότι

$$(*) \quad (M \cap N)^\perp = (M^\perp + N^\perp)^{\perp\perp}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν F είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του H , τότε $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ (σημειώστε ότι ο $M^\perp + N^\perp$ μπορεί να μην είναι κλειστός υπόχωρος του H). Στην Άσκηση 7 είδαμε ότι $F \subseteq F^{\perp\perp}$ και αφού ο $F^{\perp\perp}$ είναι κλειστός έπεται ότι $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. Αν υπήρχε $z \in F^{\perp\perp} \setminus \overline{F}$, τότε το μη μηδενικό διάνυσμα $z - P_F(z)$ θα ανήκε στον $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, έχουμε ισότητα, και θέτοντας $F = M^\perp + N^\perp$ στην (*) έχουμε το ζητούμενο.

7. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^\perp$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $H = \ell_2$, και σαν F παίρνουμε τον υπόχωρο c_{00} που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες. Προφανώς $F \neq H$, γιατί

$$\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \in \ell_2 \setminus c_{00}.$$

Από την άλλη πλευρά, $e_n \in c_{00}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν $y \in c_{00}^\perp$, το $y = (\eta_n)$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\eta_n = \langle y, e_n \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $y = 0$. Άρα, $c_{00}^\perp = \{0\}$. Τότε,

$$c_{00} + c_{00}^\perp = c_{00} \neq \ell_2.$$

8. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι κάθετοι). Αποδείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H .

Υπόδειξη. Έστω $x_n = w_n + z_n$ ακολουθία στον $W + Z$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = w + z$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H (γιατί;).

Η (x_n) συγκλίνει, άρα είναι βασική ακολουθία: έχουμε $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ καθώς $m, n \rightarrow \infty$. Όμως, από την καθετότητα των W και Z , και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2,$$

και αυτό δείχνει ότι οι $(w_n), (z_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy στους W, Z αντίστοιχα. Οι W, Z είναι κλειστοί υπόχωροι του H , άρα είναι πλήρεις σαν μετρικοί χώροι. Επομένως, υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $w_n \rightarrow w$ και $z_n \rightarrow z$. Έπεται ότι $x_n = w_n + z_n \rightarrow w + z$, και από μοναδικότητα του ορίου, $x = w + z \in W + Z$.

9. Σε έναν χώρο Hilbert H , θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N , και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N . Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

Υπόδειξη. Στον \mathbb{R}^2 θεωρούμε τους $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $N = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε,

$$(P_M \circ P_N)(1, 1) = P_M(1, 1) = (1, 0),$$

ενώ

$$(P_N \circ P_M)(1, 1) = P_N(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα, $P_M \circ P_N \neq P_N \circ P_M$.

Ισχύει όμως ισότητα αν $M \perp N$: για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$(P_M \circ P_N)(x) = (P_N \circ P_M)(x) = 0,$$

δηλαδή $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M \equiv 0$.

10. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[-1, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^1 (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

Υπόδειξη. Οι τρεις πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση είναι οι εξής:

$$(α) f_1(t) = \frac{1}{\|1\|} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(β) f_2(t) = \frac{t - \langle t, f_1 \rangle f_1(t)}{\|t - \langle t, f_1 \rangle f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

$$(γ) f_3(t) = \frac{t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1(t) - \langle t^2, f_2 \rangle f_2(t)}{\|t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1 - \langle t^2, f_2 \rangle f_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |t^4 - a - bt - ct^2|^2 dt = d^2(t^4, \langle 1, t, t^2 \rangle),$$

επομένως μπορούμε να βρούμε τα βέλτιστα a, b, c βρίσκοντας το πλησιέστερο σημείο του $\langle 1, t, t^2 \rangle$ προς την t^4 . Όμως, οι f_1, f_2, f_3 είναι ορθοκανονική βάση του $\langle 1, t, t^2 \rangle$, άρα η λύση δίνεται από την

$$g(t) = \langle t^4, f_1 \rangle f_1(t) + \langle t^4, f_2 \rangle f_2(t) + \langle t^4, f_3 \rangle f_3(t) = \dots = \frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35},$$

το οποίο δίνει

$$a = -\frac{3}{35}, \quad b = 0, \quad c = \frac{6}{7}.$$

11. Έστω $T : H \rightarrow H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u \rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{RT} = \text{span}\{v\}$ για κάποιο $v \neq 0$. Τότε, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$T(x) = \lambda_x v,$$

όπου ο $\lambda_x \in \mathbb{R}$ εξαρτάται από το x . Μπορούμε να υπολογίσουμε το λ_x μέσω του T ως εξής:

$$\langle Tx, v \rangle = \lambda_x \langle v, v \rangle \implies \lambda_x = \left\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2} \right\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι το $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x) = \left\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2} \right\rangle,$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$|f(x)| = |\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2} \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \left\| \frac{v}{\|v\|^2} \right\| \leq \frac{\|T\|}{\|v\|} \|x\|.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_x = f(x) = \langle x, u \rangle, \quad x \in H.$$

Άρα, $T(x) = \lambda_x v = \langle x, u \rangle v$ για κάθε $x \in H$.

12. Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H , και $f \in W^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $f_1 \in H^*$ τέτοιο ώστε $f_1|_W = f$ και $\|f_1\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.

Υπόδειξη. Ο W είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w \in W$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle w, x \rangle, \quad x \in W.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $f_1 : H \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \langle w, x \rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το f_1 είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H , επεκτείνει το f , και

$$\|f\|_{W^*} = \|w\| = \|f_1\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H , υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \langle u, x \rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle w - u, x \rangle = 0$ για κάθε $x \in W$, οπότε $w - u = z \in W^\perp$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα (εξηγήστε), και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|f_1\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \implies w = u$. Έπεται ότι $g = f_1$.

13. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X . Αν $x, y \in X$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και κατόπιν την ανισότητα του Bessel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, e_k \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

14. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H , και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y . Αποδείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Υπόδειξη. Έστω y το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x . Αφού $y \in Y$ και $n \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του Y , το y γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Όμως ξέρουμε ότι $x - y \perp Y$ και $e_n \in Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0 \implies \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

15. Αποδείξτε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση του ℓ_2 έχει την εξής ιδιότητα:

$$\forall f \in \ell_2^*, \quad f(e_n) \rightarrow 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $f \in \ell_2^*$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $y \in \ell_2$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y, x \rangle, \quad x \in \ell_2.$$

Ειδικότερα, $f(e_n) = \langle y, e_n \rangle$. Όμως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle^2 = \|y\|^2 < +\infty,$$

άρα, $\langle y, e_n \rangle^2 \rightarrow 0$, δηλαδή $f(e_n) \rightarrow 0$.

16. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$). Τότε, $n \sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $n \sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Ο H είναι πλήρης, άρα $n \sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_m = \sum_{n=1}^m x_n$ είναι Cauchy. Όμως, αν $l > m$ έχουμε

$$\|s_l - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \dots + x_l\|^2 = \sum_{n=m+1}^l \|x_n\|^2,$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα, η (s_m) είναι Cauchy αν και μόνο αν n

$$t_m = \sum_{n=1}^m \|x_n\|^2$$

είναι βασική ακολουθία στο \mathbb{R} , δηλαδή αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

17. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και (e_k) μια ορθοκανονική ακολουθία στον X . Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k \rangle| \geq 1/m\}| \leq m^2 \|x\|^2,$$

όπου με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A .

