

Εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Σημειώσεις παραδόσεων
εαρινού εξαμήνου 2011-2012

Αντώνιος Μελάς

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2013

Περιεχόμενα

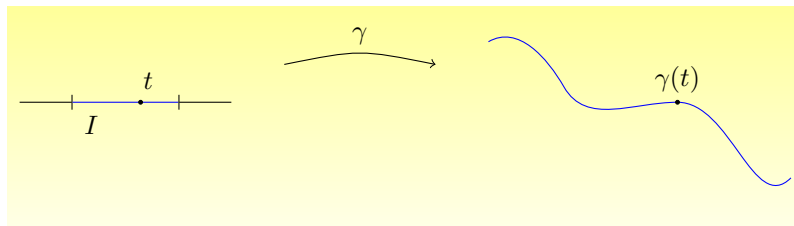
1	Καμπύλες	1
1.1	Καμπύλες στο επίπεδο	1
1.2	Καμπύλες στο χώρο	18
2	Επιφάνειες	31
2.1	Εισαγωγικά	31
2.2	Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή	35
2.3	Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή	47
3	Θεώρημα Gauss	61
4	Επανάληψη	63

Κεφάλαιο 1

Καμπύλες

1.1 Καμπύλες στο επίπεδο

Ορισμός 1.1.1. Διαφορίσιμη καμπύλη θα λέγεται κάθε C^∞ απεικόνιση $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή $n = 3$) όπου $I \subseteq \mathbb{R}$. Άρα η καμπύλη ισοδυναμεί με μία κίνηση. Η γ λέγεται παραμετρική καμπύλη.



Σχήμα 1.1: Παραμετρική καμπύλη

Σημείωση : C^∞ στο $I = [a, b]$ σημαίνει ότι υπάρχει η $f'(x)$, η $f''(x)$, η $f^{(3)}(x)$,... και είναι συνεχείς.

Παραδείγματα 1.1.2. (i) Η ευθεία : $ax + by = c$, με $|a| + |b| > 0$. Έχουμε ότι $\gamma(t) = (x_0, y_0) + t(-b, a) = (x_0 - tb, y_0 + ta)$ όπου $ax_0 + by_0 = c$ και $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Ο κύκλος : $x^2 + y^2 = 1$ με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα 1. Έχουμε ότι $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ όπου $t \in [0, 2\pi)$. Ανάλογα ο κύκλος $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ με κέντρο το (x_0, y_0) και ακτίνα r έχει παραμέτρηση $\gamma(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$. Άλλη παραμέτρηση του κύκλου είναι η $\gamma(t) = (\cos e^t, \sin e^t)$ καθώς η $e^t : [0, \theta] \rightarrow [1, e^\theta]$ είναι 1-1 και επί.

(iii) Η έλλειψη : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Έχουμε ότι $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ όπου $t \in [0, 2\pi)$. Επίσης $\tan \phi = \frac{b}{a} \tan t$.

(iv) Έστω η αναπαράμετρηση $\gamma(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$ με $t \in \mathbb{R}$ και μας ζητείται να βρούμε την καμπύλη. Θα κάνουμε απαλοιφή του t . Ισχύει ότι $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ και $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ και προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε αντίστοιχα $x + y = e^t$ και $x - y = e^{-t}$. Τώρα πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες καταλήγουμε στην $x^2 + y^2 = 1$. Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι η υπερβολή. Σημείωση : πρέπει να έχω συνεχή κίνηση, άρα δε μπορώ να πάρω και τους δύο κλάδους της υπερβολής. Αφού $t \in \mathbb{R}$ τότε $\frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$ και διαλέγω τον δεξί κλάδο.

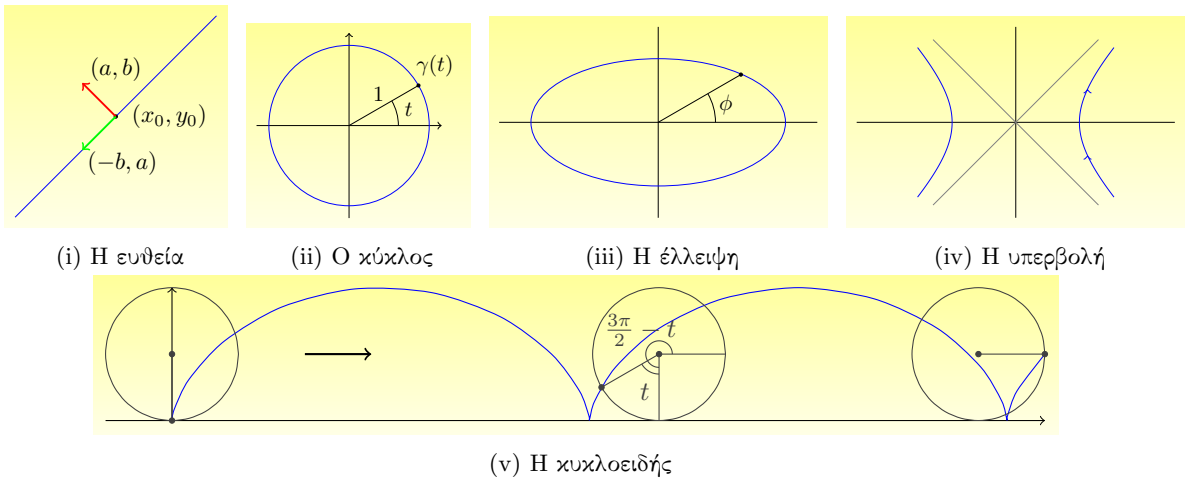
(v) Έστω κύκλος ακτίνας 1 που κυλάει σε ευθεία και μας ζητείται να βρούμε την καμπύλη που διαγράφει σταθερό σημείο της περιφέρειας. Έχουμε $OP = \text{μήκος} \curvearrowright AP = t$. Άρα

$$\overrightarrow{OK'} = (t, 1), \overrightarrow{OA} = \gamma(t), \overrightarrow{K'A} = (-\sin t, -\cos t)$$

Έτσι

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK'} + \overrightarrow{K'A} = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

και η καμπύλη είναι η κυκλοειδής.

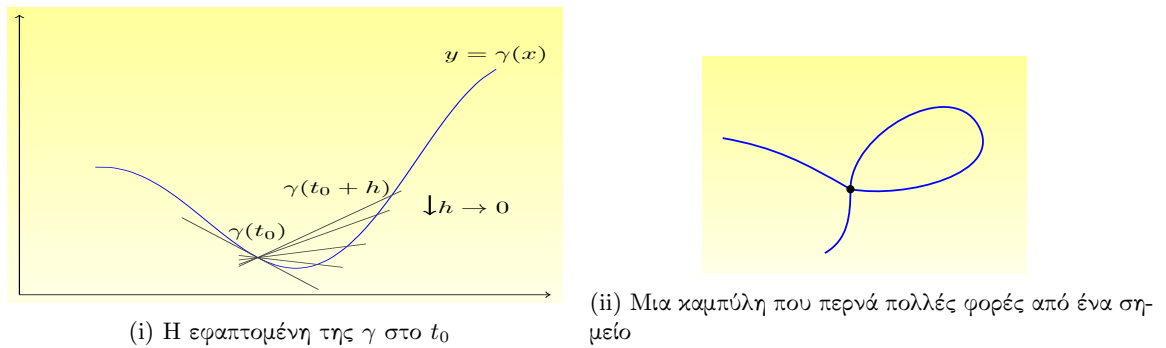


Σχήμα 1.2

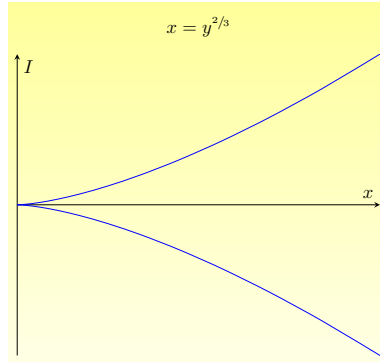
Ορισμός 1.1.3. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια παραμετρική καμπύλη. Αν η χορδή για $h \rightarrow 0$ έχει οριακή θέση θα λέγεται εφαπτομένη της γ στο t_0 (και όχι στο $\gamma(t_0)$, γιατί μπορεί να περνάει πολλές φορές από το ίδιο σημείο). Ισχύει δηλαδή ότι

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \gamma'(t_0)$$

Αν λοιπόν $\gamma'(t_0) \neq 0$, η ευθεία που είναι παράλληλη στο $\gamma'(t_0)$ και διέρχεται από το $\gamma(t_0)$ θα λέγεται εφαπτομένη της γ στο t_0 .



Σχήμα 1.3



Σχήμα 1.4: Η καμπύλη (t^2, t^3)

Παράδειγμα 1.1.4. Έστω $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Η γ είναι C^∞ . Έχουμε ότι $x = t^2$, $y = t^3$, άρα $x = y^{2/3}$

Ορισμός 1.1.5. Η $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ θα λέγεται ομαλή αν $\gamma'(t_0) \neq 0 \forall t \in I$.

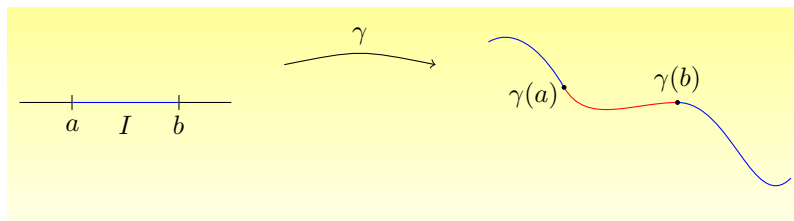
Παράδειγμα 1.1.6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 + t)$ στο $t_0 = 1$. Η παράγωγος της καμπύλης είναι $\gamma'(t) = (3t^2 - 1, 2t + 1)$. Επίσης $\gamma'(1) = (2, 3)$ και $\gamma(1) = (0, 2)$. Άρα η εφαπτομένη είναι $(-3)(x - 0) + 2(y - 2) = 0 \Rightarrow -3x + 2y = 4$ ή σε παραμετρική μορφή $\epsilon(s) = (0, 2) + s(2, 3) = (2s, 2 + 3s)$.

Παρατηρήσεις 1.1.7. Υπενθυμίζουμε διάφορους κανόνες παραγώγισης. Έστω $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ συναρτήσεις του t και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύει ότι :

- (i) $(fa + b)'(t) = f'(t)a(t) + f(t)a'(t) + b'(t)$
- (ii) $(a \cdot b)'(t) = a'(t)b(t) + a(t)b'(t)$
- (iii) για $n = 3$: $(a \times b)'(t) = a'(t) \times b(t) + a(t) \times b'(t)$
- (iv) για $n = 3$: $[(a \times b) \cdot c]'(t) = a'(t) \times b(t) \cdot c(t) + a(t) \times b'(t) \cdot c(t) + a(t) \times b(t) \cdot c'(t)$
- (v) αν $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε $(A \cdot B)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

Ορισμός 1.1.8. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $a, b \in I$ και $a < b$. Τότε το μήκος τόξου της γ για $a \leq t \leq b$ ορίζεται ως

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$



Σχήμα 1.5: Μήκος τόξου

Παραδείγματα 1.1.9. (i) Έστω $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχω ότι

$$\gamma'(t) = |(-r \sin t, r \cos t)| = r$$

και το μήκος είναι

$$l_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt$$

(ii) Έστω $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχω ότι

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

και

$$|\gamma'(t)|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t)$$

Επίσης

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8$$

(iii) Έστω $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ και $a > b$. Έχω

$$|\gamma'(t)|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t$$

και

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt$$

το οποίο δε λύνεται!

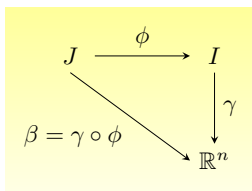
(iv) Έστω $\gamma(t) = (t, t^3)$. Τότε

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + 9t^4} dt$$

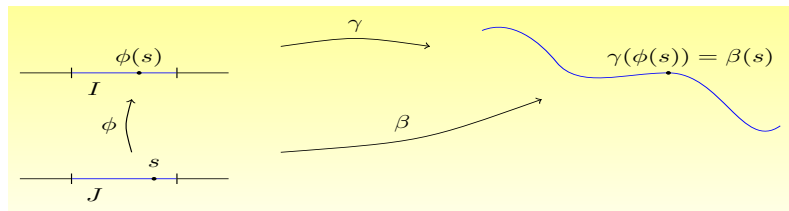
το οποίο πάλι δε λύνεται!

Παρατήρηση 1.1.10. Ολοκληρώματα που δεν υπολογίζονται

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \int e^{x^2} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \cos x^2 dx$$



(i) Σύνθεση $\gamma \circ \phi$

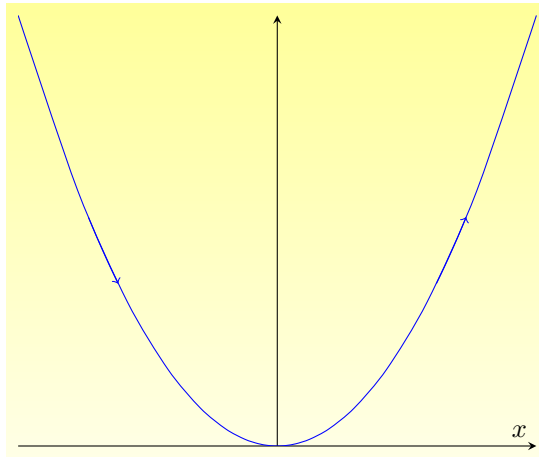


(ii) Αναπαράμετρηση της γ

Σχήμα 1.6

Ορισμός 1.1.11. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, b : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ ομαλές καμπύλες ($n = 2$ ή $n = 3$). Τότε η β θα λέγεται αναπαραμέτρηση της γ αν υπάρχει καμπύλη $\phi : J \rightarrow I, C^\infty, 1-1$, επί και η $\phi^{-1} : I \rightarrow J$ είναι C^∞ , τέτοια ώστε να ισχύει $\beta(s) = \gamma(\phi(s)) \forall s \in J$, δηλαδή $\beta = \gamma \circ \phi$. Αν η ϕ είναι αύξουσα, η β θα λέγεται ομόρροπη αναπαραμέτρηση της γ και αν η ϕ είναι φθίνουσα θα λέγεται αντίρροπη.

Παράδειγμα 1.1.12. Έστω $\beta(s) = (\cos 2s, \sin 2s), s \in [0, \pi)$. Τότε η β είναι αναπαραμέτρηση της $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi)$ με $\phi(s) = 2s$, ενώ η $\beta(s) = (s^3, s^6), s \in [-1, 1]$ δεν είναι αναπαραμέτρηση της $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [-1, 1]$ γιατί $\phi(s) = s^3$ και $\phi'(0) = 0$, δηλαδή η β στιγμιαία σταματάει στο $(0, 0)$, γιατί μηδενίζεται η παράγωγος, παρόλο που οι β και γ κάνουν την ίδια κίνηση.



Σχήμα 1.7: Η $\beta(s) = (s^3, s^6)$

Ιδιότητες 1.1.13. (1) Η σχέση β , αναπαραμέτρηση της γ , είναι σχέση ισοδυναμίας

- (i) β αναπαραμέτρηση της $\beta : \phi(s) = s$
- (ii) Αν β αναπαραμέτρηση της γ , τότε γ αναπαραμέτρηση της $\beta : \beta(s) = \gamma(\phi(s)) \Rightarrow \gamma(t) = \beta(\phi^{-1}(t))$
- (iii) Αν η β αναπαραμέτρηση της γ και α αναπαραμέτρηση της β , τότε α αναπαραμέτρηση της $\gamma : \beta(s) = \gamma(\phi(s)), \alpha(t) = \beta(y(t)) \Rightarrow \alpha(t) = \gamma((\phi \circ y)(t))$. Η $\phi \circ y$ είναι 1-1 και επί, C^∞ , με $(\phi \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ \phi^{-1}$, γιατί $(\phi \circ y)'(s) = (\phi' \circ y)(s) \cdot y'(s)$. Η απόδειξη ότι η σύνθεση των C^∞ συναρτήσεων είναι C^∞ γίνεται με επαγωγή. Επίσης $(\phi \circ y)''(s) = (\phi'' \circ y)(s) \cdot (y'(s))^2 + (\phi' \circ y)(s) \cdot y''(s)$

(2) Αν η β αναπαραμέτρηση της γ τότε

- (i) σε αντίστοιχα σημεία οι εφαπτομένες ταυτίζονται : $\beta(s_0) = \gamma(\phi(s_0))$, δηλαδή η εφαπτομένη της β στο s_0 ταυτίζεται με την εφαπτομένη της γ στο $\phi(s_0)$
- (ii) αντίστοιχα τόξα έχουν το ίδιο μήκος : αν $\lambda < \mu$ και $J \subseteq \mathbb{R}$ έχω

$$l_\lambda^\mu(\beta) = \int_\lambda^\mu |\beta'(s)| ds = \int_\lambda^\mu |\gamma'(\phi(s))| \cdot |\phi'(s)| ds = \left| \int_\lambda^\mu |\gamma'(\phi(s))| \cdot \phi'(s) ds \right| = \left| \int_{\phi(\lambda)}^{\phi(\mu)} |\gamma'(t)| dt \right| = \left| l_{\phi(\lambda)}^{\phi(\mu)}(\gamma) \right|$$

Πρόταση 1.1.14. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ομαλή καμπύλη. Τότε υπάρχει (ομόρροπη) αναπαραμέτρηση $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ της γ , η οποία είναι μοναδιαίας ταχύτητας, δηλαδή $|\beta'(s)| = 1$.

Σημείωση : Πώς βρίσκω τη β . Έχουμε $\beta(s) = \gamma(\phi(s))$ και $|\beta'(s)| = 1$, άρα

$$|\gamma'(\phi(s))| \cdot \phi'(s) = 1$$

και λύνουμε τη διαφορική εξίσωση.

Απόδειξη της Πρότασης : Έστω $h(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$, $t_0 \in I$, t_0 σταθερό. Έχουμε ότι $h'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \forall t \in I$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και C^∞ , το $h(I) = J$ είναι διάστημα και η $h^{-1} : J \rightarrow I$ είναι C^∞ . Άρα για $\phi \equiv h^{-1} : J \rightarrow I$, η $\beta(s) = \gamma(\phi(s))$ με $s \in J$ είναι αναπαραμέτρηση της γ . Τώρα έχουμε ότι

$$\beta'(s) = \gamma'(\phi(s)) \cdot (h^{-1})'(s) = \gamma'(\phi(s)) \cdot \frac{1}{h'(\phi(s))} = \frac{\gamma'(\phi(s))}{|\gamma'(\phi(s))|}$$

Άρα $|\beta'(s)| = 1$. □

Παραδείγματα 1.1.15. Να βρεθεί αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας των παρακάτω καμπυλών

(i) Έστω $\gamma(t) = (5 \cos t, 5 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, δηλαδή $I = [0, 2\pi)$ και $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$h(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t \sqrt{25 \cos^2 u + 25 \sin^2 u} du = \int_0^t 5 du = [5u]_0^t = 5t$$

Βρίσκω τώρα το πεδίο ορισμού της h , δηλαδή $J = h(I) = [0, 10\pi)$, και ψάχνω να βρώ την αντίστροφη συνάρτηση της $h(t)$ ως εξής

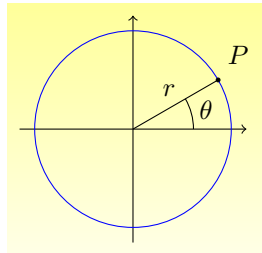
$$h(t) = s \Rightarrow 5t = s \Rightarrow t = \frac{s}{5} \Rightarrow \phi(s) = \frac{s}{5}$$

Άρα η αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας είναι η $\beta : [0, 10\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\beta(s) = \gamma(\phi(s)) = \left(5 \cos \frac{s}{5}, 5 \sin \frac{s}{5} \right)$$

(ii) Έστω $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Σημείωση : Γενικά αν $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ τότε



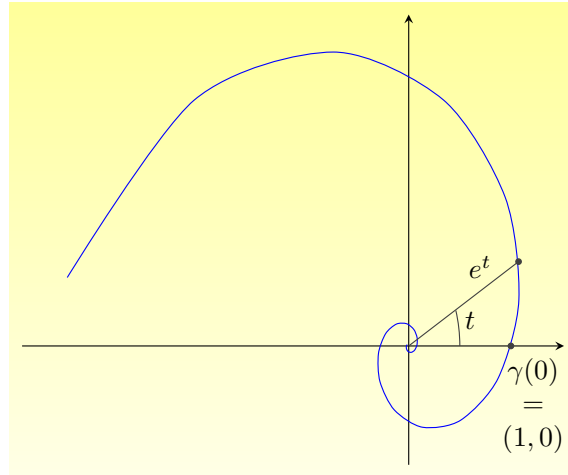
Σχήμα 1.8: Τα σημεία $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Η καμπύλη γ είναι η λογαριθμική σπείρα που έχει πολική εξίσωση $r = e^\theta$. Έχουμε

$$\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$$

και

$$|\gamma'(t)|^2 = (e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 =$$



Σχήμα 1.9: Η λογαριθμική σπείρα

$$e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \cos t \sin t = e^{2t} \cdot 1 + e^{2t} \cdot 1 = 2e^{2t}$$

Άρα

$$h(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}} du = \int_0^t e^u \sqrt{2} du = \sqrt{2} [e^u]_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

Το πεδίο ορισμού της $h(t)$ είναι $J = h(\mathbb{R}) = (-\sqrt{2}, +\infty)$ και βρίσκω την αντίστροφη της $h(t)$

$$h(t) = s \Rightarrow \sqrt{2}(e^t - 1) = s \Rightarrow t = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \phi(s) = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

Άρα η αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας είναι η $\beta : (-\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\beta(s) = \gamma(\phi(s)) = \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos \left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin \left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

(iii) Έστω $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$. Έχω

$$h(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t \sqrt{1 + u^2} du$$

το οποίο υπολογίζεται αλλά δεν αντιστρέφεται.

(iv) Έστω $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^3}{3} \right)$, $t \in \mathbb{R}$. Έχω

$$h(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t \sqrt{1 + u^4} du$$

το οποίο ούτε υπολογίζεται ούτε αντιστρέφεται.

Πρόταση 1.1.16. Έστω $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή $n = 3$) με $|\alpha(t)| = \text{σταθερό}$. Τότε τα $\alpha(t)$ και $\alpha'(t)$ είναι κάθετα $\forall t \in I$.

Απόδειξη :

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t))^2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \alpha(t)\alpha(t) = 0 \Rightarrow 2\alpha'(t)\alpha(t) = 0 \Rightarrow \alpha'(t)\alpha(t) = 0$$

δηλαδή είναι κάθετα, αφού το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0. \square

Ορισμός 1.1.17. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε το

$$T(s) = \gamma'(s)$$

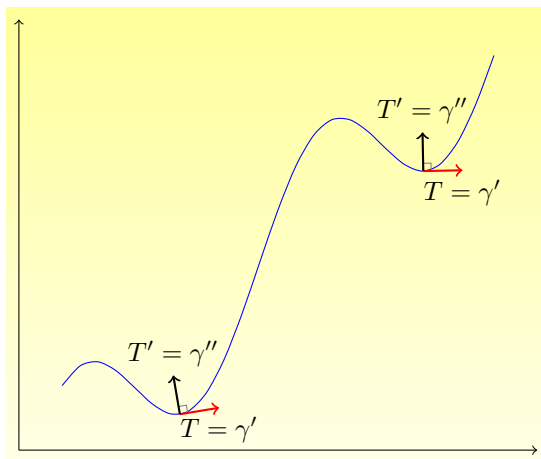
ονομάζεται μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο s . Ορίζεται λοιπόν η $T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $|T| = 1$. Από την Πρόταση όμως έχω ότι

$$T'(s) = \gamma''(s) \perp T(s) \quad \forall s \in I$$

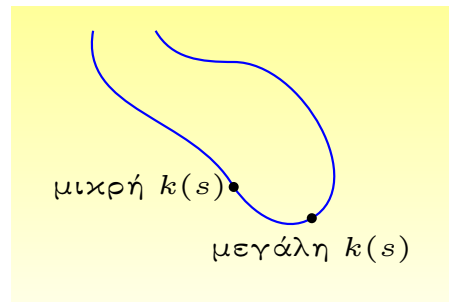
Το

$$|\gamma''(s)| = |T'(s)|$$

ονομάζεται καμπυλότητα της γ στο s και συμβολίζεται με $\kappa(s)$.



