Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

- Ασκήσεις -

Ονομ/μο : Κώστας Μπιζάνος, Αλέξανδρος Βλάχος
Ακαδηματικό Έτος 2019-2020

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πρώτη Εργασία

1.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Έστω* A, B *δύο σύνολα. Αν* $A =_c B$*, δείξτε ότι* $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με*

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

είναι μία $1 - 1$ *και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{N}$.

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι για κάθε σύνολο* A *ισχύει*

$$\mathcal{P}(A) =_c (A \to \{0, 1\})$$

όπου $(A \to \{0, 1\})$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο* A *και τιμές στο* $\{0, 1\}$.

Άσκηση 4. *Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό* $n \geq 2$ *ισχύει* $\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$. *(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι* $\mathbb{Q}^n =_c \mathbb{Q}$.*)*

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα* A, B, C *ισχύει*

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

(Υπενθύμιση: Αν X, Y *είναι σύνολα, τότε* $(X \to Y)$ *συμβολίζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το* X *στο* Y.*)*

Άσκηση 6. *Αποδείξτε ότι το σύνολο* $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, *που περιέχει όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών, είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$, *δηλαδή*

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}.$$

(Υπόδειξη: Στο μάθημα έχουμε αποδείξει, και μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, ότι $\mathbb{R} =_c (\mathbb{N} \to \{0,1\})$, *όπου* $(\mathbb{N} \to \{0,1\}) = \Delta$ *είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών.)*

Άσκηση 7. *Θέτουμε*

$$C[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής συνάρτηση}\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο $C[0,1]$ *είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Μια συνεχής συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές που παίρνει στους ρητούς αριθμούς.)

Άσκηση 8. *Θέτουμε*

$$\mathcal{M}[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ μονότονη συνάρτηση}\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{M}[0,1]$ *είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Μια μονότονη συνάρτηση έχει αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.)

Άσκηση 9. *(i) Έστω* A *ένα σύνολο από* **κυκλικούς δίσκους** *στο καρτεσιανό επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Αποδείξτε ότι το σύνολο* A *είναι αριθμήσιμο.*

(ii) Έστω B *ένα σύνολο από* **κύκλους** *(περιφέρειες) στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το* B *κατ΄ ανάγκη αριθμήσιμο;*

(iii) Έστω C *ένα σύνολο από καμπύλες στο επίπεδο που έχουν το σχήμα του 8 και ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το* C *κατ΄ ανάγκη αριθμήσιμο;*

Μέρος 2. Αξιωματική Συνολοθεωρία.

Άσκηση 10. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα μονοσύνολα. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο* A *τέτοιο ώστε*

$$X \in A \Leftrightarrow (\exists x)[X = \{x\}].$$

Άσκηση 11. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα διατεταγμένα ζεύγη. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε*

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists a, b)[x = (a, b)].$$

Άσκηση 12. *Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B και R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο B. Ορίζουμε το σύνολο Q ως εξής:*

$$Q = \{(x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in R\}.$$

Αποδείξτε ότι το Q είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A.

Άσκηση 13. *Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ώστε για κάθε f και g στο $\mathcal{A}$ να ισχύει είτε $f \subseteq g$ ή $g \subseteq f$. Αποδείξτε ότι $\bigcup \mathcal{A}$ είναι μια συνάρτηση.*

Άσκηση 14. *Έστω A, B δύο σύνολα, ώστε $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Αποδείξτε ότι $A = B$.*

Για τις επόμενες ασκήσεις, θα χρειαστείτε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός. *Ένα σύνολο A καλείται* **μεταβατικό** *όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x \subseteq A$.*

Άσκηση 15. *Έστω A ένα μεταβατικό σύνολο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(i) *Αν $x \in B$ και $B \in A$, τότε $x \in A$.*

(ii) $\cup A \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Άσκηση 16. *Αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, δείξτε ότι $\bigcup A^+ = A$.*

Άσκηση 17. *Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Αξίωμα Επαγωγής.)*

Άσκηση 18. *Αποδείξτε ότι το σύνολο ω των φυσικών αριθμών είναι μεταβατικό σύνολο.*
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Αξίωμα Επαγωγής.)

Άσκηση 19. *Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το σύνολο $A^+ = A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό.*

Άσκηση 20. *(i) Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $\mathcal{P}(A)$ είναι επίσης ένα μεταβατικό σύνολο.*

(ii) *Αποδείξτε ότι αν το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό σύνολο, τότε και το A είναι μεταβατικό σύνολο.*

1.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Έστω A, B δύο σύνολα. Αν $A =_c B$, δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$.

   Λύση : Έχουμε πως $A =_c B$, άρα υπάρχει $f : A \to B$ 1-1 και επί αντιστοιχία.Τώρα θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

   $$g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) : X \mapsto g(X) = f(X) = \{f(x) \in B : x \in X\}.$$

   Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι αντιστοιχία.

- Για το 1-1 : Έστω $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ με $X \neq Y$.Αφού $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ ισχύει ότι $X, Y \subseteq A$ και αφού $X \neq Y$ υπάρχει $x \in X$, ώστε $x \neq y$, για κάθε $y \in Y$.Από υπόθεση η f είναι 1-1, άρα $f(x) \neq f(y)$, για κάθε $y \in Y$.Η σχέση αυτή έπεται άμεσα ότι $g(X) \neq g(Y)$, άρα g 1-1.

- Για το επί : Είναι άμεσο από τον ορισμό της g ότι $g(\emptyset) = \emptyset$.Έστω τώρα $\emptyset \neq Y \in \mathcal{P}(B)$, δηλαδή $\emptyset \neq Y \subseteq B$.Έστω $y \in Y$, τότε αφού f είναι επί, υπάρχει $x \in X$, ώστε $f(x) = y$.Από αυτή τη σχέση είναι άμεσο ότι $g(f^{-1}[Y]) = Y$, άρα η g είναι επί.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

   $$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

   είναι μία $1 - 1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και $\mathbb{N}$.

   Λύση : Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι μονομορφισμός.Έστω $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ώστε να ισχύει $f(m_1, n_1) = f(m_2, n_2) \Leftrightarrow 2^{m_1}(2n_1 + 1) - 1 = 2^{m_2}(2n_2 + 1) - 1 \Leftrightarrow 2^{m_1 - m_2}(2n_1 + 1) = 2n_2 + 1$.Επειδή $2n_1 + 1, 2n_2 + 1$ είναι περιττοί είναι άμεσο ότι $m_1 = m_2$.Τότε $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2$.Συνεπώς ισχύει ότι $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$, δηλαδή η f είναι $1 - 1$.

   Για το επί : Έστω $n \in \mathbb{N}$.Αν $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, τότε $f(0, k) = n$.Αν έχουμε πως $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

   (i) Αν $k = 2\lambda + 1,\ \lambda \in \mathbb{N}$, τότε $f(1, \lambda) = n$.

   (ii) Αν $k = 2^j,\ j \in \mathbb{N}$, τότε $f(j + 1, 0) = n$.

   (iii) Αν $k = 2^j(2\lambda + 1),\ \lambda, j \in \mathbb{N}$, τότε $f(j + 1, \lambda) = n$.

   Από τις παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ώστε να ισχύει $f(k, m) = n$, άρα η f είναι επί.

3. Δείξτε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει

   $$\mathcal{P}(A) =_c (A \to \{0, 1\})$$

   όπου $(A \to \{0, 1\})$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο A και τιμές στο $\{0, 1\}$.

Λύση : Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : \mathcal{P}(A) \to (A \to \{0,1\}) : X \mapsto g : A \to \{0,1\} : g(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in X \\ 1\ , & x \in A/X \end{cases}$$

Τότε παρατηρούμε ότι η f είναι $1-1$.Πράγματι, έχει $X, Y \subseteq A$ με $X \neq Y$.Δηλαδή υπάρχει $x \in X$, ώστε $x \notin Y$.Τότε έχουμε πως :

$$f(X) = g : A \to \{0,1\} : g(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in X \\ 1\ , & x \in A/X \end{cases}$$

και επίσης

$$f(Y) = h : A \to \{0,1\} : h(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in Y \\ 1\ , & x \in A/Y \end{cases}$$

Άρα συμπεραίνουμε πως $g \neq h$, αφού $g(x) = 0 \neq 1 = h(x)$.Άρα τελικά έχουμε πως $f(X) \neq f(Y)$.

Τώρα για το επί θεωρούμε μια $g : A \to \{0,1\} \in (A \to \{0,1\})$.Έστω $X = \{x \in A : g(x) = 0\} \subseteq A$.Τότε είναι άμεσο πως $f(X) = g : A \to \{0,1\}$.Τελικά λοιπόν συμπεραίνουμε πως η f είναι επί, άρα

$$\mathcal{P}(A) =_c (A \to \{0,1\}).$$

4. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει $\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$.(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\mathbb{Q}^n =_c \mathbb{Q}$.)

   Λύση : Γνωρίζουμε ότι ισχύει $(0,1) =_c \mathbb{R}$, όπου έπεται ότι $(0,1)^n =_c \mathbb{R}^n$.Λόγω των προηγούμενων παρατηρήσεων αρκεί να δείξουμε, ότι $(0,1)^n =_c (0,1)$ για κάθε $n \geq 2$.Η απόδειξη θα γίνει με χρήση επαγωγής.

   Βάση : Για $n = 2$, θα δείξουμε ότι $(0,1)^2 =_c (0,1)$.Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : (0,1) \to (0,1)^2,\ a \mapsto (a, \frac{1}{2}).$$

   Η f είναι άμεσο ότι είναι $1-1$, δηλαδή $(0,1) \leq_c (0,1)^2$.Παρατηρούμε ότι κάθε $c \in (0,1)$ γράφεται σε δεκαδική μορφή ως $c = 0.c_1c_2\cdots$ Ορίζουμε απεικόνιση g ως εξής :

$$g : (0,1)^2 \to (0,1), (a,b) = (0.a_1a_2\cdots, 0.b_1b_2\cdots) \mapsto 0.a_1b_1a_2b_2\cdots.$$

   Τότε η g είναι μονομορφισμός.Πράγματι, έστω $(a,b),(a',b') \in (0,1)^2$, ώστε $(a,b) \neq (a',b')$.Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $a = 0.a_1a_2\cdots \neq a' = 0.a'_1a'_2\cdots$, δηλαδή υπάρχει $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $a_i \neq a'_i$.Επέιδη a_i, a'_i βρίσκονται στην ίδια θέση στην δεκαδική αναπαράσταση των $g(a,b)$ και $g(a',b')$ είναι άμεσο ότι $g(a,b) \neq g(a',b')$.Άρα, η g είναι $1-1$, δηλαδή $(0,1)^2 \leq_c (0,1)$.Από θεώρημα Shroder-Bernstein, έχουμε πως $(0,1)^2 = (0,1)$.

Επαγωγικό Βήμα : Έστω ότι υπάρχει $n > 2$, ώστε $(0,1)^n =_c (0,1)$.Δηλαδή υπάρχει αντιστοιχία $f : (0,1)^n \to (0,1)$. Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$h : (0,1)^{n+1} \to (0,1), (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \mapsto g(f(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_{n+1}).$$

Επειδή οι f, g είναι $1-1$ συμπεραίνουμε ότι και η h είναι $1-1$, δηλαδή $(0,1)^{n+1} \leq_c (0,1)$.Εύκολα αποδεικνύεται ότι $(0,1) \leq_c (0,1)^{n+1}$ μέσω της απεικόνισης $k : (0,1) \to (0,1)^{n+1} : x \to (x, 0, \cdots, 0)$, η οποία είναι $1-1$.Από θεώρημα Shroder-Bernstein ισχύει ότι $(0,1)^{n+1} =_c (0,1)$, δηλαδή ισχύει $(0,1)^n =_c (0,1)$, για κάθε $n \geq 2$.Λόγω των αρχικών παρατηρήσεων είναι άμεσο ότι :

$$\mathbb{R}^n =_c (0,1)^n =_c (0,1) =_c \mathbb{R},\ n \geq 2.$$

5. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

(Υπενθύμιση: Αν X, Y είναι σύνολα, τότε $(X \to Y)$ συμβολίζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το X στο Y.)

Λύση : Αν κάποιο από τα A, B, C είναι το κενό το αποτέλεσμα έπεται άμεσα.Αλλιώς, θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : ((A \times B) \to C) \to (A \to (B \to C)),$$

$$g : A \times B \to C,\ g(a,b) = c \mapsto h : A \to (B \to C) : a \mapsto k_a : B \to C, k_a(b) = g(a,b) = c.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1.Πράγματι έστω $g, g' \in (A \times B \to C)$ με $g \neq g'$.Δηλαδή υπάρχει $(a,b) \in A \times B$, ώστε $g(a,b) = c \neq c' = g'(a,b)$.Θα δείξουμε ότι $f(g) \neq f(g')$.Παρατηρούμε λοιπόν πως :

$$f(g) = h : A \to (B \times C) : a \mapsto k_a : B \to C,\ k_a(b) = c$$

ενώ

$$f(g') = h' : A \to (B \times C) : a \mapsto k'_a : B \to C,\ k'_a(b) = c'.$$

Είναι άμεσο ότι $k \neq k'$, αφού $k'(b) \neq k(b)$ λόγω της παραπάνω υπόθεσης.Άρα ισχύει πως $h \neq h'$, αφού $h(k) \neq h(k')$, δηλαδή $f(g) \neq f(g')$.Αφού για $g \neq g'$ ισχύει ότι $f(g) \neq f(g')$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι μονομορφισμός.

Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι επί.Έστω $a \in A, b \in B, c \in C$.Θεωρούμε την απεικόνιση : $h : A \to (B \to C) : a \mapsto k_a : B \to C : b \mapsto c$.Τότε για την απεικόνιση $g : A \times B \to C, : (a,b) \to c$ ισχύει ότι $f(g) = h$, αφού τα a, b, c ήταν τυχαία.Άρα η f είναι επί, δηλαδή συμπεραίνουμε πως η f είναι αντιστοιχία, ισοδύναμα συμπεραίνουμε ότι :

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

6. Αποδείξτε ότι το σύνολο $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, που περιέχει όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών, είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}.$$

(Υπόδειξη: Στο μάθημα έχουμε αποδείξει, και μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, ότι $\mathbb{R} =_c (\mathbb{N} \to \{0,1\})$, όπου $(\mathbb{N} \to \{0,1\}) = \Delta$ είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών.)

Λύση : Τώρα γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R} =_c (\mathbb{N} \to \{0,1\})$, δηλαδή υπάρχει αντιστοιχία :

$$f : \mathbb{R} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\}), x \mapsto f(x) = x_n.$$

Είναι άμεσο λοιπόν, αφού κάθε όρος πραγματικής ακολουθίας χαρακτηρίζεται από μια δυαδική ακολουθία με αμφιμονοσήμαντο τρόπο λόγω της παραπάνω παρατήρησης ισχύει ότι $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c (\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})) =_c (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\})$, λόγω της Άσκησης 5.Όμως λόγω της Άσκησης 2. ισχύει ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$, δηλαδή $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}) =_c (\mathbb{N} \to \{0,1\}) =_c \mathbb{R}$.Τελικά λοιπόν έχουμε ότι $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$.

7. Θέτουμε

$$C[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής συνάρτηση}\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο $C[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Μια συνεχής συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές που παίρνει στους ρητούς αριθμούς.)

Λύση :

1ος τρόπος. Αρχικά γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές που παίρνει στους ρητούς.Άρα μονομορφισμός

$$g : C[0,1] \to ((\mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{R}), f \to f|_{\mathbb{Q}}.$$

Ισχυρισμός : Το $Q \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο , δηλαδή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, μπορεί να απαριθμηθεί ως εξής :

$$x_1 = 1/1, x_2 = 1/2, x_3 = 1/3, x_4 = 2/3, x_5 = 1/4, x_6 = 3/4, x_7 = 1/5, \cdots$$

Αφού το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ δέχεται απαρίθμηση, τότε είναι αριθμήσιμο και αφού είναι άπειρο είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. □

Αφού $\mathbb{Q} \cap [0,1] =_c \mathbb{N}$, τότε $(\mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{R}) =_c (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$.Λόγω του αρχικού μονομορφισμού συμπεραίνουμε $C[0,1] \leq_c \mathbb{R}$.Τώρα είναι άμεσο ότι $\mathbb{R} \leq C[0,1]$ λόγω του μονομορφισμού :

$$h : \mathbb{R} \to C[0,1], x \mapsto f(x) = x.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε ότι $C[0,1] =_c \mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Έστω $\pi : \mathbb{N} \to \{x \in [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}$, όπου είναι μια αρίθμηση των ρητών στο $[0,1]$.Θέωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$F : C[0,1] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f \mapsto (f(\pi(1), f(\pi(2)), \cdots).$$

Η F είναι μονομορφισμός.Πράγματι, έστω $f, g \in C[0,1]$ με $f \neq g$.Επειδή η f, g καθορίζονται πλήρως από τις τιμές τους στου ρητούς, υπάρχει $\pi(j) \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ώστε $f(\pi(j)) \neq g(\pi(j))$.Άρα είναι άμεσο ότι $F(f) \neq F(g)$.Άρα παίρνουμε $C[0,1] \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, λόγω της Άσκησης 6.Τώρα θεωρώντας την εξής απεικόνισης :

$$G : \mathbb{R} \to C[0,1], c \mapsto f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = c \ ,$$

είναι άμεσο ότι η G είναι μονομορφισμός, άρα $\mathbb{R} \leq_c C[0,1]$.Έτσι από θεώρημα Schroder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

8. Θέτουμε

$$\mathcal{M}[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ μονότονη συνάρτηση}\}\,.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{M}[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Μια μονότονη συνάρτηση έχει αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.)

Λύση : Έστω $f \in \mathcal{M}[0,1]$.Τότε γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$, άρα υπάρχουν το πολύ $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ τρόποι να καθορίσουμε τις τιμές της f στους ρητούς.Έστω τώρα $x \in [0,1]$ άρρητος.
Θέτουμε

$$f^-(x) = \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,x)} f(q) \quad \text{και} \quad f^+(x) = \inf_{\mathbb{Q} \cap (x,1]} f(q).$$

Έτσι ορίζουμε την εξής οικογένεια διαστημάτων :

$$\mathcal{X} = \{(f^-(x), f^+(x)) \ : x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}\}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Για $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ ισχύει ότι $(f^-(x), f^+(x)) = \emptyset$, δηλαδή $f(x) = f^-(x) = f^+$ και από τον ορισμό των $f^-(x), f^+(x)$ έχουμε ότι υπάρχουν το πολύ $\mathfrak{c}$ επιλογές (κάθε $f^-(x), f^+(x)$ εξάρτάται από ένα υποσύνολο του $\mathbb{Q}$).

(ii) Έστω $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ και $(f^-(x), f^+(x)) \neq \emptyset$, τότε η τιμή $f(x)$ έχει το πολύ $|(f^-(x), f^+(x))| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ επιλογές.Όμως η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, άρα το πλήθος τέτοιων διαστημάτων είναι αριθμήσιμο.Άρα, η τιμή $f(x)$ έχει το πολύ $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ επιλογές.

Άρα, τελικά έχουμε ότι $|\mathcal{M}[0,1]| \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.Επίσης είναι άμεσο ότι $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{M}[0,1]|$, άρα $\mathcal{M}[0,1] =_c \mathbb{R}$.

9.

(i) Έστω A ένα σύνολο από **κυκλικούς δίσκους** στο καρτεσιανό επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Έστω B ένα σύνολο από **κύκλους** (περιφέρειες) στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το B κατ΄ ανάγκη αριθμήσιμο;

(iii) Έστω C ένα σύνολο από καμπύλες στο επίπεδο που έχουν το σχήμα του 8 και ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το C κατ΄ ανάγκη αριθμήσιμο;

Λύση : (i) Κάθε κυκλικός δίσκος C περιέχει ένα ζεύγος ρητών $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}^2$ στο $\mathbb{R}^2$..Για κάθε κυκλικό δίσκο C από το σύνολο A επιλέγουμε ένα ζεύγος $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ μέσα στο δίσκο και θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : A \to \mathbb{Q}^2, C \mapsto (q_1, q_2).$$

Τότε η απεικόνιση f είναι μονομορφισμός.Πράγματι, αν $C_1, C_2 \in A$ με $C_1 \neq C_2$, τότε λόγω της υπόθεσης οι δίσκοι C_1, C_2 δεν τέμνονται, άρα $f(C_1) \neq f(C_2)$.Δηλαδή συμπεραίνουμε πως $C \leq_c \mathbb{Q}^2$.Όμως $\mathbb{Q}^2 =_c \mathbb{N}^2$ και λόγω της Άσκησης 2. έχουμε ότι $\mathbb{Q}^2 =_c \mathbb{N}$.Άρα, τελικά έχουμε πως $A \leq_c \mathbb{N}$, δηλαδή το A είναι αριθμήσιμο. (ii) Με $S(O, r)$ θα συμβολίζουμε τους κύκλους με κέντρο το σημείο O (όχι απαραίτητα το $(0, 0)$) και ακτίνα r.Έστω $O \in \mathbb{R}^2$.Θεωρούμε το σύνολο $B = \{S(O, r) : r \in [0, 1]\}$, το οποίο ικανοποιεί τις αρχικές υποθέσεις, αφού ομοκεντροι κύκλοι με διαφορετική ακτίνα δεν τέμνονται.Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : B \to [0, 1], S(O, r) \mapsto r.$$

Τότε η f είναι αντιστοιχία.Πράγματι, η f είναι μονομορφισμός, λόγω της αρχικής υπόθεσης και η f είναι επιμορφισμός, αφού για κάθε $r \in [0, 1]$ έχουμε ότι $f(S(O, r)) = r$. Άρα, συμπεραίνουμε πως $B =_c [0, 1]$.Τελικά λοιπόν ισχύει ότι το σύνολο B δεν είναι αριθμήσιμο.

Αξιωματική Συνολοθεωρία

10. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα μονοσύνολα. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε

$$X \in A \Leftrightarrow (\exists x)[X = \{x\}].$$

Λύση : Έστω ότι υπάρχει σύνολο A, όπου $A = \{X : (\exists x)[X = \{x\}]\}$.Αφού το A είναι σύνολο, ορίζεται η ένωση του A, δηλαδή το σύνολο $\bigcup A = \{t : (\exists X \in A)[t \in X]\}$ το οποίο όμως παρατηρούμε ότι είναι το σύνολο όλων των συνόλων το οποίο έχουμε δείξει ότι δεν υπάρχει, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.Τελικά λοιπόν συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει σύνολο A ώστε $X \in A \Leftrightarrow (\exists x)[X = \{x\}$.

11. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα διατεταγμένα ζεύγη. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists a, b)[x = (a, b)].$$

Λύση : Έστω ότι υπάρχει το σύνολο $A = \{x : (\exists a, b)[x = (a, b)]\}$.Χρησιμοποιώντας ότι κάθε διατεταγμένο ζεύγος είναι ορισμένο με βάση τον τελεστή του Kuratowski έχουμε ότι το A γράφεται ισοδύναμα :

$$A = \{x : (\exists a, b)[x = \{\{a\}, \{a, b\}]\}.$$

Αφού το A είναι σύνολο, τότε ορίζεται το σύνολο $\bigcup A = \{t : (\exists X \in A\}[t \in X\}$ το οποίο γράφεται ισοδύναμα $\bigcup A = \{t : (\exists a, b)[t = \{a, b\}] \vee (\exists x)[t = \{x\}]\}$.Αφού το $\bigcup A$ είναι σύνολο ορίζεται το σύνολο $\bigcup(\bigcup A)$, το οποίο προκύπτει ότι είναι το σύνολο όλων των συνόλων το οποίο έχουμε δείξει ότι δεν είναι σύνολο, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.Τελικά λοιπόν συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει σύνολο A, ώστε $X \in A \Leftrightarrow (\exists x)[X = \{x\}]$.

12. Έστω $f\colon A \to B$ μια συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B και R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο B. Ορίζουμε το σύνολο Q ως εξής:

$$Q = \{(x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in R\}.$$

Αποδείξτε ότι το Q είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A.

Λύση : (i) Αρχικά έχουμε πως $(x, x) \in \mathbb{R}$.Πράγματι, αφού $f(x) \in B$ και η R είναι σχέση ισοδυναμία, ισχύει ότι είναι είναι αυτοπαθής, άρα $(f(x), f(x)) \in R$, δηλαδή $(x, x) \in Q$. (**αυτοπαθής**)

(ii) Έστω $(x, y) \in Q$, δηλαδή $(f(x), f(y)) \in R$.Αφού η R είναι σχέση ισοδυναμίας έχουμε ότι $(f(y), f(x)) \in R$, δηλαδή $(y, x) \in Q$. (**συμμετρική**)

(iii) Έστω ότι $(x, y), (y, z) \in Q$, δηλαδή $(f(x), f(z)), (f(y), f(z)) \in R$.Αφού η R είναι σχέση ισοδυναμίας ισχύει ότι $(f(x), f(z)) \in R$, δηλαδή $(x, z) \in Q$. (**μεταβατική**)

Από τις σχέσεις (i),(ii),(iii) συμπεραίνουμε ότι η σχέση $Q \subseteq A \times A$ είναι **σχέση ισοδυναμίας**.

13. Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ώστε για κάθε f και g στο $\mathcal{A}$ να ισχύει είτε $f \subseteq g$ ή $g \subseteq f$. Αποδείξτε ότι $\bigcup \mathcal{A}$ είναι μια συνάρτηση.

Λύση : Έστω $(x, y), (x, y') \in \bigcup \mathcal{A}$.Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{A}$, ώστε $(x, y) \in f$ και $(x, y') \in g$.Όμως αφού $f, g \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $f \subseteq g$ ή $g \subseteq f$.Έστω ότι $f \subseteq g$, τότε αφού $(x, y) \in f$ έχουμε ότι $(x, y) \in g$ και $(x, y') \in g$.Επειδή η g είναι συνάρτηση έπεται άμεσα ότι $y = y'$.Με ακριβώς αναλογο τρόπο δείχνουμε ότι $y = y'$ αν $g \subseteq f$.Τελικά λοιπόν έχουμε ότι $(x, y), (x, y') \in \bigcup \mathcal{A}$ αν και μόνο αν $y = y'$, δηλαδή $\bigcup \mathcal{A}$ είναι συνάρτηση.

