Γεωμετρία II

Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

6 Φεβρουαρίου 2022

Θεματικές Ενότητες:

- Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$
- Καμπυλότητα, στρέψη και εξισώσεις Frenet-Serret
- Πότε μια καμπυλή του $\mathbb{R}^3$ είναι επίπεδη, κύκλος και το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρία καμπυλών στο $\mathbb{R}^3$

Περιεχόμενα

1 Ασκήσεις

Ορισμός 1. Μια παραμετρική καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ λέγεται **ομαλή** αν $\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτηση για κάθε $t \in I$. Άρα, αν $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$, για κάθε $t \in I$, τότε η γ είναι ομαλή.

1. Έστω $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}(t) &= \kappa(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathbf{n}(t)\\
\dot{\mathbf{n}}(t) &= -\kappa(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathbf{T}(t) + \tau(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathbf{b}(t)\\
\dot{\mathbf{b}}(t) &= -\tau(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathbf{n}(t)
\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ το τρίεδρο Frenet της γ, κ η καμπυλότητα της γ και τ η στρέψη της.

2 (Pressley 2.3.1)**.** (*) Υπολογίστε τα $\kappa, \tau, \mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες και επιβεβαιώστε ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις Frenet-Serret:

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

((ii)) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

Δείξτε ότι η καμπύλη του ερωτήματος (ii) είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο, την ακτίνα και το επίπεδο το οποιο ανήκει.

3 (Pressley 2.3.2)**.** (**) Περιγράψτε όλες τις καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ που έχουν **σταθερή** καμπυλότητα $\kappa > 0$ και **σταθερή** στρέψη τ.

4 (Pressley 2.3.3)**.** (**) Μια κανονική καμπύλη γ του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα $\kappa > 0$ λέγεται **γενικευμένη έλικα** εαν το εφαπτόμενο διάνυσμά της σχηματίζει σταθερή γωνία ϑ με ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{a}$.

(i) Δείξτε ότι η στρέψη τ και η καμπυλότητα κ της γ ικανοποιούν τη σχέση $\tau = \pm\kappa \cdot \cot\vartheta$.

(ii) Δείξτε αντιστρόφως ότι, εαν η στρέψη και η καμπυλότητα μια κανονικής καμπύλης ικανοποιούν τη σχέση $\tau = \lambda\kappa$, όπου λ μια σταθερά, τότε η καμπύλη είναι γενικευμένη έλικα.

5 (M.A.)**.** [*] Να δειχθεί ότι η καμπύλη (κυκλική έλικα) :

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \ ,$$

με a, b σταθερές με $a \neq 0$, είναι γενικευμένη έλικα και να βρεθούν οι αντίστοιχες σταθερές $\mathbf{a}$ (διάνυσμα) και ϑ (γωνία), όπως στην Άσκηση 4.

6 (M.A.)**.** [**] Έστω καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, με καμπυλότητα παντού θετική, και $a \in \mathbb{R}^3$ με $a \neq 0$ σταθερό διάνυσμα ώστε $a \cdot n(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Δείξτε ότι η γ είναι γενικευμένη έλικα.

7 (M.A.)**.** [***]

(i) Να δείξετε ότι η καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με φυσικές εξισώσεις

$$\kappa(s) = \sin s \tag{1}$$
$$\tau(s) = \cos s \tag{2}$$

έχει την εξής ιδιότητα: '' υπάρχει σταθερό διάνυσμα $\mathbf{a} \neq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in I$ το $\mathbf{n}(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία ϑ με το $\mathbf{a}$.''

(ii) Να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη και για τα κ, τ έτσι ώστε η καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα κ και στρέψη τ να έχει την ιδιότητα του ερωτήματος (i).

8 (Pressley 2.3.4)**.** (**) Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa(s) > 0$ και $\tau(s) \neq 0$ για όλα τα s. Δείξτε ότι, εαν η γ είναι **σφαιρική**, δηλαδή εαν βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, τότε

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau \cdot \kappa^2}\right) \tag{3}$$

Αντιστρόφως, δείξτε ότι εαν ισχύει η εξίσωση 3 τότε

$$\rho^2 + (\dot{\rho} \cdot \sigma)^2 = r^2.$$

για κάποια (θετική) σταθερά r, όπου $\rho = \frac{1}{\kappa}$ και $\sigma = \frac{1}{\tau}$, και συμπεράνετε ότι η γ βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας r.

Ορισμός 2. Αν $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ ομαλή, τότε το επίπεδο από το $\gamma(t)$ παράλληλο στα :

(i) $\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)$ ονομάζεται **εγγύτατο** με διανυσματική εξίσωση

$$(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot (\vec{x} - \gamma(t)) = 0.$$

(ii) $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ ονομάζεται **κάθετο** με διανυσματική εξίσωση

$$\dot{\gamma}(t) \cdot (\vec{x} - \gamma(t)) = 0.$$

(iii) $\mathbf{b}(t), \mathbf{T}(t)$ ονομάζεται **ευθειοποιόν** με διανυσματική εξίσωση

$$[(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)] \cdot (\vec{x} - \gamma(t)) = 0.$$

9 (M.A.)**.** (*) Αν $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$ να δείξετε ότι η γ είναι ομαλή και να υπολογίσετε το εγγύτατο, κάθετο και ευθειοποιόν επίπεδο στο $t = 1$.

10 (M.A.)**.** (**) Έστω $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτηταςμε στρέψη $\tau(s) \neq 0$, για κάθε $s \in I$. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η καμπυλη $\beta(s) = \mathbf{b}(s)$ να είναι επίπεδη.

11 (M.A.)**.** (**) Να βρεθούν (χαρακτηριστούν) όλες οι ομαλές καμπύλες $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα

(i) όλες οι εφαπτόμενες να διέρχονται από σταθερό σημείο.

(ii) όλες οι πρώτες κάθετες (παράλληλες στο $\mathbf{n}$) να διέρχονται από σταθερό σημείο.

(iii) όλες οι διχοτόμοι των $\mathbf{T}, \mathbf{n}$ να διέρχονται από σταθερό σημείο.

(iv) η κεντρική διχοτόμος του τριέδρου Frenet (παράλληλη στο $\mathbf{T} + \mathbf{n} + \mathbf{b}$) να διέρχεται από σταθερό σημείο.