(i) Εφαπτόμενο διάνυσμα



(ii) Καμπυλότητα

Σχήμα 1.10

Ορισμός 1.1.18. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $T(s) = \gamma'(s)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα. Τότε το

$$n(s) = e_3 \times T(s)$$

που είναι τέτοιο ώστε τα $T(s)$ και $n(s)$ να αποτελούν θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^2 , ονομάζεται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της γ στο s . Αν $T(s) = (a, b)$ τότε $n(s) = (-b, a)$ και $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = 1$. Επίσης $T'(s) \parallel n(s)$ άρα

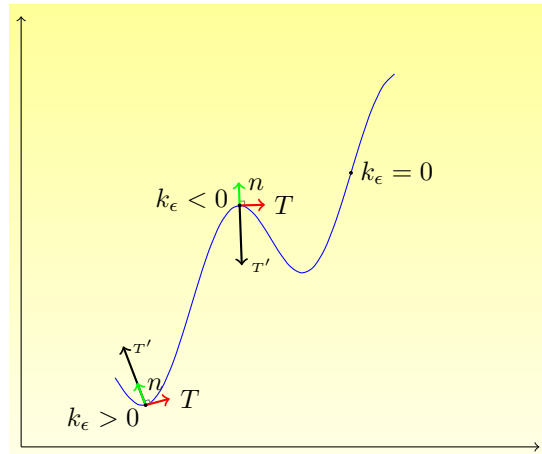
$$T'(s) = \kappa_\varepsilon(s)n(s)$$

και ο αριθμός $\kappa_\varepsilon(s)$ ονομάζεται επίπεδη καμπυλότητα της γ .

Σημείωση : $\kappa = |\kappa_\varepsilon| \Rightarrow \kappa_\varepsilon = \pm \kappa$

Παρατήρηση 1.1.19. Έχουμε ότι η $\kappa_\varepsilon(s)$ είναι

- (i) ≥ 0 αν κινούμενοι στην καμπύλη κατά τη φορά του T τα κοίλα στρέφονται στα αριστερά μας
(ii) ≤ 0 αν κινούμενοι στην καμπύλη κατά τη φορά του T τα κοίλα στρέφονται στα δεξιά μας
(iii) $= 0$ στα σημεία καμπής



Σχήμα 1.11: Καμυλότητα και κοίλα καμπύλης

Υπολογισμός καμυλότητας

Ισχύει ότι

$$T'(s) = \kappa_\epsilon(s)n(s) \Rightarrow \kappa_\epsilon(s) = T'(s)n(s)$$

Επίσης από τις

$$\gamma'(s) = T(s)$$

και

$$\gamma''(s) = \kappa_\epsilon(s)n(s)$$

προκύπτει ότι

$$\gamma'(s) \times \gamma''(s) = \kappa_\epsilon(s)T(s) \times n(s) = \kappa_\epsilon(s) \cdot e_3$$

Άρα

$$\kappa_\epsilon(s) = \gamma'(s) \times \gamma''(s) \cdot e_3$$

δηλαδή αν $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ τότε

$$\kappa_\epsilon(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει μόνο αν η γ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας.

Παραδείγματα 1.1.20. (i) Έστω $\gamma(s) = (x_0 + as, y_0 + bs)$ ευθεία με $a^2 + b^2 = 1$. Τότε $\gamma''(s) = 0$, άρα $\kappa_\epsilon(s) = 0$.

Αντίστροφα, αν $\kappa_\epsilon = 0$ τότε $\gamma'' = \kappa_\epsilon \cdot n \equiv 0$. Άρα $\gamma(s) = (x_0 + as, y_0 + bs)$ με $a^2 + b^2 = 1$ και $s \in I$. Έτσι η γ είναι ευθεία ή τμήμα ευθείας.

(ii) Έστω $\gamma(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}))$ κύκλος που διαγράφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τότε

$$\kappa_\varepsilon(s) = \begin{vmatrix} -\sin(\frac{s}{r}) & \cos(\frac{s}{r}) \\ -\frac{1}{r} \cos(\frac{s}{r}) & -\frac{1}{r} \sin(\frac{s}{r}) \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \sin^2\left(\frac{s}{r}\right) + \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

Αντίστροφα, έστω $\kappa_\varepsilon(s) = \alpha = \text{σταθερό}$, $\alpha \neq 0$. Τότε ξέρω ότι

$$\gamma''(s) = \kappa_\varepsilon(s)n(s) \quad (1)$$

και έχω επίσης τις σχέσεις

$$\gamma''(s) = (x''(s), y''(s)) \quad (2)$$

$$\gamma'(s) = T(s) = (x'(s), y'(s)) \quad (3)$$

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) \quad (4)$$

Άρα από τις (1), (2) και (4) προκύπτουν οι σχέσεις

$$x''(s) = \alpha(-y'(s)) = -\alpha y'(s)$$

και

$$y''(s) = \alpha(x'(s)) = \alpha x'(s)$$

οι οποίες μέσω της (3) γίνονται

$$x'(s) = \cos(\alpha s + \phi)$$

και

$$y'(s) = \sin(\alpha s + \phi)$$

Άρα

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \left(\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha s + \phi), \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha s + \phi) \right)$$

δηλαδή κύκλος ακτίνας $\frac{1}{|\alpha|}$.

Διάφοροι υπολογισμοί

Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ομαλή καμπύλη (όχι αναγκαστικά μοναδιαίας ταχύτητας). Ξέρουμε ότι υπάρχει αναπαραμέτρηση $\beta(s) = \gamma(\phi(s))$ με $|\beta'(s)| = 1$ και $\phi'(s) = \frac{1}{|\gamma'(\phi(s))|}$. Άρα στο $t = \phi(s)$ έχουμε

$$T_\gamma(t) = T_\beta(s) = \beta'(s) = \gamma'(\phi(s)) \cdot \phi'(s) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

Επίσης,

$$n_\gamma(t) = e_3 \times T_\gamma(t)$$

και

$$\kappa_{\varepsilon, \gamma}(t) = \kappa_{\varepsilon, \beta}(s) = \beta'(s) \times \beta''(s) \cdot e_3$$

Από τις σχέσεις

$$\beta'(s) = \gamma'(\phi(s)) \cdot \phi'(s)$$

και

$$\beta''(s) = \gamma''(\phi(s)) \cdot \phi'(s)^2 + \gamma'(\phi(s)) \cdot \phi''(s)$$

προκύπτει ότι

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = \phi'(s)^3 \cdot \gamma'(\phi(s)) \times \gamma''(\phi(s)) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^3}$$

Άρα

$$\kappa_{\varepsilon, \gamma}(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$$

Παραδείγματα 1.1.21. (i) Έστω $\gamma(t) = (t, t^2)$. Τότε $\gamma'(t) = (1, 2t)$ και $\gamma''(t) = (0, 2)$, άρα

$$\kappa_{\varepsilon}(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

Άρα όσο μεγαλώνει το t , η παραβολή τείνει να γίνει ευθεία, ενώ η μεγαλύτερη καμπυλότητα είναι για $t = 0$, η $\kappa_{\varepsilon}(0) = 2$

(ii) Έστω $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ με $a, b > 0$. Τότε $\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ και $\gamma''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$, άρα

$$\begin{vmatrix} -a \sin t & b \cos t \\ -a \cos t & -b \sin t \end{vmatrix} = ab \sin^2 t + ab \cos^2 t = ab$$

και

$$|\gamma'(t)|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t$$

Έτσι

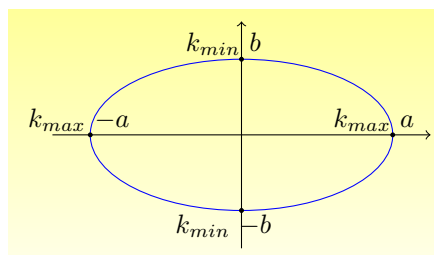
$$\kappa_{\varepsilon}(t) = \frac{ab}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t]^{3/2}}$$

Έχουμε μέγιστη καμπυλότητα όταν $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi, \dots$ Άρα

$$\kappa_{max} = \kappa_{\varepsilon}(0) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{a}{b^2}$$

Έχουμε ελάχιστη καμπυλότητα όταν $\sin t = \pm 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ Άρα

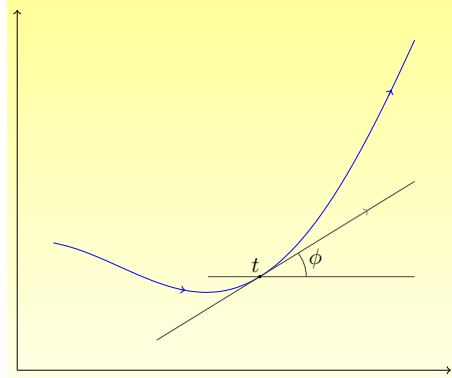
$$\kappa_{min} = \kappa_{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{[b^2 + (a^2 - b^2)]^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}$$



Σχήμα 1.12: Μέγιστη και ελάχιστη καμπυλότητα έλλειψης

(iii) Έστω $\gamma(t) = (t, f(t))$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ και $\gamma''(t) = (0, f''(t))$, άρα

$$\kappa_{\varepsilon}(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

Σχήμα 1.13: Η γωνία ϕ στο σημείο t

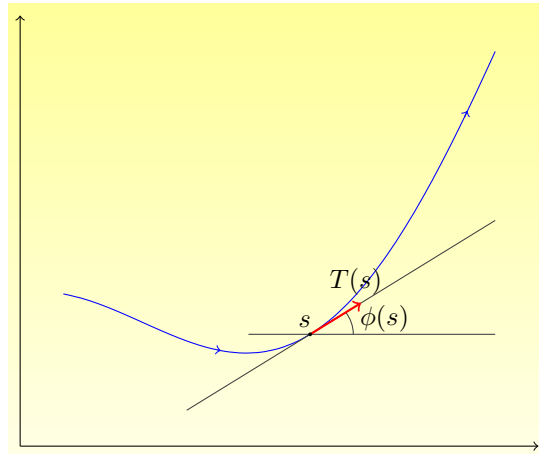
Σημείωση : Η f'' είναι μέτρο για τη συνάρτηση (πού στρέφει τα κοίλα) αλλά η καμπυλότητα κ_ε είναι μέτρο για την καμπύλη. Έχουμε $\tan \phi = f'(t)$ και

$$f''(t) = \frac{d}{dt} \tan \phi = \frac{1}{\cos^2 t} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \cos^2 t \cdot f''(t) = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} f''(t) = \frac{f''(t)}{1 + f'(t)^2}$$

Έτσι

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

Πρόταση 1.1.22. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η $\kappa_\varepsilon(s)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης με κάποιο σταθερό άξονα ως προς το μήκος τόξου.



Σχήμα 1.14: Καμπυλότητα και γωνία εφαπτομένης

Πλάνο της απόδειξης : Έστω ϕ η γωνία της εφαπτομένης και του άξονα των x , τότε ισχύει

$$\gamma(s) = (x(s), y(s))$$

$$\phi'(s) = \kappa_\varepsilon(s) \Rightarrow \phi(s) = \int \kappa_\varepsilon(s) ds + c$$

Έχουμε $T(s) = (x'(s), y'(s))$ αλλά $\bar{T}(s) = (\cos \phi(s), \sin \phi(s))$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $T(s) = \bar{T}(s)$. Πώς δείχνουμε ότι μια συνάρτηση $g = \text{σταθ}$;

(i) $g' \equiv 0$ (δύσκολο πολλές φορές)

(ii) $g' = F(g, x)$ σύμφωνα με την οποία ισχύει η μοναδικότητα, το 0 είναι λύση, τότε και $g(t_0) = 0$

Έτσι

$$T'(s) = \kappa_\varepsilon(s)n(s) = \kappa_\varepsilon(s)(-y'(s), x'(s))$$

και

$$\bar{T}(s) = (-\phi'(s) \sin \phi(s), \phi'(s) \cos \phi(s)) = \kappa_\varepsilon(s)(-\sin \phi(s), \cos \phi(s))$$

Αν δείξω ότι $T(s_0) = \bar{T}(s_0)$ τότε ξέρω ότι υπάρχει μοναδική λύση.

Απόδειξη : Έστω $s_0 \in I$ και $T(s_0) = (\cos \phi_0, \sin \phi_0)$. Επιλέγουμε μια αρχική τιμή της $\kappa_\varepsilon(s)$, $\phi(s) = \int \kappa_\varepsilon(s) ds + c$ τέτοια ώστε $\phi(s_0) = \phi_0$ και για $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ έχουμε ότι ισχύει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} f(s) = \cos \phi(s) \\ g(s) = \sin \phi(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x''(s) = -\kappa_\varepsilon(s)y'(s) \\ y''(s) = \kappa_\varepsilon(s)x'(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(s) = -\kappa_\varepsilon(s)g(s) \\ g'(s) = \kappa_\varepsilon(s)f(s) \end{array} \right\}$$

με $f(s_0) = x'(s_0)$ και $g(s_0) = y'(s_0)$. Άρα από το θεώρημα της μοναδικότητας προκύπτει ότι $x' = f$ και $y' = g$ στο I και $T(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \phi(s), \sin \phi(s))$. Έτσι η γωνία από τον άξονα των x στην εφαπτομένη της γ είναι η $\phi(s)$ και $\phi'(s) = \kappa_\varepsilon(s)$ στο I . \square

Πρόταση 1.1.23. Έστω $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ και C^∞ συνάρτηση. Τότε υπάρχει ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με επίπεδη καμπυλότητα κ , δηλαδή $\kappa = \kappa_\varepsilon$ στο I .

Απόδειξη : Έστω $\phi(s) = \int \kappa(s) ds + c$ και θέτω

$$\gamma(s) = \left(\int \cos \phi(s) ds + a, \int \sin \phi(s) ds + b \right)$$

Έχουμε τότε

$$\gamma'(s) = (\cos \phi(s), \sin \phi(s))$$

και άρα $|\gamma'(s)| = 1$, δηλαδή $\gamma(s)$ ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Επίσης

$$\gamma(s) = (-\phi'(s) \sin \phi(s), \phi'(s) \cos \phi(s))$$

άρα

$$\kappa_\varepsilon(s) = \phi'(s) \sin^2 \phi(s) + \phi'(s) \cos^2 \phi(s) = \phi'(s) \cdot 1 = \kappa(s)$$

\square

Παράδειγμα 1.1.24. Να βρεθεί καμπύλη με $\kappa_\varepsilon(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}$. Έχουμε

$$\phi(s) = \int \frac{1}{2\sqrt{s}} ds = \sqrt{s}$$

Άρα

$$\gamma(s) = \left(\int \cos \sqrt{s} ds, \int \sin \sqrt{s} ds \right)$$

Θέτοντας $\sqrt{s} = u \Rightarrow s = u^2$ και $ds = 2udu$ τότε

$$\int \cos \sqrt{s} ds = \int 2u \cos u du = 2 \int u \cos u du = 2 \int u(\sin u)' du =$$

$$= 2 \left[u \sin u - \int \sin u du \right] = 2 [u \sin u + \cos u]$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{s} ds &= 2 \int u \sin u du = 2 \int u(-\cos u)' du = \\ &= 2 \left[-u \cos u + \int \cos u du \right] = 2 [-u \cos u + \sin u] \end{aligned}$$

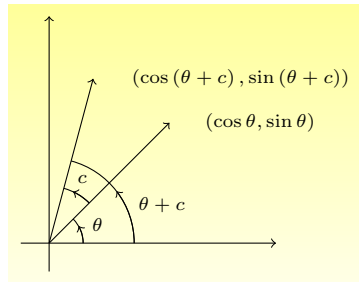
Άρα

$$\gamma(s) = (2\sqrt{s} \sin \sqrt{s} + 2 \cos \sqrt{s}, -2\sqrt{s} \cos \sqrt{s} + 2 \sin \sqrt{s})$$

Σημείωση : Έστω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα κ_ε . Τότε έχουμε ότι

$$\gamma(s) = \left(\int \cos \left(\int \kappa_\varepsilon(s) ds + c \right) ds + a, \int \sin \left(\int \kappa_\varepsilon(s) ds + c \right) ds + b \right)$$

όπου οι σταθερές a και b δίνουν μετατόπιση και η c είναι στροφή.

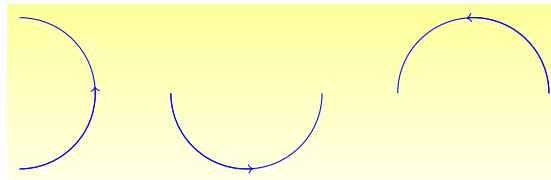


Σχήμα 1.15: Στροφή

Θεώρημα 1.1.25 (Θεμελιώδες θεώρημα για τις καμπύλες στο επίπεδο). Αν $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ και C^∞ συνάρτηση, τότε υπάρχει καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με επίπεδη καμπυλότητα κ . Αν β καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με επίπεδη καμπυλότητα κ , τότε υπάρχει στροφή A και $\alpha \in \mathbb{R}^2$ με $\beta(s) = A\gamma(s) + \alpha \forall s \in I$. (στροφή και μετατόπιση)

Ορισμός 1.1.26. Η εξίσωση $\kappa_\varepsilon = \kappa(s)$ (επίπεδη καμπυλότητα σε συνάρτηση του μήκους τόξου) ονομάζεται φυσική εξίσωση της καμπύλης.

Παραδείγματα 1.1.27. (i) Η $\kappa_\varepsilon(s) = 1$ με $s \in [0, \pi)$ παριστάνει ημικύκλια ακτίνας 1 με φορά αντιωρολογιακή.



Σχήμα 1.16: Ημικύκλια ακτίνας 1

(ii) Η $\kappa_\varepsilon(s) = 0$ με $s \in (0, \infty)$ παριστάνει ημιευθείες, ενώ αν $s \in [0, 1]$ παριστάνει ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1.

Παρατήρηση 1.1.28. Η γεωμετρία της καμπύλης γ περιγράφεται από τις Θεμελιώδεις Εξισώσεις της καμπύλης

$$T'(s) = \kappa_\varepsilon(s)n(s)$$

και

$$n'(s) = -\kappa_\varepsilon(s)T(s)$$

Παραδείγματα 1.1.29. (i) Έστω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $\kappa_\gamma(s) = e^s$. Να βρεθεί η καμπυλότητα της $\beta(s) = \gamma(s) + e^{-s}n(s)$, όπου $n(s)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της γ . Η ταχύτητα της β είναι

$$\beta'(s) = \gamma'(s) + (-e^{-s})n(s) + e^{-s}n'(s) = T(s) - e^{-s}n(s) + e^{-s}(-e^s T(s)) = -e^{-s}n(s)$$

Επίσης,

$$|\beta'(s)| = \sqrt{(-e^{-s}n(s))^2} = \sqrt{e^{-2s} \cdot 1} = e^{-s}$$

Τώρα, η επιτάχυνση της β είναι

$$\beta''(s) = -(-e^{-s})n(s) - e^{-s}n'(s) = e^{-s}n(s) - e^{-s}(-e^s T(s)) = e^{-s}n(s) + T(s)$$

Άρα έχουμε ότι

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = -e^{-s}n(s) \times (e^{-s}n(s) + T(s)) = -e^{-s}n(s) \times T(s) = -e^{-s}(-e_3) = e^{-s}e_3$$

Άρα

$$\kappa_\beta(s) = \frac{e^{-s}}{(e^{-s})^3} = e^{2s}$$

(ii) Να βρεθούν όλες οι ομαλές καμπύλες με την ακόλουθη ιδιότητα: όλες οι εφαπτομένες της καμπύλης να διέρχονται από σταθερό σημείο. Υποθέτω ότι η $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ έχει μοναδιαία ταχύτητα (αλλιώς κάνω αναπαραμέτρηση). Έστω p το σταθερό σημείο. Τότε $\forall s \in I$, τα $\gamma(s) - p$ και $T(s)$ είναι συγγραμμικά. Έτσι, αφού $T(s)$ μοναδιαίο, δηλαδή $T(s) \neq \vec{0}$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ με

$$\gamma(s) - p = \lambda(s)T(s) \quad (1)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\lambda(s)$ παραγωγίσιμη. Πράγματι,

$$\lambda(s) = \lambda(s)T(s)T(s) = (\gamma(s) - p)T(s)$$

Παραγωγίζω την (1) και προκύπτει

$$\gamma'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) \Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)\kappa_\varepsilon(s)n(s) \quad (2)$$

Για κάθε σταθερό s , τα $T(s)$ και $n(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα από τη (2) προκύπτει

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'(s) = 1 \\ \lambda(s)\kappa_\varepsilon(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda(s) = s + c \\ (s + c)\kappa_\varepsilon(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \kappa_\varepsilon(s) = 0$$

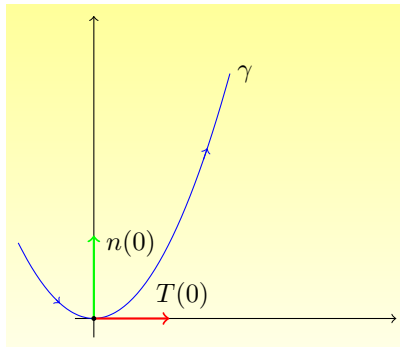
$\forall s \in I \setminus \{-c\}$ και λόγω συνέχειας τελικά $\kappa_\varepsilon(s) = 0$ στο I . Άρα η γ είναι ευθεία ή τμήμα ευθείας. Αντιστρόφως, αν γ ευθεία ή τμήμα ευθείας, τότε όλες οι εφαπτομένες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Τοπική συμπεριφορά

Έστω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa_\varepsilon(0) = \kappa$ και $T(0) = e_1$, $n(0) = e_2$, $\gamma(0) = 0$. Τότε για s μικρά έχω

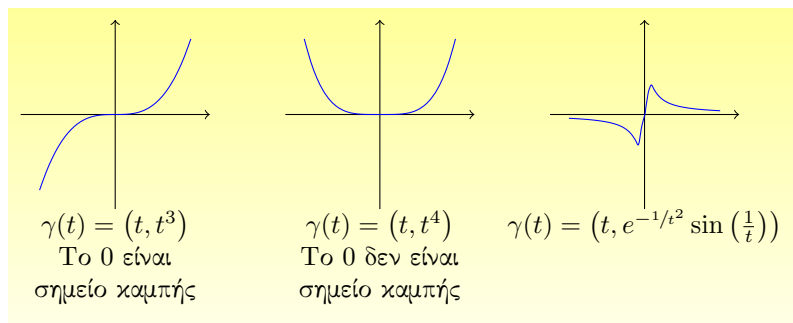
$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \gamma''(0)\frac{s^2}{2} + R(s)$$

με $R(s) \leq c|s|^3$. Επιπλέον, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = T(0) = e_1 = (1, 0)$, $\gamma''(0) = T'(0) = \kappa_\varepsilon(0)n(0) = \kappa e_2 = (0, \kappa)$. Πετύχαμε δηλαδή περίπου τη $\gamma(s) = \left(s, \frac{\kappa s^2}{2}\right)$, $\kappa \neq 0$ σε μια περιοχή γύρω από το 0, αλλού δε μας ενδιαφέρει. Δηλαδή, οι $\gamma(s)$ και $\left(s, \frac{\kappa s^2}{2}\right)$ έχουν ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση στο 0.



Σχήμα 1.17: Τοπική συμπεριφορά

Αν $\kappa = 0$ δε μπορώ να βγάλω συμπέρασμα.

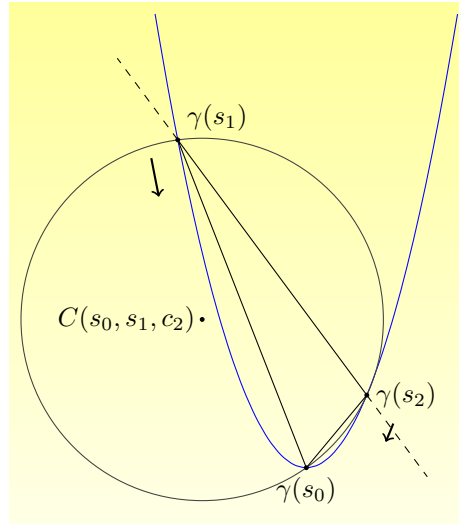


Σχήμα 1.18: Καμπυλότητα και τοπική συμπεριφορά

Εγγύτατος κύκλος

Έστω $s_1, s_2 \rightarrow s_0$, δηλαδή η χορδή των s_1, s_2 τείνει στην εφαπτομένη της γ στο s_0 . Έχουμε προσέγγιση της γ από κύκλο. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $s_0 \in I$.