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Bessel έχουμε

$$\frac{1}{m^2} \cdot |\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k \rangle| \geq 1/m\}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

άρα

$$|\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k \rangle| \geq 1/m\}| \leq m^2 \|x\|^2.$$

18. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \dots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, αποδείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i , πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

Υπόδειξη. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \sum_{i \neq j} (\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2) + \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - 2 \sum_{i < j} \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle x_i, x_j \rangle \\ &= n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ όταν $i \neq j$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε

$$i \neq j \implies \|(x_i - y) - (x_j - y)\| \geq 2.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|y - x_i\| \leq r$, $i = 1, \dots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 &\leq \sum_{i \neq j} \|(x_i - y) - (x_j - y)\|^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n \|x_i - y\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i - ny \right\|^2 \\ &\leq n \sum_{i=1}^n \|x_i - y\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n r^2 \\ &= n^2 r^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$r^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} \implies r \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

19. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \dots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

Υπόδειξη. Αν $n = 1$, έχουμε $\|x\|^2 + \|-x\|^2 = 2\|x\|^2$.

Για το επαγωγικό βήμα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i x_i \right\|^2 &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left(\left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i + x_{k+1} \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i - x_{k+1} \right\|^2 \right) \\ &= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left(\left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \right) \\ &= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i \right\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\ &= 2 \cdot 2^k \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\ &= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά: τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i$ και x_{k+1} (για κάθε επιλογή των $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$), την επαγωγική υπόθεση για τα x_1, \dots, x_k , και το γεγονός ότι το $\{-1, 1\}^k$ έχει 2^k στοιχεία.

20. Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \rightarrow H$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T^2 = T$ και $\|T\| \leq 1$. Αν $F = \text{Ker}T$, αποδείξτε ότι:

(i) $T(H) \subseteq F^\perp$.

(ii) Ο T είναι ορθογώνια προβολή στον F^\perp .

Υπόδειξη. (α) Ο F είναι κλειστός υπόχωρος του H διότι ο T είναι φραγμένος. Συνεπώς $H = F \oplus F^\perp$. Έστω $x \in H$. Το Tx γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $Tx = y + z$, όπου $y \in F$ και $z \in F^\perp$. Αφού $y \in \text{Ker}T$ και $T^2 = T$, έχουμε $Tx = T^2x = T(y + z) = Tz$. Αφού $y \perp z$ και $\|T\| \leq 1$, έχουμε

$$\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|Tx\|^2 = \|Tz\|^2 \leq \|z\|^2.$$

Έπεται ότι $y = 0$, δηλαδή $Tx = z \in F^\perp$.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $Tx = x$ για κάθε $x \in F^\perp$. Από την $T^2 = T$ έχουμε $T(Tx - x) = 0$ δηλαδή $Tx - x \in \text{Ker}T = F$ για κάθε $x \in H$. Αν επιπλέον $x \in F^\perp$, τότε τα x και $Tx - x$ είναι κάθετα, οπότε

$$\|x\|^2 + \|Tx - x\|^2 = \|Tx\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Αυτό δείχνει ότι $Tx - x = 0$.

21. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H , και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H . Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n \rangle \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

(β) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n \rangle \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. (α) \Rightarrow (β): Για τα συναρτησοειδή $f_n(x) = \langle x, x_n \rangle$ έχουμε $\|f_n\| = \|x_n\|$ και $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ για κάθε $x \in X$. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, $\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Η $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_m, x_n \rangle = 0$ είναι προφανής από την υπόθεση.

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle e_m \in H$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι

$$\langle x, x_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle \langle e_m, x_n \rangle.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $\sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_m, x \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x \rangle|^2 < (\varepsilon/2M)^2.$$

Από την υπόθεση, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $m = 1, \dots, N$,

$$|\langle e_m, x_n \rangle| \cdot \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle x, x_n \rangle| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle \langle e_m, x_n \rangle \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^N |\langle x, e_m \rangle| \cdot |\langle e_m, x_n \rangle| + \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{m=1}^N \|x\| \cdot |\langle e_m, x_n \rangle| + \frac{\varepsilon}{2M} \|x_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 6

Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach

1. Αποδείξτε ότι η πληρότητα του X είναι απαραίτητη στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: πάρτε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_{∞} , και ορίστε $T_n : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T_n(x) = n\xi_n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον c_{00} με νόρμα την $\|x\| = \sup_k |\xi_k|$. Ορίζουμε $T_n : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$, με $T_n(x) = n\xi_n$. Κάθε T_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$|T_n x| = n|\xi_n| \leq n\|x\|,$$

άρα, κάθε T_n είναι φραγμένο και $\|T_n\| \leq n$. Έχουμε $T_n(e_n) = n$, άρα $\|T_n\| = n$ (γιατί;). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $(\|T_n\|)$ δεν είναι φραγμένη.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ τέτοιος ώστε $T_n(x) = n\xi_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in c_{00}$.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος δεν εφαρμόζεται εδώ, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

2. Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \rightarrow x$ στον X , τότε $f(x_n) \rightarrow f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη. Αν $x_n \rightarrow x$, τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, για παράδειγμα, στον ℓ_2 πάρουμε $x_n = e_n$ τα διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης, έχουμε

$$f(e_n) \rightarrow 0 = f(0)$$

για κάθε $f \in \ell_2^*$. Όμως, $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα δεν ισχύει ότι $e_n \rightarrow 0$.

3. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \rightarrow Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Αποδείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.

Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, αποδείξτε ότι υπάρχει $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \rightarrow Tx$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη, άρα η υπόθεση μας δίνει το εξής: για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη. Αφού ο X είναι χώρος Banach, από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο Y είναι πλήρης, έχουμε: για κάθε $x \in X$ η $(T_n x)$ είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει το $\lim_n T_n x \in Y$. Ορίζουμε $T : X \rightarrow Y$ με

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής: για κάθε $x, y \in X$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε $T_n x \rightarrow Tx$ και $T_n y \rightarrow Ty$, άρα

$$T_n(ax + by) = aT_n x + bT_n y \rightarrow aTx + bTy.$$

Όμως, από τον ορισμό του T έχουμε $T_n(ax + by) \rightarrow T(ax + by)$. Άρα,

$$T(ax + by) = aTx + bTy,$$

δηλαδή, ο T είναι γραμμικός. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι, από το πρώτο μέρος, έχουμε $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Αφού $T_n x \rightarrow Tx$, βλέπουμε ότι

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq M$.

4. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞ , και ορίζουμε $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots)$. Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο T^{-1} φραγμένος; Εξηγήστε.

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ο $T^{-1} : Y \rightarrow X$ ορίζεται από την

$$T^{-1}(y) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots).$$

Έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_k \frac{|\xi_k|}{k} \leq \sup_k |\xi_k| = \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq 1$ (ισχύει ισότητα - γιατί;). Όμως, για κάθε n έχουμε

$$\frac{\|T^{-1}(e_n)\|}{\|e_n\|} = \frac{\|ne_n\|}{\|e_n\|} = n,$$

άρα ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος. Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δεν εφαρμόζεται, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_1 : X \rightarrow Y$ τελεστής με κλειστό γράφημα, και $T_2 : X \rightarrow Y$ φραγμένος τελεστής. Αποδείξτε ότι ο $T_1 + T_2$ έχει κλειστό γράφημα.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x_n \rightarrow x$ στον X και $(T_1 + T_2)(x_n) \rightarrow y$ στον Y . Θα δείξουμε ότι

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x = y,$$

οπότε ο T έχει κλειστό γράφημα.