14. Έστω A, B δύο σύνολα, ώστε $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Αποδείξτε ότι $A = B$.

Λύση : Έστω A, B δύο σύνολα, όπου $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ και $A \neq B$.Χωρίς βλάβη της γενικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in A$ και $x \notin B$.Τότε είναι άμεσο ότι $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ και $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$, το οποίο είναι άτοπο.Άρα έχουμε ότι $A = B$.

Για τις επόμενες ασκήσεις, θα χρειαστείτε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός. *Ένα σύνολο A καλείται* **μεταβατικό** *όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x \subseteq A$.*

15. Έστω A ένα μεταβατικό σύνολο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν $x \in B$ και $B \in A$, τότε $x \in A$.

(ii) $\bigcup A \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Λύση : (i) Έστω $x \in B$ και $B \in A$, τότε αφού το A είναι μεταβατικό $B \subseteq A$.Άρα, αφού $x \in B$, τότε $x \in A$.

(ii) Έστω $x \in \bigcup A$.Τότε υπάρχει $X \in A$, ώστε $x \in X$.Όμως το A είναι μεταβατικό και αφού $X \in A$ έπεται ότι $X \subseteq A$.Τότε έχουμε ότι $x \in X$, δηλάδή $x \in A$, δηλαδή το ζητούμενο.

(iii) Έστω $X \in A$.Αφού το A είναι μεταβατικό, τότε $X \subseteq A$, άρα $X \in \mathcal{P}(A)$, δηλαδή το ζητούμενο.

16. Αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, δείξτε ότι $\bigcup A^+ = A$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\bigcup A^+ \subseteq A$.Πράγματι, έστω $x \in \bigcup A^+$, δηλαδή υπάρχει $X \in A^+$, ώστε $x \in X$.Όμως γνωρίζουμε πως, $A^+ = A \cup \{A\}$, δηλαδή $X \in A$ ή $X \in \{A\}$.Αν $X \in A$, τότε αφού το A είναι μεταβατικό ισχύει ότι $X \subseteq A$, δηλαδή $x \in A$.Τώρα έστω ότι $X \in \{A\}$, δηλαδή $X = A$, όπου είναι άμεσο ότι $x \in A$.Άρα σε κάθε περίπτωση $x \in A$.
Για την ολοκλήρωση της επίλυσης αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq \bigcup A^+$.Έστω $y \in A$.Όμως $A \in \{A\}$, δηλαδή $A \in \bigcup A^+$.Από τον ορισμό του $\bigcup A^+$ είναι άμεσο ότι $y \in \bigcup A^+$, δηλαδή το ζητούμενο.

17. Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο.
(Υπόδειξη : Χρησιμοποιείστε το Αξίωμα Επαγωγής.)

Λύση : Με χρήση του Αξιώματος της Επαγωγής θα αποδείξουμε ότι κάθε φυσικό αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο.Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι $X = \{n \in \omega : n \text{ είναι μεταβατικό σύνολο } \} = \omega$

Βάση : Το $0 = \emptyset$ είναι άμεσα μεταβατικό σύνολο, καθώς αν δεν ήταν θα υπήρχε $x \in 0$, που $x \nsubseteq 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Επαγωγικό Βήμα : Έστω ότι υπάρχει $n \in X$, όπου το n είναι μεταβατικό σύνολο.Θα δείξουμε ότι το $n^+ = n \cup \{n\} \in X$.Έστω $x \in n^+$, τότε $x \in n$ είτε $x \in \{n\}$.Αν $x \in n$, τότε αφού το n είναι μεταβατικό από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $x \subseteq n$, δηλαδή $x \subseteq n^+$.Αν $x \in \{n\}$, τότε $x = n$ και είναι άμεσο ότι $x \subseteq n^+$.Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $x \subseteq n^+$, δηλαδή το n^+ είναι μεταβατικό. Άρα, λόγω του αξιώματος της επαγωγής κάθε φυσικό αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο.

18. Αποδείξτε ότι το σύνολο ω των φυσικών αριθμών είναι μεταβατικό σύνολο. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Αξίωμα Επαγωγής.)

    Λύση : Θεωρούμε το σύνολο $X = \{n \in \omega : n \subseteq \omega\}$.Θα δείξουμε με χρήση του αξιώματος της επαγωγής, ότι $X = \omega$.

    Βάση : Είναι άμεσο ότι $0 = \emptyset$ περιέχεται στο X, αφού $\emptyset \subseteq A$, για κάθε A σύνολο.

    Επαγωγικό Βήμα : Έστω $n \in X$, δηλαδή $n \in \omega$ και $n \subseteq \omega$.Τότε $\{n\} \subseteq \omega$ και $n \subseteq \omega$.Άρα, $s_n \in \omega$ και $s_n = n \cup \{n\} \subseteq \omega$, δηλαδή το ζητούμενο.Μέσω της επαγωγής λοιπόν συμπεραίνουμε ότι $X = \omega$.

19. Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το σύνολο $A^+ = A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό.

    Λύση : Έστω $X \in A^+$.Τότε $X \in A$ είτε $X \in \{A\}$.Αν $X \in A$, επειδή το A είναι μεταβατικό, τότε $X \subseteq A \subseteq A^+$.Αν $X \in \{A\}$, τότε $X = A$ και είναι άμεσο ότι $X \subseteq A^+$.Άρα σε κάθε περίπτωση $X \subseteq A^+$, δηλαδή το A^+ είναι μεταβατικό.

20.

(i) Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $\mathcal{P}(A)$ είναι επίσης ένα μεταβατικό σύνολο.

(ii) Αποδείξτε ότι αν το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό σύνολο, τότε και το A είναι μεταβατικό σύνολο.

Λύση : (i) Θα δείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή στο άτοπο.Έστω $X \in \mathcal{P}(A)$, όπου $X \nsubseteq \mathcal{P}(A)$.Δηλαδή υπάρχει $y \in X$, όπου $y \notin \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow y \nsubseteq A$.Αφού το A είναι μεταβατικό ισχύει ότι $y \notin A$ άτοπο, διότι $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$.Άρα το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό σύνολο.

(ii) Έστω $x \in A$, τότε $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.Όμως το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό, άρα $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, δηλαδή $x \subseteq A$, δηλαδή το ζητούμενο.Τελικά λοιπόν συμπεραίνουμε ότι το A είναι μεταβατικό σύνολο.

Κεφάλαιο 2

Δεύτερη Εργασία

2.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα K, L, M ισχύουν τα παρακάτω:*

(α') $((L \cup M) \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K)$, *όταν τα L, M είναι ξένα.*

(β') $(M \to (K \times L)) =_c (M \to K) \times (M \to L)$.

(Υπενθύμιση: Αν X, Y είναι σύνολα, τότε $(X \to Y)$ συμβολίζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το X στο Y.)

Άσκηση 2. *Έστω $(N, 0, S)$ ένα σύστημα Peano. Αποδείξτε ότι:*

(i) *Κάθε $n \neq 0$ είναι επόμενος, δηλαδή υπάρχει $m \in N$ τέτοιο ώστε $Sm = n$.*

(ii) $Sn \neq n$ *για κάθε $n \in N$.*

Άσκηση 3. *Στο σύνολο $\omega \times \omega$ ορίζουμε τη σχέση R ως εξής:*

$$(a, b)R(c, d) \Longleftrightarrow (2a + 1)2^d \leq (2c + 1)2^b$$

(όπου $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμούς). Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι ολική διάταξη στο $\omega \times \omega$. Είναι η σχέση R καλή διάταξη;

Άσκηση 4. *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία και $R \subseteq S \times S$ μια ολική διάταξη στο S. Υπολογίστε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου R.*

Άσκηση 5. *Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες για τις πράξεις στο σύνολο* ω *των φυσικών αριθμών.*

(i) Επιμεριστική ιδιότητα: *Για κάθε* $n, m, k \in \omega$ *ισχύει ότι* $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$.

(ii) *Η πράξη του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική, δηλαδή για κάθε* $n, m, k \in \omega$ *ισχύει* $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$.

Άσκηση 6. *Έστω* κ *μη μηδενικός πληθάριθμος. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα σύνολα με πληθάριθμο* κ.

Άσκηση 7. *Έστω* κ, λ *πληθάριθμοι. Αποδείξτε ότι:*

$$\kappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow k = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0.$$

Άσκηση 8. *Αποδείξτε ότι* $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. *(όπου* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ *είναι ο πληθάριθμος του συνεχούς.)*

Άσκηση 9. *Έστω* κ *πληθάριθμος τέτοιος ώστε* $\kappa > 1$ *και* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. *Αποδείξτε ότι* $2^{\kappa} = \kappa^{\kappa}$.

Άσκηση 10. *Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε πληθαρίθμους* κ, λ, μ, *για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συνεπαγωγές* **δεν ισχύουν**:

(α΄) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa + \mu < \lambda + \mu$.

(β΄) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$

(γ΄) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^{\mu} < \lambda^{\mu}$

(δ΄) $\kappa < \lambda \Rightarrow \mu^{\kappa} < \mu^{\lambda}$.

Για την επόμενη άσκηση, θα χρειαστείτε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός. *Έστω* K *ένα σύνολο. Μια (1-1 και επί) αντιστοιχία* $f\colon K \to K$ *καλείται* **μετάθεση** *του* K.

Άσκηση 11. *Έστω* κ *πληθάριθμος. Ορίζουμε το* $\kappa!$ *ως εξής:*

$$\kappa! = \operatorname{card}\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\},$$

όπου K *είναι ένα σύνολο με πληθάριθμο* κ. *Αποδείξτε ότι το* $\kappa!$ *είναι καλά ορισμένο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του συνόλου* K.

Άσκηση 12. *Έστω* $(P, \leq_P)$ *και* $(Q, \leq_Q)$ *δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι και* $f\colon P \to Q$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε:*

$$x <_P y \Rightarrow f(x) <_Q f(y).$$

για κάθε x, y *στο σύνολο* P.

(α΄) *Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση* f *είναι 1-1;*

(β΄) *Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι*

$$x <_P y \Leftrightarrow f(x) <_Q f(y);$$

Άσκηση 13. *Έστω* A *ένα σύνολο και* $R \subseteq A \times A$ *μια σχέση στο* A. *Ορίζουμε τη σχέση* R^{-1} *ως εξής:*

$$R^{-1} = \{(u, v) \in A \times A \mid (v, u) \in R\}.$$

Δείξτε ότι, αν η R *είναι μερική διάταξη, τότε και η* R^{-1} *είναι επίσης μερική διάταξη.*

2.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα K, L, M ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $((L \cup M) \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K)$, όταν τα L, M είναι ξένα.

(ii) $(M \to (K \times L)) =_c (M \to K) \times (M \to L)$.

(Υπενθύμιση: Αν X, Y είναι σύνολα, τότε $(X \to Y)$ συμβολίζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το X στο Y.)

Λύση : (i) Έστω K, L, M σύνολα με L, M ξένα μεταξύ τους.Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$g : ((L \cup M) \to K) \to (L \to K) \times (M \to K), f \mapsto (f|_L, f|_M).$$

- Η απεικόνιση g είναι **μονομορφισμός.**Πράγματι, έστω $f, h \in ((L \cup M) \to K)$ με $f \neq g$.Τότε υπάρχει $x \in L \cup M$, όπου $f(x) \neq h(x)$.Έτσι αν $x \in L$ έχουμε $f|L \neq h|_L$, δηλαδή $g(f) \neq g(h)$ και αν $x \in M$, τότε $f|_M \neq h|_M$, δηλαδή $g(f) \neq g(h)$.Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $g(f) \neq g(h)$, άρα η g είναι μονομορφισμός.

- Η απεικόνιση g είναι **επιμορφισμός.** Έστω $(f, h) \in (L \to K) \times (M \to K)$.Θεωρούμε την εξής απεικόνιση

$$k : L \cup M \to K, k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in L \\ h(x), & \text{αν } x \in M \end{cases},$$

η οποία είναι καλά ορισμένη, αφού τα L, M είναι ξένα μεταξύ τους.Έτσι είναι άμεσο ότι $g(k) = (f, g)$, δηλαδή η g είναι επιμορφισμός.

Αφού, η g είναι αντιστοιχία συμπεραίνουμε πως $((L \cup M) \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K)$.

(ii) Έστω K, L, M σύνολα και θεωρούμε τις προβολές :

$$\pi_1 : K \times L \to K, (x, y) \mapsto x \quad \textbf{και} \quad \pi_2 : K \times L \to K, (x, y) \mapsto y.$$

Θεωρούμε λοιπόν την εξής απεικόνιση :

$$g : (M \to (K \times L)) \to (M \to K) \times (M \to L)\,, f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f).$$

- Η g είναι **μονομορφισμός**.Πράγματι, έστω $f, h \in (M \to (K \times L))$ με $f \neq h$.Δηλαδή υπάρχει $x \in M$, ώστε $f(x) \neq h(x) \Leftrightarrow (y, z) \neq (y', z')$, δηλαδή είτε $y \neq y' \Leftrightarrow \pi_1 \circ f(x) \neq \pi_1 \circ h(x)$ που προκύπτει πως $g(f) \neq g(h)$ είτε $z \neq z' \Leftrightarrow \pi_2 \circ f(x) \neq \pi_2 \circ h(x)$, που προκύπτει πως $g(f) \neq g(h)$.Σε καθε περίπτωση λοιπόν η g είναι μονομορφισμός.