Παίρνουμε $s_1 < s_2 < s_3$ στο I και τον κύκλο που ορίζουν τα $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$. Έστω $C(s_1, s_2, s_3)$ και μελετάμε την οριακή θέση του κύκλου καθώς τα s_1, s_2, s_3 τείνουν στο s_0 . Έστω $\kappa = \kappa(s_0) \neq 0$. Ξέρουμε ότι $\gamma(s_0 + s) \cong \left(s, s^2 \frac{\kappa}{2}\right) + \gamma(s_0)$ με s κοντά στο 0. Τότε για $s_1 < s_2 < s_3$ κοντά στο s_0 , ο κύκλος $C(s_1, s_2, s_3)$ ορίζεται. Έστω c το κέντρο του. Αν μέσω ακολουθίας ισχύει ότι $C(s_1, s_2, s_3) \rightarrow c$ καθώς $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$, τότε το c είναι μοναδικό. Σταθεροποιούμε τα s_1, s_2, s_3 και ορίζουμε την $f(s) = |\gamma(s) - C(s_1, s_2, s_3)|^2$. Τότε $f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) = (\text{ακτίνα κύκλου})^2$. Άρα



Σχήμα 1.19: Προσεγγίζοντας την γ από κύκλο

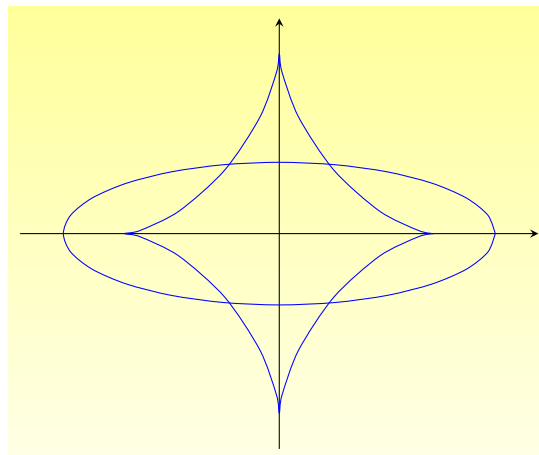
υπάρχουν $s^*, s^{**} \in (s_1, s_3)$ ώστε $f'(s^*) = f''(s^{**}) = 0$.

$$\frac{1}{2}f'(s) = T(s)(\gamma(s) - C(s_1, s_2, s_3)) \Rightarrow \frac{1}{2}f''(s) = 1 + \kappa(s)[n(s) - C(s_1, s_2, s_3)]$$

Έχουμε ότι $s^*, s^{**} \rightarrow s_0$ και άρα $T(s_0)(\gamma(s_0) - c) = 0 \Rightarrow n(s_0)(\gamma(s_0) - c) = -\frac{1}{\kappa(s_0)}$ δηλαδή $c = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0)$. Έτσι οι κύκλοι έχουν οριακή θέση. Ο κύκλος κέντρου $\gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0)$ και ακτίνας $R(s_0) = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ ονομάζεται εγγύτατος κύκλος της γ στο s_0 . Το $R(s_0)$ ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας και $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$ ονομάζεται εστιακή καμπύλη της γ .

Σημείωση : Στον κύκλο η εστιακή καμπύλη είναι το κέντρο του.

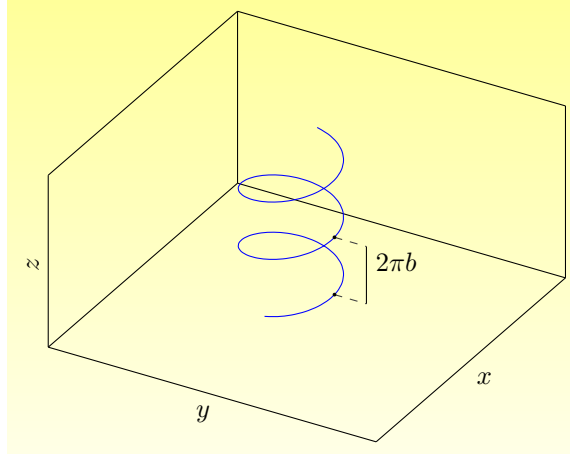
Παράδειγμα 1.1.30. Η εστιακή καμπύλη της έλλειψης είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 1.20: Εστιακή καμπύλη έλλειψης

1.2 Καμπύλες στο χώρο

Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Η ευθεία που περνάει από το $\gamma(t_0)$ και είναι παράλληλη στο $\gamma'(t_0)$ λέγεται εφαπτομένη της γ στο t_0 . Επίσης, $l_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ το μήκος της. Κάθε τέτοια γ δέχεται αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας.



Σχήμα 1.21: Έλινα

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ έλινα με $a, b > 0$. Τότε

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

και $|\gamma'(t)|^2 = a^2 + b^2$. Επίσης

$$l_\lambda^\mu = \int_\lambda^\mu \sqrt{a^2 + b^2} dt = (\mu - \lambda) \sqrt{a^2 + b^2}$$

και για την αναπαραμέτρηση μήκους τόξου έχουμε

$$h(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = t \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Άρα

$$\beta(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} s\right)$$

Ορισμός 1.2.2. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε το

$$T(s) = \gamma'(s)$$

ονομάζεται μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο s και ισχύει ότι $T'(s) \cdot T(s) = 0$. Επίσης

$$\kappa(s) = |T'(s)| = |\gamma''(s)|$$

ονομάζεται καμπυλότητα της γ στο s . Θα υποθέτουμε ότι $\kappa(s) > 0 \forall s \in I$. Ορίζουμε

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \gamma''(s)$$

το πρώτο κάθετο διάνυσμα της γ στο s . Το

$$b(s) = T(s) \times n(s)$$

ονομάζεται δεύτερο ή δικάθετο διάνυσμα της γ στο s . Το

$$T(s), n(s), b(s)$$

ονομάζεται τριέδρο Frenet της γ στο s . Θέλουμε να βρούμε T', n', b' . Έχουμε

$$b' = (T \times n)' = T' \times n + T \times n' = \kappa n \times n + T \times n' = T \times n'$$

Άρα $b' \perp T$ αλλά και $b' \perp b$ ($|b|^2 = 1$). Άρα $\forall s \in I$ έχουμε $b'(s) \parallel n(s)$. Γράφουμε

$$b'(s) = -\tau(s)n(s)$$

όπου $\tau(s)$ η στρέψη της γ στο s (είναι η τάση της καμπύλης να φεύγει από το επίπεδό της και μετράει το ρυθμό μεταβολής του b). Επίσης

$$n' = (b \times T)' = b' \times T + b \times T' = -\tau n \times T + b \times \kappa n = -\kappa T + \tau b$$

Άρα υπό μορφή πινάκων ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $A(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος, ορθογώνιος, με ορίζουσα 1 και ονομάζεται πίνακας στροφής. Ισχύει επίσης ότι

$$A(s)A(s)^T = I \Rightarrow A'(s)A(s)^T + A(s)A'(s)^T = 0 \Rightarrow (A'(s)A(s)^{-1}) + (A'(s)A(s)^{-1})^T = 0$$

Υπολογισμός στρέψης

Έστω $\gamma : I \rightarrow R^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε από τις σχέσεις

$$\gamma'(s) = T(s)$$

και

$$\gamma''(s) = T'(s) = \kappa(s)n(s)$$

προκύπτει ότι

$$\gamma'(s) \times \gamma''(s) = T(s) \times \kappa(s)n(s) = \kappa(s)b(s)$$

Άρα $\kappa(s) = |\gamma'(s) \times \gamma''(s)|$. Επίσης

$$\gamma''' = \kappa'n + \kappa n' = \kappa'n + \kappa(-\kappa T + \tau b) = -\kappa^2 T + \kappa'n + \kappa\tau b$$

Άρα

$$\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma''' = \kappa^2 \tau |b|^2 = \kappa^2 \tau$$

και έτσι

$$\tau = \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s) \cdot \gamma'''(s)}{\kappa^2(s)} = \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s) \cdot \gamma'''(s)}{|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2}$$

Ορισμός 1.2.3. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, T, n, b το τρίεδρο Frenet της γ και $s_0 \in I$. Έχουμε ότι το επίπεδο που διέρχεται από το $\gamma(s_0)$ και

- (i) είναι παράλληλο στα $T(s_0)$ και $n(s_0)$ ονομάζεται εγγύτατο επίπεδο της γ στο s_0 με καρτεσιανή εξίσωση

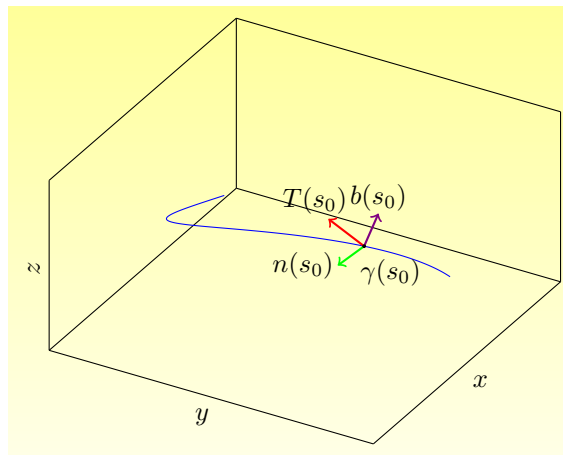
$$b(s_0) \cdot ((x, y, z) - \gamma(s_0)) = 0$$

- (ii) είναι παράλληλο στα $n(s_0)$ και $b(s_0)$ ονομάζεται κάθετο επίπεδο της γ στο s_0 με καρτεσιανή εξίσωση

$$T(s_0) \cdot ((x, y, z) - \gamma(s_0)) = 0$$

- (iii) είναι παράλληλο στα $T(s_0)$ και $b(s_0)$ ονομάζεται ευθειοποιόν επίπεδο της γ στο s_0 με καρτεσιανή εξίσωση

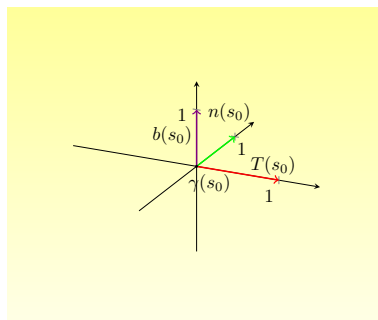
$$n(s_0) \cdot ((x, y, z) - \gamma(s_0)) = 0$$



Σχήμα 1.22: Τρίεδρο Frenet

Προβολές στα επίπεδα

Υποθέτω ότι $s_0 = 0$, $\gamma(s_0) = 0$, $T(s_0) = e_1$, $n(s_0) = e_2$, $b(s_0) = e_3$, $\kappa(s_0) = \kappa$, $\tau(s_0) = \tau$. Έτσι



Σχήμα 1.23: $T(s_0) = e_1$, $n(s_0) = e_2$, $b(s_0) = e_3$

έχουμε

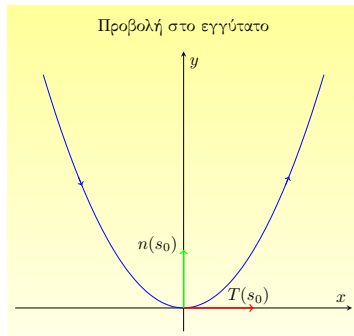
$$\gamma(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= T(0) = e_1 = (1, 0, 0) \\ \gamma''(0) &= T'(0) = \kappa(0)n(0) = \kappa e_2 = (0, \kappa, 0) \\ \gamma'''(0) &= -\kappa^2(0)T(0) + \kappa'(0)n(0) + \kappa(0)\tau(0)b(0) = (-\kappa^2, \kappa'(0), \kappa\tau)\end{aligned}$$

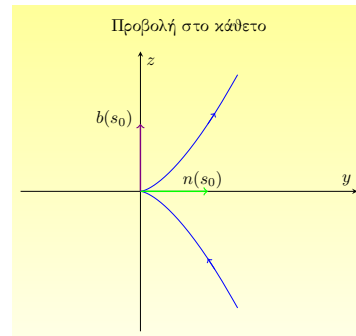
Από Taylor και για $|s|$ μικρό έχω ότι

$$\begin{aligned}\gamma(s) &\cong \gamma(0) + \gamma'(0)s + \gamma''(0)\frac{s^2}{2} + \gamma'''(0)\frac{s^3}{6} = \\ &0 + (s, 0, 0) + \left(0, \frac{\kappa s^2}{2}, 0\right) + \left(\frac{-\kappa^2 s^3}{6}, \frac{\kappa'(0)s^3}{6}, \frac{\kappa\tau s^3}{6}\right) = \\ &\left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}, \frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6}, \frac{\kappa\tau s^3}{6}\right) \cong \left(s, \frac{\kappa s^2}{2}, \frac{\kappa\tau s^3}{6}\right)\end{aligned}$$

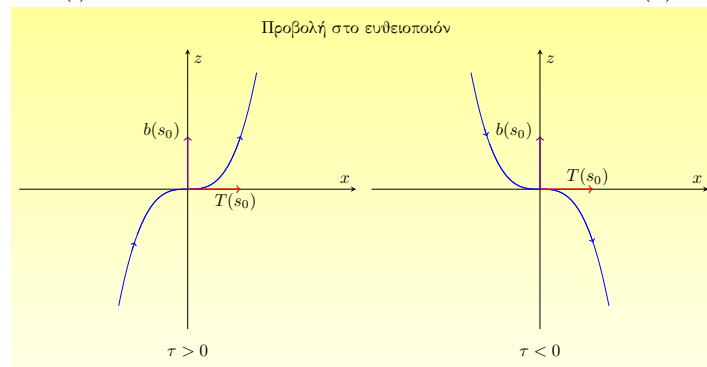
- (i) Προβολή στο εγγύτατο : Η $P_{xy} : (s, \frac{\kappa}{2}s^2)$ είναι παραβολή, έχω ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση, άρα και καμπυλότητα.
- (ii) Προβολή στο ευθειςιοιόν : Είναι η $P_{xz} : (s, \frac{\kappa\tau}{6}s^3)$. Όταν ισχύει $\tau > 0$, η καμπύλη ανέρχεται ως προς το προσανατολισμένο εγγύτατο επίπεδο, ενώ όταν $\tau < 0$ κατέρχεται.
- (iii) Προβολή στο κάθετο : Είναι η $P_{yz} : (\frac{\kappa}{2}s^2, \frac{\kappa\tau}{6}s^3)$. 'Διώξαμε' τα x , δηλαδή το T και κάναμε την ταχύτητα μη ομαλή.



(i)



(ii)



(iii)

Σχήμα 1.24: Προβολές στα επίπεδα

Ιδιότητα 1.2.4. Έστω $\kappa(s_0) > 0$. Το εγγύτατο επίπεδο είναι η οριακή θέση του επιπέδου που ορίζουν τα $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$ καθώς $s_1 < s_2 < s_3$, με $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$.

Απόδειξη : Για s_1, s_2, s_3 κοντά στο s_0 , οι προβολές των $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$ στο εγγύτατο στο σημείο s_0 είναι μη συνευθειακά σημεία, άρα ορίζουν επίπεδο $\alpha(s_1, s_2, s_3)x = c$ με $|\alpha(s_1, s_2, s_3)| = 1$. Αν έχω ακολουθία που $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$ και $\alpha(s_1, s_2, s_3) \rightarrow d$ τότε $d = \pm b(s_0)$, όπου τα s_1, s_2, s_3 είναι σταθερά. Έχουμε

$$f(s) = \alpha(s_1, s_2, s_3)\gamma(s)$$

$$f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) \Rightarrow \exists s^*, s^{**} \in (s_1, s_3) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(s_1, s_2, s_3) \cdot \gamma'(s^*) = 0 \\ \alpha(s_1, s_2, s_3) \cdot \gamma''(s^{**}) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{lim}} d \cdot T(s_0) = d \cdot \kappa(s_0) \cdot n(s_0) = 0 \xrightarrow{\kappa(s_0) > 0} d = \pm b(s_0)$$

Υπολογισμοί καμπυλότητας και στρέψης στο χώρο καμπύλης τυχαίας ταχύτητας

Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη (όχι αναγκαστικά μοναδιαίας ταχύτητας) και έστω $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομόρροπη αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας $\beta(s) = \gamma(\phi(s))$ με $\phi'(s) = \frac{1}{|\gamma'(\phi(s))|}$. Στο $t = \phi(s)$ έχω $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(s)$ και

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta'(s) = \gamma'(\phi(s))\phi'(s) \\ \beta''(s) = \gamma''(\phi(s))\phi'(s)^2 + \gamma'(\phi(s))\phi''(s) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = \gamma'(\phi(s)) \times \gamma''(\phi(s))\phi'(s)^3 = \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \gamma'(t) \times \gamma''(t) \quad (1)$$

Επίσης

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta'(s) = T_\beta(s) = T_\gamma(t) \\ \beta''(s) = \kappa_\beta(s)n_\beta(s) = \kappa_\gamma(t)n_\gamma(t) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = \kappa_\gamma(t)b_\gamma(t) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad b_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

και η καρτεσιανή εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου είναι

$$b_\gamma(t) [(x, y, z) - \gamma(t)] = 0$$

Αυτός είναι ο γενικός τύπος αλλά τελικά χρησιμοποιώ τον τύπο

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) [(x, y, z) - \gamma(t)] = 0$$

Επίσης $T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$. Άρα η καρτεσιανή εξίσωση του κάθετου είναι η

$$\gamma'(t) [(x, y, z) - \gamma(t)] = 0$$

Επίσης έχω $n_\gamma(t) = b_\gamma(t) \times T_\gamma(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t)}{(|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|) \times |\gamma'(t)|}$, άρα η καρτεσιανή εξίσωση του ευθαιοποιούντος επιπέδου είναι η

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t) [(x, y, z) - \gamma(t)] = 0$$

Για τη στρέψη έχω

$$\tau_\beta(s) = \frac{\beta'(s) \times \beta''(s) \cdot \beta'''(s)}{|\beta'(s) \times \beta''(s)|^2}$$

Έτσι, αφού $\beta'(s) \times \beta''(s) \cdot \beta'''(s) = \gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) \phi'(s)^6$ και $|\beta'(s) \times \beta''(s)|^2 = |\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2 \phi'(t)^6$, ισχύει τελικά ότι

$$\tau_\beta(s) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} = \tau_\gamma(t)$$

Παράδειγμα 1.2.5. Να βρεθεί η καμπυλότητα και η στρέψη της έλικας $\gamma(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t, bt)$. Έχουμε

$$\gamma'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t, b)$$

$$\gamma''(t) = (-\alpha \cos t, -\alpha \sin t, 0)$$

$$\gamma'''(t) = (\alpha \sin t, -\alpha \cos t, 0)$$

Τότε

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \times \gamma''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\alpha \sin t & \alpha \cos t & b \\ -\alpha \cos t & -\alpha \sin t & 0 \end{vmatrix} = \\ e_1 \begin{vmatrix} \alpha \cos t & b \\ -\alpha \sin t & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} -\alpha \sin t & b \\ -\alpha \cos t & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} -\alpha \sin t & \alpha \cos t \\ -\alpha \cos t & -\alpha \sin t \end{vmatrix} = \\ e_1(ab \sin t) - e_2(ab \cos t) + e_3(\alpha^2 \sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t) &= (ab \sin t, -ab \cos t, \alpha^2) \end{aligned}$$

Επίσης

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = \alpha^2 b \sin^2 t + \alpha^2 b \cos^2 t + 0 \cdot \alpha^2 = \alpha^2 b$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \sqrt{\alpha^2 b^2 \sin^2 t + \alpha^2 b^2 \cos^2 t + \alpha^4} = \alpha \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

Άρα

$$\kappa = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{(\sqrt{\alpha^2 + b^2})^3} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}$$

$$\tau = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} = \frac{\alpha^2 b}{(\alpha \sqrt{\alpha^2 + b^2})^2} = \frac{b}{\alpha^2 + b^2}$$

Πρόταση 1.2.6. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη. Η γ βρίσκεται πάνω σε επίπεδο αν και μόνο αν $\tau \equiv 0$

Απόδειξη : (\Rightarrow) $\exists \alpha \neq 0$ και c με $\alpha \cdot \gamma(s) = c \quad \forall c \in I$. Άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot \gamma'(s) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot T(s) = 0 \\ \alpha \cdot \gamma''(s) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \kappa(s) \cdot n(s) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\kappa(s) > 0} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot T(s) = 0 \\ \alpha \cdot n(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // b(s)$$

Άρα $b(s)$ σταθερό λόγω συνέχειας, και έτσι $b'(s) = 0 \Rightarrow -\tau(s)n(s) = 0 \Rightarrow \tau \equiv 0$

(\Leftarrow) Έστω $\kappa > 0$ και $\tau \equiv 0$. Αφού $\tau \equiv 0$, τότε το $b'(s) = -\tau(s)n(s) \equiv 0$, άρα $b(s) = \alpha$ σταθερό $\forall s \in I$. Έτσι $\frac{d}{ds}(\alpha \cdot \gamma(s)) = \alpha \gamma'(s) = b(s)T(s) = 0$. Άρα $\alpha \cdot \gamma(s) = \text{σταθερό} \quad \forall s \in I$ και η γ βρίσκεται στο επίπεδο π με εξίσωση $\alpha x = c$ \square

Παράδειγμα 1.2.7. Έστω $\gamma(t) = (3 \cos t - 2e^t + 1, -2 \cos t + 1, \cos t - 3e^t + 2) = (1, 1, 2) + (3, -2, 1) \cos t + (-2, 0, -3)e^t$. Η καμπύλη ανήκει στο επίπεδο που περνάει από το $(1, 1, 2)$ και είναι παράλληλο στα $(3, -2, 1)$ και $(-2, 0, -3)$. Άρα $\tau \equiv 0$.

Ισομετρίες του \mathbb{R}^3

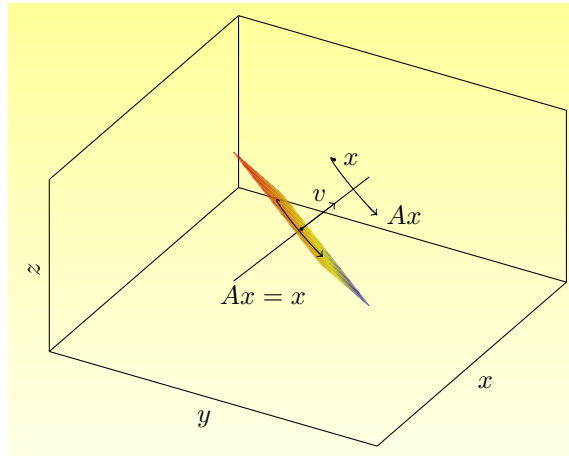
Ισομετρία είναι μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ για την οποία ισχύει $|F(x) - F(y)| = |x - y|$. Επίσης $F(x) \cdot F(y) = x \cdot y$. Πράγματι,

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \xrightarrow{F(0)=0} |F(x)|^2 - 2F(x)F(y) + |F(y)|^2 = |x|^2 - 2xy + |y|^2 \Rightarrow F(x)F(y) = xy$$

Άρα τα $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$ είναι ορθοκανονικά και έχουμε

$$\begin{aligned} F(x) &= (F(x)F(e_1))F(e_1) + (F(x)F(e_2))F(e_2) + (F(x)F(e_3))F(e_3) = \\ &= (xe_1)F(e_1) + (xe_2)F(e_2) + (xe_3)F(e_3) \end{aligned}$$

Η F είναι γραμμική, δηλαδή $F(x) = Ax$ με $|Ax|^2 = |x|^2$, όπου A είναι 3×3 ορθογώνιος πίνακας. Αν $F(0) \neq 0$ θεωρούμε την ισομετρία $F - F(0)$.



Σχήμα 1.25: Στροφή μέσω του A

Πρόταση 1.2.8. Κάθε ισομετρία $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι της μορφής $F(x) = Ax + c$, όπου $c \in \mathbb{R}^3$ και A 3×3 ορθογώνιος πίνακας ($A^{-1} = A^t$).