Αφού ο T_2 είναι φραγμένος και $x_n \rightarrow x$, έχουμε

$$T_2x_n \rightarrow T_2x.$$

Όμως τότε,

$$T_1x_n = (T_1 + T_2)(x_n) - T_2x_n \rightarrow y - T_2x.$$

Αφού ο T_1 έχει κλειστό γράφημα, αυτό σημαίνει ότι $y - T_2x = T_1x$ (γιατί;), δηλαδή το ζητούμενο.

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $C \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(C)$ είναι κλειστό στον Y .

(β) Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $T^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X .

Υπόδειξη. (α) Έστω $y_n = Tx_n$ στο $T(C)$, με $y_n \rightarrow y$ στον Y . Θα δείξουμε ότι $y \in T(C)$, δηλαδή ότι υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $y = Tx$.

Αφού το C είναι συμπαγές και $x_n \in C$, υπάρχουν υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in C$, τέτοια ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$. Τότε, αφού η (y_{k_n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (y_n) , έχουμε

$$Tx_{k_n} = y_{k_n} \rightarrow y.$$

Ο T έχει κλειστό γράφημα, $x_{k_n} \rightarrow x$ και $y_{k_n} \rightarrow y$. Άρα, $y = Tx \in T(C)$.

(β) Έστω $x_n = T^{-1}y_n \in T^{-1}(K)$, με $x_n \rightarrow x \in X$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y \in K$ με $x = T^{-1}y$.

Αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο του Y , υπάρχουν (y_{k_n}) και $y \in K$ τέτοια ώστε

$$y_{k_n} = Tx_{k_n} \rightarrow y.$$

Όμως, $x_{k_n} \rightarrow x$, και ο T έχει κλειστό γράφημα. Άρα, $y = Tx$.

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M \|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $T_n : X^* \rightarrow \ell_1$, με

$$T_n(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n), 0, 0, \dots).$$

Κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T_n(f)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^n |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \|f\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\| \right) \cdot \|f\|.$$

Άρα, ο T_n είναι φραγμένος, και $\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$. Η υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$, μας λέει ότι η ακολουθία $(T_n(f))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1 για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;). Ο X^* είναι χώρος Banach, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(f)\| \leq M\|f\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;).

8. Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^* , και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \rightarrow 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\|f_n\| \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $(g_n) = (\frac{1}{\varepsilon_n} f_n)$ στον X^* . Από την υπόθεση,

$$|g_n(x)| \leq K_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή, η (g_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|g_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \implies \|f_n\| \leq M\varepsilon_n \rightarrow 0,$$

άρα, $\|f_n\| \rightarrow 0$.

9. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T_n \in B(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

(γ) Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.

Υπόδειξη. Από το (α) στο (β): αν $x \in X$, τότε

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \left(\sup_n \|T_n\| \right) \cdot \|x\|,$$

άρα

$$\sup_n \|T_n x\| \leq (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\| < +\infty.$$

Από το (β) στο (γ): όπως πριν, για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, έχουμε

$$\sup_n |g(T_n x)| \leq \sup_n (\|g\| \cdot \|T_n x\|) = \|g\| \cdot \sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$

Από το (γ) στο (β): Για κάθε $g \in Y^*$, η ακολουθία $(g(T_n x))$ είναι φραγμένη στο \mathbb{R} . Στη θεωρία είδαμε ότι αυτό μας δίνει ότι η $(T_n x)$ είναι φραγμένη στον Y .

Από το (β) στο (α): αυτό είναι ακριβώς το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος.

10. Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι

$$\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n\|_2 \rightarrow 0.$$

Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2).$$

Ο I είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και η υπόθεση μας δίνει ότι ο I είναι συνεχής στο 0, άρα φραγμένος τελεστής (γιατί;). Αφού ο X είναι πλήρης ως προς τις δύο νόρμες, το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας λέει ότι ο $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης φραγμένος.

Υπάρχουν λοιπόν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leq a\|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

Οι δύο ανισότητες δείχνουν ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

11. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Ο T είναι φραγμένος, άρα παίρνοντας $b = \|T\|$ έχουμε

$$\|Tx\| \leq b\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και αφού οι X, Y είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αν $x \in X$, τότε $x = T^{-1}(Tx)$ άρα

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει και η αριστερή ανισότητα, με $a = 1/\|T^{-1}\|$.

12. Αποδείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστού γραφήματος.

Υπόδειξη. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Για να δείξουμε ότι ο $T^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι φραγμένος, αρκεί να δείξουμε ότι έχει κλειστό γράφημα.

Έστω $y_n \rightarrow y$ στον Y , και $x_n = T^{-1}y_n \rightarrow x$ στον X . Θα δείξουμε ότι

$$x = T^{-1}y \iff Tx = y.$$

(η ισοδυναμία εξηγείται από το ότι ο T είναι ένα προς ένα και επί). Ο T είναι φραγμένος, και $x_n \rightarrow x$. Άρα,

$$y_n = Tx_n \rightarrow Tx.$$

Όμως, έχουμε και την $y_n \rightarrow y$. Από μοναδικότητα του ορίου, $y = Tx$.

13. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[0, 1]$ και τον υπόχωρό του $\mathcal{C}^1[0, 1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0, 1]$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}^1[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ με $Tf = f'$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

Υπόδειξη. (α) Αν $f_n \rightarrow f$ στον $\mathcal{C}^1[0, 1]$ και $Tf_n \rightarrow g$ στον $\mathcal{C}[0, 1]$, τότε έχουμε τις ομοιόμορφες συγκλίσεις

$$f_n \rightarrow f, \quad f'_n \rightarrow g.$$

Είναι γνωστό ότι με αυτές τις υποθέσεις έχουμε $f' = g$ στο $[0, 1]$, δηλαδή

$$T(f) = g.$$

Αυτό δείχνει ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n(t) = t^n$. Τότε $\|f_n\| = 1$ για κάθε n , αλλά

$$(Tf_n)(t) = nt^{n-1}, \quad t \in [0, 1],$$

δηλαδή, $\|Tf_n\| = n$. Αυτό δείχνει ότι ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται σ' αυτήν την περίπτωση, κι αυτό σημαίνει (αναγκαστικά) ότι ο $\mathcal{C}^1[0, 1]$ δεν είναι χώρος Banach.

14. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \rightarrow Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $\mathcal{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y .

Υπόδειξη. Αν ο $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y , τότε είναι χώρος Banach, και ο $T : X \rightarrow \mathcal{R}(T)$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ είναι φραγμένος.

Αντίστροφα: έστω ότι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ είναι φραγμένος, και έστω $y_n \in \mathcal{R}(T)$ με $y_n \rightarrow y \in Y$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = y$.

Υπάρχουν $x_n \in X$ με $Tx_n = y_n$, και αφού ο T^{-1} είναι φραγμένος, έχουμε

$$(*) \quad \|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η (y_n) συγκλίνει στον Y άρα είναι βασική ακολουθία στον Y , και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X . Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \rightarrow x$.

Ο T είναι φραγμένος και $x_n \rightarrow x$, άρα $y_n = Tx_n \rightarrow Tx$. Από μοναδικότητα του ορίου,

$$y = Tx \in \mathcal{R}(T),$$

δηλαδή το $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστό.

15. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο τελεστή $S : \ell_1 \rightarrow Y$ υπάρχει φραγμένος τελεστής $W : \ell_1 \rightarrow X$ ώστε $T \circ W = S$.