12 (Μ.Α.). (*) Αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $\kappa(s) = \frac{1}{s}$, $(s > 0)$, $\quad \tau(s) = 1$ να βρεθεί η καμπυλότητα και η στρέψη της

$$\beta(s) = \gamma(s) + s \cdot \mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s).$$

13 (Ιούνιος 2012). (*) Έστω μια ομαλή καμπύλη $\beta(s)$ με μοναδιαία ταχύτητα, τρίεδρο Frenet $\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(s) = \mathbf{T}(s)$.

(α) Να υπολογίσετε τη στρέψη της γ.

(β) Αν η γ είναι επίπεδη δείξτε ότι η β είναι γενικευμένη έλικα.

(γ) Αν δίνονται $\mathbf{T}(0) = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n}(0) = (1, 0, 0)$, $\kappa(0) = 1$, $\tau(0) = -3$ να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου της γ στο $s = 0$.

14 (Ιούνιος 2015). (*) Έστω $\kappa(s) = s^2 + 1$ και $\tau(s) = -1$ με $s \in \mathbb{R}$. Να δικαιολογήσετε γιατί υπάρχει καμπύλη $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα κ και στρέψη τ. Στη συνέχεια να βρείτε την καμπυλότητα της καμπύλης $\beta(s) = \mathbf{T}(s) + \mathbf{b}(s)$, όπου $\mathbf{T}, \mathbf{b}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο και αμφικάθετο αντίστοιχα μια γ όπως παραπάνω.

15 (Σεπτέμβριος 2011). Αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ είναι ομαλή καμπύλη (όχι κατ΄ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας) και $\kappa > 0$ στο I τέτοια ώστε, για κάθε $t \in I$, τα διανύσματα $\gamma(t)$ και $\gamma''(t)$ είναι συγγραμμικά να αποδείξτε ότι η γ είναι επίπεδη.

16 (Σεπτέμβριος 2013). Έστω $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας.

(α) Δείξτε ότι
$$\gamma^{(3)}(s) = -\kappa^2(s)\mathbf{T}(s) + \dot{\kappa}(s)\mathbf{n}(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s).$$
όπου $\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ το τρίεδρο Frenet της γ.

(β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της γ είναι παράλληλα στο $\gamma^{(3)}(s)$.

(γ) Αν $\kappa(s) = s$ και $\tau(s) = \frac{1}{s}$, όπου κ, τ η καμπυλότητα και η στρέψη της γ αντίστοιχα, να βρείτε την καμπυλότητα της καμπύλης $\ddot{\gamma}(s)$

17. (α) Έστω καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξτε πλήρως ότι για κάθε $s \in I$ το $\dot{\mathbf{b}}(s)$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{n}(s)$, όπου $\mathbf{b}, \mathbf{n}$ το αμφικάθετο και το πρώτο κάθετο της γ αντίστοιχα.

(β) Να ορίσετε την στρέψη της γ και να αποδείξετε τον τύπο της συναρτήσει των παραγώγων της γ.

(γ) Δίνεται καμπύλη $\alpha(t) = \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right), t\right)$. Να υπολογίσετε την καμπυλότητα της α και να βρείτε την εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου σε τυχαίο σημείο t_0.

(δ) Δίνεται καμπύλη $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με $\beta(s) = \mathbf{b}(s)$, όπου $\mathbf{b}$ το δεύτερο κάθετο της καμπύλης β. Να υπολογίσετε την καμπυλότητα και τη στρέψη της β.

18 (Σεπτέμβριος 2016). (α) Δίνεται η κυκλική έλικα με μοναδιαία ταχύτητα

$$\gamma(s) = (r\cos s, r\sin s, cs)\,, \quad s \in \mathbb{R}\ ,$$

όπου $r, c > 0$ σταθερές.

(i) Να δείξετε ότι οι καμπύλες $\beta(s) = \mathbf{T}(s)$ και $\delta(s) = \mathbf{b}(s)$ είναι κύκλοι.

(ii) Να βρείτε τις τιμές των r, c για τις οποίες τα σύνολο $\beta(\mathbb{R})$ και $\delta(\mathbb{R})$ ταυτίζονται.

(β) Βρείτε αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας για την καμπύλη

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}\right), \quad t > 0.$$

(γ) Έστω $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με μοναδιαία ταχύτητα με $\mathbf{T}$ μοναδιαίο εφαπτόμενο κάθετο και καμπυλότητα κ. Δίνονται

$$\dot{\mathbf{T}}(0) = (2, 0, 2) \quad \text{και} \quad \ddot{\mathbf{T}}(0) = (9, 7, 1).$$

Υπολογίστε το $\dot{\kappa}(0)$.

19 (Φεβρουάριος 2013). Δίνεται η καμπύλη $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = \left(\frac{t^3}{3}, t^2, 2t\right)$.

(α) Να δείξετε ότι η γ είναι ομαλή και να βρείτε το μήκος της.

(β) Να βρείτε την καμπυλότητα, το τρίεδρο Frenet και την εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου της γ στο σημείο $t = 1$.

(γ) Αν $\beta\colon [0, \mu] \to \mathbb{R}^3$ ομόρροπη αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ, να περιγράψετε την β και να βρείτε το μ.

20 (Φεβρουάριος 2013). (α) Να ορίσετε το τρίεδρο Frenet $\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ καμπύλης $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας και να αποδείξετε (πλήρως) ότι για κάθε s στο I το $\mathbf{b}'(s)$ είναι παράλληλο με το $\mathbf{n}(s)$.

(β) Αν γ καμπύλη όπως στο (α΄) με καμπυλότητα 2 στο 0 (υποθέτουμε ότι $0 \in I$) και τέτοια ώστε για κάθε $s \in I$, η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλη στο $2\mathbf{T}(s) - \mathbf{n}(s)$ διέρχεται επίσης και από την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, να δειξετε ότι η γ είναι επίπεδη και να προσδιορίσετε την καμπυλότητά της.

2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Αφού γ είναι κανονική τότε υπάρχει $\tilde{\gamma}$ αναπαραμέτρηση μήκους τόξου της γ, με $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$. Αν $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{b}}$ το τρίεδρο Frenet της $\tilde{\gamma}$ και $\tilde{\kappa}, \tilde{\tau}$ η καμπυλότητα και η στρέψη της γ αντίστοιχα ισχύει ότι (γιατί;)

$$\tilde{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{T}(t),\ \tilde{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(t),\ \tilde{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(t),\ \tilde{\kappa}(s) = \kappa(t),\ \tilde{\tau}(s) = \tau(t).$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\, \mathbf{n}(t).$$

Με όμοιο τρόπο δείξτε και τις υπόλοιπες σχέσεις.