Ο ορθογώνιος πίνακας έχει $\det A = \pm 1$. Αν $\det A = 1$ τότε ο A ονομάζεται πίνακας στροφής και αν $\det A = -1$ τότε ο A ονομάζεται πίνακας ανάκλασης. Έστω A 3×3 πίνακας στροφής, άρα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή λ , δηλαδή $Av = \lambda v$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $|\lambda v| = |Av| = |v| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$. Έστω λοιπόν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του A . Ξέρω ότι $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 = \det A$. Αν $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_2 \lambda_3 = -1$, δηλαδή $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, αλλιώς $\lambda_1 = 1$. Άρα $\exists v$ μοναδιαίο με $Av = v$. Αν $w \perp v$ τότε $Aw \cdot Av = w \cdot v = 0$, δηλαδή αν $w \perp v$ τότε $Aw \perp v$.

Πρόταση 1.2.9. Έστω A πίνακας στροφής. Τότε $\forall v, w, u \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

(i) $Av \times Aw = A(v \times w)$

(ii) $Av \times Aw \cdot Au = v \times w \cdot u$

Πρόταση 1.2.10. Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα κ , στρέψη τ και τρίεδρο Frenet T, n, b και $\bar{\gamma}(s) = A\gamma(s) + c$, όπου A πίνακας στροφής. Τότε $\bar{\kappa}(s) = \kappa(s)$, $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$ και $\bar{T} = AT, \bar{n} = An, \bar{b} = Ab$.

Απόδειξη : Έστω ότι η $\bar{\gamma}$ έχει καμπυλότητα $\bar{\kappa}$, στρέψη $\bar{\tau}$ και τριέδρο Frenet $\bar{T}, \bar{n}, \bar{b}$. Τότε

$$\bar{\gamma}'(s) = A\gamma'(s) = AT(s)$$

άρα $|\bar{\gamma}'(s)| = |AT(s)| = |T(s)| = 1$. Άρα η $\bar{\gamma}$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και

$$\bar{T} = AT(s)$$

Τώρα

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{n}(s), \quad \kappa, \bar{\kappa} > 0, \quad |An| = 1 = |\bar{n}| \\ \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \\ \bar{n}(s) = An(s) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Επίσης

$$\bar{b}(s) = \bar{T}(s) \times \bar{n}(s) = AT(s) \times An(s) = AT(s) \times n(s) = Ab(s)$$

και

$$\bar{b}'(s) = Ab'(s) = -\tau(s)An(s) = -\tau(s)\bar{n}(s) \Rightarrow \bar{\tau} = \tau$$

Αντιστρόφως, έστω $\gamma, \gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa = \bar{\kappa}$ και $\tau = \bar{\tau}$ στο I . Έστω $s_0 \in I$, τότε με στροφή και μετατόπιση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma(s_0) = \bar{\gamma}(s_0), T(s_0) = \bar{T}(s_0), n(s_0) = \bar{n}(s_0), b(s_0) = \bar{b}(s_0)$. Τότε τα T, n, b και $\bar{T}, \bar{n}, \bar{b}$ ικανοποιούν το

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, άρα $T \equiv \bar{T}, n \equiv \bar{n}, b \equiv \bar{b}$ στο I , δηλαδή $\gamma'(s) = \bar{\gamma}'(s) \quad \forall s \Rightarrow \gamma(s) - \bar{\gamma}(s) = \gamma(s_0) - \bar{\gamma}(s_0) = 0 \quad \forall s \in I$. \square

Θεώρημα 1.2.11. Δύο καμπύλες $\gamma, \gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ έχουν την ίδια καμπυλότητα και στρέψη αν και μόνο αν υπάρχει στροφή A και $c \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\bar{\gamma}(s) = A\gamma(s) + c \quad \forall s \in I$.

Παρατήρηση 1.2.12. Έστω $f(s) = T(s)\bar{T}(s) + n(s)\bar{n}(s) + b(s)\bar{b}(s)$ τότε $f(s) \leq 3$ και $f(s) = 3 \Leftrightarrow T(s) = \bar{T}(s), n(s) = \bar{n}(s), b(s) = \bar{b}(s)$. Πράγματι, έστω $f(s) = 3$. Τότε

$$\begin{aligned} f' &= T'\bar{T} + T\bar{T}' + n'\bar{n} + n\bar{n}' + b'\bar{b} + b\bar{b}' = \\ &\kappa n\bar{T} + \kappa T\bar{n} + (-\kappa\tau + \tau b)\bar{n} + n(-\kappa\bar{T} + \tau\bar{b}) - \tau n\bar{b} - \tau b\bar{n} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $f(s) \equiv 3$.

Θεώρημα 1.2.13 (Θεμελιώδες Θεώρημα). Αν $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ συναρτήσεις με $\kappa(s) > 0 \quad \forall s \in I$ τότε υπάρχει καμπύλη $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα κ και στρέψη τ .

Ορισμός 1.2.14. Οι εξισώσεις $\kappa = \kappa(s)$ και $\tau = \tau(s)$ ονομάζονται φυσικές εξισώσεις της καμπύλης.

Παραδείγματα 1.2.15. (i) Αν $\kappa = 1$ και $\tau = 0$ περιγράφονται τόξα κύκλων στο χώρο.

(ii) Αν $\kappa = 1$ και $\tau = 1$ περιγράφονται τμήματα έλικας στο χώρο γιατί

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2} = 1 \Rightarrow \alpha = \alpha^2 + b^2 \\ \tau &= \frac{b}{\alpha^2 + b^2} = 1 \Rightarrow b = \alpha^2 + b^2 \end{aligned}$$

άρα $\alpha = b = \frac{1}{2}$.

Παρατήρηση 1.2.16. Οι κ , τ , $T' = \kappa n$, $n' = -\kappa T + \tau b$, $b' = -\tau n$ περιγράφουν πλήρως τη γεωμετρία της καμπύλης.

Παραδείγματα 1.2.17. (i) Να βρεθούν όλες οι καμπύλες που οι εφαπτομένες τους διέρχονται από σταθερό σημείο.

Έστω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Αν $s_0 \in I$ και $\kappa(s_0) > 0$, τότε για κάποιο διάστημα $J \subseteq I$ με $s_0 \in J$, η κ θα ήταν θετική (λόγω συνέχειας). Τότε ορίζεται το τριέδρο Frenet και άρα $T' = \kappa n$, $n' = -\kappa T + \tau b$, $b' = -\tau n$. Έστω p το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Τότε

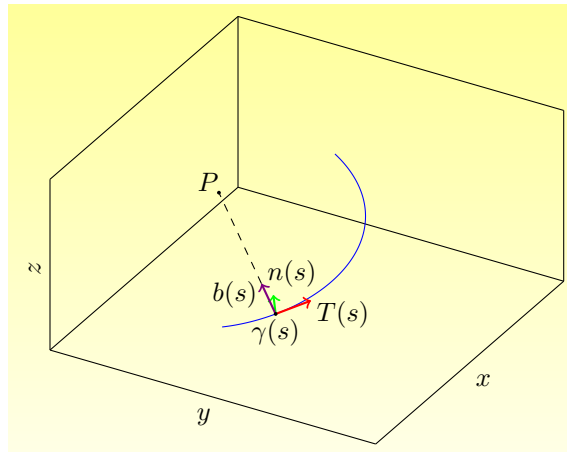
$$\gamma(s) - p = \lambda(s) \cdot T(s) \quad \forall s \in I$$

όπου $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη (γιατί $\lambda(s) = (\gamma(s) - p) \cdot T(s)$). Παραγωγίζουμε και έχουμε ότι

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)\kappa(s)n(s)$$

Άρα $\left\{ \begin{array}{l} \lambda'(s) = 1 \\ \lambda(s)\kappa(s) = 0 \end{array} \right\}$ στο $J \Rightarrow \kappa(s) = 0 \quad \forall s \in J$. Άτοπο. Άρα $\kappa \equiv 0$ στο I , δηλαδή $\gamma'' = 0$. Άρα η γ είναι ευθεία ή τμήμα ευθείας.

(ii) Να βρεθούν όλες οι καμπύλες που οι δεύτερες κάθετοι διέρχονται από σταθερό σημείο.



Σχήμα 1.26: Δεύτερες κάθετοι από σταθερό σημείο

Υποθέτω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa > 0$ και

$$\gamma(s) - p = \lambda(s)b(s) \quad \forall s \in I$$

Έχουμε ότι η λ είναι διαφορίσιμη, άρα

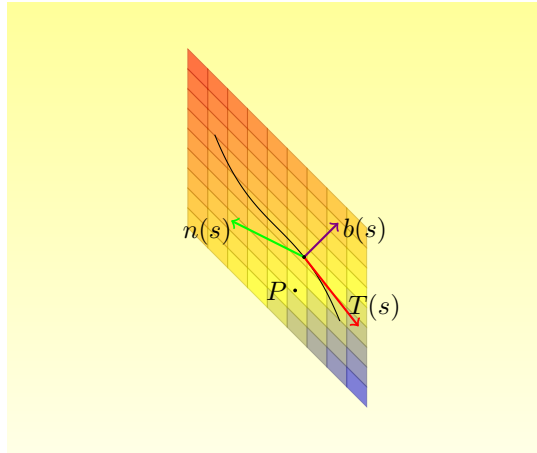
$$\gamma'(s) = \lambda'(s)b(s) + \lambda(s)b'(s)$$

δηλαδή

$$T(s) = \lambda'(s)b(s) - \tau(s)\lambda(s)n(s)$$

Άτοπο γιατί τα T, n, b είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα δεν υπάρχει τέτοια καμπύλη.

(iii) Να βρεθούν όλες οι καμπύλες των οποίων τα εγγύτατα επίπεδα διέρχονται από σταθερό σημείο. (\Rightarrow) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και p ένα σταθερό σημείο.



Σχήμα 1.27: Εγγύτατα επίπεδα από σταθερό σημείο

(α' τρόπος) Έχουμε

$$(\gamma(s) - p)b(s) = 0 \quad (*)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\gamma'(s)b(s) + (\gamma(s) - p)b'(s) = 0 \quad (1) \Rightarrow$$

$$-\tau(s)(\gamma(s) - p)n(s) = 0$$

Αν $\tau(s_0) \neq 0$ σε κάποιο διάστημα J τότε $\tau \neq 0$, άρα

$$(\gamma(s) - p)n(s) = 0 \quad (2)$$

Παραγωγίζω πάλι και έχω

$$\gamma'(s)n(s) + (\gamma(s) - p)n'(s) = 0 \Rightarrow$$

$$(\gamma(s) - p)n'(s) = 0 \Rightarrow$$

$$(\gamma(s) - p)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)b(s)) = 0 \quad (**)$$

$$-\kappa(s)(\gamma(s) - p)T(s) = 0$$

Άρα

$$(\gamma(s) - p)T(s) = 0 \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) έχω ότι $(\gamma(s) - p) = 0 \quad \forall s \in J$. Άτοπο γιατί η γ έχει ταχύτητα. Άρα $\tau \equiv 0$ στο I . Άρα η καμπύλη είναι επίπεδη.

(β' τρόπος) Έστω

$$\gamma(s) - p = \lambda(s)T(s) + \mu(s)n(s)$$

Έχουμε ότι λ, μ διαφορίσιμες γιατί $\lambda = (\gamma - p)T$ και $\mu = (\gamma - p)n$. Παραγωγίζω και έχω

$$T' = \lambda'T + \lambda\kappa n + \mu'n + \mu(-\kappa T + \tau b) \Rightarrow$$

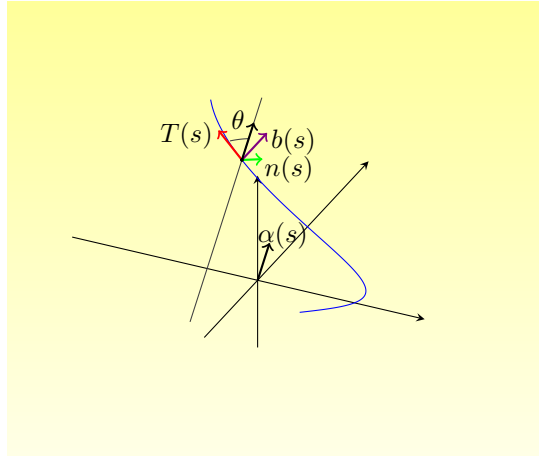
$$T = (\lambda' - \kappa\mu)T + (\mu' + \lambda\kappa)n + \tau\mu b$$

Άρα πρέπει $\begin{cases} \lambda' - \kappa\mu = 1 \\ \mu' + \lambda\kappa = 0 \\ \tau\mu = 0 \end{cases}$ στο J . Αν $\tau \neq 0$ σε κάποιο J , τότε $\mu(s) \equiv 0$ στο J άρα $0 = \mu(s) + \lambda(s)\kappa(s) = \lambda(s)\kappa(s) \stackrel{\kappa \geq 0}{\Rightarrow} \lambda(s) \equiv 0$ στο J άρα $1 = \lambda' - \mu\kappa = 0$. Άτοπο, άρα $\tau \equiv 0$ στο I .
(\Leftarrow) Προφανές.

Ορισμός 1.2.18. Μια καμπύλη λέγεται γενικευμένη έλικα αν όλες οι εφαπτομένες της σχηματίζουν σταθερή γωνία με σταθερό διάνυσμα.

Πρόταση 1.2.19. Μια καμπύλη με $\kappa > 0$ είναι γενικευμένη έλικα αν και μόνο αν

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \sigma \tan \vartheta$$



Σχήμα 1.28: Σταθερή γωνία με το διάνυσμα α

Απόδειξη : (\Rightarrow) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, α σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα και $\gamma'(s) \cdot \alpha = \cos \vartheta = \sigma \tan \vartheta$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\kappa(s)n(s)\alpha = 0 \Rightarrow n(s) \cdot \alpha = 0 \quad \forall s \in I \quad (1)$$

Άρα το α ανήκει στο επίπεδο των T, b , δηλαδή $\alpha \cdot b(s) = \sin \vartheta = \sigma$. Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$$n'(s) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)b(s))\alpha = 0 \Rightarrow -\kappa(s)\cos \vartheta + \tau(s)\sin \vartheta = 0$$

Αν $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ή $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, τότε $\tau \equiv 0$. Άτοπο γιατί αποκλείσαμε τις ευθείες και τις επίπεδες καμπύλες. Ομοίως, $\vartheta \neq 0$ και $\vartheta \neq \pi$ γιατί θα είχαμε $\kappa \equiv 0$. Άρα τελικά $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot \vartheta = \sigma$. (\Leftarrow) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c = \sigma \tan \vartheta$. Επιλέγω ϑ με $\cot \vartheta = c$ και θεωρώ $\alpha(s) = T(s) \cos \vartheta + b(s) \sin \vartheta$. Έτσι,

$$\alpha'(s) = T'(s) \cos \vartheta + b'(s) \sin \vartheta = (\kappa(s) \cos \vartheta) n(s) - (\tau(s) \sin \vartheta) n(s) =$$

$$(\kappa(s) \cos \vartheta - \tau(s) \sin \vartheta) n(s) = (\kappa(s) \cos \vartheta - \cot \vartheta \kappa(s) \sin \vartheta) n(s) = 0$$

Άρα $\alpha(s) = \alpha = \sigma \tan \vartheta$. Επίσης

$$|\alpha| = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

και

$$aT(s) = (T(s) \cos \vartheta + b(s) \sin \vartheta) T(s) = \cos \vartheta = \sigma \tau a \vartheta$$

Άρα η γ είναι γενικευμένη έλικα. \square

Παραδείγματα 1.2.20. (i) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη και $\gamma''(t)$ συγγραμμικό με το $\gamma(t)$. Να δείξετε ότι η γ είναι επίπεδη.
Έχουμε $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma(t)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = 0$. Επίσης η λ είναι διαφορίσιμη γιατί $\lambda = \gamma'' \cdot \gamma$ και

$$\gamma'''(t) = \lambda'(t)\gamma(t) + \lambda(t)\gamma'(t)$$

Τα $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γ, γ' άρα συνεπίεδα, οπότε

$$\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma''' = 0$$

(ii) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa(s) > 0$ και στρέψη $\tau(s) \equiv -1$ και έστω $\beta(s) = \gamma(s) + b(s)$. Να βρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη της β . Πότε η β είναι επίπεδη.
Έχουμε

$$\beta'(s) = \gamma'(s) + b'(s) = T(s) - \tau(s)n(s) = T(s) + n(s)$$

$$\beta'' = T' + n' = \kappa n + (-\kappa T + \tau b) = -\kappa T + \kappa n - 1b$$

$$|\beta'| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\beta' \times \beta'' = \begin{vmatrix} T & n & b \\ 1 & 1 & 0 \\ -\kappa & \kappa & -1 \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & -1 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & -1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\kappa & \kappa \end{vmatrix} =$$

$$-T - n(-1) + b(\kappa + \kappa) = -T + n + 2\kappa b$$

Άρα

$$\kappa_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4\kappa^2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{4\kappa^2 + 2}}{\sqrt{8}}$$

$$\beta''' = -(\kappa'T + \kappa T') + \kappa'n + \kappa n' - b' = -\kappa'T - \kappa(\kappa n) + \kappa'n + \kappa(-\kappa T + \tau b) - (-\tau n) =$$

$$-\kappa'T - \kappa^2 n + \kappa'n - \kappa^2 T + \kappa \tau b + \tau n = (-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 + \kappa' + \tau)n + \kappa \tau b =$$

$$(-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 + \kappa' - 1)n - \kappa b$$

$$\beta' \times \beta'' \cdot \beta''' = (-T + n + 2\kappa b) [(-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 + \kappa' - 1)n - \kappa b] =$$

$$(-1) \cdot (-\kappa' - \kappa^2) + 1 \cdot (-\kappa^2 + \kappa' - 1) + 2\kappa(-\kappa) = \kappa' + \kappa^2 - \kappa^2 + \kappa' - 1 - 2\kappa^2 = 2\kappa' - 2\kappa^2 - 1$$

Άρα

$$\tau_\beta = \frac{\beta' \times \beta'' \cdot \beta'''}{\kappa_\beta^2} = \frac{2\kappa' - 2\kappa^2 - 1}{\frac{4\kappa^2 + 2}{8}} = \frac{8(2\kappa' - 2\kappa^2 - 1)}{4\kappa^2 + 2}$$

Επίσης η β είναι επίπεδη αν και μόνο αν $\tau = 0$, δηλαδή

$$2\kappa' - 2\kappa^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa' = 2\kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa' = \kappa^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\kappa'}{\kappa^2 + \frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{d\kappa}{ds \left(\kappa^2 + \frac{1}{2} \right)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\kappa}{\kappa^2 + \frac{1}{2}} = ds \Leftrightarrow \sqrt{2} \arctan(\kappa\sqrt{2}) = s + c \Leftrightarrow \kappa_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{s+c}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

Ποιο είναι το μέγιστο μήκος της γ ; Εκεί που η εφαπτομένη είναι θετική, δηλαδή σε διάστημα μήκους $\frac{\pi}{2}$. Άρα $0 < s < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Άρα το μέγιστο μήκος είναι $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(iii) Η $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\kappa, \kappa', \tau \neq 0$ βρίσκεται πάνω σε σφαίρα αν και μόνο αν

$$R(s)^2 + \frac{R'(s)^2}{\tau(s)^2} = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

όπου R η ακτίνα καμπυλότητας.

(\Rightarrow) Ξέρω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R}^3$ (κέντρο της σφαίρας) και $c = \sigma\tau\alpha\vartheta$ (ακτίνα) ώστε

$$|\gamma(s) - p|^2 = c \Rightarrow$$

$$2(\gamma(s) - p) \gamma'(s) = 0 \Rightarrow 2(\gamma(s) - p) T(s) = 0 \quad (*) \Rightarrow$$

$$2\gamma'(s)T(s) + 2(\gamma(s) - p) T'(s) = 0 \Rightarrow T(s) \cdot T(s) + (\gamma(s) - p) T'(s) = 0 \Rightarrow$$

$$1 + (\gamma(s) - p) \kappa(s)n(s) = 0 \Rightarrow (\gamma(s) - p) n(s) = \frac{-1}{\kappa(s)} = -R(s) \quad (*)$$

Παραγωγίζω πάλι και προκύπτει

$$\gamma'(s)n(s) + (\gamma(s) - p) n'(s) = -R'(s) \Rightarrow$$

$$T(s)n(s) + (\gamma(s) - p) (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)b(s)) = -R'(s) \Rightarrow$$

$$(\gamma(s) - p) (\tau(s)b(s)) = -R'(s) \Rightarrow (\gamma(s) - p) b(s) = -\frac{R'(s)}{\tau(s)} \quad (*)$$

Από τις σχέσεις (*) προκύπτει ότι

$$\gamma(s) - p = 0 \cdot T(s) + (-R(s)) n(s) + \left(-\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right) b(s) \Rightarrow$$

$$\gamma(s) - p = -R(s)n(s) - \frac{R'(s)}{\tau(s)} b(s)$$

Άρα

$$c = |\gamma(s) - p|^2 = R(s)^2 + \frac{R'(s)^2}{\tau(s)^2}$$

Έτσι η γ είναι πάνω σε σφαίρα αν $R(s)^2 + \frac{R'(s)^2}{\tau(s)^2} = \sigma\tau\alpha\vartheta$ (με $\tau \neq 0$).

$$(\Leftarrow) R^2 + \left(\frac{R'}{\tau}\right)^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow 2RR' + 2\frac{R'}{\tau} \left(\frac{R'}{\tau}\right)' = 0 \Rightarrow R + \frac{1}{\tau} \left(\frac{R'}{\tau}\right)' = 0$$

Έχουμε ότι $R\kappa = 1$ και έστω

$$p(s) = \gamma(s) + R(s)n(s) + \frac{R'(s)}{\tau(s)} b(s)$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι

$$p' = \gamma' + R'n + Rn' + \left(\frac{R'}{\tau}\right)' b + \frac{R'}{\tau} b' = T + R'n + R(-\kappa T + \tau b) + \left(\frac{R'}{\tau}\right)' b + \frac{R'}{\tau} (-\tau n) =$$

$$T + R'n - \kappa RT + \tau Rb + \left(\frac{R'}{\tau}\right)' b - R'n = \left(\tau R + \left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right) b = 0$$

Αφού $p'(s) = 0 \Rightarrow p(s) = p_0 = \sigma\tau\alpha\vartheta$ και

$$|\gamma(s) - p|^2 = |\gamma(s) - p(s)|^2 = R(s)^2 + \left(\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right)^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

και άρα η γ βρίσκεται πάνω σε σφαίρα.

Κεφάλαιο 2

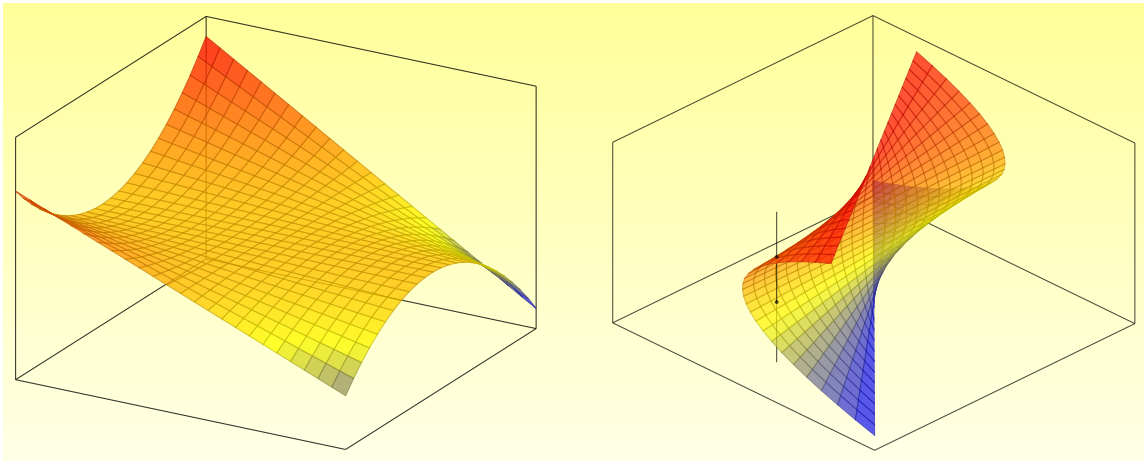
Επιφάνειες

2.1 Εισαγωγικά

Η συνάρτηση $y = f(x)$ γενικεύεται στην $z = f(x, y)$ αλλά η δυσκολία ξεκινάει από το πεδίο ορισμού που είναι ανοιχτό σύνολο. Ένα $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό όταν $\forall p \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(p, \varepsilon) \subseteq U$. Μια $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής όταν $\forall p_n \in U$ με $p_n \rightarrow p$ να ισχύει $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ \alpha & (x, y) = 0 \end{cases}$. Η f δεν είναι συνεχής. Πράγματι, έστω ακολουθία $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}) \rightarrow 0$. Όμως $f(p_n) = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \rightarrow \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$. Άρα το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Ορισμός 2.1.2. Το σύνολο $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ ονομάζεται γράφημα της f και είναι επιφάνεια.