Υπόδειξη. Αφού ο T είναι επί, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $S(e_n) = y_n \in Y$ και βρίσκουμε $x_n \in X$ ώστε $\|x_n\| \leq M\|y_n\| \leq M\|S\|$. Ορίζουμε $W : \ell_1 \rightarrow X$ με $W(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. Ο W είναι καλά ορισμένος, διότι

$$\sum_{n=1}^N \|t_n x_n\| \leq M\|S\| \sum_{n=1}^N |t_n| \leq M\|S\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right\|_1,$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ συγκλίνει στον X . Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι

$$\left\| W \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq M\|S\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|,$$

δηλαδή ο W είναι φραγμένος και $\|W\| \leq M\|S\|$. Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(T \circ W)(e_n) = T(x_n) = y_n = S(e_n).$$

Από τη συνέχεια των $T \circ W$ και S βλέπουμε εύκολα ότι $T \circ W = S$.

16. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \rightarrow 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Υποθέτουμε ότι $x_n \rightarrow x$ στον X και $Tx_n \rightarrow y$ στον Y . Θα δείξουμε ότι $y = Tx$.

Για κάθε $f \in Y^*$ ισχύουν τα εξής:

(α) Αφού $Tx_n \rightarrow y$ και το $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχές,

$$f(Tx_n) \rightarrow f(y).$$

(β) Από την υπόθεση, αφού $x_n - x \rightarrow 0$,

$$f(T(x_n - x)) = f(Tx_n) - f(Tx) \rightarrow 0 \implies f(Tx_n) \rightarrow f(Tx).$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in Y^*$, $f(Tx) = f(y)$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$y = Tx$$

(βασική συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach είναι ότι ο Y^* «διαχωρίζει» τα σημεία του Y).

17. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

Υπόδειξη. Αν ο T είναι φραγμένος, τότε για κάθε $g \in Y^*$ το $g \circ T : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (ως σύνθεση συνεχών γραμμικών συναρτήσεων), δηλαδή $g \circ T \in X^*$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, με την υπόθεση $g \in Y^* \implies g \circ T \in X^*$ δείχνουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος: έστω $x_n \rightarrow x$ στον X και $Tx_n \rightarrow y$ στον Y .

Αν $g \in Y^*$, από τη μία μεριά έχουμε

$$Tx_n \rightarrow y \implies g(Tx_n) \rightarrow g(y),$$

και από την άλλη, αφού $g \circ T \in X^*$ και $x_n \rightarrow x$, έχουμε

$$g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \rightarrow (g \circ T)(x) = g(Tx).$$

Δηλαδή,

$$g(y) = g(Tx), \quad g \in Y^*$$

και αφού ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y , παίρνουμε $y = Tx$. Έπεται ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

18. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \rightarrow y_0$, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \rightarrow x_0$.

Υπόδειξη. Ο T είναι φραγμένος και επί τελεστής μεταξύ χώρων Banach, άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $u_n \in X$ ώστε $T(u_n) = y_n - y_0$ και $\|u_n\| \leq M\|y_n - y_0\|$. Αφού $y_n \rightarrow y_0$, συμπεραίνουμε ότι $u_n \rightarrow 0$. Ορίζουμε $x_n = x_0 + u_n$. Τότε, $T(x_n) = T(x_0) + T(u_n) = y_0 + (y_n - y_0) = y_n$ και $x_n = x_0 + u_n \rightarrow x_0$.

19. Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \rightarrow x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ για τις οποίες ισχύει $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι για τις $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Ο X είναι χώρος Banach και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φραγμένη (γιατί συγκλίνει). Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|f_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $\|f\| \leq M$ (βλέπε Άσκηση 1), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n - x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n - x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq M\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

20. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \rightarrow Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \rightarrow Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \rightarrow Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια τελεστών $\{T_x : x \in B_X\}$. Κάθε $T_x : Y \rightarrow Z$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\sup\{\|T_x(y)\| : x \in B_X\} = \sup\{\|T_y(x)\| : x \in B_X\} = \|T_y\| < \infty.$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_x\| \leq M$ για κάθε $x \in B_X$. Τότε,

$$\|T(x, y)\| = \|T_x(y)\| \leq M\|y\| \quad \text{για κάθε } y \in Y, x \in B_X.$$

Έστω $x \neq 0$ στον X . Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το $x_1 = \frac{x}{\|x\|} \in B_X$ παίρνουμε

$$\|T(x, y)\| = \|T_y(\|x\|x_1)\| = \|x\| \|T_y(x_1)\| = \|x\| \|T(x_1, y)\| \leq M\|x\| \|y\|.$$

Η ανισότητα ισχύει προφανώς αν $x = 0$ ($T(0, y) = T_y(0) = 0$).

21. (α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι αν ο T είναι ανοικτή απεικόνιση τότε είναι επί.

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με $f \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανοικτή απεικόνιση και $f(X) = \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $T(0) = 0$ και ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, το σύνολο $T(B_X(0, 1))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και περιέχει το 0 , άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$T(X) \supseteq T(B_X(0, 1)) \supseteq B_Y(0, \delta).$$

Ο $T(X)$ είναι υπόχωρος του Y με μη κενό εσωτερικό, άρα $T(X) = Y$. Δηλαδή, ο T είναι επί.

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $f(B_X(0, 1)) \supseteq (-r, r)$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι επί (χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της f) και ότι είναι ανοικτή απεικόνιση (μνηθείτε το τελευταίο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης).

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $z \in X \setminus \{0\}$ με $f(z) = s > 0$ (εξηγήστε γιατί). Θέτουμε $r = \frac{s}{\|z\|}$. Για κάθε $t \in (-r, r)$ έχουμε $x_s := \frac{t}{r} \frac{z}{\|z\|} \in B_X(0, 1)$ και

$$f(x_s) = \frac{t f(z)}{r \|z\|} = \frac{ts}{r \|z\|} = t.$$

Άρα, $t \in f(B_X(0, 1))$.

22. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $f : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ για κάθε $x = (x_k) \in c_{00}$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τη νόρμα $\|f\|$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Τότε, για κάθε $x \in c_{00}$ έχουμε

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot |x_k| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

(εδώ το άθροισμα έχει πεπερασμένους όρους και χρησιμοποιούμε απλώς την τριγωνική ανισότητα) δηλαδή η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq M \|x\|_\infty$$

για κάθε $x \in c_{00}$. Θεωρώντας $N \in \mathbb{N}$ και το $x_N = (\text{sgn}(a_1), \dots, \text{sgn}(a_N), 0, \dots) \in c_{00}$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^N |a_k| = \left| \sum_{k=1}^N a_k \cdot \text{sgn}(a_k) \right| = |f(x_N)| \leq M \|x_N\|_\infty \leq M.$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |a_k| \leq M < \infty.$$

Όπως πριν, βλέπουμε ότι $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, και

$$\|f\| \geq |f(x_N)| = \sum_{k=1}^N |a_k|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\|f\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Αν λοιπόν το f είναι φραγμένο, τότε $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

23. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Έστω Z υπόχωρος του Y . Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο Z είναι χώρος Banach τότε ο υπόχωρος $T^{-1}(Z)$ του X είναι χώρος Banach.

(β) Αν ο Z είναι πυκνός στον Y τότε ο $T^{-1}(Z)$ είναι πυκνός στον X .