2. (i) Παραγωγίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+t}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\ddot{\gamma}(t) &= \left(\frac{1}{4\sqrt{1+t}}, \frac{1}{4\sqrt{1-t}}, 0\right)\\
\dddot{\gamma}(t) &= \left(-\frac{1}{8(1+t)^{3/2}}, \frac{1}{8(1-t)^{3/2}}, 0\right)
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, δηλαδή

$$\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}.$$

και

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{1}{\sqrt{8(1-t^2)}}.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+t}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\mathbf{n}(t) &= \frac{1}{k(t)} \cdot \dot{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t}, 0\right)\\
\mathbf{b}(t) &= \mathbf{T}(t) \times \mathbf{n}(t) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+t}, \frac{1}{2}\sqrt{1-t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

(ii) Παραγωγίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)\\
\ddot{\gamma}(t) &= \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)\\
\dddot{\gamma}(t) &= \left(\frac{4}{5}\sin t, \cos t, -\frac{3}{5}\sin t\right)
\end{aligned}$$

με $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ συνεπώς ισχύει ότι $\mathbf{T}(t) = \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)$ και $\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = 1$. Επίσης έχουμε ότι $\mathbf{b}(t) = \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$, δηλαδή ισχύει ότι $\tau(t) = 0$. Ακόμη έχουμε ότι

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\kappa}(t) \cdot \dot{\mathbf{T}}(t) = \ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right).$$

Αφού $\kappa(t) = 1 > 0$ και $\tau(t) = 0$ για κάθε $t \in I$ η γ είναι κύκλος που περιέχεται σε επίπεδο (Π) κάθετο στο $\mathbf{b}$. Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του ισούται με $\frac{1}{\kappa} = 1$ και το κέντρο του με $O = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot \mathbf{n(t)} = (0,1,0)$. Αφού $O \in$ (Π), αν $(x,y,z) \in$ (Π) τότε ισχύει ότι

$$\mathbf{b}(t) \cdot (x, y-1, z) = 0 \Rightarrow (\Pi) : 3x + 4z = 0.$$

3. Θεωρούμε την κυκλική έλικα $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ με $a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$ και $b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$. Από προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι $\kappa_\gamma(t) = \frac{a}{a^2+b^2} = \kappa$ και $\tau_\gamma(t) = \frac{b}{a^2+b^2} = \tau$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρία καμπυλών του $\mathbb{R}^3$ συμπεραίνουμε ότι κάθε καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα κ και στρέψη τ είναι ευθεία ισομετρία της γ.

4. (i) Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας (γιατί;). Άρα, αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας, υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ σταθερό, μοναδιαίο διάνυσμα ώστε να σχηματίζει σταθερή γωνία $\vartheta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ με το $\mathbf{T}(s)$, για κάθε $s \in I$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{T}(s)\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cos\vartheta = \cos\vartheta \\ \Rightarrow\ &\dot{\mathbf{T}}(s) \cdot \mathbf{a} = 0 \\ \Rightarrow\ &\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{a} = 0 \end{aligned}$$

Επίσης αφού $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι

$$\mathbf{a} = (\mathbf{T}(s)\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{T}(s) + (\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{n} + (\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}(s) = \cos\vartheta \cdot \mathbf{T}(s) + (\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}(s).$$

Αφού το a είναι μοναδιαίο ισχύει ότι

$$1 = \|\mathbf{a}\| = \cos\vartheta + [(\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{a})]^2 \Rightarrow (\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{a}) = \pm\sin\vartheta \neq 0.$$

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ έχουμε ότι είναι σταθερή και ίση με $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \pm\sin\vartheta$. Παραγωγίζοντας της τελευταία σχέση έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Όμοια με (i) Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας (γιατί ;). Άρα, αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας, τότε γνωρίζουμε ότι $\dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa\mathbf{n}(s)$ και $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$. Από την αρχική υπόθεση προκύπτει ότι

$$\lambda\dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \Rightarrow \lambda\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^3$$

με $\mathbf{a}'$ σταθερό και μη μηδενικό (γιατί;). Επομένως, αν $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}'}{\|\mathbf{a}'\|}$, τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{T}(s)\cdot\mathbf{a} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \cos\varphi(s)$$

όπου $\cos\varphi(s)$ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{T}(s)$ και $\mathbf{a}$. Αφού $\varphi(s) \in [0,\pi]$ (ως γωνία διανυσμάτων), τότε τελικά έχουμε ότι $\varphi(s) = \arccos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)$ σταθερό, άρα έχουμε ότι γ είναι γενικευμένη έλικα.

5. Δείξτε ότι $\kappa(t) = \frac{|a|}{a^2+b^2}$ και $\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}$ όπου κ, τ η καμπυλότητα και η στρέψη της γ αντίστοιχα. Συνεπώς, αν $\lambda = \frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{|a|}$ έχουμε ότι η γ είναι γενικευμένη έλικα. Επίσης όμοια με την Άσκηση 4 αν $\mathbf{a}' = \lambda \mathbf{T} + \mathbf{b}$ δείξτε ότι το $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}'}{\|\mathbf{a}'\|}$ είναι το ζητούμενο διάνυσμα και $\vartheta = \arccos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$ η ζητούμενη γωνία.

6. Από Άσκηση 1 έχουμε ότι $\dot{\mathbf{T}} = \kappa \cdot \|\dot{\gamma}\| \, \mathbf{n}$. Για κάθε $t \in I$ έχουμε ότι

$$\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{a} = \Longrightarrow \dot{\mathbf{T}}(t) \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{T}(t) \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right) = \cos\vartheta(t) \quad \text{σταθερό}$$

όπου $\vartheta(t)$ η γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{T}(t), \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$. Συνεπώς αφού δείξαμε ότι η μεταξύ τους γωνία είναι σταθερή, συμπεραίνουμε ότι η γ είναι γενικευμένη έλικα.