Σχήμα 2.1: Επιφάνεια γράφημα και επιφάνεια που δεν είναι γράφημα

Ορισμός 2.1.3. Τι κάνουμε για να μελετήσουμε τη μεταβολή της f ;
Έστω $p_0 = (x_0, y_0) \in U$. Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| + |\beta| > 0$ έχω

$$h(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

$$h(0) = f(p_0)$$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) \beta$$

$$h'(0) = f_x(p_0)\alpha + f_y(p_0)\beta$$

Η γραμμική συνάρτηση

$$(Df)_{p_0}((\alpha, \beta)) = f_x(p_0)\alpha + f_y(p_0)\beta = \nabla f(p_0)(\alpha, \beta)$$

ονομάζεται διαφορικό της f στο p_0 .

Παραδείγματα 2.1.4. (i) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο p_0 τότε $(Df)_{p_0} = 0$, δηλαδή $\nabla f(p_0) = 0$.

(ii) Έστω $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + f_x(p_0)\Delta x + f_y(p_0)\Delta y$ με $\Delta x, \Delta y$ μικρά. Τότε

$$h''(0) = f_{xx}(p_0)\alpha^2 + 2f_{xy}(p_0)\alpha\beta + f_{yy}(p_0)\beta^2$$

Άρα η τετραγωνική μορφή

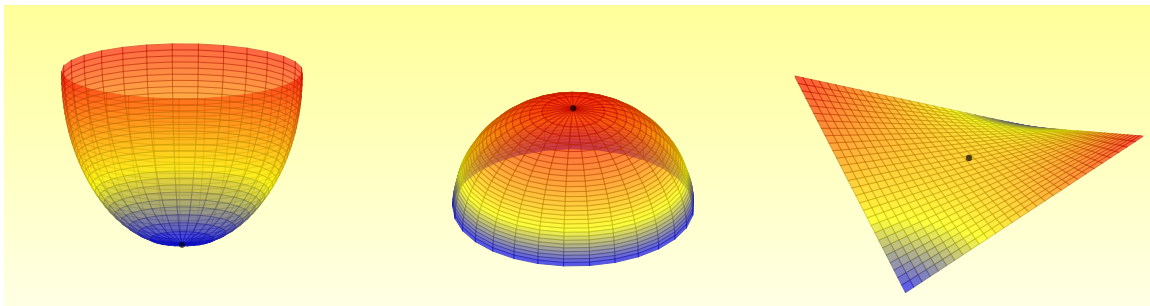
$$Hess(f)_p((\alpha, \beta)) = f_{xx}(p_0)\alpha^2 + 2f_{xy}(p_0)\alpha\beta + f_{yy}(p_0)\beta^2$$

ονομάζεται εσιανή της f στο p_0 . Υποθέτω ότι $\nabla f(p_0) = 0$ και προκύπτει ο πίνακας

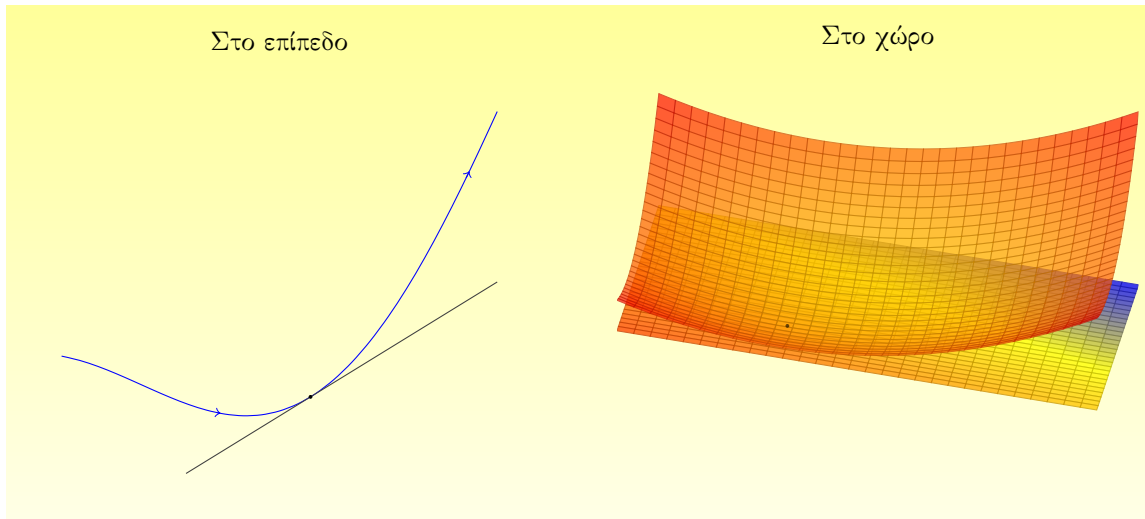
$$\begin{pmatrix} f_{xx}(p_0) & f_{xy}(p_0) \\ f_{xy}(p_0) & f_{yy}(p_0) \end{pmatrix}$$

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις

- (1) $Hess(f)_{p_0}$ θετικά ορισμένος όταν $f_{xx}(p_0) > 0$ και $f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}(p_0)^2 > 0$. Τότε έχω τοπικό ελάχιστο.
- (2) $Hess(f)_{p_0}$ αρνητικά ορισμένος όταν $f_{xx}(p_0) < 0$ και $f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}(p_0)^2 > 0$. Τότε έχω τοπικό μέγιστο.
- (3) Αν για τις ιδιοτιμές ισχύει $\lambda < 0 < \mu$ τότε $f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}(p_0)^2 < 0$ και έχω σαγματικό σημείο. Άρα $\nabla f = (f_x, f_y)$ και $Hess(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$



Σχήμα 2.2: Ακρότατα και σαγματικά σημεία επιφανειών



Σχήμα 2.3: Εφαπτόμενη και εφαπτόμενο επίπεδο

Εφαπτόμενες

Γεωμετρικά δε μπορούμε να βρούμε εφαπτόμενο επίπεδο γιατί τα τρία σημεία του εγγύτατου δεν προσεγγίζουν τελικά το εφαπτόμενο.

Ορισμός 2.1.5. Έχω $r(u, v) = f(p_0) + f_x(p_0)u + f_y(p_0)v$ και τότε για $p_0 = (x_0, y_0)$ ισχύει

$$\begin{aligned} (x_0 + u, y_0 + v, f(x_0 + u, y_0 + v)) &\cong (x_0 + u, y_0 + v, f(p_0) + f_x(p_0)u + f_y(p_0)v) = \\ &(x_0, y_0, f(p_0)) + (1, 0, f_x(p_0))u + (0, 1, f_y(p_0))v \end{aligned}$$

Αυτό είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $(x_0, y_0, f(p_0))$ και είναι παράλληλο στα $(1, 0, f_x(p_0))$ και $(0, 1, f_y(p_0))$. Ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο της $z = f(x, y)$ στο p_0 .

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω $z = x^2 + 2y^2$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο $p_0 = (1, 1)$. Έχω $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Τότε

$$f_x = 2x, \quad f_y = 4y, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = 0$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το $\mathcal{E}(u, v) = (1, 1, 3) + (1, 0, 2)u + (0, 1, 4)v$ και η καρτεσιανή εξίσωση είναι η

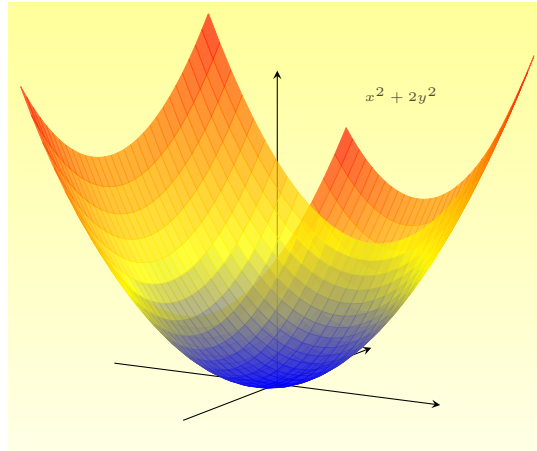
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \cdot (-2) - e_2 \cdot 4 + e_3 \cdot 1 = (-2, -4, 1)$$

άρα

$$-2(x-1) - 4(y-1) + (z-3) = 0 \Rightarrow -2x + 2 - 4y + 4 + z - 3 = 0 \Rightarrow -2x - 4y + z = -3$$

Ορισμός 2.1.7. Παραμετρική επιφάνεια λέγεται κάθε C^∞ απεικόνιση $\mathcal{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου U ανοιχτό και $\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \neq 0$ στο U .

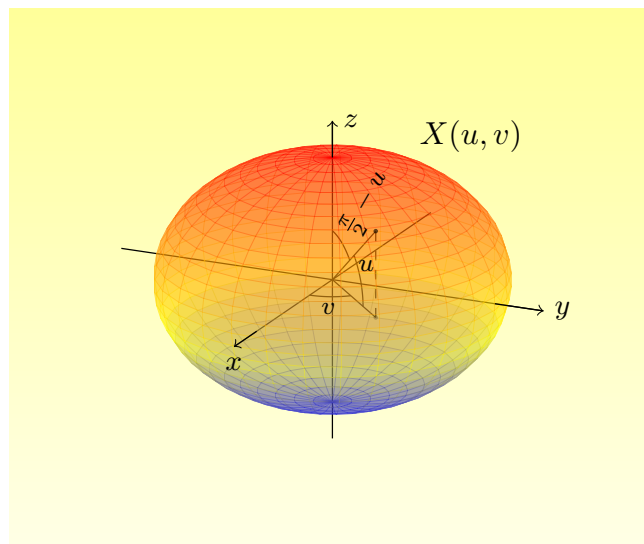
Παράδειγματα 2.1.8. (i) Η $\mathcal{X}(u, v) = (u, u, u)$ είναι ευθεία, όχι επιφάνεια.

Σχήμα 2.4: Η $z = x^2 + 2y^2$

- (ii) Η $\mathcal{X}(u, v) = (uv, uv, uv)$ είναι ευθεία, όχι επιφάνεια.
- (iii) Η $\mathcal{X}(u_0 + h, v_0 + t) \cong \mathcal{X}(u_0, v_0) + \mathcal{X}_u(u_0, v_0)h + \mathcal{X}_v(u_0, v_0)t$ είναι επίπεδο αν τα $\mathcal{X}_u(u_0, v_0)$ και $\mathcal{X}_v(u_0, v_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (iv) Η $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, όπου $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ συνάρτηση, είναι το γράφημα της f και τα $\mathcal{X}_u = (1, 0, f_u)$ και $\mathcal{X}_v = (0, 1, f_v)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (v) Η $\mathcal{X}(u, v) = p + \alpha u + bv$ με $\alpha \times b \neq 0$ είναι επίπεδο με $\mathcal{X}_u = \alpha$ και $\mathcal{X}_v = b$.
- (vi) Η $\mathcal{X}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ είναι η μοναδιαία σφαίρα αφού

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u = 1$$

Αν έχω σταθερό v έχουμε τα ημικύκλια (μεσημβρινοί), ενώ αν έχω σταθερό u έχουμε παράλλη-



Σχήμα 2.5: Η μοναδιαία σφαίρα

λους κύκλους (στον ισημερινό).

2.2 Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή

Παραμετρική επιφάνεια

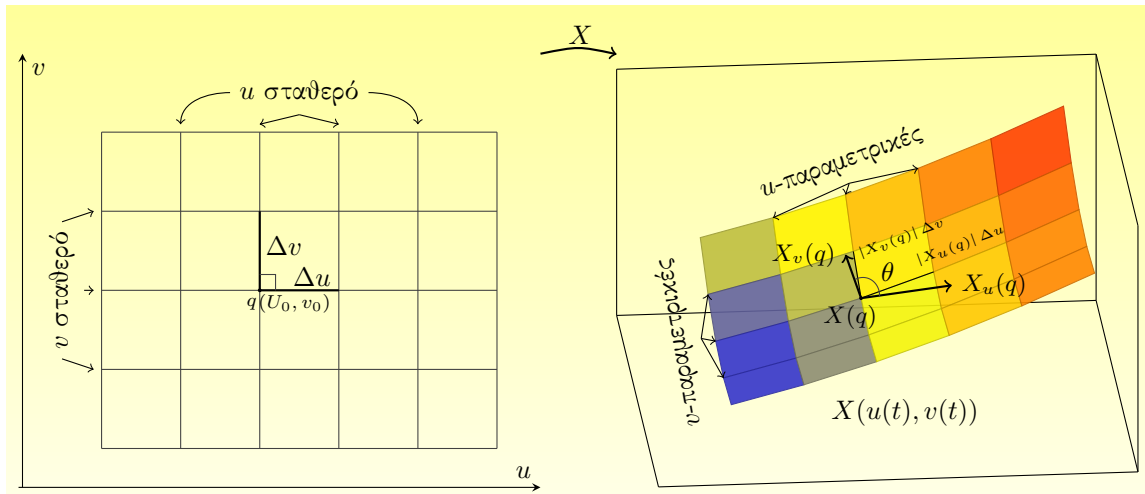
Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $\mathcal{X}_u(q) \times \mathcal{X}_v(q) \neq 0 \quad \forall q \in U$. Τότε το εφαπτόμενο επίπεδο $T_q\mathcal{X}$ είναι ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 που δημιουργείται από τα $\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q)$ και $T_q\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q))$ με $\dim T_q\mathcal{X} = 2$. Οι καμπύλες

$$\left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow \mathcal{X}(u_0, v) \\ u \rightarrow \mathcal{X}(u, v_0) \end{array} \right\}$$

ονομάζονται u και v -παραμετρικές καμπύλες της \mathcal{X} αντίστοιχα και έχουν ταχύτητες \mathcal{X}_v και \mathcal{X}_u . Το

$$N(q) = \frac{\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v}{|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v|}(q)$$

θα λέγεται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της \mathcal{X} στο q .



Σχήμα 2.6: Παραμετρικές καμπύλες

Παρατήρηση 2.2.1. Μήπως υπάρχουν καλές παραμετρήσεις για επιφάνειες; Υπάρχουν u και v -παραμετρικές καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας και κάθετες; Η απάντηση είναι όχι.

Παρατήρηση 2.2.2. Κάθετες είναι οι καμπύλες των οποίων οι εφαπτομένες είναι κάθετες.

Πρόταση 2.2.3. Δεν υπάρχει $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $|\mathcal{X}| = |\mathcal{X}_u| = |\mathcal{X}_v| = 1$ και $\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v = 0$ στο U .

Ορισμός 2.2.4. Οι συναρτήσεις $\left\{ \begin{array}{l} E = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u \\ F = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v \\ G = \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_v \end{array} \right\} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζονται συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής της \mathcal{X} .

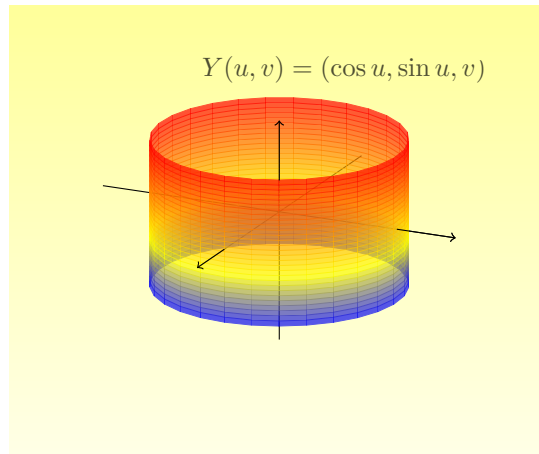
Παράδειγμα 2.2.5. Έστω $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, 0)$ και $\mathcal{Y}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, 0), \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, 0), \quad \mathcal{Y}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \mathcal{Y}_v = (0, 0, 1)$$

$$E_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u = 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 1, \quad F_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v = 0, \quad G_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_v = 0 + 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

$$E_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_u \cdot \mathcal{Y}_u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_u \cdot \mathcal{Y}_v = 0, \quad G_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_v \cdot \mathcal{Y}_v = 0 + 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

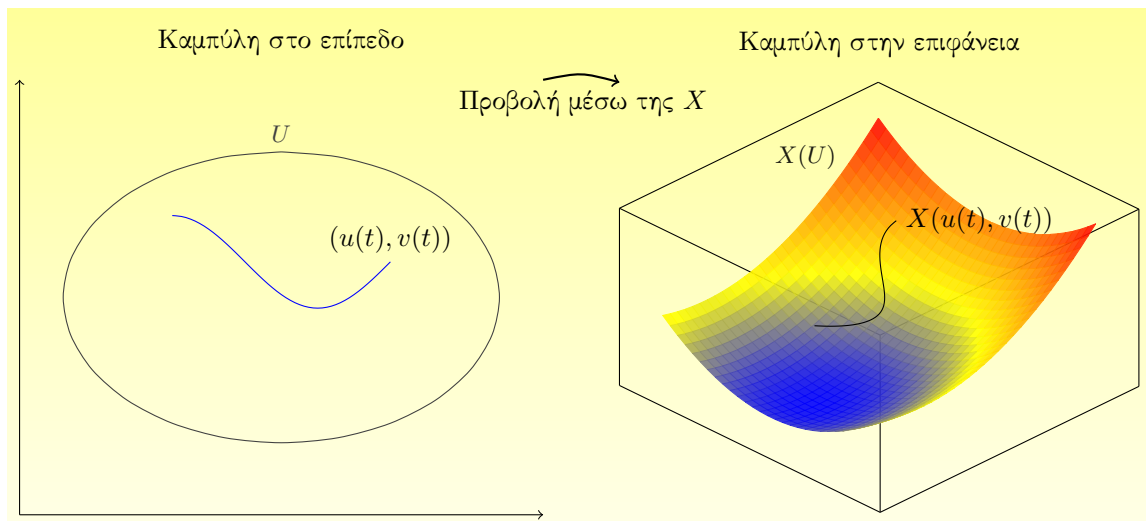
Παρατηρούμε ότι τα E, F, G είναι ίδια αλλά $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$. Άρα τα επίπεδα αυτά περιέχουν λιγότερες πληροφορίες από τις \mathcal{X}, \mathcal{Y} .



Σχήμα 2.7: Ο κύλινδρος

Παρατήρηση 2.2.6. Υπάρχει επιφάνεια \mathcal{X} με $E = 1, F = 3, G = 1$; Όχι, γιατί πρέπει $E > 0$ και $EG - F^2 > 0$.

Ορισμός 2.2.7. Καμπύλη της \mathcal{X} θα λέγεται κάθε απεικόνιση $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$, όπου οι $u(t)$ και $v(t)$ είναι C^∞ .



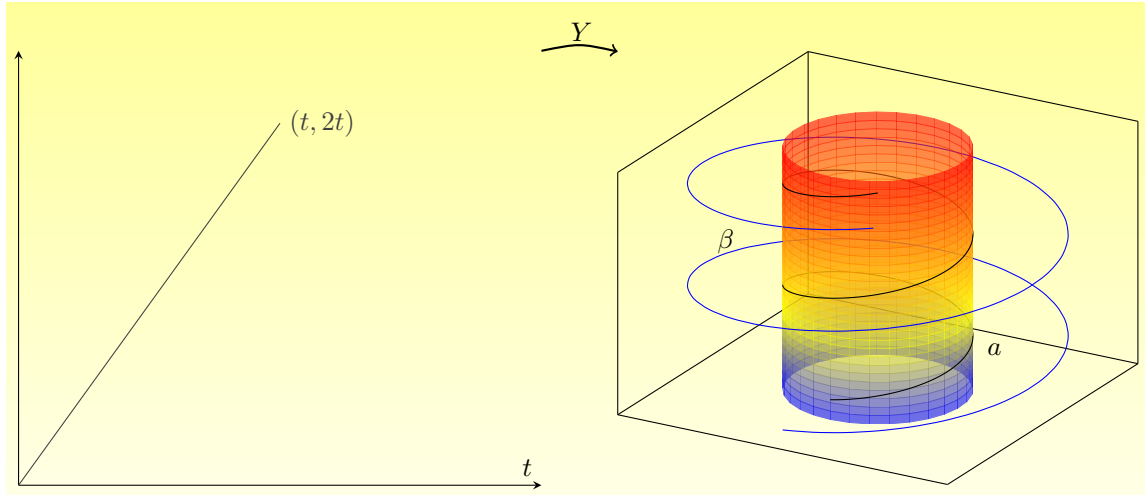
Σχήμα 2.8: Καμπύλες μιας επιφάνειας

Παράδειγμα 2.2.8. Έστω $\mathcal{Y}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ επιφάνεια. Τότε η $\alpha(t) = \mathcal{Y}(t, 2t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ είναι καμπύλη της \mathcal{Y} ενώ η $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2t)$ δεν είναι.

Μήκος

Το μήκος της καμπύλης $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ είναι

$$l_c^d(\alpha) = \int_c^d |\alpha'(t)| dt$$

Σχήμα 2.9: Οι καμπύλες της α και β

Όμως $\alpha'(t) = \mathcal{X}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathcal{X}_v(u(t), v(t))v'(t)$ και

$$|\alpha'(t)|^2 = |\mathcal{X}_u|^2 u'(t)^2 + |\mathcal{X}_v|^2 v'(t)^2 + 2\mathcal{X}_u \mathcal{X}_v u'(t)v'(t) =$$

$$Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) = M$$

Άρα $l_c^d(\alpha) = \int_c^d \sqrt{M} dt$. Συμβολικά, $I_q = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ που προκύπτει από την τετραγωνική μορφή $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ στο (du, dv) . Άρα το μήκος της καμπύλης είναι ίσο με $\int \sqrt{I} dt$

Παράδειγμα 2.2.9. (i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων στο σημείο τομής.