- Η g είναι επιμορφισμός.Πράγματι, έστω $(h,k) \in (M \to K)\times(M \to L)$.Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

  $$f : M \to K \times L, f(x) = (h(x), k(x)).$$

  Τότε είναι άμεσο πως $g(f) = (h,k)$, δηλαδή η g είναι επιμορφισμός.

  Αφού, η g είναι αντιστοιχία συμπεραίνουμε πως $(M \to (K \times L)) =_c (M \to K)\times (M \to L)$.

2. Έστω $(N, 0, S)$ ένα σύστημα Peano. Αποδείξτε ότι:

(i) Κάθε $n \neq 0$ είναι επόμενος, δηλαδή υπάρχει $m \in N$ τέτοιο ώστε $Sm = n$.

(ii) $Sn \neq n$ για κάθε $n \in N$.

Λύση : (i) Έστω $n \neq 0$, και θεωρούμε S το εξής σύνολο :

$$S = \{n \in N : S(m) = n \text{ για κάποιο } m \in N\} \cup \{0\}.$$

Με χρήση επαγωγής θα δείξουμε ότι $S = N$.

Βάση : Είναι άμεσο από τον ορισμό του S, ότι $0 \in S$.

Επαγωγικό Βήμα :Έστω ότι υπάρχει $n \in S$ με $n \neq 0$, ώστε να υπάρχει $m \in N$ με $S(m) = n$.Όμως αν $S(m) \in N$, τότε $S(S(m)) \in N$ και αφού $S(S(m)) = S(n)$, έχουμε ολοκληρώσει το επαγωγικό βήμα.Άρα, αφού δείξαμε ότι $S = N$ είναι άμεσο ότι $S/\{0\} = N/\{0\}$, δηλαδή το ζητούμενο.

(ii) Θεωρούμε το εξής σύνολο :

$$S = \{n \in N : Sn \neq n\}.$$

Θα δείξουμε ότι $S = N$ με χρήση επαγωγής.

Βάση : Είναι άμεσο από τον ορισμό του συστήματος Peano ότι $S(0) \neq 0$, άρα $0 \in S$.

Επαγωγικό βήμα : Έστω ότι υπάρχει $n \in S$, ώστε $Sn \neq n$.Αφού η S είναι $1-1$ ισχύει ότι $S(Sn) \neq Sn$, άρα έχει ολοκληρωθεί το επαγωγικό βήμα.Έτσι αποδείξαμε ότι $S = N$, δηλαδή το ζητούμενο.

3. Στο σύνολο $\omega \times \omega$ ορίζουμε τη σχέση R ως εξής:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow (2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$$

(όπου $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμούς). Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι ολική διάταξη στο $\omega \times \omega$. Είναι η σχέση R καλή διάταξη;

Λύση : Αρχικά θα δείξουμε ότι η R είναι μερική διάταξη.

(i) Είναι άμεσο ότι για κάθε $(a,b) \in \omega \times \omega$, ότι $(2a+1)2^b \leq (2a+1)2^b$, δηλαδή $(a,b)R(a,b)$. (**αυτοπαθής**)

(ii) Έστω $(a,b),(c,d) \in \omega \times \omega$, ώστε να ισχύει το εξής :

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b \text{ και}$$
$$(c,d)R(a,b) \Leftrightarrow (2c+1)2^b \leq (2a+1)2^d.$$

Αφού η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμός είναι αντισυμμετρική έπεται ότι $(2a+1)2^d = (2c+1)2^b$.Από Άσκηση 2. (Φυλλάδιο 1.) έπεται ότι $a = c$ και $b = d$, δηλαδή $(a,b) = (c,d)$. (**αντισυμμετρική**)

(iii) Έστω $(a,b),(c,d),(e,f) \in \omega \times \omega$, ώστε να ισχύει το εξής :

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b \text{ και}$$
$$(c,d)R(e,f) \Leftrightarrow (2c+1)2^f \leq (2e+1)2^d.$$

Τότε παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής διάταξη στο ω :

$$(2a+1)2^{d\cdot f} \leq (2c+1)2^{b\cdot f} \leq (2e+1)2^{d\cdot b}.$$

Τελικά λοιπόν $(2a+1)2^f \leq (2e+1)2^b$, δηλαδή $(a,b)R(e,f)$. (**μεταβατική**)

Είναι άμεσο ότι η R είναι ολική διάταξη, αφού λόγω της συνήθους διάταξης στο ω έχουμε ότι για κάθε $(a,b),(c,d) \in \omega \times \omega$ έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$(2a+1)^d \leq (2c+1)^b \quad \text{ή} \quad (2c+1)^b \leq (2a+1)^d.$$

Έστω τώρα ότι R είναι καλή διάταξη , όπου συμπεραίνουμε ότι το $\omega \times \omega$ έχει ελάχιστο στοιχείο.Έστω λοιπόν $(a,b) = min(\omega \times \omega)$ με την διάταξη R.Τότε για κάθε $n \in \omega$ ισχύει το εξής :

$$(a,b)R(0,n) \Leftrightarrow (2a+1)2^n \leq 2^b \Rightarrow 2^n \leq 2^b.$$

Τότε εύκολα συμπεραίνουμε πως $n \leq b$, για κάθε $n \in \omega$ το οποίο είναι άτοπο.

4. Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία και $R \subseteq S \times S$ μια ολική διάταξη στο S. Υπολογίστε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου R.

   Λύση : Το S είναι πεπερασμένο άρα παίρνει την εξής μορφή :

   $$S = \{x_1 \leq_R x_2 \leq_R \cdots \leq_R x_n\}.$$

   με $x_i \neq x_j$, για κάθε $i \neq j$.Έτσι, μπορουμε να ορίσουμε τα σύνολα $S_i = \{(x_i, x_j) \in R : i \leq j\} \subseteq R$, όπου $\leq$ η συνήθης δίαταξη του ω.Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ με $i \neq j$ ισχύει το εξής :

   $$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{και} \quad R = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

   Άρα, $|R| = |\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i| = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

5. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες για τις πράξεις στο σύνολο ω των φυσικών αριθμών.

(i) *Επιμεριστική ιδιότητα:* Για κάθε $n, m, k \in \omega$ ισχύει ότι $n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k$.

(ii) Η πράξη του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική, δηλαδή για κάθε $n, m, k \in \omega$ ισχύει $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$.

Λύση : (i)Έστω $n, m \in \omega$.Θεωρούμε το σύνολο $S = \{k \in \omega : n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k\}$.Θα δείξουμε με χρήση επαγωγής ότι $S = \omega$.

Βάση : Είναι άμεσο ότι $n \cdot (m+0) = n \cdot m = n \cdot m + n \cdot 0$, άρα $0 \in S$.

Επαγωγικό Βήμα : Έστω ότι υπάρχει $k \in S$, ώστε $n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k$, για κάθε $n, m \in \omega$.Τότε ισχύει το εξής :

$$n \cdot (m + Sk) = n \cdot (Sm + k) = n \cdot Sm + n \cdot k = (n \cdot m + n) + n \cdot k = n \cdot m + n \cdot Sk.$$

Άρα έχει ολοκληρωθεί το επαγωγικό βήμα, άρα $S = \omega$, δηλαδή το ζητούμενο.

(ii) Έστω $n, m \in \omega$.Θεωρούμε το σύνολο $S = \{k \in \omega : (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)\}$.Θα δείξουμε με χρήση επαγωγής ότι $S = \omega$.

Βάση : Είναι άμεσο ότι $0 \in S$, αφού για κάθε $n, m \in \omega$ ισχύει $(n \cdot m) \cdot 0 = 0 = n \cdot (m \cdot 0)$.

Επαγωγικό Βήμα : Έστω ότι υπάρχει $k \in S$, ώστε $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$, για κάθε $n, m \in \omega$.Τότε προκύπτουν οι εξής ισότητες :

$$n \cdot (m \cdot Sk) = n(m + m \cdot k) = n \cdot m + n \cdot (m \cdot k) = n \cdot m + (n \cdot m) \cdot k = (n \cdot m) \cdot Sk.$$

Άρα, έχει ολοκληρωθεί το επαγωγικό βήμα και έχουμε αποδείξει ότι $S = \omega$, δηλαδή το ζητούμενο.

6. Έστω κ μη μηδενικός πληθάριθμος. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα σύνολα με πληθάριθμο κ.

   Λύση : Θεωρούμε ότι υπάρχει το σύνολο, που έχει ως στοιχεία όλα τα σύνολα με πληθάριθμο κ, έστω $\mathcal{K}$.Από το αξίωμα της ένωσης, αφού τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ είναι σύνολα, ορίζεται το σύνολο $\bigcup\mathcal{K}$. Θα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

   (i) Έστω ότι ο κ είναι πεπερασμένος πληθάριθμος.Τότε αφού $\kappa \neq 0$ υπάρχει $n \in \omega$, ώστε $\kappa = Sn$.Έστω σύνολο A.Αν $A \in \kappa$, αφού $\kappa \in \mathcal{K}$, τότε $A \in \bigcup\mathcal{K}$.Έστω, ότι $A \notin \kappa$, τότε $A \notin n$, άρα $n \cap \{A\} = \emptyset$.Άρα έχουμε ότι το σύνολο $|n \cup \{A\}| = \kappa$, δηλαδή $n \cup \{A\} \in \mathcal{K}$.Έτσι προκύπτει ότι $A \in \bigcup\mathcal{K}$, δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε A σύνολο $A \in \bigcup\mathcal{K}$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

   (ii) Έστω ότι ισχύει $\kappa = \aleph_0$ και έστω σύνολο A.Αν $A \in \omega$, τότε είναι άμεσο ότι $A \in \bigcup\mathcal{K}$.Έστω, ότι $A \notin \omega$, άρα $\omega \cap \{A\} = \emptyset$.Τότε, γνωρίζουμε πως $|\omega \cup \{A\}| = |\omega| + |\{A\}| = \kappa + 1 = \kappa$.Έτσι συμπεραίνουμε πως $A \in \bigcup\mathcal{K}$.Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε σύνολο A, ότι ισχύει $A \in \bigcup\mathcal{K}$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

   (iii) Έστω ότι κ είναι άπειρος πληθάριθμος με $\kappa \neq \aleph_0$ και έστω σύνολο A.Αν $A \in \kappa$, τότε είναι σαφές ότι $A \in \bigcup\mathcal{K}$.Αν $A \notin \kappa$, τότε $\kappa \cap \{A\} = \emptyset$.Τότε έχουμε από τους κανόνες απορόφησης άπειρων πληθαρίθμων έχουμε ότι $|\kappa \cup \{A\}| = \kappa + 1 = \kappa$.Άρα $A \in \bigcup\mathcal{K}$.Άρα για κάθε σύνολο A δείξαμε ότι $A \in \bigcup\mathcal{K}$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

   Έτσι δείξαμε ότι για οποιοδήποτε πληθάριθμο κ δεν ορίζεται το σύνολο που έχει στοιχεία όλα τα σύνολα πληθαρίθμου κ.

7. Έστω κ, λ πληθάριθμοι. Αποδείξτε ότι:

   $$\kappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow k = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0.$$

   Λύση : Έστω K, L σύνολα με $|K| = \kappa$ και $|L| = \lambda$.Τότε αν $\kappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow |K \times L| = 0$.Αν $|K| \neq 0$ και $|L| \neq 0$, τότε υπάρχει $u \in K$ και $v \in L$, δηλαδή $(u, v) \in K \times L$, άρα $|K \times L| \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \cdot \lambda \neq 0$ άτοπο.Άρα, $\kappa = 0$ ή $\lambda = 0$.Αντίστροφα, έστω πως $\kappa = 0$ ή $\lambda = 0$, δηλαδή $K = \emptyset$ ή $L = \emptyset$.Σε κάθε περίπτωση $K \times L = \emptyset \Leftrightarrow \kappa \cdot \lambda = 0$.

8. Αποδείξτε ότι $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. (όπου $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ είναι ο πληθάριθμος του συνεχούς.)

   Λύση : Αρχικά είναι σαφές ότι, αφού $1 \cdot 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}$, άρα $2^c \leq 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = c^c$.Τώρα παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής :

   $$c^c = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0 + \aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^c.$$

   Τελικά λοιπόν από θεώρημα Shroder-Bernstein έπεται άμεσα ότι $c^c = 2^c$.

9. Έστω κ πληθάριθμος τέτοιος ώστε $\kappa > 1$ και $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Αποδείξτε ότι $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

Λύση : Αφού γνωρίζουμε ότι $\kappa > 1$ είναι σαφές ότι $\kappa \geq 2$.Άρα, έχουμε πως $2^\kappa \leq \kappa^\kappa$.Τώρα παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής :

$$\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa.$$

Τελικά λοιπόν από θεώρημα Shroder-Bernstein έπεται άμεσα ότι $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

10. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε πληθαρίθμους κ, λ, μ, για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συνεπαγωγές **δεν ισχύουν**:

(1) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa + \mu < \lambda + \mu$.