7. (ii) Έστω ότι υπάρχει $\mathbf{a} \neq 0$ σταθερό διάνυσμα που σχηματίζει σταθερή γωνία με το $\mathbf{n}$, και μεταβάλλουμε το $\|\mathbf{a}\|$, ώστε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(s) = 1$ για κάθε $s \in I$. Θέτουμε $\lambda(s) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}(s)$ και $\mu(s) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}(s)$. Τότε έχουμε ότι

$$\dot{\lambda}(s) = \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa(s) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(s)) = \kappa(s) \Rightarrow \lambda(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u) du + c_1$$

$$\dot{\mu}(s) = \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(s)) = -\tau(s) \Rightarrow \mu(s) = -\int_{s_0}^{s} \tau(u) du + c_2$$

για κάποιο $s_0 \in I$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) \, \mathbf{T} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(s)) \, \mathbf{n}(s) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}(s)) \, \mathbf{b} = \lambda \mathbf{T} + \mathbf{n} + \mu \mathbf{b} \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - 1.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(u) du + c_1\right)^2 + \left(-\int_{s_0}^{s} \tau(u) du + c_2\right)^2 = \text{ σταθερό} \tag{4}$$

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι αν τα κ, τ ικανοποιούν την σχέση 4 τότε υπάρχει $\mathbf{a} \neq 0$ που σχηματίζει σταθερή γωνία με το $\mathbf{n}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $s_0 \in I$ και σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύει η 4. Θέτουμε $\lambda(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u) du + c_1$ και $\mu(s) = -\int_{s_0}^{s} \tau(u) du + c_2$ και θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{T} + \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}.$$

Παρατηρήστε ότι $\dot{\mathbf{a}}(s) = 0$, για κάθε $s \in I$ συνεπώς $\mathbf{a}$ είναι σταθερό και μη μηδενικό και μάλιστα από τον τρόπο που ορίστηκε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(s) = 1$, για κάθε $s \in I$, συνεπώς το $\mathbf{a}$ σχηματίζει σταθερή γωνία με το $\mathbf{n}$.

(i) Άμεση εφαρμογή του (ii).

8. Υποθέτουμε ότι η γ είναι σφαιρική, δηλαδή υπάρχει $a \in \mathbb{R}^3$ σταθερό ισχύει ώστε $\|\gamma(s) - a\|^2 = r^2$ σταθερό. Έχουμε διαδοχικά όχι

$$
\begin{aligned}
& (\gamma(s) - a) \cdot (\gamma(s) - a) = r^2 \Rightarrow \mathbf{T}(s) \cdot (\gamma(s) - a) = 0 \\
\Rightarrow\ & \dot{\mathbf{T}}(s) \cdot (\gamma(s) - a) + \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0 \Rightarrow \mathbf{n}(s) \cdot (\gamma(s) - a) = -\frac{1}{\kappa(s)} \\
\Rightarrow\ & \dot{\mathbf{n}} \cdot (\gamma - a) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} \Rightarrow -\kappa \left[\mathbf{T} \cdot (\gamma(s) - a)\right] + \tau \left[\mathbf{b} \cdot (\gamma(s) - a)\right] = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} \\
\Rightarrow\ & \mathbf{b} \cdot (\gamma(s) - a) = \frac{\dot{\kappa}}{\tau \cdot \kappa^2} \Rightarrow \dot{\mathbf{b}} \cdot (\gamma(s) - a) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{T} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau \cdot \kappa^2}\right) \\
\Rightarrow\ & \frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau \cdot \kappa^2}\right)
\end{aligned}
$$

Αντίστροφα, αν η γ ικανοποιεί την τελευταία σχέση τότε παρατηρούμε ότι $\rho = -\sigma\left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)'$, συνεπώς παραγωγίζοντας την ποσότητα $\rho^2 + \left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)^2$ έχουμε ότι

$$\left[\rho^2 + \left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)^2\right]' = 2\rho\dot{\rho} + 2\left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)\left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)' = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει $r \neq 0$ ώστε $\rho^2 + \left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)^2 = r^2$ σταθερό. Θεωρώντας τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{a}(s) = \gamma(t) + \rho\mathbf{n} + \left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)\mathbf{b}$ και δείξτε ότι $\dot{a}(s) = 0$, για κάθε s, δηλαδή ότι $\mathbf{a}(s) = \mathbf{a}$ σταθερό. Τότε, παρατηρήστε ότι

$$\|\gamma(s) - \mathbf{a}\|^2 = \rho^2 + \left(\dot{\rho} \cdot \sigma\right)^2 = r^2$$

και συμπεραίνουμε ότι η γ είναι σφαιρική.

9. Έχουμε ότι $\dot{\gamma}(t) = \left(1, t, t^2\right)$ και $\ddot{\gamma}(t) = (0, 1, 2t)$, συνεπώς ισχύει ότι

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = \left(t^2, -2t, 1\right) \neq (0,0,0), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

άρα η γ είναι ομαλή. Επίσης έχουμε ότι $\gamma(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ και $\dot{\gamma}(1) \times \ddot{\gamma}(1) = (1, -2, 1)$, άρα η καρτεσιανή εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου είναι η

$$\dot{\gamma}(1) \times \ddot{\gamma}(1) \cdot \left(x - 1, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x - 2y + z - \frac{1}{3} = 0.$$

Όμοια υπολογίζονται και το κάθετο και ευθειοποιόν επίπεδα για $t = 1$.

10. Για την επίλυση της άσκησης, θα χρειαστούν οι επόμενες παρατηρήσεις. Αν $\{v_1, v_2, v_2\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και θετικά προσανατολισμένη (ή δεξιόστροφη), δηλαδή $\det\left(v_1, v_2, v_3\right) > 0$, ισχύουν τα ακόλουθα.

- Αν $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, τότε $\|w\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$.