Υπόδειξη. (α) Ο Z είναι πλήρης, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του Y . Αφού ο T είναι συνεχής γραμμική απεικόνιση, ο $T^{-1}(Z)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X . Αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι και ο $T^{-1}(Z)$ είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

(β) Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι $\overline{T^{-1}(Z)} \neq X$. Τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε $T^{-1}(Z) \cap U = \emptyset$. Έπεται ότι $Z \cap T(U) = \emptyset$ (αν είχαμε $T(u) = z \in Z$ για κάποιο $u \in U$ τότε θα είχαμε $u \in T^{-1}(Z) \cap U$, άτοπο). Όμως ο Z είναι πυκνός στον Y και το $T(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y ως εικόνα του U μέσω της ανοικτής απεικόνισης T , άρα $Z \cap T(U) = \emptyset$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

24. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \rightarrow X$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα αριθμησιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της $B_X(0,1)$ και ορίζουμε $T : \ell_1 \rightarrow X$ με

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n, \quad s = (s_n) \in \ell_1.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος: για κάθε $s = (s_n) \in \ell_1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \cdot \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty,$$

και αφού ο X είναι χώρος Banach αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ συγκλίνει στον X . Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα, και η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι

$$\|T(s)\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N s_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^N |s_n| \cdot \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| = \|s\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in B_X(0,1)$. Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, αν θέσουμε $u_n = \frac{n-1}{n} e_{k_n}$ έχουμε $u_n \in B_{\ell_1}(0,1)$ και $T(u_n) = \frac{n-1}{n} x_{k_n} \rightarrow x$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$B_X(0,1) \subseteq \overline{T(B_{\ell_1}(0,1))}.$$

Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του δεύτερου βήματος της απόδειξης του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης βλέπουμε ότι

$$B_X(0,1/2) \subseteq T(B_{\ell_1}(0,1)) \subseteq T(\ell_1),$$

και έπεται ότι $T(\ell_1) = X$.

25. Έστω $T : c_0 \rightarrow c_0$ ο γραμμικός τελεστής με $T(x) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

(α) Είναι ο T φραγμένος τελεστής;

(β) Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;

(γ) Είναι το $T(c_0)$ πυκνό υποσύνολο του c_0 ;

Υπόδειξη. (α) Αν $x = (x_k) \in c_0$ και $\|x\|_\infty \leq 1$, έχουμε $|x_k| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $\frac{|x_k|}{k} \leq |x_k| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup \left\{ \frac{|x_k|}{k} : k \in \mathbb{N} \right\} \leq 1.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$.

(β) Εύκολα βλέπουμε ότι $\text{Ker}(T) = \{0\}$: αν $T(x) = 0$ τότε $\frac{x_k}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $x_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = 0$. Αφού $\text{Ker}(T) = \{0\}$, ο T είναι $1-1$. Ας υποθέσουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Τότε θα είναι επί: πράγματι, έχουμε $0 \in T(B(0,1))$ και αφού υποθέσαμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0,\delta) \subseteq T(B(0,1)) \subseteq T(c_0)$, το οποίο δείχνει ότι $T(c_0) = c_0$ (υπόχωρος του c_0 με μη κενό εσωτερικό). Αφού ο T είναι επίσης $1-1$ και φραγμένος, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Δηλαδή, ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έχουμε $T^{-1}(e_k) = ke_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\frac{\|T^{-1}(e_k)\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = \frac{\|ke_k\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = k \rightarrow \infty.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $c_{00} \subseteq T(c_0)$. Αν $y = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, \dots) \in c_{00}$, τότε $y = T(x)$ όπου $x = (y_1, 2y_2, \dots, Ny_N, 0, \dots) \in c_0$. Άρα,

$$\overline{T(c_0)} \supseteq \overline{c_{00}} = c_0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $T(c_0)$ είναι πυκνό υποσύνολο του c_0 .

26. Μια ακολουθία (x_n) σε ένα χώρο X με νόρμα λέγεται ασθενώς Cauchy αν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ για κάθε $f \in X^*$. Αποδείξτε ότι κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία σε ένα χώρο με νόρμα είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Το ζητούμενο έπεται από γνωστή εφαρμογή της αρχής ομοιόμορφου φράγματος.

27. Έστω $T : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $f_n(t) \rightarrow f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$ τότε $(Tf_n)(t) \rightarrow (Tf)(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Θεωρούμε $(f_n, Tf_n) \in \Gamma(T)$ τέτοια ώστε

$$(f_n, Tf_n) \rightarrow (f, g) \in \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1].$$

Έχουμε $f_n \rightarrow f$ και $Tf_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα. Από την υπόθεση, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $(Tf_n)(t) \rightarrow (Tf)(t)$. Όμως, $Tf_n \rightarrow g$ κατά σημείο, άρα $(Tf_n)(t) \rightarrow g(t)$.

Έπεται ότι $(Tf)(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $Tf = g$. Άρα, $(f, g) = (f, Tf) \in \Gamma(T)$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό.

28. Αποδείξτε ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος Banach. Αν $I : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, εξετάστε αν οι I και I^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ και $x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots)$ (δηλαδή $x_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$). Τότε, $x_n \in c_{00} \subset \ell_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $x \in \ell_\infty \setminus \ell_1$ διότι $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Παρατηρούμε ότι $\|x - x_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

Αφού $x_n \in \ell_1$ και $x_n \rightarrow x \notin \ell_1$, ο ℓ_1 δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ . Συνεπώς, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.

Ο $I : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ δεν είναι φραγμένος. Για την ακολουθία (x_n) που ορίσαμε παραπάνω, έχουμε

$$\frac{\|I(x_n)\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty.$$

Ο $I^{-1} : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ είναι φραγμένος: για κάθε $x = (x_k) \in \ell_1$ έχουμε

$$\|I^{-1}(x)\|_\infty = \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1,$$

άρα $\|I^{-1}\| \leq 1$.

29. Αποδείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{C}[0, 2] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ με $Tf = f|_{[0,1]}$ είναι φραγμένος και υπολογίστε τη νόρμα του. Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;

Υπόδειξη. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα και

$$\|Tf\|_\infty = \|f|_{[0,1]}\|_\infty = \max\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \leq \max\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 2\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 2]$. Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Για τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ στο $[0, 2]$ έχουμε $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. Έπεται ότι $\|T\| = 1$.

Δείχνουμε ότι ο T είναι επί: αν $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, μπορούμε να την επεκτείνουμε συνεχώς στο $[0, 2]$ θέτοντας $f(t) = g(t)$ για $t \in [0, 1]$ και $f(t) = g(1)$ για $t \in [1, 2]$. Τότε, $Tf = f|_{[0,1]} = g$.

Αφού οι $\mathcal{C}[0, 2]$ και $\mathcal{C}[0, 1]$ είναι χώροι Banach και ο T είναι φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.

30. Έστω $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ φραγμένος γραμμικός και 1-1 τελεστής. Εξετάστε αν είναι δυνατόν ο $T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2 .

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει φραγμένος και 1-1 γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ τέτοιος ώστε ο $H = T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2 . Αφού ο T είναι 1-1, ο H είναι απειροδιάστατος υπόχωρος του ℓ_2 (εξηγήστε γιατί). Αφού είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_2 , ο H είναι χώρος Ήιλμπερτ με τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του ℓ_2 . Είναι επίσης διαχωρίσιμος, ως υπόχωρος του ℓ_2 . Έπεται ότι ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2 .