(2) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$

(3) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^\mu < \lambda^\mu$

(4) $\kappa < \lambda \Rightarrow \mu^\kappa < \mu^\lambda$.

Λύση : (1) Έστω $n, m \in \omega$ με $n \neq m$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητα υποθέτουμε ότι $m < n$.Γνωρίζουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι και πληθάριθμος.Όμως, έχουμε αποδείξει ότι $\aleph_0 + m = \aleph_0 + n = \aleph_0$.

(2) Στην Άσκηση 2. (Φυλλάδιο 1.) δείξαμε ότι $\omega \times \omega =_c \omega$.Με χρήση επαγωγής είναι άμεσο, ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει $\omega^n =_c \omega$.Άρα, ισχύει ότι για κάθε $n \in \omega$ με $n > 1$ ισχύει ότι $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.Έστω τώρα $n, m \in \omega$, ώστε $1 < m < n$.Γνωρίζουμε ότι τα n, m είναι πληθάριθμοι, άρα από την αρχική μας παρατηρήση έχουμε πως $n \cdot \aleph_0 = m \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

(3) Από την Άσκηση 8. (Φυλλάδιο 2.) έχουμε ότι $2 < c$, όμως ισχύει ότι $2^c = c^c$.

(4) Από την παρατήρηση του (2) έχουμε ότι αν $n, m \in \omega$ με $1 < m < n$, τότε ισχύει ότι $\omega^m = \omega^n = \omega$.

Για την επόμενη άσκηση, θα χρειαστείτε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός. *Έστω K ένα σύνολο. Μια (1-1 και επί) αντιστοιχία $f : K \to K$ καλείται* **μετάθεση** *του K.*

11. Έστω κ πληθάριθμος. Ορίζουμε το $\kappa!$ ως εξής:

$$\kappa! = \mathrm{card}\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\},$$

όπου K είναι ένα σύνολο με πληθάριθμο κ. Αποδείξτε ότι το $\kappa!$ είναι καλά ορισμένο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του συνόλου K.

Λύση : Έστω K' σύνολο με $card(K') = k$.Τότε είναι σαφές ότι $K =_c K'$, δηλαδή υπάρχει αντιστοιχία $f : K' \to K$.Συμβολίζουμε με S_k το σύνολο των μεταθέσεων του K και ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$g : S_K \to S_{K'},\ h \mapsto f^{-1} \circ h \circ f.$$

Η g είναι καλά ορισμένη, αφού αν h μια αντιστοιχία στο K η $f^{-1} \circ h \circ f$ είναι αντιστοιχία στο K' ως σύνθεση αντιστοιχιών.Η g είναι άμεσο ότι είναι επί, αφού για κάθε $h \in S_{K'}$ έχουμε ότι $g(f \circ h \circ f^{-1}) = h$.Η g επίσης είναι μονομορφισμός, αφού αν $h_1, h_2 \in S_K$, με $g(h_1) = g(h_2) = f^{-1} \circ h_1 \circ f = f^{-1} \circ h_2 \circ f \Leftrightarrow h_1 = h_2$.Άρα έχουμε πως $S_{K'} =_c S_K \Leftrightarrow card(S_{K'}) = card(S_K) = k!$, δηλαδή δείξαμε ότι το $k!$ είναι καλά ορισμένο.

12. Έστω $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι και $f\colon P \to Q$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$x <_P y \Rightarrow f(x) <_Q f(y).$$

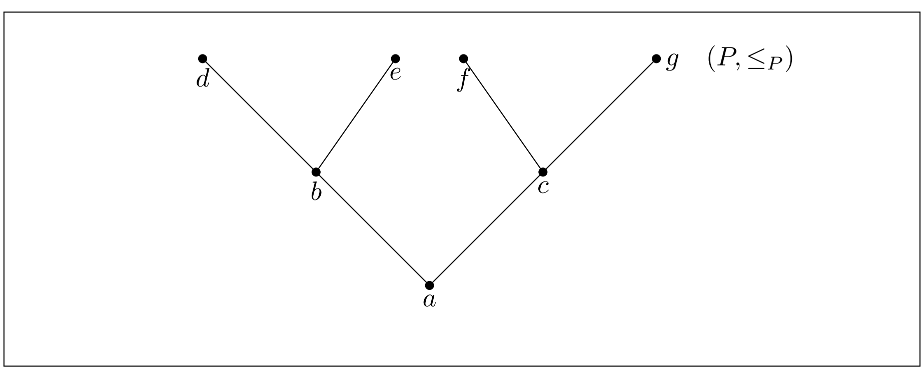
για κάθε x, y στο σύνολο P.

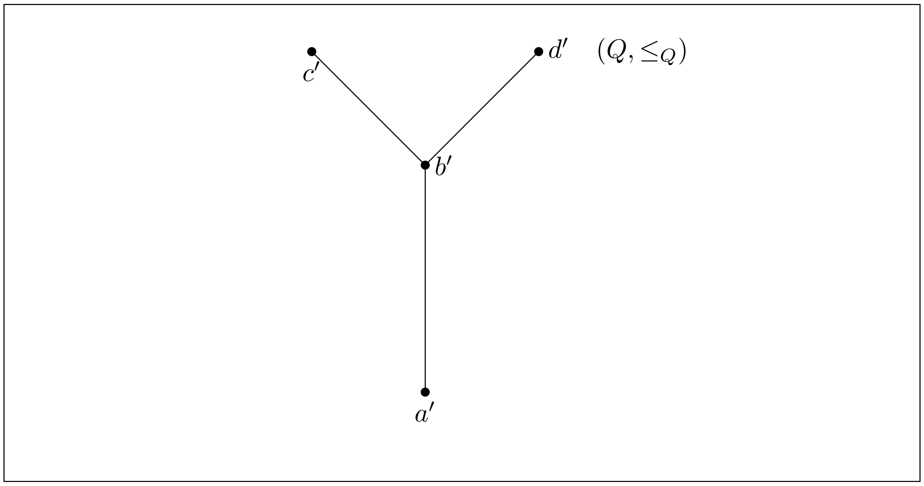
1. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1;

2. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$x <_P y \Leftrightarrow f(x) <_Q f(y);$$

Λύση : Θεωρούμε σύνολα $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ και $Q = \{a', b', c', d'\}$, όπου είναι μερικά διατεταγμένοι χώροι με τις διατάξεις $\leq_P$ και $\leq_Q$ όπως φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα :





Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f = \{(a,a'),(b,b'),(c,b'),(d,c'),(e,c'),(f,d'),(g,d')\} \subseteq P \times Q$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη, όμως δεν είναι μονομορφισμός.Τέλος αν σεβόταν τις διατάξεις η f θα ήταν και μονομορφισμός, το οποίο είναι άτοπο.

13. Έστω A ένα σύνολο και $R \subseteq A \times A$ μια σχέση στο A. Ορίζουμε τη σχέση R^{-1} ως εξής:
$$R^{-1} = \{(u,v) \in A \times A \mid (v,u) \in R\}.$$
Δείξτε ότι, αν η R είναι μερική διάταξη, τότε και η R^{-1} είναι επίσης μερική διάταξη.

Λύση : (i) Έστω $u \in A$, τότε $(u,u) \in R$, άρα είναι άμεσο ότι $(u,u) \in R^{-1}$. (**αυτοπαθής**)

(ii) Έστω $(u,v) \in R^{-1}$ και $(v,u) \in R^{-1}$, δηλαδή $(u,v) \in R$ και $(v,u) \in R$, άρα αφού R μερική διάταξη καταλήγουμε ότι $u = v$. (**αντισυμμετρική**)

(iii) Έστω $(u,v),(v,r) \in R^{-1}$, τότε $(v,u),(r,v) \in R$ δηλαδή έχουμε ότι $(r,u) \in R$, αφού R μερική διάταξη, όπου τελικά προκύπτει ότι $(u,r) \in R^{-1}$. (**μεταβατική**)

Τελικά, λοιπόν συμπεραίνουμε ότι η R^{-1} είναι επίσης μερική διάταξη.

Κεφάλαιο 3

Τρίτη Εργασία

3.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Έστω $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών. Τότε κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ περιέχει ένα σημείο του συνόλου $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.*

Άσκηση 2. *Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Το σύνολο των ακολουθιών $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ οι οποίες αποτελούν αριθμητική πρόοδο είναι σύνολο υπεραριθμήσιμο.*

Άσκηση 3. *Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Έστω $(\alpha_i)_{i\in I}$, $(\beta_i)_{i\in I}$ οικογένειες μη μηδενικών πληθαρίθμων, τέτοιες ώστε $\alpha_i \leq \beta_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε ισχύει*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \prod_{i\in I} \beta_i.$$

Άσκηση 4. *Βρείτε το λάθος στον παρακάτω ''απόδειξη'' ότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι σύνολο αριθμήσιμο:*
Για κάθε άρρητο αριθμό $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ επιλέγουμε ένα διάστημα με ρητά άκρα α_p, β_p και κέντρο το p. Αφού το διάστημα έχει κέντρο το p, η συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ με $\Phi(p) = (\alpha_p, \beta_p)$ είναι 1-1. Το σύνολο των ζευγών (α_p, β_p) είναι αριθμήσιμο, αφού είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Συνεπώς, το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ και άρα είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 5. *Βρείτε το λάθος στην παρακάτω "απόδειξη" της Υπόθεσης του Συνεχούς (CH):*
Υποθέτουμε ότι η CH δεν ισχύει. Τότε υπάρχει πληθάριθμος m τέτοιος ώστε $\aleph_0 < m < \mathfrak{c}$. Αφού $\mathfrak{c} = \aleph_0^{\aleph_0} \leq m^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, προκύπτει ότι $m^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} < 2^m$ και άρα $m^{\aleph_0} < 2^m$. Επομένως, $(m^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} < (2^m)^{\mathfrak{c}}$ και άρα $m^{\mathfrak{c}} < 2^{\mathfrak{c}}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $m > 2$. Συνεπώς, δεν υπάρχει τέτοιος πληθάριθμος m και άρα η CH είναι αληθής.

Άσκηση 6. *Αποδείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει:*
Αν τα σύνολα A, B έχουν το ίδιο πλήθος αριθμήσιμων υποσυνόλων, τότε τα A, B είναι ισοπληθικά.

Άσκηση 7. *Έστω $\mathcal{C}$ μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο που ανήκει στην $\mathcal{C}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει:*
Υπάρχουν πάντα τουλάχιστον δύο σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}$ των οποίων η τομή είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Άσκηση 8. *Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $|\mathbb{R}\setminus A| = \mathfrak{c}$.*

Άσκηση 9. *Έστω A ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ από διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του A τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να αποκλίνει στο $+\infty$.*

Άσκηση 10. *Σε κάποιο πανεπιστήμιο, δύο φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημα της Θεωρίας Συνόλων επιχειρηματολογούν ως εξής:*

Φοιτητής Α: *Πρέπει να υπάρχει ένα maximal αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών. Διότι, το σύνολο των άπειρων αριθμήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος με τη σχέση του 'περιέχεσθαι'. Κάθε αλυσίδα από τέτοια σύνολα έχει άνω φράγμα (η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο αριθμήσιμο). Άρα, το Λήμμα του Zorn μας δίνει ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Φοιτητής Β: *Δεν γνωρίζω το Λήμμα του Zorn, αλλά αυτό που λες δεν μου φαίνεται σωστό. Σε ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών μπορείς πάντα να προσθέσεις έναν αριθμό και πάλι θα έχεις ένα αριθμήσιμο σύνολο. Άρα, πώς είναι δυνατό να έχεις ένα μέγιστο αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$;*

Φοιτητής Α: *Δεν είπα μέγιστο! Είπα μεγιστικό!*

Μπορείτε να λύσετε τη διαφωνία μεταξύ των δύο φοιτητών;

Άσκηση 11. *Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Zorn, αποδείξτε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια βάση.*

Άσκηση 12. *Έστω A, B σύνολα, με το A να είναι πεπερασμένο, και $P \subseteq (A \times B)$ διμελής σχέση από το A στο B. Υποθέτουμε ότι*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xPy].$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ τέτοια ώστε:

$$(\forall x \in A)[xPf(x)].$$

(Συνεπώς, στην περίπτωση που το A είναι πεπερασμένο σύνολο, το Αξίωμα Επιλογής αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα του Zermelo.)

Άσκηση 13. *Έστω $(\kappa_i)_{i\in I}$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ οικογένειες πληθαρίθμων τέτοιες ώστε $\kappa_i \leq \lambda_i$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i \quad \text{και} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Άσκηση 14. *Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, δείξτε ότι ο επόμενος πληθάριθμος κ^+ είναι κανονικός.*

Άσκηση 15. *Δείξτε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Άσκηση 16. *Για κάθε θετικό ακέραιο $n \in \mathbb{N}^*$, συμβολίζουμε με $f(n)$ των πλήθος των διαφορετικών ανά δύο πρώτων παραγόντων του n. Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ ορίζουμε την εξής διμελή σχέση: για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$,*

$$mRn \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} m = n \text{ ή } f(m) < f(n) \text{ ή } [f(m) = f(n) \text{ και } m < n].$$

Αποδείξτε ότι η παραπάνω διμελής σχέση είναι καλή διάταξη στο $\mathbb{N}^*$. Σχεδιάστε μια εικόνα για τον καλά διατεταγμένο χώρο $\mathbb{N}^*$.