Έχω $E = 1 + V^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$ και ψάχνω τη γωνία τομής των $\alpha(t) = \mathcal{X}(t, 2t)$ και $\beta(s) = \mathcal{X}(2s, s^2 + 4)$. Λύνουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} t = 2s \\ 2t = s^2 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 2s \\ 4s = s^2 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t_0 = 4 \\ s_0 = 2 \end{array}$$

Άρα $q = (t_0, 2t_0)$ ή $(2s_0, s_0^2 + 4) = (4, 8)$. Επίσης

$$E(q) = 1 + 8^2 = 65$$

$$F(q) = 4 \cdot 8 = 32$$

$$G(q) = 1 + 4^2 = 17$$

$$w_1 = \mathcal{X}_u(q) \cdot 1 + \mathcal{X}_v(q) \cdot 2$$

$$w_2 = \mathcal{X}_u(q) \cdot 2 + \mathcal{X}_v(q) \cdot 2s_0 = \mathcal{X}_u(q) \cdot 2 + \mathcal{X}_v(q) \cdot 4$$

Άρα για το $w_1 \cdot w_2$ έχουμε $\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ 2 & 65 & 32 \\ 4 & 32 & 17 \end{array}$, δηλαδή

$$\alpha = 65 \cdot 2 \cdot 1 + 32 \cdot 2 \cdot 2 + 32 \cdot 4 \cdot 1 + 17 \cdot 4 \cdot 2 = 522$$

Για το $w_1 \cdot w_1$ έχουμε $\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 65 & 32 \\ 2 & 32 & 17 \end{array}$, δηλαδή

$$\beta = 65 \cdot 1 \cdot 1 + 32 \cdot 1 \cdot 2 + 32 \cdot 2 \cdot 1 + 17 \cdot 2 \cdot 2 = 261$$

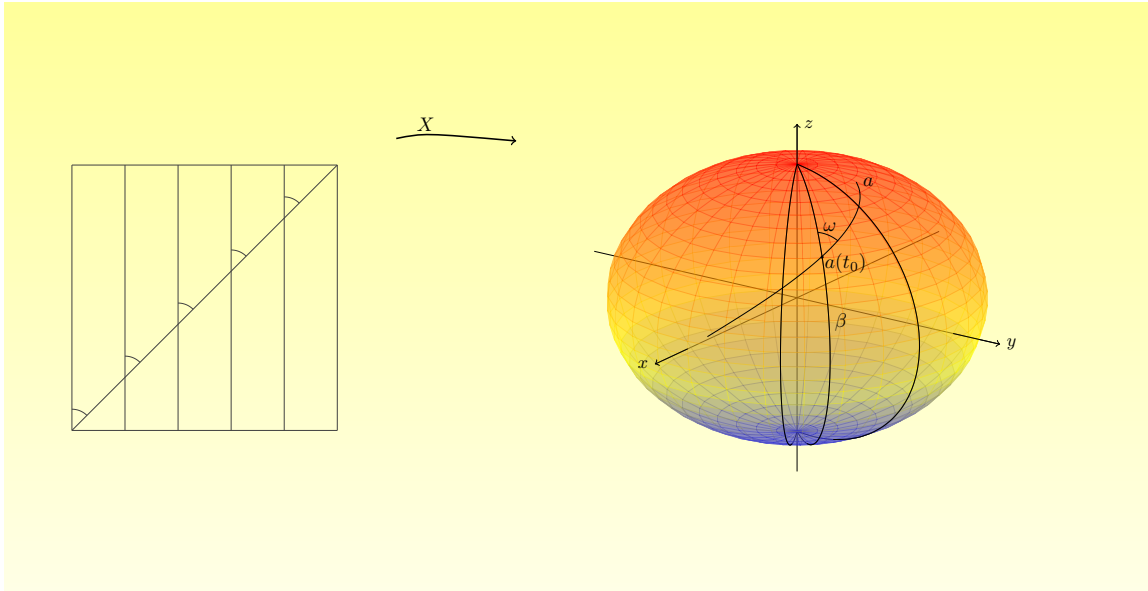
Για το $w_2 \cdot w_2$ έχουμε $\begin{array}{c|cc} & 2 & 4 \\ \hline 2 & 65 & 32 \\ 4 & 32 & 17 \end{array}$, δηλαδή

$$\gamma = 65 \cdot 2 \cdot 2 + 32 \cdot 2 \cdot 4 + 32 \cdot 4 \cdot 2 + 17 \cdot 4 \cdot 4 = 1044$$

Άρα

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta\gamma}} = 1 \Rightarrow \vartheta = 0$$

- (ii) Να βρείτε καμπύλη στη σφαίρα που να τέμνει κάθε μεσημβρινό υπό σταθερή γωνία 45° .
Έστω $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ μια τέτοια καμπύλη και έστω t_0 μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ο



Σχήμα 2.10: Καμπύλη στη σφαίρα που τέμνει τους μεσημβρινούς με σταθερή γωνία

μεσημβρινός που περνάει από το $\alpha(t_0) = \mathcal{X}(u(t_0), v(t_0)) = q$ είναι η $\beta(s) = \mathcal{X}(u(t_0), s)$. Οι $\alpha(t)$ και $\beta(s)$ τέμνονται για $t = t_0, s = v(t_0)$. Θυμόμαστε ότι στη σφαίρα έχουμε $E = \cos^2 v$, $F = 0$, $G = 1$ και ισχύει

$$w_1 = \alpha'(t_0) = \mathcal{X}_u(q)u'(t_0) + \mathcal{X}_v(q)v'(t_0)$$

$$w_2 = \beta'(v(t_0)) = \mathcal{X}_v(q) \cdot 1$$

$$|w_2|^2 = G(q) = 1$$

$$w_1 w_2 = F(q)u'(t_0) + G(q)v'(t_0) = 0 + 1 \cdot v'(t_0) = v'(t_0)$$

$$|w_1|^2 = E(q)u'(t_0)^2 + 2F(q)u'(t_0)v'(t_0) + G(q)v'(t_0)^2 = u'(t_0)^2 \cos^2 v(t_0) + v'(t_0)^2$$

Θέλουμε

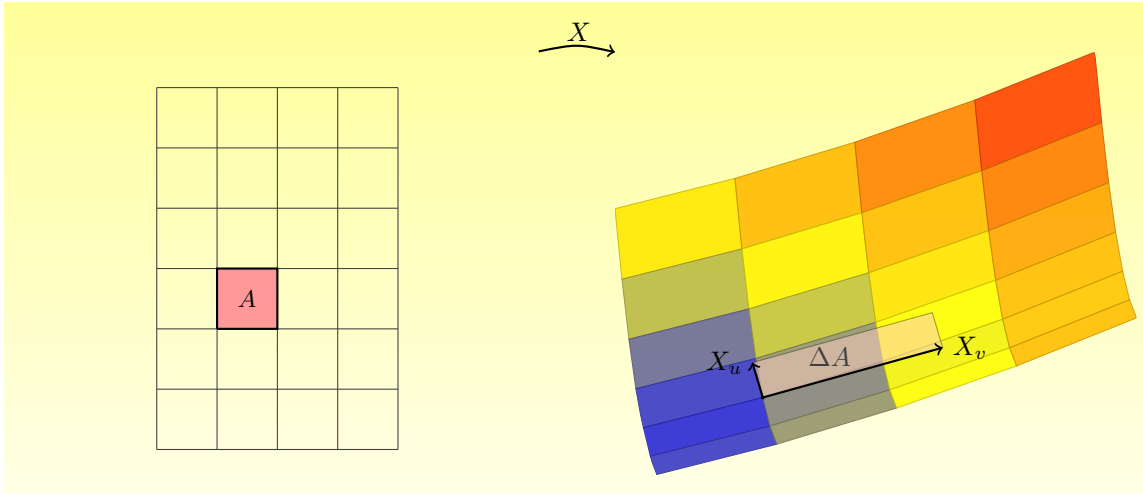
$$\frac{w_1 w_2}{|w_1| \cdot |w_2|} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{v'(t_0)}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{u'(t_0)^2 \cos^2 v(t_0) + v'(t_0)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{v'(t_0)^2}{v'(t_0)^2 + \cos^2 v(t_0)u'(t_0)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v'(t_0)^2 = \cos^2 v(t_0)u'(t_0)^2 \Rightarrow \frac{du}{dv} = \pm \frac{1}{\cos v}$$

Παίρνουμε τη θετική για να βρούμε μία και τελικά

$$\alpha(v) = \mathcal{X}(\ln |\tan v + \sec v| + c, v)$$

Εμβαδόν



Σχήμα 2.11: Εμβαδόν στην επιφάνεια

Ορισμός 2.2.10. Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια και $K \subseteq U$ συμπαγές. Τότε το εμβαδόν του $\mathcal{X}(K)$ είναι

$$E(\mathcal{X}(K)) = \iint_K |\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v| \, dudv$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $|\alpha \times \beta|^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$ και ισχύει

$$|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v|^2 = |\mathcal{X}_u|^2 |\mathcal{X}_v|^2 - (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)^2 = EG - F^2$$

Άρα τελικά

$$E(\mathcal{X}(K)) = \iint_K \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

Παραδείγματα 2.2.11. (i) Στη σφαίρα έχω $0 < u < 2\pi$ και $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} |\cos v| \, dudv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos v \, dudv = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v (2\pi - 0) \, dv = 2\pi [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2\pi(1 + 1) = 4\pi \end{aligned}$$

(ii) Στο δίγωνο έχουμε $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ και $u_0 \leq u \leq u_0 + \alpha$, όπου α ακτίνα. Άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{u_0}^{u_0 + \alpha} \cos v \, dudv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v (u_0 + \alpha - u_0) \, dv = \\ &= \alpha [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \alpha \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \alpha(1 + 1) = 2\alpha \end{aligned}$$

$$(iii) \left. \begin{array}{l} E + E_1 = 2\alpha \\ E + E_2 = 2\beta \\ E + E_3 = 2\gamma \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$3E + E_1 + E_2 + E_3 = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

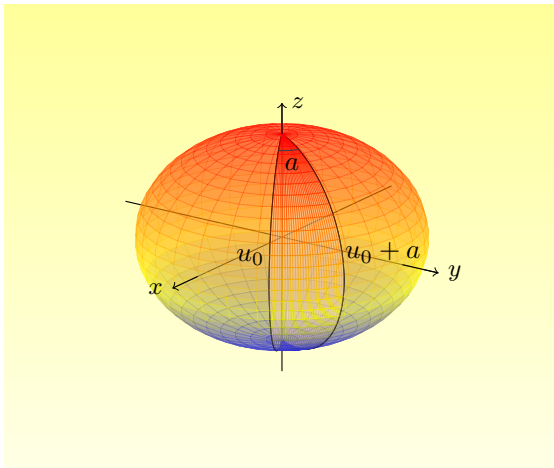
και επειδή το εμβαδόν της σφαίρας είναι $2E + 2E_1 + 2E_2 + 2E_3 = 4\pi$ προκύπτει ότι

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

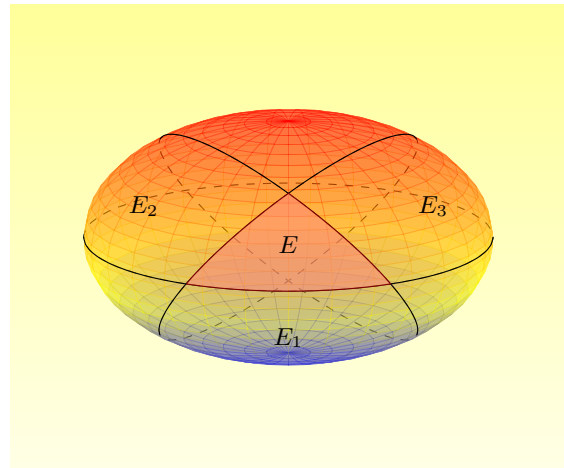
(iv) Το εμβαδόν του τριρθογωνίου τριγώνου είναι

$$E = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

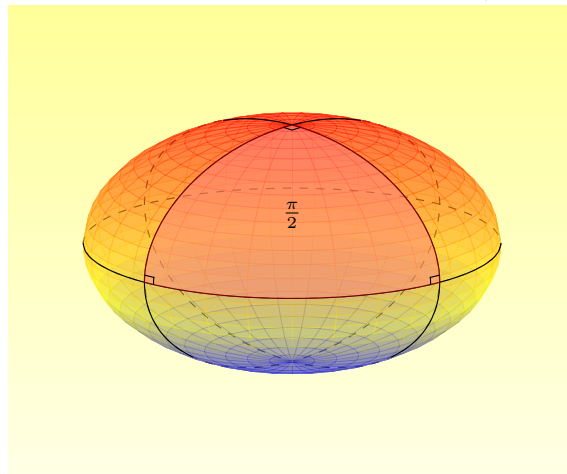
Το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο από 180° , τόσο μεγαλύτερο όσο το εμβαδόν του.



(i) Εμβαδόν σφαιρικού διγώνου



(ii) Εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου



(iii) Εμβαδόν σφαιρικού τριρθογωνίου

Σχήμα 2.12

Γραφήματα

Έστω $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ συνάρτηση και το γράφημα $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Έχουμε

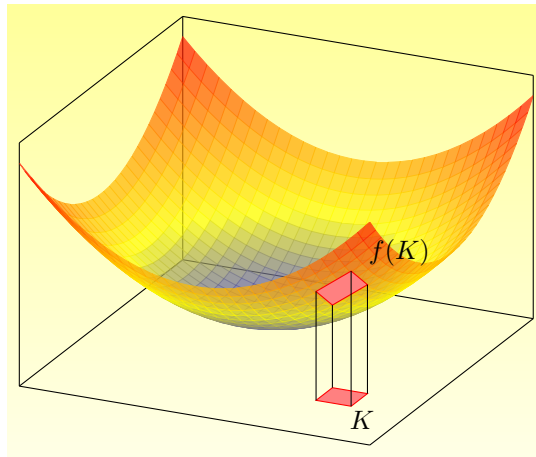
$$\mathcal{X}_u = (1, 0, f_u), \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, f_v)$$

$$E = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u = 1 + f_u^2, \quad F = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v = f_u \cdot f_v, \quad G = \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_v = 1 + f_v^2$$

$$EG - F^2 = (1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 \cdot f_v^2 = 1 + f_v^2 + f_u^2 + f_u^2 f_v^2 - f_u^2 f_v^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$$

Εμβαδόν επιφάνειας:

$$E(\mathcal{X}(K)) = \iint_K \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} du dv$$



Σχήμα 2.13: Εμβαδόν επιφάνειας

Καμπύλες παντού κάθετες στις $u \rightarrow \mathcal{X}(u, v_0)$:

Έστω $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ μια τέτοια καμπύλη. Στο t_0 θεωρούμε την $\beta(s) = \mathcal{X}(s, v(t_0))$ που τέμνει την α στο $s = u(t_0)$ όταν $t = t_0$. Τότε ισχύει ότι οι εφαπτομένες είναι κάθετες, δηλαδή

$$\alpha'(t_0) \cdot \beta'(u(t_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$[\mathcal{X}_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + \mathcal{X}_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)] \cdot \mathcal{X}_u(u(t_0), v(t_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$E(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + F(u(t_0), v(t_0))v'(t_0) = 0 \Rightarrow$$

$$E(u(t), v(t))u'(t) + F(u(t), v(t))v'(t) = 0$$

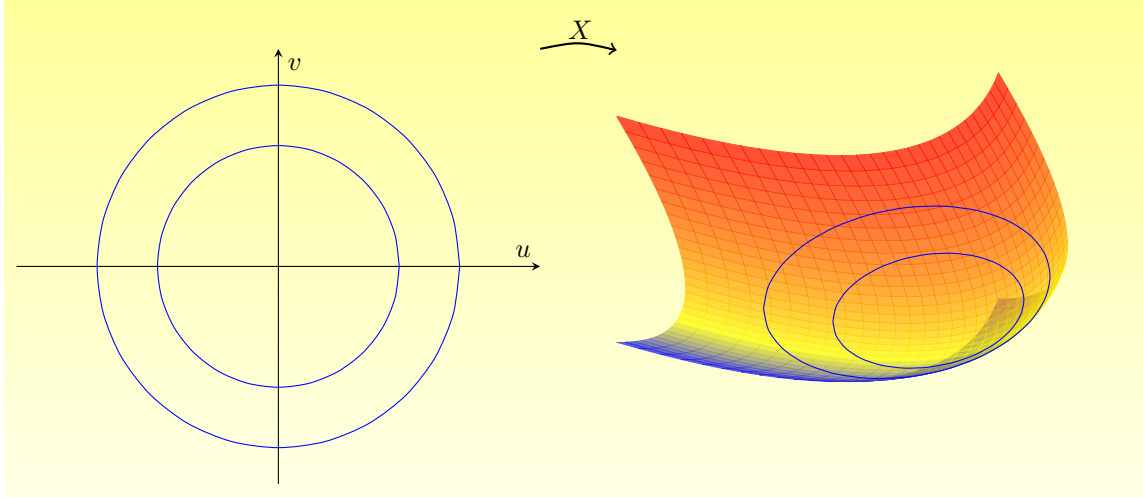
Ξεχνάμε τις παραμετρήσεις και θεωρούμε την εξίσωση

$$E(u, v)du + F(u, v)dv = 0$$

με γενική λύση την $\xi(u, v) = \text{σταθ}$. Οι καμπύλες είναι εικόνες των $\xi(u, v) = \text{σταθ}$ μέσω της \mathcal{X} . Για παράδειγμα αν βρούμε $\xi(u, v) = u^2 + v^2 = c$ τότε έχω κύκλους στο επίπεδο (ανάλογα το c) και θέλουμε την εικόνα τους στην επιφάνεια.

Καμπύλες παντού κάθετες στις $v \rightarrow \mathcal{X}(u_0, v)$:

Παρόμοια προκύπτει η εξίσωση $F(u, v)du + G(u, v)dv = 0$.



Σχήμα 2.14: Εικόνες κύκλων στην επιφάνεια $\xi(u, v) = u^2 + v^2 = c$

Παράδειγμα 2.2.12. Έστω $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. Θέλουμε να βρούμε τις καμπύλες που είναι κάθετες στις u . Έχουμε $\mathcal{X}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right)$. Τότε

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, u), \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, v), \quad E = 1 + u^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + v^2$$

Φτιάχνω την εξίσωση

$$Edu + Fdv = 0 \Rightarrow (1 + u^2)du + uvdv = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u} + u\right) du + vdv = 0 \Rightarrow \ln|u| + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} = c$$

Για $c = 1$ έχω $v = \sqrt{2 - u^2 - \ln(u^2)}$ και τότε

$$\alpha(t) = \mathcal{X}\left(t, \sqrt{2 - t^2 - \ln(t^2)}\right) = \left(t, \sqrt{2 - t^2 - \ln(t^2)}, 1 - \ln|t|\right)$$

Για διαφορετικό c βρίσκω άλλη καμπύλη.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν, έστω $u^2 + v^2 \leq \alpha^2$ και $K = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq \alpha^2\}$. Τότε

$$E(\mathcal{X}(K)) = \iint_K \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} dudv = \iint_K \sqrt{1 + u^2 + v^2} dudv$$

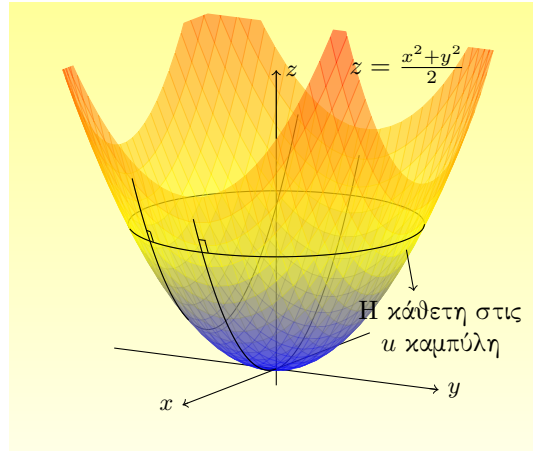
Επίσης, αφού $K = \{(r, \vartheta) : r \leq \alpha, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$, έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \sqrt{1 + r^2} r dr d\vartheta = 2\pi \left[\frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^\alpha = \frac{2\pi}{3} \left((1 + \alpha^2)^{3/2} - 1 \right)$$

Επιπλέον, αν μας ζητηθεί να βρούμε τη γωνία των $\alpha(t) = \mathcal{X}(t, 1)$ και $\beta(s) = \mathcal{X}(1, s)$, τότε λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι το σημείο τομής τους είναι το $t = 1, s = 1$. Άρα

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha'(1)\beta'(1)}{|\alpha'(1)||\beta'(1)|} = \frac{F(1, 1)}{\sqrt{E(1, 1)G(1, 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Σχήμα 2.15: Καμπύλες κάθετες στις u .

Επιφάνειες εκ περιστροφής

Έστω c καμπύλη στο xz -επίπεδο. Έχουμε ότι $v \rightarrow (\varphi(v), 0, y(v))$ με $v \in (\alpha, b)$ και $\varphi > 0$. Περιστρέφουμε την c γύρω από τον άξονα z και προκύπτει η

$$\mathcal{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, y(v))$$

όπου $v \in (\alpha, b)$ και $u \in (0, 2\pi)$. Τότε

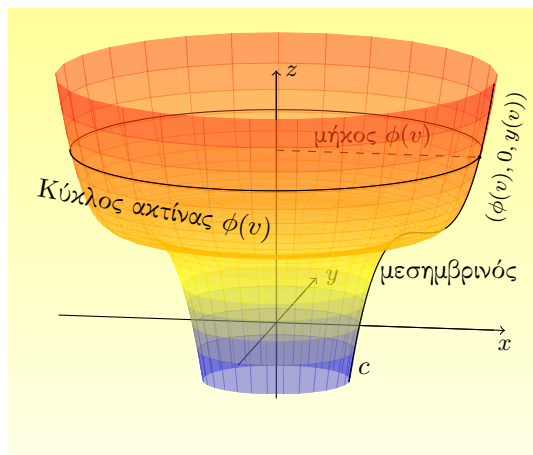
$$\mathcal{X}_u = (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0), \quad \mathcal{X}_v = (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, y'(v))$$

$$E = \mathcal{X}_u^2 = \varphi(v)^2 \sin^2 u, \varphi(v)^2 \cos^2 u = \varphi(v)^2 \cdot 1 = \varphi(v)^2$$

$$F = \mathcal{X}_u \mathcal{X}_v = -\varphi(v) \sin u \varphi'(v) \cos u + \varphi(v) \cos u \varphi'(v) \sin u = 0$$

$$G = \mathcal{X}_v^2 = \varphi'(v)^2 \cos^2 u + \varphi'(v)^2 \sin^2 u + y'(v)^2 = \varphi'(v)^2 + y'(v)^2$$

Εμβαδόν επιφάνειας:



Σχήμα 2.16: Επιφάνεια εκ περιστροφής

$$E = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^b \sqrt{EG - F^2} dv du = 2\pi \int_\alpha^b \varphi(v) \sqrt{y'(v)^2 + \varphi'(v)^2} dv$$

Παράδειγμα 2.2.13. Έστω $r < \alpha$ και $v \rightarrow (\alpha + r \cos v, 0, r \sin v)$. Θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του τόρου. Έχουμε ότι

$$\mathcal{X}(u, v) = ((\alpha + r \cos v) \cos u, (\alpha + r \cos v) \sin u, r \sin v)$$

$$\mathcal{X}_u = (-\alpha - r \cos v) \sin u, (\alpha + r \cos v) \cos u, 0)$$

$$\mathcal{X}_v = (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, r \cos v)$$

$$E = (\alpha + r \cos v)^2 \cdot 1 = (\alpha + r \cos v)^2$$

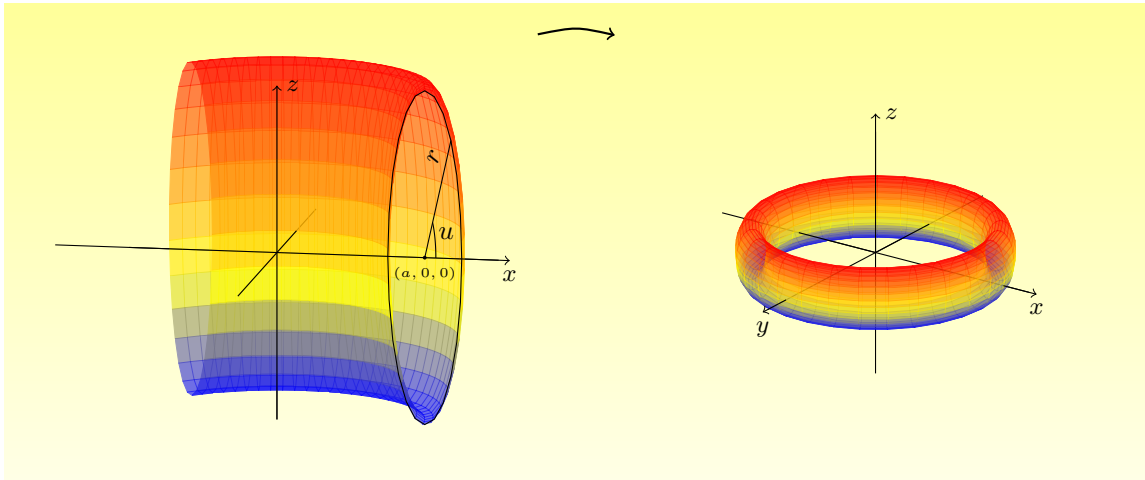
$$F = (\alpha + r \cos v) r \sin v \sin u \cos u - (\alpha + r \cos v) r \sin v \sin u \cos u = 0$$

$$G = r^2 \sin^2 v \cos^2 u + r^2 \sin^2 v \sin^2 u + r^2 \cos^2 v = r^2 \sin^2 v + r^2 \cos^2 v = r^2$$

Άρα

$$E = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{(\alpha + r \cos v)^2 r^2} dv = 2\pi \int_0^{2\pi} r (\alpha + r \cos v) dv = 2\pi \int_0^{2\pi} r\alpha + r^2 \cos v dv$$

$$2\pi [r\alpha v]_0^{2\pi} + 2\pi [r^2 \sin v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 r\alpha$$



Σχήμα 2.17: Τόρος

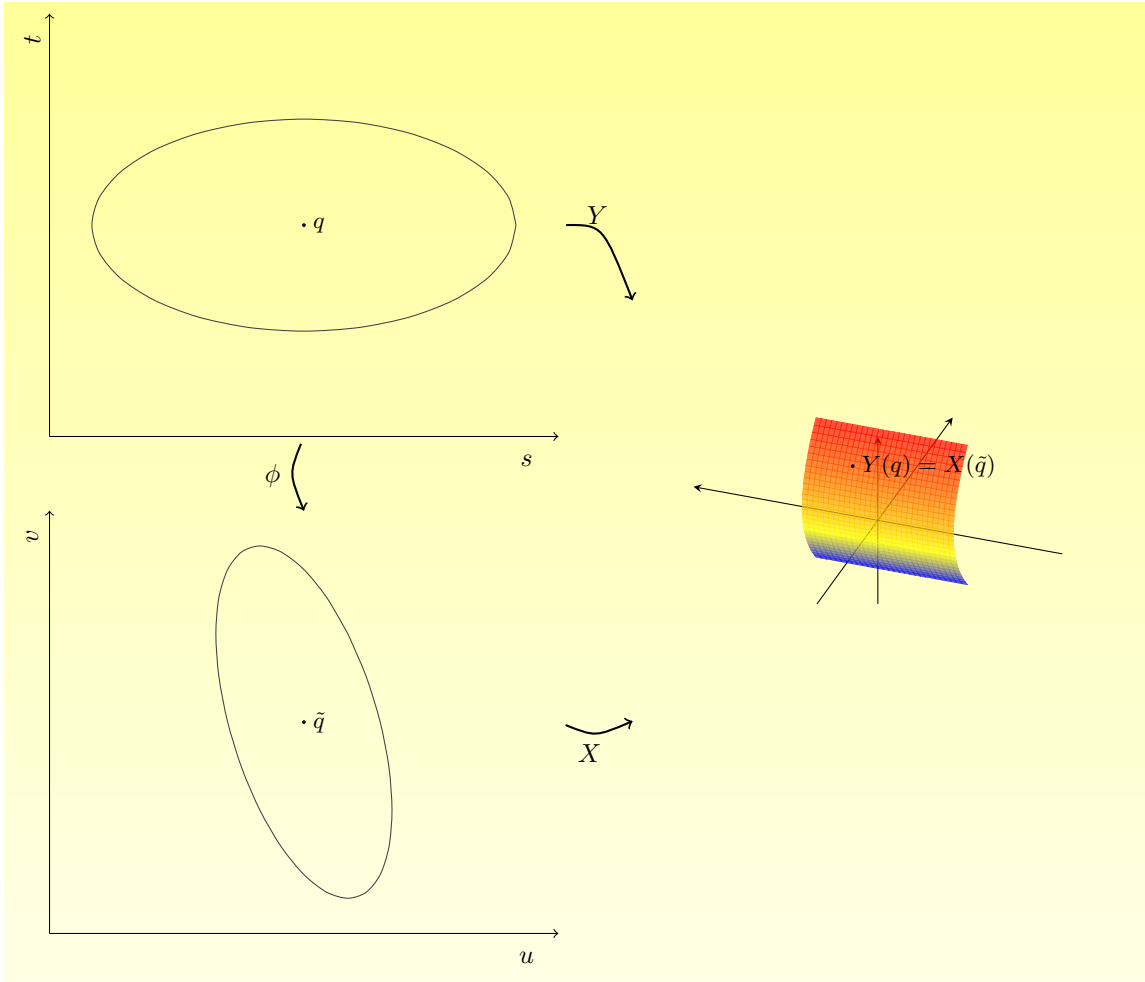
Ορισμός 2.2.14. Η παραμετρική επιφάνεια $\mathcal{Y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ θα λέγεται αναπαραμέτρηση της $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi : V \rightarrow U$, 1-1, επί, C^∞ και $\eta \varphi^{-1} \in C^\infty$ έτσι ώστε

$$\mathcal{Y}(s, t) = \mathcal{X}(\varphi(s, t)) \quad \forall (s, t) \in V$$

δηλαδή

$$\mathcal{Y}(s, t) = \mathcal{X}(u(s, t), v(s, t))$$

Η φ λέγεται αμφιδιαφόριση.