Ο $T : \ell_1 \rightarrow H$ είναι φραγμένος 1-1 και επί γραμμικός τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Έχουμε λοιπόν ότι ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με τον H . Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για παράδειγμα, ο ℓ_1^* δεν είναι διαχωρίσιμος (είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞) ενώ ο H^* είναι διαχωρίσιμος (αφού ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2 , ο H^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2). Όμως στην Άσκηση 4.28 είδαμε ότι αν δύο χώροι με νόρμα είναι ισόμορφοι τότε οι δυϊκοί τους χώροι είναι επίσης ισόμορφοι.

31. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

(β) Ο T είναι 1-1 και ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y .

Υπόδειξη. (α) \Rightarrow (β): Αν $Tx = 0$ τότε $\delta \|x\| \leq \|Tx\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$ και $x = 0$. Συνεπώς, $\text{Ker}(T) = \{0\}$, το οποίο δείχνει ότι ο T είναι 1-1. Έστω τώρα $y_n \in T(X)$ και $y \in Y$ ώστε $y_n \rightarrow y$. Υπάρχουν $x_n \in X$ τέτοια ώστε $y_n = Tx_n$ και, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx_m - Tx_n\| = \frac{1}{\delta} \|y_m - y_n\|.$$

Όμως η (y_n) είναι συγκλίνουσα, άρα είναι βασική, και από την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι η (x_n) είναι βασική στον X . Ο X είναι χώρος Banach, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Από τη συνέχεια του T παίρνουμε $y_n = Tx_n \rightarrow Tx$, και αφού $y_n \rightarrow y$ έπεται ότι $y = Tx \in T(X)$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y .

(β) \Rightarrow (α): Ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach Y , άρα είναι χώρος Banach κι αυτός. Ο $T : X \rightarrow T(X)$ είναι φραγμένος 1-1 και επί γραμμικός τελεστής, άρα το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δείχνει ότι ο $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ είναι φραγμένος. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει το (α) με $\delta = 1/\|T^{-1}\|$.

32. Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με τις εξής ιδιότητες: (α) ο T είναι επί, (β) υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geq \rho \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Από το (β) βλέπουμε ότι ο T είναι 1-1: αν $T(x) = 0$ τότε $\rho \|x\| \leq \|T(x)\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$, δηλαδή $x = 0$. Επίσης, ο $T^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι φραγμένος: έστω $y \in Y$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$. Τότε,

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\rho} \|T(x)\| = \frac{1}{\rho} \|y\|,$$

δηλαδή $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho}$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T = (T^{-1})^{-1}$ είναι φραγμένος.

33. Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$. Αποδείξτε ότι ο I είναι φραγμένος, ο I^{-1} δεν είναι φραγμένος, και συμπεράνατε ότι ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι ο I είναι φραγμένος προκύπτει άμεσα από την

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty,$$

η οποία ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Το γεγονός ότι ο I^{-1} δεν είναι φραγμένος προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν $f_n(t) = n - n^2 t$ στο $[0, \frac{1}{n}]$ και $f_n(t) = 0$ στο $[\frac{1}{n}, 1]$ τότε $\|f_n\|_\infty = n$ ενώ $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες. Αν ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ ήταν χώρος Banach τότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο I θα ήταν ισομορφισμός, δηλαδή ο I^{-1} θα ήταν φραγμένος.

34. Αν $x = (x_k)$ και $y = (y_k)$ είναι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

αν βέβαια η σειρά συγκλίνει. Έστω $1 < p < +\infty$, q ο συζυγής εκθέτης του p και $x_n = (x_{nk})$ μια ακολουθία στον ℓ_p . Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $y \in \ell_q$, $\langle x_n, y \rangle \rightarrow 0$.

(β) Υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x_n\|_p \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_{nk} \rightarrow 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) \Rightarrow (β): Έστω $f \in \ell_p^*$. Υπάρχει $y \in \ell_q$ ώστε $f(x) = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x \in \ell_p$. Άρα,

$$f(x_n) = \langle x_n, y \rangle \rightarrow 0$$

από την υπόθεση. Ειδικότερα, για κάθε $f \in \ell_p^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη, και από γνωστή εφαρμογή της αρχής ομοιόμορφου φράγματος η (x_n) είναι φραγμένη: υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x_n\|_p \leq K$ για κάθε n . Για το δεύτερο ζητούμενο, σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε την υπόθεση με $y = e_k$: έχουμε

$$x_{nk} = \langle x_n, e_k \rangle \rightarrow 0.$$

(β) \Rightarrow (α): Έστω $y \in \ell_q$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_{nk}| \cdot |y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_{nk}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \|x_n\|_p \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + K\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk} = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, k_0$, αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_n |\langle x_n, y \rangle| \leq K\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι $\langle x_n, y \rangle \rightarrow 0$.

35. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \rightarrow Y$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $x_n \in X$ και $n \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον X , τότε $T_n(x_n) \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. (α) \Rightarrow (β) Έστω $x_n \in X$ ώστε $n \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ να συγκλίνει. Τότε, $x_n \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$\|T_n(x_n)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x_n\| \leq M \|x_n\| \rightarrow 0.$$

Άρα, $T_n(x_n) \rightarrow 0$.

(β) \Rightarrow (α) Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α). Τότε, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_m) φυσικών αριθμών ώστε $\|T_{k_m}\| > m^4$. Άρα υπάρχουν $u_{k_m} \in S_X$ ώστε $\|T_{k_m}(u_{k_m})\| > m^4$, $m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) στον X θέτοντας $x_n = \frac{1}{m^2} u_{k_m}$ αν $n = k_m$ και $x_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|u_{k_m}\|}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

άρα, $n \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (διότι, συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach). Από το (β) ισχύει $T_n(x_n) \rightarrow 0$. Όμως,

$$\|T_{k_m}(x_{k_m})\| = \frac{1}{m^2} \|T_{k_m}(u_{k_m})\| > \frac{m^4}{m^2} = m^2 \rightarrow +\infty.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ισχύει το (α).

36. Έστω X χώρος με νόρμα, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ και $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \dots, n$.

(β) Υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| \leq M \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\|$$

για κάθε $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) \Rightarrow (β) Για κάθε $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\| \|x_0\|,$$

και το ζητούμενο έπεται με $M = \|x_0\|$.

(β) \Rightarrow (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα f_1, \dots, f_m παράγουν τον $\text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$ για κάποιον $1 \leq m \leq n$. Τότε, η απεικόνιση $T: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ είναι γραμμική, συνεχής και επί.

Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$T((M+1)B_X) \supseteq \delta B_{\mathbb{R}^m}.$$

Δηλαδή, το $T((M+1)B_X)$ είναι κυρτό και έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω ότι $(c_1, \dots, c_m) \notin T((M+1)B_X)$. Τότε, υπάρχει μη μηδενικό $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$$

για κάθε $x \in (M+1)B_X$, δηλαδή

$$(M+1) \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i \leq M \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\|,$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση: έχουμε $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \neq 0$.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Έστω $m < s \leq n$. Τότε, υπάρχουν r_1, \dots, r_m ώστε $f_s = \sum_{i=1}^m r_i f_i$. Από την υπόθεση,

$$\left| c_s - \sum_{i=1}^m r_i c_i \right| \leq M \cdot \left\| f_s - \sum_{i=1}^m r_i f_i \right\| = 0,$$

άρα

$$c_s = \sum_{i=1}^m r_i c_i = \sum_{i=1}^m r_i f_i(x_0) = f_s(x_0).$$

Δηλαδή, $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \dots, n$.