Ορισμός. *Έστω P και Q δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι. Ορίζουμε το άθροισμα $P +_o Q$ παίρνοντας ξένα αντίγραφα των P και Q και τοποθετώντας αυτά το ένα μετά το άλλο έτσι ώστε κάθε σημείο του P να προηγείται από κάθε σημείο του Q. Πιο αυστηρά, θέτουμε*

$$P +_o Q = (\{0\} \times P) \cup (\{1\} \times Q)$$

και για κάθε $(i, x), (j, y) \in P +_o Q$ ορίζουμε:

$$(i, x) \leq (j, y) \Leftrightarrow i < j \text{ ή } [i = j = 0 \text{ και } x \leq_P y] \text{ ή } [i = j = 1 \text{ και } x \leq_Q y].$$

Άσκηση 17. *Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, δείξτε ότι $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.*

Άσκηση 18. *Αν U και V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι, δείξτε ότι και το άθροισμά τους $U +_o V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.*

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι*

$$\{0\} +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o \{0\}.$$

(Συνεπώς, το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα.)

3.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Έστω $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών. Τότε κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ περιέχει ένα σημείο του συνόλου $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.

   Λύση : Έστω ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα (a, b) στο $\mathbb{R}$, όπου $(a, b) \subseteq A$.Γνωρίζουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα και το (a, b) είναι αριθμήσιμο.Όμως γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό ανοικτό διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.Άρα ο αρχικός ισχυρισμός είναι **σωστος**.

2. Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Το σύνολο των ακολουθιών $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ οι οποίες αποτελούν αριθμητική πρόοδο είναι σύνολο υπεραριθμήσιμο.

   Λύση : Αρχικά είναι σαφές ότι κάθε αριθμητική πρόοδος s_n είναι της μορφής :
$$s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ s_n = kn + m\ ,$$
   για κάποια $k, m \in \mathbb{N}$.Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $s_n = m$ είναι αριθμητική πρόοδος.Άρα, η εξής απεικόνιση :
$$f : \mathbb{N} \to S,\ m \mapsto s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ s_n = m\ ,$$
   όπου $S = \{s_n \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) :\ s_n \text{ είναι αριθμητική πρόοδος }\}$ είναι μονομορφισμός, δηλαδή $\mathbb{N} \leq_c S$.Θεωρούμε τώρα την εξής απεικόνιση :
$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S,\ (k, m) \mapsto s_n = kn + m.$$
   Τότε είναι σαφές ότι η g είναι επιμορφισμός, άρα $S \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$.Έτσι από το θεώρημα Schroder-Bernstein έχουμε ότι $S =_c \mathbb{N}$.Άρα ο αρχικός ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

3. Σωστό ή λάθος; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.) Έστω $(\alpha_i)_{i\in I}$, $(\beta_i)_{i\in I}$ οικογένειες μη μηδενικών πληθαρίθμων, τέτοιες ώστε $\alpha_i \leq \beta_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε ισχύει
$$\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \prod_{i\in I} \beta_i.$$

   Λύση : Έστω $n \in \omega$ με $n > 1$ και $I = \{i \in \omega : i < n\}$.Τότε έχουμε πως $|I| = n$ και έστω οι οικογένειες μη μηδενικών πληθαρίθμων $(\alpha_i)_{i\in I}, (\beta_i)_{i\in I}$ με $\alpha_i = \beta_i = 1$, για κάθε $i \in I$.Τότε έχουμε πως ισχύει το εξής :
$$\prod_{i\in I} \beta_i = 1 < n = \sum_{i\in I} \alpha_i.$$
   Έτσι συμπεραίνουμε ότι η αρχικός ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

4. Βρείτε το λάθος στον παρακάτω ''απόδειξη'' ότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι σύνολο αριθμήσιμο:
   Για κάθε άρρητο αριθμό $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ επιλέγουμε ένα διάστημα με ρητά άκρα α_p, β_p και κέντρο το p. Αφού το διάστημα έχει κέντρο το p, η συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ με $\Phi(p) = (\alpha_p, \beta_p)$ είναι 1-1. Το σύνολο των ζευγών (α_p, β_p) είναι αριθμήσιμο, αφού είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Συνεπώς, το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ και άρα είναι αριθμήσιμο.

   Λύση : Η αποδείξη είναι λανθασμένη, καθώς στο πρώτο βήμα της η επιλογή των α_p, β_p είναι εσφαλμένη.Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, όπου το p είναι κέντρο του (α_p, β_p), δηλαδή $p - \alpha_p = (\beta_p - \alpha_p)/2$.Όμως ο $p - a$ είναι άρρητος ενώ ο $(b-a)/2$ είναι ρητός, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

5. Βρείτε το λάθος στην παρακάτω ''απόδειξη'' της Υπόθεσης του Συνεχούς (CH):
   Υποθέτουμε ότι η CH δεν ισχύει. Τότε υπάρχει πληθάριθμος m τέτοιος ώστε $\aleph_0 < m < \mathfrak{c}$. Αφού $\mathfrak{c} = \aleph_0^{\aleph_0} \leq m^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, προκύπτει ότι $m^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} < 2^m$ και άρα $m^{\aleph_0} < 2^m$. Επομένως, $(m^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} < (2^m)^{\mathfrak{c}}$ και άρα $m^{\mathfrak{c}} < 2^{\mathfrak{c}}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $m > 2$. Συνεπώς, δεν υπάρχει τέτοιος πληθάριθμος m και άρα η CH είναι αληθής.

   Λύση : Παρατηρούμε ότι στο τελευταίο στάδιο της απόδειξης γίνεται η χρήση της εξής ιδιότητας :

   Αν κ, λ, μ πληθάριθμοι και $\kappa < \lambda$, τότε $k^{\mu} < \lambda^{\mu}$.

   το οποίο έχουμε δείξει ότι δεν ισχύει γενικά μέσω της Άσκηση 10. (Φυλλάδιο 2.).Άρα, προκύπτει ότι η απόδειξη είναι λανθασμένη.

6. Αποδείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει:
   Αν τα σύνολα A, B έχουν το ίδιο πλήθος αριθμήσιμων υποσυνόλων, τότε τα A, B είναι ισοπληθικά.

   Λύση : Θα δείξουμε ότι ο αρχικός ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

   Ισχυρισμός : *Τα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{N}$ έχουν το ίδιο πλήθος αριθμήσιμων υποσυνόλων.*

   Απόδειξη. Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, άρα το πλήθος των αριθμήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.Τώρα θεωρούμε την εξής απεικόνιση :
   $$f : \mathbb{R} \to S, x \to \{x\}$$
   όπου $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ είναι αριθμήσιμο}\}$, η οποία είναι μονομορφισμός.Δηλαδή έχουμε ότι $\mathbb{R} \leq_c S$.Τώρα γνωρίζουμε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο δέχεται

απαρίθμηση, για κάθε $A \in S$ επιλέγουμε $\pi_A : \mathbb{N} \to A$ επιμορφισμό.Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$g : S \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R}), A \to \pi_A.$$

Τότε είναι άμεσο ότι η g είναι μονομορφισμός, δηλαδή $|S| \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.Έτσι από το θεώρημα Schroder-Bernstein έχουμε ότι $|S| = 2^{\aleph_0}$. □

Άρα, τα $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ έχουν το ίδιο πλήθος αριθμήσιμων υποσυνόλων όμως δεν έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.Έτσι συμπεραίνουμε ότι αρχικός ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

7. Έστω $\mathcal{C}$ μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο που ανήκει στην $\mathcal{C}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει: Υπάρχουν πάντα τουλάχιστον δύο σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}$ των οποίων η τομή είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

   Λύση : Θεωρούμε την εξής οικογένεια συνόλων του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

   $$\mathcal{C} = \{\mathbb{R} \times \{x\} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

   Παρατηρούμε ότι μέσω της εξής απεικόνισης :

   $$g : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ \mathbb{R} \times \{x\} \mapsto x\ ,$$

   η οποία είναι αντιστοιχία, έχουμε ότι $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$ και επίσης ισχύει ότι $|\mathbb{R} \times \{x\}| = |\mathbb{R}|$.Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ με $X_1 \neq X_2$ ισχύει ότι $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αντιστοιχία.Επίσης γνωρίζουμε ότι η εξής απεικόνιση :

   $$F : \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ X \mapsto f(X).$$

   είναι αντιστοιχία από την Άσκηση 1. (Φυλλάδιο 1.).Θεωρούμε την $F(\mathcal{C})$ την εικόνα της οικογένειας $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ μέσω της απεικόνισης F.Τότε ο περιορισμός $F|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to F(\mathcal{C})$ είναι αντιστοιχία, άρα $F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.
   Είναι σαφές ότι, αφού για κάθε $X \in \mathcal{C}$ το X είναι υπεραριθμήσιμο, τότε και $f(X)$ είναι υπεραριθμήσιμο.Έστω λοιπόν $f(X_1), f(X_2) \in F(\mathcal{C})$ με $X_1 \neq X_2$ και έστω ότι υπάρχει $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$.Δηλαδή υπάρχουν $x_1 \in X_1$ και $x_2 \in X_2$, ώστε $f(x_1) = y = f(x_2)$.Όμως η f είναι μονομορφισμός, άρα $x_1 = x_2$, το οποίο είναι άτοπο δίοτι δείξαμε ότι αν $X_1 \neq X_2$, τότε $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.Άρα, καταλήγουμε ότι $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο αρχικός ισχυρισμός είναι **λανθασμένος.**.

8. Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $|\mathbb{R} \backslash A| = \mathfrak{c}$.

Λύση : Τα σύνολα $A, \mathbb{R}\backslash A$ είναι ξένα μεταξύ τους.Αφού λοιπόν $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R}\backslash A)$, τότε ισχύει το εξής :

$$\mathfrak{c} = \aleph_0 + |\mathbb{R}\backslash A|.$$

Όμως είναι σαφές ότι $|\mathbb{R}\backslash A|$ είναι άπειρος πληθάρισμος, διότι αν ήταν πεπερασμένος θα είχαμε ότι $|\mathbb{R}\backslash A| = n$ με $n \in \omega$, άρα $|\mathbb{R}\backslash A| + \aleph_0 = \aleph_0$.Αφού $|\mathbb{R}\backslash A|, \aleph_0$ είναι άπειροι πληθάριθμοι από τους κανόνες απορρόφησης γνωρίζουμε το εξής :

$$\max\{\aleph_0, |\mathbb{R}\backslash A|\} = \aleph_0 + |\mathbb{R}\backslash A| = \mathfrak{c}.$$

Αν $\max\{\aleph_0, |\mathbb{R}\backslash A|\} = \aleph_0$, τότε από τη παραπάνω σχέση οδηγούμαστε σε άτοπο.Άρα προκύπτει το ζητούμενο :

$$|\mathbb{R}\backslash A| = \mathfrak{c}.$$

9. Έστω A ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ από διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του A τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να αποκλίνει στο $+\infty$.

   Λύση : Αφού το σύνολο A είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο θετικών αριθμών, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $a_1 \in A$.Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις :

   (i) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε αν έχουμε επιλέξει $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ τα οποία είναι διαφορετικά ανά δύο έχουμε ότι $A\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ είναι άπειρο.Άρα, επιλέγουμε $a_{n+1} \in A\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ με $a_n < a_{n+1}$.Επαγωγικά, λοιπόν κατασκευάζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών όρων.

   (ii) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το $\sup A \in \mathbb{R}$.Αν έχουμε επιλέξει $a_1 < \cdots < a_n$ με $a_i < \sup A$, τότε επιλέγουμε $a_{n+1} < \sup A$, ώστε $a_n < a_{n+1}$. Επαγωγικά, λοιπόν κατασκευάζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών όρων.

   Έτσι σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι η ακολουθία $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη, δηλαδή ισχύει ότι $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = +\infty$.

10. Σε κάποιο πανεπιστήμιο, δύο φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημα της Θεωρίας Συνόλων επιχειρηματολογούν ως εξής:

    Φοιτητής Α: Πρέπει να υπάρχει ένα maximal αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών. Διότι, το σύνολο των άπειρων αριθμήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος με τη σχέση του ‘περιέχεσθαι’. Κάθε αλυσίδα από τέτοια σύνολα έχει άνω φράγμα (η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο αριθμήσιμο). Άρα, το Λήμμα του Zorn μας δίνει ένα μεγιστικό στοιχείο.

Φοιτητής Β: Δεν γνωρίζω το Λήμμα του Zorn, αλλά αυτό που λες δεν μου φαίνεται σωστό. Σε ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών μπορείς πάντα να προσθέσεις έναν αριθμό και πάλι θα έχεις ένα αριθμήσιμο σύνολο. Άρα, πώς είναι δυνατό να έχεις ένα μέγιστο αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

Φοιτητής Α: Δεν είπα μέγιστο! Είπα μεγιστικό!