- Αν $w_i = \lambda_{i_1} v_1 + \lambda_{2,i} v_{i_2} + \lambda_{i_3} v_3$ για $i = 1, 2, 3$, τότε ισχύει ότι $w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \lambda_{1_1} & \lambda_{1_2} & \lambda_{1_3} \\ \lambda_{2_1} & \lambda_{2_2} & \lambda_{2_3} \end{vmatrix}$ και επίσης

$$(w_1 \times w_2) \cdot w_3 = \begin{vmatrix} \lambda_{1_1} & \lambda_{1_2} & \lambda_{1_3} \\ \lambda_{2_1} & \lambda_{2_2} & \lambda_{2_3} \\ \lambda_{3_1} & \lambda_{3_2} & \lambda_{3_3} \end{vmatrix}.$$

Τώρα αν $\kappa,\ \tau$ και $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ η καμπυλότητα, η στρέψη και το τρίεδρο Frenet της γ αντίστοιχα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\tau \mathbf{n} \\ \ddot{\beta} &= \tau\kappa \mathbf{T} - \dot{\tau}\mathbf{n} - \tau^2 \mathbf{b} \\ \beta^{(3)} &= (2\dot{\tau}\kappa + \tau\dot{\kappa})\, \mathbf{T} + * \cdot \mathbf{n} - 3\tau\dot{\tau}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι β είναι επίπεδη αν και μόνο αν $\tau_\beta(s) = 0$, για κάθε $s \in I$, συνεπώς β είναι επίπεδη αν και μόνο αν

$$\left(\dot{\beta} \times \ddot{\beta}\right) \cdot \beta^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \tau\kappa & -\dot{\tau} & -\tau^2 \\ 2\dot{\tau}\kappa + \tau\dot{\kappa} & * & -3\tau\dot{\tau} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \text{ σταθερό},\ s \in I.$$

11. Για την επίλυση των ερωτημάτων μπορούμε να υποθέτουμε ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

(i) Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R}^3$ σταθερό τέτοιο $\gamma(s) - p \parallel \mathbf{T}(s)$ (αφού $p, \gamma(s)$ ανήκουν στην εφαπτόμενη της γ στο σημείο $\gamma(s)$). Δηλαδή υπάρχει $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\gamma(s) - p = \lambda(s) \cdot \mathbf{T}(s). \tag{5}$$

Επίσης η λ είναι λεία συνάρτηση αφού $\lambda = (\gamma - p) \cdot \mathbf{T}$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\lambda}(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\lambda(s)\mathbf{n}(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}(s) = 1 \\ \kappa(s)\lambda(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(s) = s + c, & c \in \mathbb{R} \\ \kappa(s)(s + c) = 0 \end{cases}$$

όπου προκύπτει ότι $\kappa(s) = 0$, για κάθε $s \neq c$, και αφού κ είναι συνεχής συνάρτησης $\kappa \equiv 0$. Άρα, η γ είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας). Αντίστροφα, δείξτε ότι αν μια ομαλή καμπύλη είναι τμήμα ευθείας τότε ικανοποιεί την αρχική ιδιότητα.

(ii) Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R}^3$ σταθερό τέτοιο $\gamma(s) - p \parallel \mathbf{n}(s)$ (αφού $p, \gamma(s)$ ανήκουν στις πρώτες κάθετες της γ στο σημείο $\gamma(s)$). Δηλαδή υπάρχει $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\gamma(s) - p = \lambda(s) \cdot \mathbf{n}(s). \tag{6}$$

Επίσης η λ είναι λεία συνάρτηση αφού $\lambda = (\gamma - p) \cdot \mathbf{n}$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\lambda}(s)\mathbf{n}(s) - \kappa(s)\lambda(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\lambda(s)\mathbf{b}(s) \Rightarrow \begin{cases} \kappa(s) \cdot \lambda(s) = -1 \\ \dot{\lambda}(s) = 1 \\ \tau(s) \cdot \lambda(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(s) = c < 0 \\ \kappa(s) = \frac{1}{c} \\ \tau(s) = 0 \end{cases}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\kappa(s) = -\frac{1}{c} > 0$ σταθερή και $\tau \equiv 0$, συνεπώς η γ είναι κύκλος ακτίνας $r = -c$. Αντίστροφα, δείξει ότι αν γ έχει σταθερή καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη $\tau \equiv 0$, τότε ικανοποιεί την αρχική ιδιότητα.

(iii) Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R}^3$ σταθερό τέτοιο $\gamma(s) - p \parallel \mathbf{T} + \mathbf{n}(s)$ (αφού $p, \gamma(s)$ ανήκουν στη διχοτόμο των $\mathbf{T}, \mathbf{n}$ στο σημείο $\gamma(s)$). Δηλαδή υπάρχει $\lambda \colon I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\gamma(s) - p = \lambda(s) \cdot [\mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s)]\,. \tag{7}$$

Επίσης η λ είναι λεία συνάρτηση αφού $\lambda = (\gamma - p) \cdot [\mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s)]$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}\left(\dot{\lambda} - \lambda\kappa\right) + \mathbf{n}\left(\dot{\lambda} + \lambda\kappa\right) + \lambda\tau\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} - \lambda\kappa = 1 \\ \dot{\lambda} + \lambda\kappa = 0 \\ \lambda\tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(s) = s + c \\ \kappa(s) = -\frac{1}{s+c} > 0 \quad s < -c \\ \tau(s) = 0, \quad s \neq c \end{cases}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις πρόκύπτει ότι $\tau \equiv 0$ και $\kappa(s) = -\frac{1}{s+c} > 0$, για $s < -c$. Αντίστροφα, έστω γ ομαλή τέτοια ώστε $\kappa(s) = -\frac{1}{s+c}$ και $\tau(s) = 0$. Αν θέσουμε $\lambda(s) = s + c$ δείξτε ότι η συνάρτηση $p(s) = \gamma(s) - \lambda(s) \cdot [\mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s)]$ είναι σταθερή και έτσι έχουμε ότι η γ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

(iv) Το ζητούμενο προκύπτει όμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα.