37. Έστω X χώρος Banach και (x_k) ακολουθία στον X με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $t = (t_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : X^* \rightarrow \ell_1$ με

$$T_n(x^*) = (x^*(x_1), \dots, x^*(x_n), 0, \dots).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \|x^*\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\| \right) \|x^*\|$$

για κάθε $x^* \in X^*$, άρα οι T_n είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ η ακολουθία $(T_n(x^*))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1 : πράγματι,

$$\sup_n \|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sup_n \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leq M$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)| \leq M \|x^*\|.$$

Έστω τώρα $t = (t_k) \in c_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^n t_k x_k$ είναι βασικά, απ' όπου έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και αφού $t_k \rightarrow 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t_k| \leq \varepsilon$ για κάθε $k \geq n_0$. Αν τώρα $n > m \geq n_0$ θεωρούμε το $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n t_k x_k$ και βρίσκουμε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $|x^*(s_n - s_m)| = \|s_n - s_m\|$. Δηλαδή,

$$\|s_n - s_m\| = \left| \sum_{k=m+1}^n t_k x^*(x_k) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |t_k| \cdot |x^*(x_k)| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n |x^*(x_k)|.$$

Χρησιμοποιώντας και την (*) παίρνουμε

$$\|s_n - s_m\| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)| \leq \varepsilon M \|x^*\| = \varepsilon M.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (s_n) είναι βασική ακολουθία.

38. Έστω X χώρος Banach και έστω $T : X \rightarrow X$ και $S : X^* \rightarrow X^*$ γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^*(Tx) = (Sx^*)(x)$. Τότε, οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι ο S έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n^*, S(x_n^*)) \rightarrow (x^*, z^*)$ για κάποια $x_n^*, x^*, z^* \in X^*$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_n^*(Tx) = (Sx_n^*)(x) \rightarrow z^*(x)$$

και

$$x_n^*(Tx) \rightarrow x^*(Tx) = (Sx^*)(x).$$

Δηλαδή,

$$z^*(x) = (Sx^*)(x)$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $z^* = S(x^*)$. Δηλαδή $(x^*, z^*) = (x^*, S(x^*))$, το οποίο δείχνει ότι ο S έχει κλειστό γράφημα. Άρα, ο S είναι φραγμένος.

Δείχνουμε τώρα ότι ο T έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ για κάποια $x_n, x, y \in X$. Έστω $x^* \in X^*$. Αφού $x_n \rightarrow x$ στον X , έχουμε $(Sx^*)(x_n) \rightarrow (Sx^*)(x)$ δηλαδή $x^*(Tx_n) \rightarrow x^*(Tx)$. Αφού $Tx_n \rightarrow y$, έχουμε $x^*(Tx_n) \rightarrow x^*(y)$. Δηλαδή, $x^*(y) = x^*(Tx)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Έπεται ότι $Tx = y$, άρα ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος.

39. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο T^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{T(X)} = Y$.

(β) Ο T είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.

(γ) Ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T είναι επί.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι ο T^* είναι 1-1. Αν $\overline{T(X)} \neq Y$, υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $y^* \neq 0$ και $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$. Όμως τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$, άρα $T^*(y^*) = 0$, δηλαδή $y^* = 0$ αφού ο T^* είναι 1-1. Αυτό είναι άτοπο.

Αντίστροφα, αν $\overline{T(X)} = Y$ και $T^*(y^*) = 0$, τότε $y^*(Tx) = [T^*(y^*)](x) = 0$ για κάθε $x \in X$, και λόγω της συνέχειας του y^* , $y^*(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{T(X)} = Y$, δηλαδή $y^* = 0$. Άρα, ο T^* είναι 1-1.

(β) Υποθέτουμε ότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Τότε, ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y . Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y_1^* : T(X) \rightarrow \mathbb{K}$ με $y_1^* = x^* \circ T^{-1}$. Το y_1^* είναι φραγμένο, και από το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνεται σε ένα $y^* \in Y^*$. Τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = y_1^*(Tx) = x^*(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T^*(y^*) = x^*$. Άρα, ο T^* είναι επί.

Αντίστροφα, αν ο T^* είναι επί, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης υπάρχει $r > 0$ ώστε $T^*(B_{Y^*}) \supseteq rB_{X^*}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |T^*(y^*)(x)| \geq \sup_{x^* \in rB_{X^*}} |x^*(x)| = r\|x\|.$$

Αυτό δείχνει ότι ο $T : X \rightarrow T(X)$ είναι ισομορφισμός.

(γ) Αν ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση, υπάρχει $r > 0$ ώστε $\|T^*(y^*)\| \geq r\|y^*\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Δείχνουμε ότι $\overline{T(B_X)} \supseteq rB_Y$ (υποθέτουμε το αντίθετο και καταίγουμε σε άτοπο με διαχωριστικό θεώρημα) και, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης, δείχνουμε ότι $T(B_X) \supseteq (r/2)B_Y$. Έπεται ότι $T(X) = Y$. Για το αντίστροφο, δουλεύουμε όπως στο (β).

40. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X . Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X . Αν $Q : X \rightarrow X/Y$ είναι η φυσιολογική απεικόνιση $Q(x) = [x]$, έχουμε δει ότι $\|Q(x_n) - Q(x_m)\|_0 \leq \|x_n - x_m\|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα

$n(Qx_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X/Y . Αφού ο X/Y είναι πλήρης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\|Q(x_n - x_0)\|_0 = \|Q(x_n) - Q(x_0)\|_0 \rightarrow 0$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_0$ μπορούμε τότε να βρούμε $y_n \in Y$ ώστε $\|x_n - x_0 - y_n\| \rightarrow 0$. Αφού η $(x_n - x_0)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X , έπεται ότι η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον Y . Ο Y είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $y_n \rightarrow y_0$. Τότε,

$$x_n = (x_n - x_0 - y_n) + x_0 + y_n \rightarrow x_0 + y_0.$$

41. Έστω X χώρος Banach και έστω Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X . Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον Z . Είναι οι X/Y και X/Z ισόμορφοι;

Υπόδειξη. Θεωρήστε τους $X = \ell_2$, $Y = \{x \in \ell_2 : x_1 = 0\}$ και $Z = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$. Ο $T : Y \rightarrow Z$ με $T(0, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, 0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ (δηλαδή, $Te_n = e_{n+1}$, $n \geq 2$) είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Όμως, $\dim(X/Y) = 1$ και $\dim(X/Z) = 2$. Άρα, δεν υπάρχει (γραμμικός) ισομορφισμός μεταξύ των X/Y και X/Z .

42. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω Y υπόχωρος του X . Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \rightarrow Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \rightarrow Y$. Θέτουμε $Z = \text{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y, z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X .

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y .

Υπόδειξη. (α) Ο τελεστής $T : Y \oplus Z \rightarrow X$ με $T(y, z) = y + z$ είναι γραμμικός, 1-1 και επί. Για το 1-1 παρατηρήστε ότι αν $y + z = 0$ τότε $y = P(y + z) = 0$, οπότε και $z = 0$. Για το επί, παρατηρήστε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = Px + (x - Px)$, όπου $y = Px \in Y$ και $P(x - Px) = y - Py = 0$ δηλαδή $z = x - Px \in \text{Ker}(P) = Z$.

Παρατηρήστε ότι $\|T(y, z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|(y, z)\|_1$, άρα $\|T\| \leq 1$. Επίσης, αν $x = y + z$ τότε

$$\|y\| = \|P(y + z)\| \leq \|P\| \cdot \|y + z\| = \|P\| \cdot \|x\|$$

και

$$\|z\| = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq (1 + \|P\|)\|x\|.$$

Άρα,

$$\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\| \leq (1 + 2\|P\|)\|x\|,$$

το οποίο αποδεικνύει την $\|T^{-1}\| \leq 1 + 2\|P\|$. Έπεται ότι ο T είναι ισομορφισμός.