Μπορείτε να λύσετε τη διαφωνία μεταξύ των δύο φοιτητών;

Λύση : Κατα τον πρώτο ισχυρισμό του Φοιτητή Α αναφέρεται ότι κάθε αλυσίδα αριθμήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχει άνω φράγμα, όπου δεν ισχύει πάντα ότι η ένωση είναι αριθμήσιμο σύνολο αποδεικνύεται στο επόμενο αντιπαράδειγμα.

Έστω $P = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = \aleph_0\}$, το οποίο είναι προφανώς μη κενό και θεωρούμε τον μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \subseteq)$.Τότε από την Αρχή Μεγιστικής Αλυσίδα υπάρχει μεγιστική αλυσίδα στον χώρο $(P, \subseteq)$, έστω S.

Ισχυρισμός 1. *Η αλυσίδα S είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι η S είναι αριθμήσιμη.Θεωρούμε το σύνολο $Y = \bigcup S$, το οποίο είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων.Άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R} \backslash Y$ και θέτουμε $S' = S \cup \{Y \cup \{x\}\}$.Τότε η S' είναι αλυσίδα, καθώς κάθε δύο σύνολα στο S είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους και για κάθε $X \in S$ ισχύει το εξής :

$$X \subseteq \bigcup S = Y \subseteq Y \cup \{x\}.$$

Άρα, έχουμε ότι $S \subseteq S'$ και αφού η S είναι μεγιστική αλυσίδα έχουμε ότι $S = S'$.Άρα, υπάρχει $X \in S$, ώστε $X = Y \cup \{x\}$, δηλαδή $x \in X \subset Y$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Ισχυρισμός 2. *Η S δεν έχει άνω φράγμα στον $(P, \subseteq)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει A άνω φράγμα της S.Τότε για κάθε $X \in S$ ισχύει ότι $X \subseteq A$.Επειδή το A είναι αριθμήσιμο υπάρχει $x \in \mathbb{R} \backslash A$, δηλαδή $x \notin X$, για κάθε $X \in S$.Έτσι θέτοντας $S' = S \cup \{A \cup \{x\}\}$ είναι άμεσο ότι η S' είναι αλυσίδα και μάλιστα $S \subset_{\neq} S'$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Τέλος παρότι η ορολογία του Φοιτητή Β είναι λανθασμένη το επιχείρημα του είναι ο λόγος, που είναι λάθος ο αρχικός ισχυρισμός του Φοιτητή Α, καθώς αν υπήρχε μεγιστικό στοιχείο του $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ είναι αριθμήσιμο } \}$, τότε υπάρχει $M \in S$, όπου για κάθε $M' \in S$ με $M \subseteq M'$, τότε $M = M'$.Τότε αν M μεγιστικό στοιχείο του S, αφού το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο, τότε επιλέγουμε ένα $s \notin M$.Τότε ισχύει ότι $M' = M \cup \{s\} \in S$ και $M \subseteq_{\neq} M'$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

11. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Zorn, αποδείξτε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια βάση.

    Λύση : Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα F.Θεωρούμε το εξής σύνολο :

    $\mathcal{P} = \{A \subseteq V \mid a_1, \cdots a_n \in A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$.

    Τότε το ζεύγος $(\mathcal{P}, \subseteq)$ είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος.Έστω μια αλυσίδα $\mathcal{T} \in \mathcal{P}$.Θεωρούμε το σύνολο $S = \bigcup \mathcal{T}$.Είναι σαφές ότι για κάθε $A \in \mathcal{T}$, τότε $A \subseteq S$.Θα δείξουμε ότι $S \in \mathcal{P}$.Έστω $a_1, \cdots, a_n$, ώστε να ισχύει το εξής :
    $$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \ ,$$
    για $v_1, \cdots, v_n \in F$.Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $A_1, \cdots A_n \in \mathcal{P}$ με $A_i \subseteq S$, ώστε $a_i \in A_i$, για κάθε $i = 1, \cdots n$.Τότε το σύνολο $\{A_1, \cdots, A_n\}$ έχει άνω φράγμα το $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$.Τότε $a_1, \cdots, a_n \in A$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή $S \in \mathcal{P}$.Έτσι δείξαμε ότι κάθε αλυσίδα στον $\mathcal{P}$ έχει άνω φράγμα.Από το Λήμμα του Zorn το $\mathcal{P}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω M.Θα δείξουμε ότι το M είναι βάση του V.Θεωρούμε το σύνολο $W = span(M)$.Έστω ότι $W \subseteq_{\neq} V$, τότε επιλέγουμε $v \in V$, όπου $v \notin W$.Τότε, το σύνολο $M' = M \cup \{u\} \in \mathcal{P}$ και μάλιστα $M \subset_{\neq} M'$ το οποίο είναι άτοπο, αφού το M είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{P}$.Έτσι προκύπτει ότι $V = span(M)$, δηλαδή M βάση του V, αφού παράγει το χώρο και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο περιέχει γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.

12. Έστω A, B σύνολα, με το A να είναι πεπερασμένο, και $P \subseteq (A \times B)$ διμελής σχέση από το A στο B. Υποθέτουμε ότι
    $$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xPy].$$
    Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f\colon A \to B$ τέτοια ώστε:
    $$(\forall x \in A)[xPf(x)].$$
    (Συνεπώς, στην περίπτωση που το A είναι πεπερασμένο σύνολο, το Αξίωμα Επιλογής αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα του Zermelo.)

    Λύση : Θα δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος του A το ζητούμενο.

    Βάση : Έστω ότι $|A| = 0$, δηλαδή $A = \emptyset$.Το A ικανοποιεί τις αρχικές προυποθέσεις, καθώς αν δεν τις ικανοποιούσε θα υπάρχει $x \in A$, όπου για κάθε $y \in B$ ισχύει ότι $x \ /P \ y$, όπου οδηγούμαστε σε άτοπο.Τότε είναι άμεσο ότι υπάρχει $f = \emptyset$, όπου ικανοποιεί της ζητούμενη ιδιότητα, αλλιώς θα υπήρχε $x \in A$, όπου $x \not P \ f(x)$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

    Επαγωγική Βάση : Θεωρούμε ότι υπάρχει $n \in \omega$, όπου για κάθε σύνολο P με $|X| = n$, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.Έστω A, B σύνολα με $|A| = S_n$ και $P \subseteq A \times B$ διμελής σχέση.Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$, ώστε xPy.Έστω $x \in A$, ισχύει ότι υπάρχει $y \in B$, ώστε xPy και $A' = A \backslash \{x\}$, δηλαδή $|A'| = n$.Παρατηρούμε ότι λόγω του συνόλου A το A' ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες με το σύνολο B, άρα από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $f' : A' \to B$ τέτοια ώστε :

$$(\forall x \in A')(\exists y \in B)[xPf(x)].$$

Θεωρούμε το σύνολο $f = f \cup \{(x, y)\}$ η οποία είναι άμεσο ότι είναι συνάρτηση από το A στο B.Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ τέτοια ώστε :

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xPf(x)].$$

Έτσι ολοκληρώθηκε το επαγωγικό βήμα, δηλαδή προκύπτει το ζητούμενο.

13. Έστω $(\kappa_i)_{i\in I}$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ οικογένειες πληθαρίθμων τέτοιες ώστε $\kappa_i \leq \lambda_i$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i \quad \text{και} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Λύση : Για κάθε $i \in I$ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν οικογένειες συνόλων $(K_i)_{i\in I}, (L_i)_{i\in I}$ ξένων ανά δύο μεταξύ τους, ώστε $|K_i| = \kappa_i$ και $|L_i| = \lambda_i$.Αφού για κάθε $i \in I$ ισχύει ότι $\kappa_i \leq \lambda_i$, δηλαδή υπάρχουν μονομορφισμοί $\pi_i : K_i \to L_i$.Θα εκφράσουμε τα K_i, L_i ως εξής :

$$K_i = (\kappa_{ij})_{j\in\kappa_i} \quad \text{και} \quad L_i = (\lambda_{ij})_{j\in\lambda_i}.$$

Επιλέγουμε $(\pi_i : K_i \to L_i)_{i\in I}$ οικογένεια μονομορφισμών, όπου για κάθε $i \in I$ ισχύει το εξής :

$$\pi_i : K_i \to L_i,\ k_{ij} \mapsto \pi_i(\kappa_i) = \lambda_{ij}.$$

(i) Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$f : \bigcup_{i\in I} K_i \to \bigcup_{i\in I} L_i,\ \kappa_{ij} \mapsto \pi_{ij}(\kappa_{ij}).$$

Αφού τα $(K_i)_{i\in I}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε η f είναι καλά ορισμένη.Έστω $i, i' \in I, j \in \kappa_i$ και $j' \in \kappa_{i'}$, ώστε $f(\kappa_{ij}) = f(\kappa_{i'j'}) \Leftrightarrow \pi_i(\kappa_{ij}) = \pi_{i'}(\kappa_{i'j'}) \Leftrightarrow \lambda_{ij} = \lambda_{i'j'}$.Αφού $(L_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια ξένων συνόλων ανά δύο έπεται ότι $i = i'$.Δηλαδή έχουμε πως $\lambda_{ij} = \lambda_{ij'}$ και επειδή π_i είναι μονομορφισμός είναι άμεσο ότι $j = j'$.Δηλαδή δείξαμε ότι η f είναι μονομορφισμός.Έτσι ισχύει το εξής :

$$|\bigcup_{i\in I} K_i| \leq |\bigcup_{i\in I} L_i| \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i.$$

(ii) Γνωρίζουμε ότι ισχύει το εξής :

$$\prod_{i\in I} K_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} K_i : (\forall i \in I)[f(i) \in K_i]\} \quad \text{και} \quad \prod_{i\in I} L_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} L_i : (\forall i \in I)[f(i) \in L_i]\}$$

Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$g : \prod_{i\in I} K_i \to \prod_{i\in I} L_i, h \mapsto f \circ h \ ,$$

όπου την f την ορίσαμε στο (i).Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη κα μάλιστα θα δείξουμε ότι είναι μονομορφισμός.Πράγματι έστω $h, h' \in \prod\limits_{i\in I} K_i$ με $g(h) = g(h') \Leftrightarrow f \circ h = f \circ h'$.Όμως η f είναι μονομορφισμός, άρα $h = h'$.Άρα έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$|\prod_{i\in I} K_i| \leq |\prod_{i\in I} L_i| \Leftrightarrow \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

14. Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, δείξτε ότι ο επόμενος πληθάριθμος κ^+ είναι κανονικός.

    Λύση : Ας υποθέσουμε ότι $cf(\kappa^+) < \kappa^+$.Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σύνολο I με $|I| = cf(\kappa^+)$ και $(\kappa_i)_{i\in I}$ με $\kappa_i < \kappa^+$, ώστε $\sum\limits_{i\in I} \kappa_i = \kappa^+$.Όμως, αφού ισχύει ότι $cf(\kappa^+) < \kappa^+$, τότε $cf(\kappa^+) \leq \kappa$.Αφού $|I| \leq \kappa$ και $\kappa_i \leq \kappa$ για κάθε $i \in I$, τότε $\kappa^+ = \sum\limits_{i\in I} \kappa_i \leq \kappa$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.Δηλαδή έχουμε ότι $cf(\kappa^+) = \kappa^+$, άρα ο κ^+ είναι κανονικός πληθάριθμος.

15. Δείξτε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.

    Λύση : Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σύνολο I με $|I| = cf(\kappa)$ και $(\kappa_i)_{i\in I}$ με $\kappa_i < \kappa$, όπου $\sum\limits_{i\in I} \kappa_i = \kappa$.Όμως ισχύει ότι $\prod\limits_{i\in I} \kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$, άρα από το θέωρημα του König έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \kappa \Leftrightarrow \kappa < \kappa^{cf(\kappa)}.$$

16. Για κάθε θετικό ακέραιο $n \in \mathbb{N}^*$, συμβολίζουμε με $f(n)$ των πλήθος των διαφορετικών ανά δύο πρώτων παραγόντων του n. Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ ορίζουμε την εξής διμελή σχέση: για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$mRn \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} m = n \text{ ή } f(m) < f(n) \text{ ή } [f(m) = f(n) \text{ και } m < n].$$

    Αποδείξτε ότι η παραπάνω διμελής σχέση είναι καλή διάταξη στο $\mathbb{N}^*$. Σχεδιάστε μια εικόνα για τον καλά διατεταγμένο χώρο $\mathbb{N}^*$.

    Λύση : Αρχικά θα δείξουμε ότι η R είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$.