12. Έχουμε ότι

$$\dot{\beta}(s) = \left(2 - \frac{1}{s}\right)\mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s) + \mathbf{b}(s) \Rightarrow \left\|\dot{\beta}(s)\right\| = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{s}\right)^2 + 2}$$

$$\ddot{\beta}(s) = \left(\frac{1-s}{s^2}\right)\mathbf{T}(s) - \mathbf{n}(s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^2 + \mathbf{b}(s)$$

$$\dddot{\beta}(s) = \left(\frac{s^2 - s - 1}{s^3}\right)\mathbf{T}(s) + \left(\frac{s^3 - 3s + 3}{s^3}\right)\mathbf{n}(s) + \left(\frac{s-1}{s}\right)^2\mathbf{b}(s)$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{T}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \\ \left(2 - \frac{1}{s}\right) & 1 & 1 \\ \left(\frac{1-s}{s^2}\right) & -\left(\frac{s-1}{s}\right)^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s^2}\mathbf{T} + \frac{-2s^2 + 1}{s^2}\mathbf{n} + \frac{-2s^3 + 6s^2 - 5s + 1}{s^3}\mathbf{b}.$$

και

$$\left(\dot{\beta}(s)\times\ddot{\beta}(s)\right)\cdot\dddot{\beta}(s)=\begin{vmatrix}\left(2-\frac{1}{s}\right) & 1 & 1\\ \left(\frac{1-s}{s^2}\right) & -\left(\frac{s-1}{s}\right)^2 & 1\\ \left(\frac{s^2-s-1}{s^3}\right) & \left(\frac{s^3-3s+3}{s^3}\right) & \left(\frac{s-1}{s}\right)^2\end{vmatrix}=\frac{-4s^5+12s^4-16s^3+12s^2-9s+3}{s^5}.$$

Συνεπώς από τους τύπους

$$\kappa_\beta=\frac{\left\|\dot{\beta}\times\ddot{\beta}\right\|}{\left\|\dot{\beta}\right\|^{3/2}}\quad\text{και}\quad\tau_\beta=\frac{\left(\dot{\beta}\times\ddot{\beta}\right)\cdot\dddot{\beta}}{\left\|\dot{\beta}\times\ddot{\beta}\right\|^2}$$

έχουμε τις ζητούμενες ποσότητες.

13. (α) Υπολογίζουμε ως εξής

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}&=\kappa\mathbf{n}\\ \ddot{\gamma}&=-\kappa^2\mathbf{T}+\dot{\kappa}\mathbf{n}+\kappa\tau\mathbf{b}\\ \dddot{\gamma}&=-3\dot{\kappa}\kappa\mathbf{T}+*\cdot\mathbf{n}+\left(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau}\right)\mathbf{b}\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}=\begin{vmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{n} & \mathbf{b}\\ 0 & \kappa & 0\\ -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau\end{vmatrix}=\kappa^2\tau\mathbf{T}+\kappa^3\mathbf{b}\Rightarrow\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2=\kappa^4\left(\kappa^2+\tau^2\right)$$

και

$$\tau_\gamma=\frac{(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})\cdot\dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2}=\frac{\begin{vmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau\\ -3\dot{\kappa}\kappa & * & 2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau}\end{vmatrix}}{\kappa^4\left(\kappa^2+\tau^2\right)}=\frac{\dot{\kappa}\tau-\dot{\tau}\kappa}{\kappa^2+\tau^2}.$$

(β) Αν γ είναι επίπεδη, τότε $\tau_\gamma(s)=0$, για κάθε $s\in I$, συνεπώς από (α) : $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0\Rightarrow\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\lambda$ σταθερό για κάθε $s\in I$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι β είναι γενικευμένη έλικα.

(γ) Για να βρούμε το εγγύτατο επίπεδο της γ στο $\gamma(0)$, αναγόμαστε στην εύρεση των ποσοτήτων $\dot{\gamma}(0)\times\ddot{\gamma}(0)$ και $\gamma(0)$, καθώς τότε γνωρίζουμε ότι ένα $v\in\mathbb{R}^3$ ανήκει στο εγγύτατο επίπεδο αν και μόνο αν

$$\dot{\gamma}(0)\times\ddot{\gamma}(0)\cdot(v-\gamma(0))=0.$$

Έχουμε ότι $\gamma(0)=\mathbf{T}(0)=(0,1,0)$ και $\dot{\gamma}(0)=\kappa(0)\mathbf{n}(0)=(1,0,0)$. Για την εύρεση του $\ddot{\gamma}(0)$ από (α) αναγόμαστε την εύρεση του $\mathbf{b}(0)=\mathbf{T}(0)\times\mathbf{n}(0)=(0,0,-1)$. Τότε, από (α), έχουμε ότι $\ddot{\gamma}(0)=(\dot{\kappa}(0),-1,3)$. Επομένως ισχύει ότι $\dot{\gamma}(0)\times\ddot{\gamma}(0)=(0,-3,-1)$. Επομένως, αν (x,y,z) ένα σημείο του εγγύτατου επιπέδου, τότε η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου ισούται με $3y+z-3=0$.

14. Γνωρίζουμε την ύπαρξη της γ, αφού $\kappa(s) > 0$ για κάθε s, από το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας καμπυλών. Τώρα, αν $\beta(s) = \mathbf{T}(s) + \mathbf{b}(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\dot{\beta}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) - \tau(s)\mathbf{n}(s) = \left(s^2+2\right)\mathbf{n}(s) \Rightarrow \left\|\dot{\beta}(s)\right\| = s^2+2 \\
&\ddot{\beta}(s) = -\left(s^2+2\right)\cdot\left(s^2+1\right)\mathbf{T}(s) + 2s\cdot\mathbf{n}(s) - \left(s^2+2\right)\mathbf{b}(s) \\
&\dot{\beta}(s)\times\ddot{\beta}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ 0 & s^2+2 & 0 \\ -\left(s^2+1\right)\left(s^2+2\right) & 2s & -\left(s^2+2\right) \end{vmatrix} = \left(-\left(s^2+2\right)^2, 0, \left(s^2+1\right)\left(s^2+2\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\|\dot{\beta}(s)\times\ddot{\beta}(s)\right\| = \left(s^2+2\right)^2\sqrt{\left(s^2+1\right)^2+1}$$

Συνεπώς από τους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε ότι

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\left\|\dot{\beta}(s)\times\ddot{\beta}(s)\right\|}{\left\|\dot{\beta}(s)\right\|^3} = \frac{\sqrt{\left(s^2+1\right)^2+1}}{s^2+2}.$$

15. Αφού, για κάθε $t \in T$ τα $\gamma(t)$ και $\ddot{\gamma}$ είναι συγγραμμικά, τότε υπάρχει $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ ώστε $\gamma(t) = \lambda(t)\ddot{\gamma}(t)$. Παρατηρήστε ότι λ είναι παραγωγίσιμη, αφού

$$\gamma(t)\cdot\ddot{\gamma}(t) = \lambda(t)\left(\ddot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t)\right) = \lambda(t)\cdot\|\ddot{\gamma}(t)\|^2 \Rightarrow \lambda(t) = \frac{\gamma(t)\cdot\ddot{\gamma}(t)}{\|\ddot{\gamma}(t)\|^2}\ ,$$

όπου $\|\ddot{\gamma}(t)\|^2 > 0$ αφού η γ είναι ομαλή. Τώρα παραγωγίζοντας την αρχική σχέση έχουμε ότι

$$\dot{\gamma} = \dot{\lambda}\ddot{\gamma} + \lambda\dddot{\gamma} \Rightarrow \dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} = \lambda\left(\dddot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\right).$$

Από την τελευταία σχέση πρόκύπτει ότι $(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})\cdot\dddot{\gamma} = 0$, συνεπώς έχουμε ότι $\tau(t) = 0$, για κάθε $t \in I$, όπου τ η στρέψη της γ.