Σχήμα 2.18: Αναπαράμετρηση της \mathcal{X}

Αναπαράμετρήσεις

Έστω $\mathcal{Y}(s, t) = \mathcal{X}(\varphi(s, t)) = \mathcal{X}(u(s, t), v(s, t))$ μια αναπαράμετρηση της \mathcal{X} και έστω $q = (s_0, t_0)$, $\tilde{q} = \varphi(s_0, t_0) = (u_0, v_0)$ δύο σημεία. Τότε

$$\mathcal{Y}_s(q) = \mathcal{X}_u(\tilde{q}) \frac{\partial u}{\partial s}(q) + \mathcal{X}_v(\tilde{q}) \frac{\partial v}{\partial s}(q)$$

$$\mathcal{Y}_t(q) = \mathcal{X}_u(\tilde{q}) \frac{\partial u}{\partial t}(q) + \mathcal{X}_v(\tilde{q}) \frac{\partial v}{\partial t}(q)$$

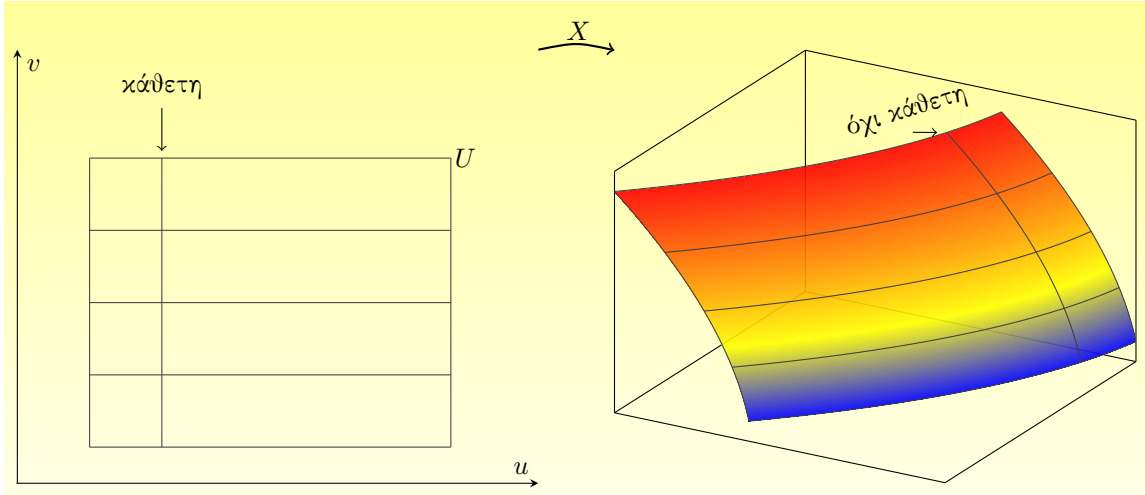
Επίσης

$$\mathcal{Y}_s \times \mathcal{Y}_t = (\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v) \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

όπου $\det J_{\varphi(q)} \neq 0$ γιατί φ αμφιδιαφόριση. Άρα $T_q \mathcal{Y} = T_{\tilde{q}} \mathcal{X}$, δηλαδή τα εφαπτόμενα επίπεδα ταυτίζονται αλλά για τα κάθετα ισχύει $N^{\mathcal{Y}}(q) = \pm N^{\mathcal{X}}(\tilde{q})$. Επίσης $\tilde{K} = \varphi(K)$ άρα

$$E(\mathcal{Y}(K)) = \iint_K |\mathcal{Y}_s \times \mathcal{Y}_t| ds dt = \iint_K |\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v| \varphi |\det J_{\varphi}| ds dt = \iint_{\tilde{K}} |\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v| dudv = E(\mathcal{X}(\tilde{K}))$$

Πρόταση 2.2.15. Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια. Τότε $\forall q \in U$ υπάρχει αναπαραμέτρηση $\mathcal{Y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ σε περιοχή του q με $F^{\mathcal{Y}} = 0$, όπου $F^{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_s \cdot \mathcal{Y}_s$.



Σχήμα 2.19

Απόδειξη : Έστω οι u -παραμετρικές καμπύλες $u \rightarrow \mathcal{X}(u, v_0)$. Η $\beta(s) = \mathcal{X}(u_0, s)$ δεν τις τέμνει αναγκαστικά κάθετα αφού ισχύει $F^{\mathcal{X}} \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε αναπαραμέτρηση \mathcal{Y} ώστε οι καμπύλες να είναι κάθετες, δηλαδή ζητάμε \mathcal{Y} έτσι ώστε $\left\{ \begin{array}{l} s = \lambda(u, v) \\ t = \mu(u, v) \end{array} \right\}$ δηλαδή $\left\{ \begin{array}{l} s = \sigma\tau\alpha\vartheta \\ t = \sigma\tau\alpha\vartheta \end{array} \right\}$. Θέλουμε λοιπόν $\lambda(u, v) = \sigma\tau\alpha\vartheta$ που μέσω της \mathcal{X} να είναι κάθετες στις $v = v_0$. Όμως το $\lambda(u, v)$ είναι η γενική λύση της $E(u, v)du + F(u, v)dv = 0$. Άρα η $\mathcal{X}(u, v) = (\lambda(u, v), v)$ αντιστρέφεται σε μια περιοχή του q και $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \lambda}{\partial u} & \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ 0 & 1 \end{array} \right| \neq 0$ γιατί $E \neq 0$. \square

Βήματα για ορθογώνια παραμέτρηση

- (i) Λύνουμε την $E(u, v)du + F(u, v)dv = 0$ και βρίσκουμε τη γενική λύση $\lambda(u, v) = c$.
- (ii) Λύνουμε το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(u, v) = s \\ v = t \end{array} \right\} = (u, v) = \varphi(s, t)$ και η $\mathcal{Y}(s, t) = \mathcal{X}(\varphi(s, t))$ είναι η ζητούμενη.

Παράδειγμα 2.2.16. Έστω $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, uv)$. Τότε

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, v), \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, u), \quad E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$(1 + v^2)du + uv dv = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{v dv}{1 + v^2} = 0 \Rightarrow \ln |u| + \frac{1}{2} \ln (1 + v^2) = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow$$

$$\ln |u| + \ln (1 + v^2)^{1/2} = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow \ln (u\sqrt{1 + v^2}) = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

Άρα $\lambda(u, v) = u\sqrt{1 + v^2} = \sigma\tau\alpha\vartheta$. Έστω περιοχή $(u, v) = (1, 1)$ τυχαία. Τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} u\sqrt{1 + v^2} = s \\ v = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{s}{\sqrt{1 + t^2}} \\ v = t \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(s, t) = \left(\frac{s}{\sqrt{1 + t^2}}, t \right)$$

και η αναπαράμετρηση είναι

$$\mathcal{Y}(s, t) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+t^2}}, t, \frac{st}{\sqrt{1+t^2}} \right)$$

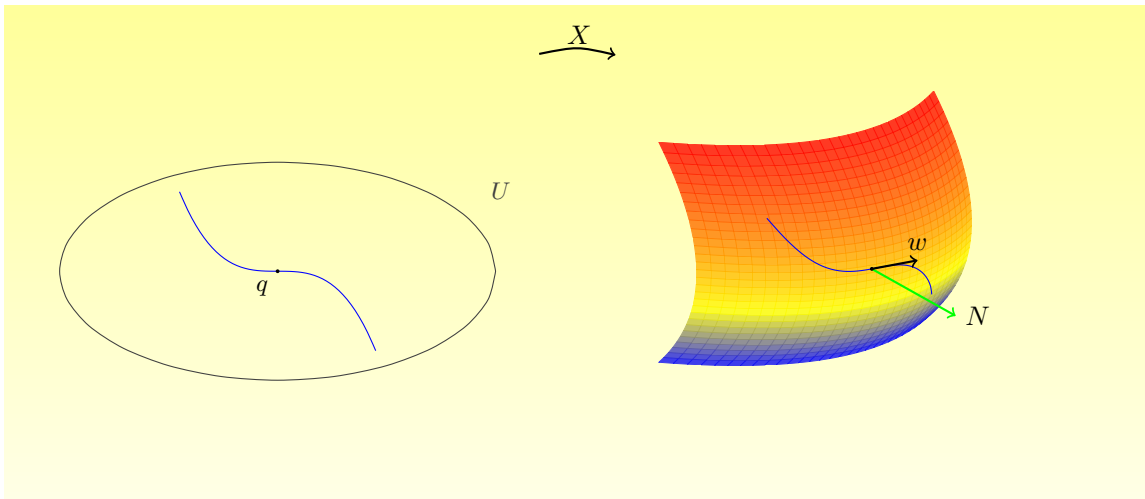
Πρόταση 2.2.17. Δεν υπάρχει παραμετρική επιφάνεια της $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $|\mathcal{X}'| = 1$, $|\mathcal{X}'_u| = |\mathcal{X}'_v| = 1$, $\mathcal{X}'_u \mathcal{X}'_v = 0$.

2.3 Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή

Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια. Τότε

$$N(u, v) = \frac{\mathcal{X}'_u \times \mathcal{X}'_v}{|\mathcal{X}'_u \times \mathcal{X}'_v|}(u, v), \quad (u, v) \in U$$

όπου $N : U \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.



Σχήμα 2.20

Πρόταση 2.3.1. Αν $w = \lambda \mathcal{X}'_u(q) + \mu \mathcal{X}'_v(q) \in T_q \mathcal{X}$ τότε υπάρχει καμπύλη $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ με $(u(0), v(0)) = q$ και $\alpha'(0) = w$.

Απόδειξη : Έστω $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ και παραγωγίζοντας έχω

$$\alpha'(0) = \mathcal{X}'_u(q)u'(0) + \mathcal{X}'_v(q)v'(0)$$

με $q = (u(0), v(0))$. Θέλουμε $u'(0) = \lambda$ και $v'(0) = \mu$, άρα διαλέγουμε τυχαία μια

$$\alpha(t) = \mathcal{X}(q + (\lambda, \mu)t) = \mathcal{X}(q + \lambda t, q + \mu t)$$

Έστω τώρα το

$$b = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(u(t), v(t)) = N_u(u(0), v(0))u'(0) + N_v(u(0), v(0))v'(0) = \lambda N_u(q) + \mu N_v(q)$$

Αυτό εξαρτάται μόνο από την καμπύλη που έχω πάνω στην επιφάνεια. \square

Παρατήρηση 2.3.2. Το $b \in T_q\mathcal{X}$. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι $b \cdot N(q) = 0$. Από ορισμό του N έχω $N \cdot \mathcal{X}_u = N \cdot \mathcal{X}_v = 0$ άρα ξέρω

$$N \cdot N = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}(N \cdot N) = \frac{\partial}{\partial v}(N \cdot N) = 0 \Rightarrow N \cdot N_u = N \cdot N_v = 0$$

Ορισμός 2.3.3. Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια. Η απεικόνιση $N : U \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ με

$$N(u, v) = \frac{\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v}{|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v|}$$

ονομάζεται απεικόνιση Gauss της \mathcal{X} . Αν $q \in U$, η γραμμική απεικόνιση $S_q : T_q\mathcal{X} \rightarrow T_q\mathcal{X}$ με

$$S_q(\lambda\mathcal{X}_u(q) + \mu\mathcal{X}_v(q)) = -\lambda N_u(q) - \mu N_v(q)$$

δηλαδή το $-(DN)_q$, ονομάζεται τελεστής σχήματος της \mathcal{X} στο q .

Σύνδεση με καμπύλες

Έστω $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ καμπύλη με $\alpha(0) = q$ και $\alpha'(0) = w = \lambda\mathcal{X}_u(q) + \mu\mathcal{X}_v(q)$. Υποθέτω ότι η α είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Η επιτάχυνση είναι $\alpha''(0)$ και μας δείχνει την τάση της α να βγει από την επιφάνεια, η οποία είναι ίση με $\alpha''(0)N(q)$. Αλλά $\alpha'(t) \cdot N(u(t), v(t)) = 0$. Παραγωγίζω και έχω

$$\alpha''(0)N(q) + \alpha'(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} N(u(t), v(t)) = 0 \Rightarrow \alpha''(0)N(q) = w \cdot S_q(w)$$

Θεώρημα 2.3.4. Η κάθετη συνιστώσα στο $T_q\mathcal{X}$ της επιτάχυνσης οποιασδήποτε καμπύλης α της \mathcal{X} με $\alpha(0) = q$ και $\alpha'(0) = w$ είναι πάντα ίδια και ίση με $S_q(w) \cdot w$, όπου $|w| = 1$. Αυτή λέγεται κάθετη καμπυλότητα της α ως προς τη \mathcal{X} και συμβολίζεται με $k_n(w)$. Η τετραγωνική μορφή

$$II_q(w) = \langle S_q(w), w \rangle = S_q(w) \cdot w$$

ονομάζεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της \mathcal{X} στο q . Δηλαδή έχουμε $II_q : T_q\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} S_q(w) \cdot w &= (\lambda N_u(q) + \mu N_v(q)) \cdot (\lambda\mathcal{X}_u(q) + \mu\mathcal{X}_v(q)) = \\ &= \lambda^2 N_u(q) \mathcal{X}_u(q) + \lambda\mu (N_u(q) \mathcal{X}_v(q) + N_v(q) \mathcal{X}_u(q)) + \mu^2 N_v(q) \mathcal{X}_v(q) \end{aligned}$$

Έχει δηλαδή τη μορφή $f(\lambda, \mu) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda\mu + \gamma\mu^2$, που είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού δύο μεταβλητών (τετραγωνική μορφή).

Υπενθύμιση-Τετραγωνική μορφή

Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης 2 και $A : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Στον V έχω το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Τότε η απεικόνιση $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ ονομάζεται τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στην A .

Έστω e_1, e_2 ορθοκανονική βάση και

$$A(e_1) = \alpha e_1 + \gamma e_2 \quad A(e_2) = \beta e_1 + \delta e_2$$

άρα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Τότε

$$Q(\lambda e_1 + \mu e_2) = (\lambda e_1 + \mu e_2) [(\lambda\alpha + \mu\beta)e_1 + (\lambda\gamma + \mu\delta)e_2] = \alpha\lambda^2 + (\beta + \gamma)\lambda\mu + \delta\mu^2$$

Η Q καθορίζει τον πίνακα της απεικόνισης A ; Η απάντηση είναι όχι. Ο A καθορίζεται αν επιπλέον απαιτήσουμε $\beta = \gamma$, δηλαδή $A^t = A$. Έτσι, A συμμετρικός $\Leftrightarrow \langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle \quad \forall v, w$. Για τις ιδιοτιμές του A έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \beta & \gamma - x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

$\Delta = (\alpha + \gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)$, άρα έχει πραγματικές λύσεις λ_1, λ_2 .

(i) Αν $\lambda_1 < \lambda_2$ έχουμε $\left. \begin{array}{l} Aw_1 = \lambda_1 w_1 \\ Aw_2 = \lambda_2 w_2 \end{array} \right\}$ και

$$\langle Aw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Aw_2 \rangle \Rightarrow \lambda_1 \langle w_1, w_2 \rangle = \lambda_2 \langle w_1, w_2 \rangle$$

Άρα $\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \Rightarrow w_1 \perp w_2$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι w_1, w_2 είναι ορθοκανονική βάση.

(ii) Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ τότε όλα τα $v \neq 0$ είναι ιδιοδιανύσματα.

Τώρα, κάποιες ιδιότητες της τετραγωνικής μορφής είναι οι εξής

(i) Αν $A : V \rightarrow V$ γραμμική με $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in V$ τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του V αποτελούμενη από τα ιδιοδιανύσματα του A . Τότε ισχύει

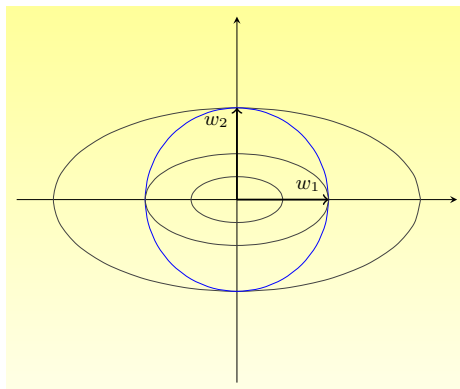
$$Q(xw_1 + yw_2) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

Αν $w = xw_1 + yw_2$ τότε $|w|^2 = x^2 + y^2$, άρα $\lambda_1 |w|^2 \leq Q(w) \leq \lambda_2 |w|^2$. Ειδικότερα, αν $|w| = 1$ τότε $\lambda_1 \leq Q(w) \leq \lambda_2$.

(ii) Όταν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ τότε οι λ_1 και λ_2 είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης Q περιορισμένης στα $w \in V$ με $|w| = 1$. Η Q παριστάνει ελλείψεις. Έχουμε

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = c$$

Πρώτη φορά που ακουμπούν τον κύκλο οι ελλείψεις είναι η ελάχιστη τιμή $(w_1, -w_1)$ και η μέγιστη τιμή είναι στα $(w_2, -w_2)$ και τα διανύσματα στα οποία λαμβάνονται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι στα κάθετα $\pm w_1, \pm w_2$. Αν τα λ_1 και λ_2 είναι αρνητικά έχω υπερβολές.



Σχήμα 2.21

Παρατήρηση 2.3.5. Ο πίνακας S_q είναι συμμετρικός. Πράγματι, έχουμε τον $S_q : T_q\mathcal{X} \rightarrow T_q\mathcal{X}$ με

$$S_q(\lambda\mathcal{X}_u(q) + \mu\mathcal{X}_v(q)) = -\lambda N_u(q) - \mu N_v(q)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $S_q(v) \cdot w = v \cdot S_q(w)$. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

$$S_q(\mathcal{X}_u(q)) \cdot \mathcal{X}_v(q) = \mathcal{X}_u(q) \cdot S_q(\mathcal{X}_v(q))$$

δηλαδή

$$-N_u(q) \cdot \mathcal{X}_v(q) = -N_v(q) \cdot \mathcal{X}_u(q)$$

Έχουμε $(N \cdot \mathcal{X}_v)_u = 0$, δηλαδή $N_u\mathcal{X}_v + N\mathcal{X}_{vu} = 0$. Ομοίως $N_v\mathcal{X}_u + N\mathcal{X}_{uv} = 0$. Άρα $N_u \cdot \mathcal{X}_v = N_v \cdot \mathcal{X}_u$ που ισχύει.

Ορισμός 2.3.6. Οι ιδιοτιμές $\kappa_1(q) \leq \kappa_2(q)$ του S_q ονομάζονται κύριες καμπυλότητες της \mathcal{X} στο q και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $w_1, w_2 \in T_q\mathcal{X}$ ονομάζονται κύριες διευθύνσεις της \mathcal{X} στο q . Το

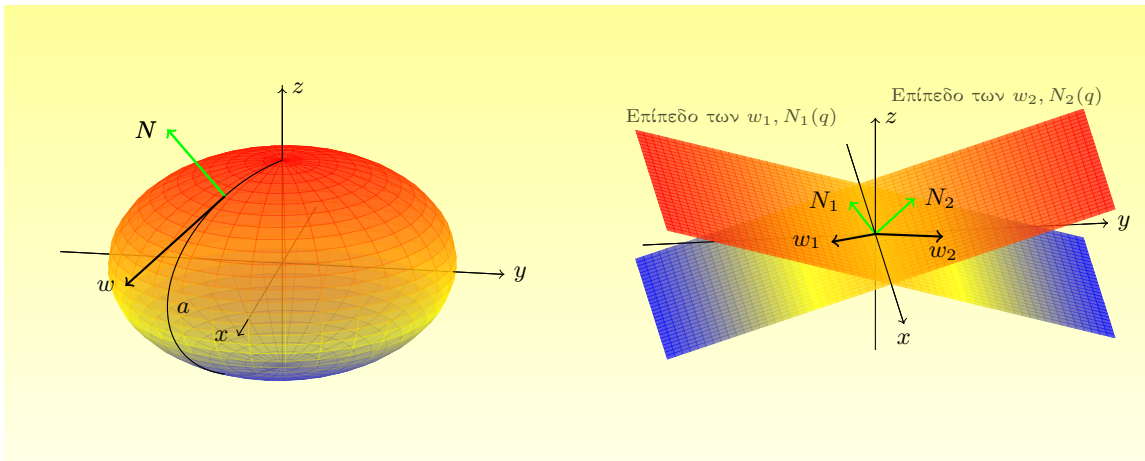
$$K(q) = \kappa_1(q) \cdot \kappa_2(q)$$

ονομάζεται καμπυλότητα Gauss και το

$$H(q) = \frac{1}{2} (\kappa_1(q) + \kappa_2(q))$$

κύρια καμπυλότητα.