(β) Η απεικόνιση $Q_z : X/Y \rightarrow Z$ με $Q_z(x+Y) = x - Px$ είναι ισομορφισμός. Επίσης, η απεικόνιση $Q_y : X/Z \rightarrow Y$ με $Q_y(x + Z) = Px$ είναι ισομορφισμός.

43. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z .

Υπόδειξη. Ορίζουμε $T : Z \rightarrow X/Y$ με $T(z) = z + Y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T(z)\|_{X/Y} = \|z + Y\|_{X/Y} = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \leq \|z\|$$

για κάθε $z \in Z$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Παρατηρούμε ότι $T(z) = z + Y = 0 + Y$ αν και μόνο αν $z \in Y$. Όμως τότε $z \in Y \cap Z = \{0\}$, δηλαδή $z = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι 1-1. Επίσης, ο T είναι επί: αν $x + Y \in X/Y$, τότε το x γράφεται στη μορφή $x = y + z$ για κάποια $y \in Y$ και $z \in Z$, άρα $x + Y = z + y + Y = z + Y = T(z)$. Δηλαδή, $X/Y = T(Z)$.

Αφού οι X/Y και Z είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ισομορφισμός. Άρα, ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z .

44. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης του X . Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, να δείξετε ότι $f \in X^*$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $z_1, \dots, z_n \in X$ ώστε κάθε $x \in X$ να γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$ όπου $y \in Y$ και $z \in Z := \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \rightarrow X/Y$ και την $\tau : X/Y \rightarrow Z$ με $\tau(x + Y) = z$, όπου $x = y + z$. Η τ είναι συνεχής διότι $\dim(X/Y) = n < \infty$. Παρατηρούμε ότι η $P = \tau \circ Q$ ικανοποιεί την $P(x) = (\tau \circ Q)(y + z) = \tau(z + Y) = z$ για κάθε $x = y + z \in X$. Επίσης, η P είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων.

Δείχνουμε τώρα τη συνέχεια της f στο 0: έστω $x_n = y_n + z_n \rightarrow 0$. Τότε, $z_n = P(x_n) \rightarrow 0$ αφού η P είναι συνεχής. Η $f|_Z$ είναι συνεχής (διότι $\dim(Z) = n < \infty$), άρα $f(z_n) \rightarrow 0$. Επίσης, $y_n = x_n - z_n \rightarrow 0 - 0 = 0$ και, αφού η $f|_Y$ είναι συνεχής, $f(y_n) \rightarrow 0$. Έπεται ότι $f(x_n) = f(y_n) + f(z_n) \rightarrow 0 + 0 = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, έπεται ότι $f \in X^*$.

45. Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε διανυσματικό υπόχωρο Y του X , ορίζουμε

$$N(Y) = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in Y\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^* .

(ii) Αποδείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί διανυσματικοί υπόχωροι του X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

Υπόδειξη. (i) Έστω $f, g \in N(Y)$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε $f(y) = g(y) = 0$, άρα

$$(af + bg)(y) = af(y) + bg(y) = 0,$$

άρα $af + bg \in N(Y)$. Έπεται ότι ο $N(Y)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X^* .

Έστω τώρα $f_n \in N(Y)$ και $f \in X^*$ ώστε $f_n \rightarrow f$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε $0 = f_n(y) \rightarrow f(y)$, άρα $f(y) = 0$. Αφού $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$ έχουμε $f \in N(Y)$. Έπεται ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* .

(ii) Αφού $Y_1 \neq Y_2$, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι υπάρχει $z \in Y_1 \setminus Y_2$. Αφού ο Y_2 είναι κλειστός υπόχωρος του X , από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(z) \neq 0$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y_2$. Τότε, $f \in N(Y_2)$ και $f \notin N(Y_1)$ (διότι $z \in Y_1$ και $f(z) \neq 0$). Άρα, $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

46. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X . Ο μηδενιστής του Y είναι το

$$N(Y) = \{f \in X^* : \forall y \in Y f(y) = 0\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^* . Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \rightarrow Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.

(β) Αποδείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \rightarrow N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \rightarrow X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

Υπόδειξη. (α) Στην προηγούμενη άσκηση ελέγξαμε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* . Ορίζουμε $T : X^*/N(Y) \rightarrow Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$. Ο T είναι καλά ορισμένος: αν $g \in f + N(Y)$ τότε $g - f \in N(Y)$, άρα $(g - f)|_Y \equiv 0$, δηλαδή, $f|_Y = g|_Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Δείχνουμε ότι είναι επί: έστω $h \in Y^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει επέκταση $f \in X^*$ της h . Τότε, $T(f + N(Y)) = f|_Y = h$.

Ο T είναι ισομετρία: έστω $f \in X^*$. Για κάθε $g \in N(Y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= \sup\{|(f - g)(x)| : x \in B_X\} \geq \sup\{|(f - g)(y)| : y \in B_Y\} \\ &= \sup\{|f(y)| : y \in S_Y\} = \|f|_Y\| = \|T(f + N(Y))\|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f + N(Y)\|_0 = \inf\{\|f - g\| : g \in N(Y)\} \geq \|T(f + N(Y))\|.$$

Από την άλλη πλευρά, η $f|_Y$ έχει επέκταση $f_0 \in X^*$ με $\|f_0\| = \|f|_Y\|$. Από την $f - f_0 \in N(Y)$ παίρνουμε

$$\|f + N(Y)\|_0 \leq \|f_0\| = \|f|_Y\| = \|T(f + N(Y))\|.$$

(β) Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \rightarrow X/Y$ και ορίζουμε $T : (X/Y)^* \rightarrow N(Y)$ με $T(g) = g \circ Q$. Ο T είναι καλά ορισμένος: έστω $g \in (X/Y)^*$. Αν $y \in Y$ τότε $Q(y) = [0]$, άρα $T(g)(y) = g([0]) = 0$. Δηλαδή, $T(g) \in N(Y)$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Δείχνουμε ότι είναι επί: έστω $f \in N(Y)$. Ορίζουμε $g : X/Y \rightarrow \mathbb{K}$ με $g(x + Y) = f(x)$ (η g είναι καλά ορισμένη, αφού αν $x_1 \in x + Y$ τότε $f(x_1) = f(x)$). Τότε $T(g)(x) = g(Q(x)) = g(x + Y) = f(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T(g) = f$.

Ο T είναι ισομετρία: παρατηρούμε πρώτα ότι $\|T(g)\| = \|g \circ Q\| \leq \|Q\| \cdot \|g\| \leq \|g\|$ για κάθε $g \in (X/Y)^*$. Για την αντίστροφη ανισότητα,

$$\begin{aligned} \|g\| &= \sup\{|g(x + Y)| : \|x + Y\|_0 < 1\} \leq \sup\{|(g \circ Q)(z)| : \|z\| < 1\} \\ &= \sup\{|[T(g)](z)| : \|z\| < 1\} = \|T(g)\|, \end{aligned}$$

αφού, αν $\|x + Y\|_0 < 1$ τότε υπάρχει $y \in Y$ ώστε $\|x + y\| < 1$ και, αν θέσουμε $z = x + y$ έχουμε $[T(g)](z) = (g \circ Q)(z) = g(x + Y)$.