16. (α) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής

$$\begin{aligned}
&\gamma'(s) = \mathbf{T}(s) \\
&\gamma''(s) = \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\cdot\mathbf{n}(s) \\
&\gamma'''(s) = -\kappa^2(s)\mathbf{T}(s) + \kappa'(s)\mathbf{n}(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s)
\end{aligned}$$

(β) Από (α) $\gamma^{(3)}$ παράλληλο με $\mathbf{T}$ αν $\dot{\kappa}(s) = 0$ και $\tau(s) = 0$.

(γ) Παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\dddot{\gamma}(s) = \gamma^{(3)}(s) = -s^2\mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s) + \mathbf{b}(s) \Rightarrow \left|\gamma^{(3)}(s)\right| = \sqrt{s^4+2} \\
&\ddddot{\gamma}(s) = \gamma^{(4)}(s) = -3s\mathbf{T}(s) + \left(\frac{-s^4-1}{s}\right)\mathbf{n}(s) + \frac{1}{s}\mathbf{b}(s)
\end{aligned}$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\gamma^{(3)}(s)\times\gamma^{(4)}(s)=\begin{vmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{n} & \mathbf{b}\\ -s^2 & 1 & 1\\ -3s & \frac{-s^4-1}{s} & \frac{1}{s}\end{vmatrix}=\left(\frac{s^4+2}{s}\right)\mathbf{T}+-2s\mathbf{n}+\left(s^5+4s\right)\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow\left\|\gamma^{(3)}(s)\times\gamma^{(4)}(s)\right\|=\sqrt{\left(\frac{s^4+2}{s}\right)^2+4s^2+\left(s^5+4s\right)^2}$$

Άρα χρησιμοποιώντας ότι $\kappa_{\ddot{\gamma}}(s)=\frac{\|\gamma^{(3)}(s)\times\gamma^{(4)}(s)\|}{\|\gamma^{3}(s)\|^{3/2}}$ έχουμε το ζητούμενο.

17. (α) Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{b}(s)=\mathbf{T}(s)\times\mathbf{n}(s)$, άρα προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{b}}(s)=\dot{\mathbf{T}}(s)\times\mathbf{n}(s)+\mathbf{T}(s)\times\dot{\mathbf{n}(s)}=\mathbf{T}(s)\times\dot{\mathbf{n}(s)}$$

αφού $\mathbf{n}=\frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{T}}$. Συνεπώς έχουμε ότι $\dot{\mathbf{b}}\perp\mathbf{T}$ και $\dot{\mathbf{b}}\perp\mathbf{b}$, αφού $\|\mathbf{b}(s)\|=1$, για κάθε $s\in I$. Αφού $\{\mathbf{T},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, για κάθε $s\in I$, υπάρχει αριθμός $\tau(s)$ ώστε $\dot{\mathbf{b}}(s)=-\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

(β) Με τους συμβολισμούς του (α), ορίζουμε ως στρέψη της γ σε ένα σημείο $\gamma(s)$, όπου $\kappa(s)\neq 0$, την ποσοτητα $\tau(s)$.

(γ) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\dot{\gamma}(t)=\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right),-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right),1\right)\Rightarrow\|\dot{\gamma}(t)\|^2=\frac{3}{2}$$

$$\ddot{\gamma}(t)=\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{t}{4}\right),-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right),0\right)$$

$$\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) & 1\\ -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{t}{2}\right) & -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{t}{2}\right) & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}\quad -\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2}\quad -\frac{1}{4}\right)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|=\frac{3}{4}$$

$$\kappa_\gamma(t)=\frac{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^{3/2}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

Τώρα, γνωρίζοντας ότι το εγγύτατο επίπεδο, σε ένα σημείο $\gamma(t_0)$, δίνεται από τη σχέση

$$(\Pi):\dot{\gamma}(t_0)\times\ddot{\gamma}(t_0)\cdot(\vec{x}-\gamma(t_0))$$

έχουμε, για $(x,y,z)\in(\Pi)$ ότι η καρτεσιανή του εξίσωση είναι η

$$(\Pi):\frac{\cos\left(\frac{t_0}{2}\right)}{2}\cdot x--\frac{\sin\left(\frac{t_0}{2}\right)}{2}-y-\frac{z}{4}+\frac{t_0}{4}=0.$$

(δ) Έχουμε ότι

$$\dot{\beta}=\dot{\mathbf{b}}=-\tau\mathbf{n}$$

$$\ddot{\beta}=-\dot{\tau}\mathbf{n}-\tau\dot{\mathbf{n}}=\kappa\tau\mathbf{T}-\dot{\tau}\mathbf{n}-\tau^2\mathbf{b}$$

$$\beta^{(3)}=(2\kappa\dot{\tau}+\dot{\kappa}\tau)\,\mathbf{T}+\left(\kappa^2\tau-\ddot{\tau}+\tau^3\right)\mathbf{n}-3\dot{\tau}\tau\mathbf{b}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\dot{\beta} \times \ddot{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ 0 & -\tau & 0 \\ \kappa\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \end{vmatrix} = \tau^3 \mathbf{T} + \tau^2 \kappa \mathbf{b} \Rightarrow \left\| \dot{\beta} \times \ddot{\beta} \right\| = \tau^2 \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}$$

και

$$\left(\dot{\beta} \times \ddot{\beta}\right) \cdot \beta^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \kappa\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \\ 2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau & \kappa^2\tau - \ddot{\tau} + \tau^3 & -3\dot{\tau}\tau \end{vmatrix} = \tau^3 \left(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}\right).$$