- Έστω $n \in \mathbb{N}^*$.Είναι σαφές ότι nRn, αφού $n = n$. (**αυτοπαθής**)

- Έστω $n, m \in \mathbb{N}^*$, ώστε nRm και mRn.Είναι σαφές ότι η μοναδική περίπτωση, όπου ισχύουν και οι δύο σχέσεις ταυτόχρονα είναι μόνο όταν $n = m$. (**αντισυμμετρική**)

- Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}^*$, ώστε nRm και mRk.Αν $n = m$ ή $m = k$, τότε είναι άμεσο ότι nRk.Έστω ότι $n < m$ και $m < k$, δηλαδή $n < k$.Όμως, τότε $f(n) \leq f(m) \leq f(k)$, δηλαδή $f(n) \leq f(k)$, άρα έχουμε ότι nRk, δηλαδή το ζητούμενο. (**μεταβατική**)

  Δείξαμε λοιπόν ότι η R είναι **μερική διάταξη.**

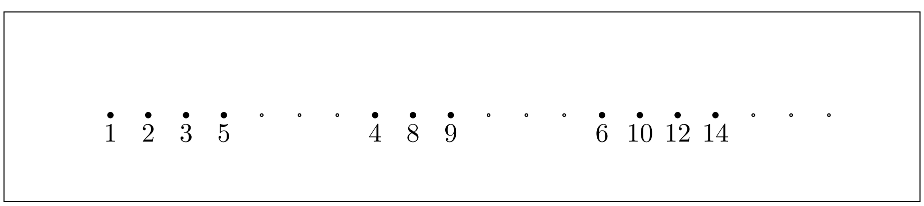
  Τώρα θα δείξουμε ότι είναι ολική διάταξη.Έστω λοιπόν $n, m \in \mathbb{N}^*$.Από τη συνήθη διάταξη στο $\mathbb{N}$ γνωρίζουμε ότι $n \leq m$ ή $m \leq n$.Αν $n = m$ είναι άμεσο ότι nRm.Τώρα χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $m < n$, τότε αν $f(m) < f(n)$ έχουμε ότι mRn.Αν $f(m) = f(n)$ αφού $m < n$, τότε mRn.Τέλος αν $f(n) < f(m)$ είναι σαφές ότι nRm.Άρα δείξαμε ότι η R είναι **ολική διάταξη** στο N^*.

  Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathbb{N}^*$ είναι καλά διατάξιμο με τη σχέση R.Έστω $X \subseteq \mathbb{N}^*$ με $X \neq \emptyset$.Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{f(n) : n \in X\}$.Το Y έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω y, αφού το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατάξιμο με τη συνήθη διάταξη.Θεωρούμε το εξής σύνολο :

  $K = \{n \in X :$ το πλήθος των διαφορετικών πρώτων παραγόντων του n είναι $y\}$.

  Λόγω της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι το K έχει ελάχιστο στοιχείο έστω x και είναι σαφές ότι $x = \min X$.Άρα, δείξαμε ότι η R είναι **καλή διάταξη** στο $\mathbb{N}^*$.

  Τέλος θα δώσουμε μια ενδεικτική εικόνα για το καλά διατεταγμένο χώρο $(\mathbb{N}^*, R)$.



$(\mathbb{N}^*, R)$

Ορισμός. *Έστω P και Q δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι. Ορίζουμε το άθροισμα $P +_o Q$ παίρνοντας ξένα αντίγραφα των P και Q και τοποθετώντας αυτά το ένα μετά το άλλο έτσι ώστε κάθε σημείο του P να προηγείται από κάθε σημείο του Q. Πιο αυστηρά, θέτουμε*

$$P +_o Q = (\{0\} \times P) \cup (\{1\} \times Q)$$

και για κάθε $(i, x), (j, y) \in P +_o Q$ ορίζουμε:

$$(i, x) \leq (j, y) \Leftrightarrow i < j \text{ ή } [i = j = 0 \text{ και } x \leq_P y] \text{ ή } [i = j = 1 \text{ και } x \leq_Q y].$$

17. Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, δείξτε ότι $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.

Λύση : Έχουμε ότι $P =_\circ P'$ και $Q =_\circ Q'$, άρα υπάρχουν αντιστοιχίες :

$$\pi_0 : P \to P' \quad \text{και} \quad \pi_1 : Q \to Q' \ ,$$

οι οποίες σέβονται τις διατάξεις.Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$f : P +_\circ Q \to P' +_\circ Q', \ f((i, x)) = \begin{cases} (i, \pi_0(x)) \ , & \text{αν } i = 0 \\ (i, \pi_1(x)) \ , & \text{αν } i = 1 \end{cases}.$$

Είναι άμεσο ότι η f είναι καλά ορισμένη και θα δείξουμε ότι είναι ομοιότητα.

- Αρχικά η f είναι μονομορφισμός.Πράγματι, έστω $i, i' \in \{0, 1\}$ και $x, x' \in P \vee Q$ με $f((i, x)) = f((i', x'))$.Τότε έχουμε ότι ισχύει το εξής $(i, \pi_i(x)) = (i', \pi_{i'}(x')) \Leftrightarrow i = i'$ και $\pi_i(x) = \pi_i(x')$.Όμως για κάθε i η απεικόνιση π είναι μονομορφισμός, άρα $x = x'$.Δηλαδή έχουμε ότι $(i, x) = (i', x')$, άρα η f είναι μονομορφισμός.

- Η f είναι επιμορφισμός.Πράγματι, έστω $(i, y) \in P' +_\circ Q'$.Αφού η απεικόνιση π_i είναι επιμορφισμός, υπάρχει $x \in P \vee V$, ώστε $\pi_i(x) = y$.Έτσι έχουμε ότι $f((i, x)) = (i, y)$, δηλαδή η f είναι επιμορφισμός.

- Η f σέβεται τις διατάξεις.Πράγματι, έστω $(i, x), (j, y) \in P +_\circ Q$ με $(i, x) \leq (j, y)$.Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

  (i) Έστω ότι $i < j$.Τότε είναι σαφές ότι $(i, x) \leq (j, y) \Leftrightarrow f((i, x)) = (i, \pi_i(x)) \leq (j, \pi_j(y)) = f((j, y))$.

  (ii) Έστω ότι $i = j = 0$.Τότε έχουμε ότι $x \leq_P y \Leftrightarrow \pi_0(x) \leq_{P'} \pi_0(y)$ από τον ορισμό της π_0.Άρα, έχουμε ότι $(i, x) \leq (j, y) \Leftrightarrow f((i, x)) = (0, \pi_0(x)) \leq (0, \pi_0(y)) = f((j, y))$.

  (iii) Έστω ότι $i = j = 1$.Τότε έχουμε ότι $x \leq_Q y \Leftrightarrow \pi_1(x) \leq_{Q'} \pi_1(y)$ από τον ορισμό της π_1.Άρα, έχουμε ότι $(i, x) \leq (j, y) \Leftrightarrow f((i, x)) = (1, \pi_1(x)) \leq (1, \pi_1(y)) = f((j, y))$.

  Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η f σέβεται τις διατάξεις και είναι αντιστοιχία, άρα η f είναι ομοιότητα.Άρα, συμπεραίνουμε ότι $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.

18. Αν U και V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι, δείξτε ότι και το άθροισμά τους $U +_o V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

    Λύση : Θα δείξουμε ότι αν $(U, \leq_U), (V, \leq_V)$ καλά διατεταγμένοι χώροι, τότε $(U +_\circ V, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος με τη διάταξη $\leq$, όπου ορίσαμε παραπάνω.Αρχικά θα δείξουμε ότι η $\leq$ είναι **μερική** διάταξη.

    (i) Έχουμε ότι για κάθε $(i, x) \in U +_\circ V$, τότε $(i, x) \leq (i, x)$, αφού είτε $i = 0$ είτε $i = 1$ οι $\leq_U, \leq_V$ είναι καλές διατάξεις, άρα έχουν την αυτοπαθή ιδιότητα, δηλαδή $(i, x) \leq (i, x)$.

    (ii) Έστω $(i, x), (j, y) \in U +_\circ V$ όπου ισχύει ότι $(i, x) \leq (j, y)$ και $(j, y) \leq (i, x)$.Άρα, είναι σαφές ότι $i = j$ και αφού είτε $i = 0$ είτε $i = 1$ οι διατάξεις $\leq_U, \leq_V$ έχουν την αντισυμμετρική ιδιότητα, δηλαδή $x = y$, άρα $(i, x) = (j, y)$.

    (iii) Έστω $(i, x), (j, y), (k, z) \in U +_\circ V$ ώστε $(i, x) \leq (j, y)$ και $(j, y) \leq (k, z)$.Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Έστω ότι $i = j < k$, τότε έχουμε ότι από τον ορισμό της $\leq$ ότι $(i, x) \leq (k, z)$.
- Έστω ότι $i = j = k$, τότε αφού οι $\leq_U, \leq_V$ είναι καλές διατάξεις έχουμε ότι $(i, x) \leq (k, z)$.
- Έστω ότι $i < j = k$, τότε έχουμε ότι από τον ορισμό της $\leq$ ότι $(i, x) \leq (k, z)$.
- Έστω ότι $i < j < k$, τότε έχουμε ότι από τον ορισμό της $\leq$ ότι $(i, x) \leq (k, z)$.

    Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $(i, x) \leq (k, z)$, δηλαδή η $\leq$ έχει τη μεταβατική ιδιότητα.

    Τώρα θα δείξουμε ότι η $\leq$ είναι **ολική** διάταξη.Πράγματι, έστω $(i, x), (j, y) \in U +_\circ V$.Αν $i \neq j$ είναι άμεσο ότι $(i, x) \leq (j, y)$ ή $(j, y) \leq (k, z)$.Αν $i = j$ επειδή $\leq_U, \leq_V$ είναι καλές διατάξεις γνωρίζουμε ότι $(i, x) \leq (j, y)$ ή $(j, y) \leq (k, z)$.Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η διάταξη είναι ολική.

    Τέλος θα δείξουμε ότι η διάταξη είναι **γραμμική**.Έστω $(\{0\} \times K) \cup (\{1\} \times M) \subseteq U +_\circ V$ με $K \subseteq U$ και $M \subseteq V$.Αν $M = K = \emptyset$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε.Αν $K = \emptyset$ και $M \neq \emptyset$, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x = \min M$, αφού ο V είναι καλά διατεταγμένος χώρος.Άρα το στοιχείο $(0, x)$ είναι το ελάχιστο του συνόλου.Αν $K \neq \emptyset$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x = \min K$, το οποίο είναι άμεσο ότι είναι το ελάχιστο του συνόλου, αφού για κάθε $(i, y) \in (\{0\} \times K) \cup (\{1\} \times M)$ ισχύει ότι $(0, x) \leq (i, y)$.

    Δείξαμε λοιπόν ότι η $\leq$ είναι καλή διάταξη, δηλαδή ότι ο $(U +_\circ V, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

19. Δείξτε ότι

$$\{0\} +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o \{0\}.$$

    (Συνεπώς, το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα.)

Λύση : Αρχικά θα δείξουμε ότι $\{0\} +_\circ \mathbb{N} =_\circ \mathbb{N}$.Έχουμε ότι $\{0\} +_\circ \mathbb{N} = \{(0,0)\} \cup \{(1,n) : n \in \mathbb{N}\}$.Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$f : \{0\} +_\circ \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f((i,n)) = \begin{cases} 0\ , & \text{αν } i = 0 \\ n+1\ , & \text{αν } i = 1 \end{cases}.$$

Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη και θα δείξουμε ότι είναι ομοιότητα.

- Έστω $(i,n),(j,m) \in \{0\} +_\circ \mathbb{N}$ με $f((i,n)) = f((j,m))$.Αν $f((i,n)) = 0 \Leftrightarrow f((j,m)) = 0$, τότε $i = j = 0$, δηλαδή $(i,n) = (0,0) = (j,m)$.Αν $f((i,n)), f((j,m)) \neq 0$, τότε $i = j = 1$ και είναι άμεσο από τον ορισμό της f ότι $n = m$.Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $(i,n) = (j,m)$, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός.
- Έστω $n \in \mathbb{N}$.Αν $n = 0$, τότε έχουμε ότι $f((0,0)) = n$, ενώ αν $n \neq 0$, τότε έχουμε ότι $f((1,n-1)) = n$.Άρα, είναι σαφές ότι η f είναι επιμορφισμός.
- Από τον ορισμό της f είναι άμεσο ότι σέβεται τις διατάξεις.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι f είναι ομοιότητα, δηλαδή $\{0\} +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$.Τώρα για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o \{0\}$.Ειδικότερα θα δείξουμε ότι $\mathbb{N} =_\circ \text{seg}_{\ \mathbb{N}+_o\{0\}}((1,0))$, το οποίο είναι γνήσιο αρχικά τμήμα του $\mathbb{N} +_o \{0\}$.Έχουμε λοιπόν το εξής :

$$\text{seg}_{\ \mathbb{N}+_o\{0\}}((1,0)) = \{x \in \mathbb{N}+_o\{0\} : x < (1,0)\} = \{(0,n) \in \mathbb{N}+_o\{0\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ορίζουμε την εξής απεικόνιση :

$$g : \mathbb{N} \to \text{seg}_{\ \mathbb{N}+_o\{0\}}((1,0)),\ n \mapsto (0,n).$$

Είναι άμεσο ότι η g είναι αντιστοιχία και σέβεται τις διατάξεις, άρα είναι ομοιότητα.Έτσι προκύπτει πως

$$\{0\}+_o\mathbb{N} =_o \mathbb{N} =_\circ \text{seg}_{\ \mathbb{N}+_o\{0\}}((1,0)) \sqsubset_{\neq} \mathbb{N}+_o\{0\} \Rightarrow \{0\}+_o\mathbb{N} \neq_\circ \mathbb{N}+_o\{0\}.$$