Επομένως, έχουμε η καμπυλότητα της β ισούται με

$$\kappa_\beta = \frac{\left\| \dot{\beta} \times \ddot{\beta} \right\|}{\left\| \dot{\beta} \right\|^3} = \frac{\tau^2 \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}{|\tau|^3} = \frac{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}{|\tau|}$$

και η στρέψη της β ισούται με

$$\tau_\beta = \frac{\left(\dot{\beta} \times \ddot{\beta}\right) \cdot \beta^{(3)}}{\left\| \dot{\beta} \times \ddot{\beta} \right\|^2} = \frac{\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}}{|\tau| \left(\tau^2 + \kappa^2\right)}.$$

18. (α) (i) Για να δείξουμε ότι οι καμπύλες β και δ είναι κύκλοι πρέπει να δείξουμε ότι $\kappa_\beta, \kappa_\delta$ είναι σταθερές και $\tau_\beta(s) = \tau_\delta(s) = 0$, για κάθε $s \in R$. Αφού η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας έχουμε ότι $r^2 + c^2 = 1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s) = (-r \sin s, r \cos s, c) \\ \dot{\beta}(s) &= (-r \cos s, -r \sin s, 0) \\ \ddot{\beta}(s) &= (r \sin s, -r \cos s, 0) \\ \beta^{(3)}(s) &= (r \cos s . r \sin s, 0) \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\dot{\beta}(s) \times \ddot{\beta}(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r \cos s & -r \sin s & 0 \\ r \sin s & -r \cos s & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, r^2\right) \Rightarrow \left\| \dot{\beta}(s) \times \ddot{\beta}(s) \right\| = r^2.$$

Έτσι ισχύει ότι

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\left\| \dot{\beta}(s) \times \ddot{\beta}(s) \right\|}{\left\| \dot{\beta}(s) \right\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\tau_\beta(s) = \frac{\left(\dot{\beta}(s) \times \ddot{\beta}(s)\right) \cdot \beta^{(3)}(s)}{\left\| \dot{\beta}(s) \times \ddot{\beta}(s) \right\|^2} = 0.$$

Επίσης έχουμε ότι $\kappa_\gamma(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = r$, όπου κ η καμπυλότητα της γ, επομένως έχουμε ότι $\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\dot{\mathbf{T}}(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$, όπου $\mathbf{n}$ το πρώτο κάθετο διάνυσμα της γ. Έτσι έχουμε ότι $\delta(s) = \mathbf{b}(s) = (c\sin s, -c\cos s, r)$. Έτσι έχουμε ότι

$$\dot{\delta}(s) = (c\cos s, c\sin s, 0)\,, \quad \ddot{\delta}(s) = (-c\sin s, c\cos s, 0)\,,\ \delta^{(3)}(s) = (-c\cos s, -c\sin s, 0)$$

$$\dot{\delta}(s) \times \ddot{\delta}(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c\cos s & c\sin s & 0 \\ -c\sin s & c\cos s & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, c^2\right) \Rightarrow \left\|\dot{\delta}(s) \times \ddot{\delta}(s)\right\| = c^2$$

$$\Rightarrow \kappa_\delta(s) = \frac{\left\|\dot{\delta}(s) \times \ddot{\delta}(s)\right\|}{\left\|\dot{\delta}(s)\right\|^3} = \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad \tau_\delta(s) = \frac{\left[\dot{\delta}(s) \times \ddot{\delta}(s)\right] \cdot \delta^{(3)}(s)}{\left\|\dot{\delta}(s) \times \ddot{\delta}(s)\right\|^2} = 0.$$

(ii) Αν υποθέσουμε ότι $\beta(\mathbb{R}) = \delta(\mathbb{R})$, τότε από (i) προκύπτει ότι οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο και την ίδια ακτίνα. Άρα, αφού η ακτίνα των β, δ ισούται με $\frac{1}{r}, \frac{1}{c}$ αντίστοιχα έχουμε ότι $r = c$. Τώρα, το κέντρο της β ισούται με $O_\beta = \beta + r \cdot \mathbf{n}_\beta$, όπου $\mathbf{n}_\beta$ είναι το πρώτο μοναδιαίο κάθετο της β. Έχουμε ότι

$$\dot{\mathbf{T}}_\beta = \left\|\dot{\beta}\right\| \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta \Rightarrow \mathbf{n}_\beta(s) = (\sin s, -\cos s, 0) \Rightarrow O_\beta = \beta(s) + \kappa_\beta(s)\mathbf{n}(s) = (0, 0, c)\,.$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το κέντρο του δ ισούται με $O_\delta = (0, 0, r)$. Δηλαδή, τα κέντρο των παραπάνω κύκλων ταυτίζονται αν και μόνο αν $r = c$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι παραπάνω κύκλοι ταυτίζονται αν και μόνο αν $r = c$.

(β) Έχουμε ότι $\dot{\gamma}(t) = \left(1, \sqrt{t}\right)$, συνεπώς η συνάρτηση μήκους τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(1)$ είναι η

$$s(t) = \int_1^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \int_1^t \sqrt{1+u}du = \frac{2\left(1+t\right)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(t) = s(t) + \dfrac{4\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2\left(1+t\right)^{3/2}}{3}$ με αντίστροφη συνάρτηση την απεικόνιση $\psi(\tilde{t}) = \left(\dfrac{3\tilde{t}}{2}\right)^{2/3} - 1$. Επομένως, η καμπύλη $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ είναι μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

(γ) Αφού η α είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας γνωρίζουμε ότι $\kappa(s) = \left\|\dot{\mathbf{T}}(s)\right\|$, άρα ισχύει ότι

$$\kappa^2 = \left\|\dot{\mathbf{T}}\right\|^2 = \dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \Rightarrow \kappa \cdot \dot{\kappa} = \dot{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\mathbf{T}} \Rightarrow \dot{\kappa} \cdot \left\|\dot{\mathbf{T}}\right\| = \dot{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\mathbf{T}}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και υποθέσεις έχουμε ότι $\dot{\kappa}(0) = 5\sqrt{2}$.

3 Αναφορές

(α) ''Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία'' , Andrew Pressley

(β) ''Σημειώσεις διαφορικής Γεωμετρίας Εαρινό Εξάμηνο 2020-21'' Μελάς Α.

(γ) ''Παλία Θέματα Εξετάσεων'' ηλεκτρονική τάξη Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.