Επεξηγήσεις στη δεύτερη θεμελιώδη μορφή



Σχήμα 2.22

Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια και $q \in U$. Τότε

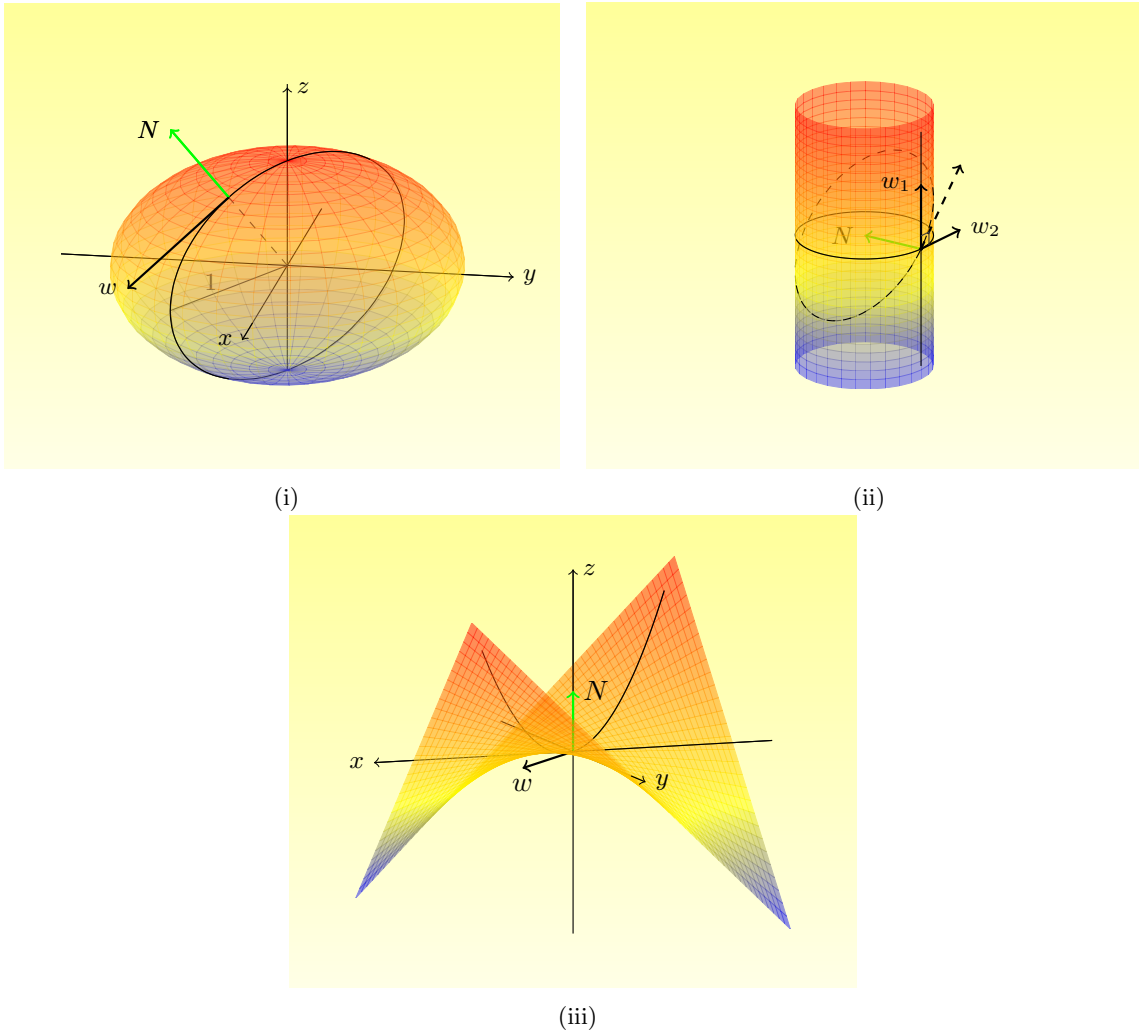
$$S_q(\lambda\mathcal{X}_u(q) + \mu\mathcal{X}_v(q)) = -\lambda N_u(q) - \mu N_v(q)$$

$$S_q(v) \cdot w = v \cdot S_q(w)$$

με $S_q : T_q\mathcal{X} \rightarrow T_q\mathcal{X}$. Επίσης $II_q(w) = S_q(w) \cdot w = \kappa_n(w) = \pm \eta$ καμπυλότητα της κάθετης τομής κατά το w . Επίσης $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ όπου $q = (u(0), v(0))$, $\alpha'(0) = w$ και $\kappa_n(w) = \alpha''(0)N(q)$. Αν α είναι η τομή της $\mathcal{X}(U)$ με το επίπεδο ώστε το $\mathcal{X}(q)$ να είναι παράλληλο στα $N(q)$ και w (κάθετη

τομή για το w) τότε $\kappa_n(w) = \pm 1$ καμπυλότητα στο 0. Έστω τώρα το S_q και ορθοκανονική βάση με κύριες διευθύνσεις w_1, w_2 και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\kappa_1(q) \leq \kappa_2(q)$ (κύριες καμπυλότητες). Τότε οι ιδιοτιμές αυτές είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $II_q(w)$ για $|w| = 1, w \in T_q\mathcal{X}$ και αν $w = w_1 \cos \vartheta + w_2 \sin \vartheta$ τότε

$$\kappa_n(w) = II_q(w_1 \cos \vartheta + w_2 \sin \vartheta) = \kappa_1(q) \cos^2 \vartheta + \kappa_2(q) \sin^2 \vartheta$$



Σχήμα 2.23

Παραδείγματα 2.3.7. (i) Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της σφαίρας με N προς τα έξω και $q \in U$ και έστω $w \in T_q\mathcal{X}$ μοναδιαίο. Τότε η κάθετη τομή κατά το w είναι ο μέγιστος κύκλος. Έχω

$$\kappa_n(w) = -1 \quad \forall w \in T_q\mathcal{X}, |w| = 1$$

$$\kappa_1(q) = \kappa_2(q) = -1$$

$$S_q = -id_{T_q\mathcal{X}}, \quad K(q) = 1, \quad H(q) = -1$$

- (ii) Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ κύλινδρος ακτίνας 1 με N προς τα μέσα. Έχουμε $\kappa_n(w_2) = 1$ (κύκλος), $\kappa_n(w) > 0$ (ελλείψεις), $\kappa_n(w_1) = 0$ (ευθεία που όταν $w = w_1$ η ευθεία ονομάζεται γενέτειρα), ελάχιστη τιμή $\kappa_1(q) = 0$ στο w_1 και μέγιστη τιμή $\kappa_2(q) = 1$ (φτιάχνεται στην κάθετη στο w_1) στο w_2 . Άρα $S_q(w_1) = 0$ και $S_q(w_2) = 1$. Έτσι $\kappa_n(w) = \kappa_n(w_1 \cos \vartheta + w_2 \sin \vartheta) = \sin^2 \vartheta$, $K(q) = 0 \cdot 1 = 0$ και $H(q) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$.
- (iii) Έστω η επιφάνεια $z = xy$ με $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, uv)$, $q = (0, 0)$ και $N(q) = e_3$. Αν βρισκόμαστε στο xy -επίπεδο τότε $\alpha x + \beta y = 0$ και έχω $x = \lambda y$, άρα $z = \lambda y^2$. Έτσι η τομή επιπέδου και επιφάνειας είναι παραβολή. Για $\lambda > 0$ είναι $\kappa_n(w) > 0$, ενώ για $\lambda < 0$ είναι $\kappa_n(w) < 0$. Άρα κ_1, κ_2 ετερόσημες, η ελάχιστη είναι αρνητική, η μέγιστη είναι θετική και $\kappa_n(e_1) = \kappa_n(e_2) = 0$. Αν ξέρουμε w_1, w_2 και $\vartheta = (e_1 \hat{w}_1)$ τότε $0 = \kappa_n(e_1) = \kappa_1(q) \cos^2 \vartheta + \kappa_2(q) \sin^2 \vartheta$ και $0 = \kappa_n(e_2) = \kappa_1(q) \sin^2 \vartheta + \kappa_2(q) \cos^2 \vartheta$. Άρα $\kappa_1(q) = -\kappa_2(q)$ και $\vartheta = 45^\circ$. Άρα τα w_1, w_2 είναι τα $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ και $K(q) < 0, H(q) = 0$.

Υπολογισμοί

$$\begin{aligned} S_q(\mathcal{X}_u(q)) \cdot \mathcal{X}_v(q) &= S_q(\mathcal{X}_v(q)) \cdot \mathcal{X}_u(q) = \mathcal{X}_{uv}(q) \cdot N = -[(N\mathcal{X}_v)_u - N\mathcal{X}_{uv}](q) = f \\ S_q(\mathcal{X}_u(q)) \cdot \mathcal{X}_u(q) &= -N_u(q) \cdot \mathcal{X}_u(q) = -[(N\mathcal{X}_u)_u - N\mathcal{X}_{uu}](q) = N \cdot \mathcal{X}_{uu}(q) = e \\ S_q(\mathcal{X}_v(q)) \cdot \mathcal{X}_v(q) &= -N_v(q) \cdot \mathcal{X}_v(q) = -[(N\mathcal{X}_v)_v - N\mathcal{X}_{vv}](q) = N \cdot \mathcal{X}_{vv}(q) = g \end{aligned}$$

Ορισμός 2.3.8. Οι συναρτήσεις $\left\{ \begin{array}{l} e = N \cdot \mathcal{X}_{uu} \\ f = N \cdot \mathcal{X}_{uv} \\ g = N \cdot \mathcal{X}_{vv} \end{array} \right\}$ ονομάζονται συνιστώσες δεύτερης θεμελιώδους μορφής της \mathcal{X} . Αν $w = \lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)$ τότε

$$\begin{aligned} II_q(w) &= S_q(\lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)) \cdot (\lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)) = \\ &[\lambda S_q(\mathcal{X}_u(q)) + \mu S_q(\mathcal{X}_v(q))] \cdot (\lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)) = \\ &e(q)\lambda^2 + 2f(q)\lambda\mu + g(q)\mu^2 \end{aligned}$$

Υπολογισμοί-συνέχεια

$$\begin{aligned} S_q(\lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)) \cdot (\lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)) &= e(q)\lambda^2 + 2f(q)\lambda\mu + g(q)\mu^2 \\ e &= N \cdot \mathcal{X}_{uu}, \quad f = N \cdot \mathcal{X}_{uv}, \quad g = N \cdot \mathcal{X}_{vv} \\ E &= \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u, \quad F = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v, \quad G = \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_v \end{aligned}$$

Πώς βρίσκουμε πίνακα του S_q ως προς τη $(\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q))$; Έχουμε τις εξισώσεις Weingowten

$$\left. \begin{array}{l} S_q(\mathcal{X}_u(q)) = \alpha_{11}\mathcal{X}_u(q) + \alpha_{12}\mathcal{X}_v(q) \\ S_q(\mathcal{X}_v(q)) = \alpha_{21}\mathcal{X}_u(q) + \alpha_{22}\mathcal{X}_v(q) \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα } \left\{ \begin{array}{l} e = S_q(\mathcal{X}_u) \cdot \mathcal{X}_u = \alpha_{11}E + \alpha_{21}F \\ f = S_q(\mathcal{X}_u) \cdot \mathcal{X}_v = \alpha_{11}F + \alpha_{21}G \\ f = S_q(\mathcal{X}_v) \cdot \mathcal{X}_u = \alpha_{12}E + \alpha_{22}F \\ g = S_q(\mathcal{X}_v) \cdot \mathcal{X}_v = \alpha_{12}F + \alpha_{22}G \end{array} \right\} \text{ δηλαδή}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\alpha_{11} = \frac{Ge - Ff}{EG - F^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{Gf - Fg}{EG - F^2}, \quad \alpha_{21} = \frac{-Fe + Ef}{EG - F^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{-Ff + Eg}{EG - F^2}$$

Οι κ_1 και κ_2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, άρα

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S_q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

Τα κ_1 και κ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 2Hx + K = 0$, δηλαδή $\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$. Τώρα, για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα w_1 και w_2 του S_q έχουμε τα εξής: έστω κ ιδιοτιμή του S_q . Αν $w = \lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)$ ιδιοδιανύσματα της κ τότε

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} e\lambda + f\mu = \kappa(E\lambda + F\mu) \\ f\lambda + g\mu = \kappa(F\lambda + G\mu) \end{array} \right\} \Rightarrow (e\lambda + f\mu)(F\lambda + G\mu) = (f\lambda + g\mu)(E\lambda + F\mu) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 2.3.9. Έστω $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, uv + 2u^2 + v^2)$ και $q = (1, 1)$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, v + 4u), \quad \mathcal{X}_u(q) = (1, 0, 5)$$

$$\mathcal{X}_v = (0, 1, u + 2v), \quad \mathcal{X}_v(q) = (0, 1, 3)$$

$$\mathcal{X}_{uu} = (0, 0, 4), \quad \mathcal{X}_{uv} = (0, 0, 1), \quad \mathcal{X}_{vv} = (0, 0, 2)$$

$$\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = e_1 \cdot (-5) - e_2 \cdot 3 + e_3 \cdot 1 = (-5, -3, 1)$$

$$N = \frac{\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v}{|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v|} = \frac{(-5, -3, 1)}{\sqrt{35}}$$

$$E = 26, \quad F = 15, \quad G = 10, \quad e = \frac{4}{\sqrt{35}}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{35}}$$

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{175}, \quad H(q) = \frac{eG - 2Ff + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{31}{35\sqrt{35}}$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{31}{35\sqrt{35}} \pm \sqrt{\frac{31^2}{35^3} - \frac{1}{175}}$$

Για τα κύρια ιδιοδιανύσματα έχω

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ 26 & 15 & 10 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 \cdot 20 + \lambda\mu \cdot 12 + \lambda^2 \cdot (-34) = 0 \Rightarrow$$

$$10\mu^2 + 6\lambda\mu - 17\lambda^2 = 0 \Rightarrow 10\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + 6\frac{\mu}{\lambda} - 17 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{-3 \pm \sqrt{179}}{10}$$

Για $\lambda = 1$ και $\mu = \frac{-3 + \sqrt{179}}{10}$ έχω

$$w_1 = \mathcal{X}_u + \frac{-3 + \sqrt{179}}{10} \mathcal{X}_v = (1, 0, 5) + \frac{-3 + \sqrt{179}}{10} (0, 1, 3)$$

και αντίστοιχα, για $\lambda = 1$ και $\mu = \frac{-3 - \sqrt{179}}{10}$ έχω

$$w_2 = \mathcal{X}_u + \frac{-3 - \sqrt{179}}{10} \mathcal{X}_v = (1, 0, 5) + \frac{-3 - \sqrt{179}}{10} (0, 1, 3)$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\frac{w_1}{|w_1|}, \frac{w_2}{|w_2|}$.

Παράδειγμα 2.3.10. Έστω $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, uv)$. Να βρεθεί καμπύλη $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ που για κάθε t , το $\alpha'(t)$ να είναι κύριο ιδιοδιάνυσμα του $S_{u(t), v(t)}$.

Έχουμε

$$\alpha'(t) = \mathcal{X}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathcal{X}_v(u(t), v(t))v'(t)$$

Τότε

$$\begin{vmatrix} v'(t)^2 & -u(t)v(t) & u'(t)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Επίσης

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, v); \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, u), \quad \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v = (-v, -u, 1),$$

$$\mathcal{X}_{uv} = (0, 0, 1), \quad \mathcal{X}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathcal{X}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2, \quad e = g = 0, \quad f = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

Άρα

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 + v^2 & uv & 1 + u^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1 + u^2)dv^2 + (1 + v^2)du^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + v^2)du^2 = (1 + u^2)dv^2 \Rightarrow \frac{du^2}{1 + u^2} = \frac{dv^2}{1 + v^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} \Rightarrow$$

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = c \pm \ln(v + \sqrt{1 + v^2})$$

Άρα βρήκαμε δύο κατηγορίες καμπυλών

$$\frac{u + \sqrt{1 + u^2}}{v + \sqrt{1 + v^2}} = c' = e^c, \quad (u + \sqrt{1 + u^2})(v + \sqrt{1 + v^2}) = c' = e^c$$

Παρατήρηση 2.3.11. Αν $F = f = 0$ τότε

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (Eg - Ge) dudv = 0 \Rightarrow Eg - Ge \Leftrightarrow S_q = \lambda_{id}$$

παντού ή οι κύριες καμπύλες είναι $u = \text{σταθ}$ ή $v = \text{σταθ}$. Θα προκύψουν τελικά $\kappa_1 = \frac{e}{E}$ και $\kappa_2 = \frac{g}{G}$.

Ορισμός 2.3.12. Το $q \in U$ θα λέγεται ομφαλικό αν $\kappa_1(q) = \kappa_2(q)$, δηλαδή $S_q = \kappa id_{T_q \mathcal{X}}$.

Πρόταση 2.3.13. Αν το q δεν είναι ομφαλικό, τότε τα $\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v$ είναι κύρια $\Leftrightarrow F(q) = f(q) = 0$.

Απόδειξη : Έστω $w = \lambda \mathcal{X}_u(q) + \mu \mathcal{X}_v(q)$ κύριο $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$

(\Leftrightarrow) Αν $F = f = 0$ τότε $\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0$ και έχει τα $(\lambda = 1, \mu = 0), (\lambda = 0, \mu = 1)$ λύσεις, άρα

τα $\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q)$ είναι κύρια.

(\Rightarrow) Έστω $\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q)$ κύρια, τότε επαληθεύουν την ορίζουσα για $(1, 0), (0, 1)$, δηλαδή στο q έχω $\begin{cases} Ef = Fe \\ Gf = Fg \end{cases}$. Αν $F \neq 0$ τότε $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$, δηλαδή όλα τα (λ, μ) επαληθεύουν την εξίσωση, άρα όλα τα $w \in T_q \mathcal{X}$ είναι ιδιοδιανύσματα $\Rightarrow q$ ομφαλικό. Άστοπο, άρα $F = f = 0$. \square

Πρόταση 2.3.14. Η $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου U συνεκτικό, έχει όλα τα σημεία ομφαλικά \Leftrightarrow το U περιέχεται σε επίπεδο ή σε σφαίρα.

Απόδειξη : Έχουμε ότι

$$N_u(q) = -S_q(\mathcal{X}_u(q)) = -\kappa(q)\mathcal{X}_u(q)$$

$$N_v(q) = -S_q(\mathcal{X}_v(q)) = -\kappa(q)\mathcal{X}_v(q)$$

Δηλαδή, $\left. \begin{matrix} N_u = -\kappa \mathcal{X}_u & (1) \\ N_v = -\kappa \mathcal{X}_v & (2) \end{matrix} \right\}$ στο U , κ παραγωγίσιμη. Παραγωγίζω την (1) ως προς v και τη (2) ως προς u και έχω

$$\left. \begin{matrix} N_{uv} = -\kappa_v \mathcal{X}_u - \kappa \mathcal{X}_{uv} \\ N_{vu} = -\kappa_u \mathcal{X}_v - \kappa \mathcal{X}_{vu} \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\kappa_v \mathcal{X}_u = -\kappa_u \mathcal{X}_v \Rightarrow \kappa_u = \kappa_v = 0 \Rightarrow \kappa = \text{σταθ}$$

στο U . Άρα αφού $\kappa = \text{σταθ}$, από τις (1) και (2) έχουμε

$$(N + \kappa \mathcal{X})_u = (N + \kappa \mathcal{X})_v = 0 \Rightarrow N + \kappa \mathcal{X} = \alpha$$

σταθερό στο U .

Περίπτωση 1 : Αν $\kappa \neq 0$ τότε $1 = |N| = |\alpha - \kappa \mathcal{X}|$, δηλαδή $|\mathcal{X} - \frac{\alpha}{\kappa}| = \frac{1}{|\kappa|}$, άρα το $\mathcal{X}(U)$ βρίσκεται στη σφαίρα κέντρου $\frac{\alpha}{\kappa}$ και ακτίνας $\frac{1}{|\kappa|}$.

Περίπτωση 2 : Αν $\kappa = 0$ δηλαδή $N = \alpha \neq 0$ σταθερό. Τότε

$$\left. \begin{matrix} \alpha \cdot \mathcal{X}_u = N \mathcal{X}_u = 0 \\ \alpha \cdot \mathcal{X}_v = N \mathcal{X}_v = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\alpha \mathcal{X})_u = (\alpha \mathcal{X})_v = 0 \Rightarrow \alpha \mathcal{X} = c = \text{σταθ}$$

Άρα η \mathcal{X} περιέχεται στο επίπεδο $\alpha x = c$. \square

Παρατήρηση 2.3.15. Το q είναι ομφαλικό $\Leftrightarrow \begin{cases} e(q) = \lambda E(q) \\ f(q) = \lambda F(q) \\ g(q) = \lambda G(q) \end{cases}$. Πράγματι, q ομφαλικό \Leftrightarrow

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \text{ στο } q \Leftrightarrow \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 2.3.16. Να βρεθούν τα ομφαλικά σημεία της $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, u^2 + 2v^2)$. Έχουμε $\mathcal{X}_u = (1, 0, 2u)$, $\mathcal{X}_v = (0, 1, 4v)$

$$\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 4v \end{vmatrix} = (-2u, -4v, 1)$$

$$|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v| = \sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2} = A(u, v)$$

Άρα $N = \frac{1}{A}(-2u, -4v, 1)$.

$$\mathcal{X}_{uu} = (0, 0, 2), \quad \mathcal{X}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \mathcal{X}_{vv} = (0, 0, 4)$$

$$e = \frac{2}{A}, \quad f = 0, \quad g = \frac{4}{A}, \quad E = 1 + 4u^2, \quad F = 8uv, \quad G = 1 + 16v^2$$

Άρα θέλουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(1 + 4u^2) = \frac{2}{A} \\ \kappa(8uv) = 0 \\ \kappa(1 + 16v^2) = \frac{4}{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4u^2 = \mu \\ 8uv = 0 \\ 1 + 16v^2 = 2\mu \end{array} \right\} \Rightarrow uv = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ή } v = 0$$

$$\text{Περίπτωση 1 (} u = 0 \text{)} : \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \\ 1 + 16v^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = 16 \Rightarrow v = \pm \frac{1}{4}.$$

$$\text{Περίπτωση 2 (} v = 0 \text{)} : \left\{ \begin{array}{l} 2\mu = 1 \\ 1 + 4u^2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{δεν έχει πραγματικές λύσεις. Άρα } q = (0, \frac{1}{4}) \text{ ή } q = (0, -\frac{1}{4}).$$

Γραφήματα

Έστω $z = h(x, y)$ με πεδίο ορισμού U με $\mathcal{X}(u, v) = (u, v, h(u, v))$. Άρα έχουμε

$$\mathcal{X}_u = (1, 0, h_u), \quad \mathcal{X}_v = (0, 1, h_v)$$

$$\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} = (-h_u, -h_v, 1)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} (-h_u, -h_v, 1)$$

$$\mathcal{X}_{uu} = (0, 0, h_{uu}), \quad \mathcal{X}_{vv} = (0, 0, h_{vv}), \quad \mathcal{X}_{uv} = (0, 0, h_{uv})$$

$$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2$$

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{uu}h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(1 + h_v^2)h_{uu} + (1 + h_u^2)h_{vv} - 2h_u h_v h_{uv}}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}$$

$\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ οι κύριες διευθύνσεις και το $\lambda \mathcal{X}_u + \mu \mathcal{X}_v = (\lambda, \mu, \lambda h_u + \mu h_v)$ το κύριο ιδιοδιάνυσμα. Βρίσκω τα λ, μ από $\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ 1 + h_u^2 & h_u h_v & 1 + h_v^2 \\ h_{uu} & h_{uv} & h_{vv} \end{vmatrix} = 0$ και τα οφθαλικά από τις σχέσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{uu} = \kappa(1 + h_u^2) \\ h_{uv} = \kappa(h_u h_v) \\ h_{vv} = \kappa(1 + h_v^2) \end{array} \right\}.$$

Επιφάνεια που μετά από στροφή και μεταφορά γίνεται γράφημα

Υποθέτω ότι $q = (0, 0)$, $T_q\mathcal{X}$ είναι το xy -επίπεδο, $\mathcal{X}_u(0) = e_1$, $\mathcal{X}_v(0) = e_2$ και τα $\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v$ είναι κύρια στο 0. Άρα $h_u(0) = h_v(0) = h_{uv}(0) = 0$. Έχουμε

$$E(0) = G(0) = 1, \quad F(0) = 0, \quad e = h_{uu}(0), \quad f(0) = 0, \quad g = h_{vv}(0)$$

$$\kappa_1 = e, \quad \kappa_2 = g$$

Τότε

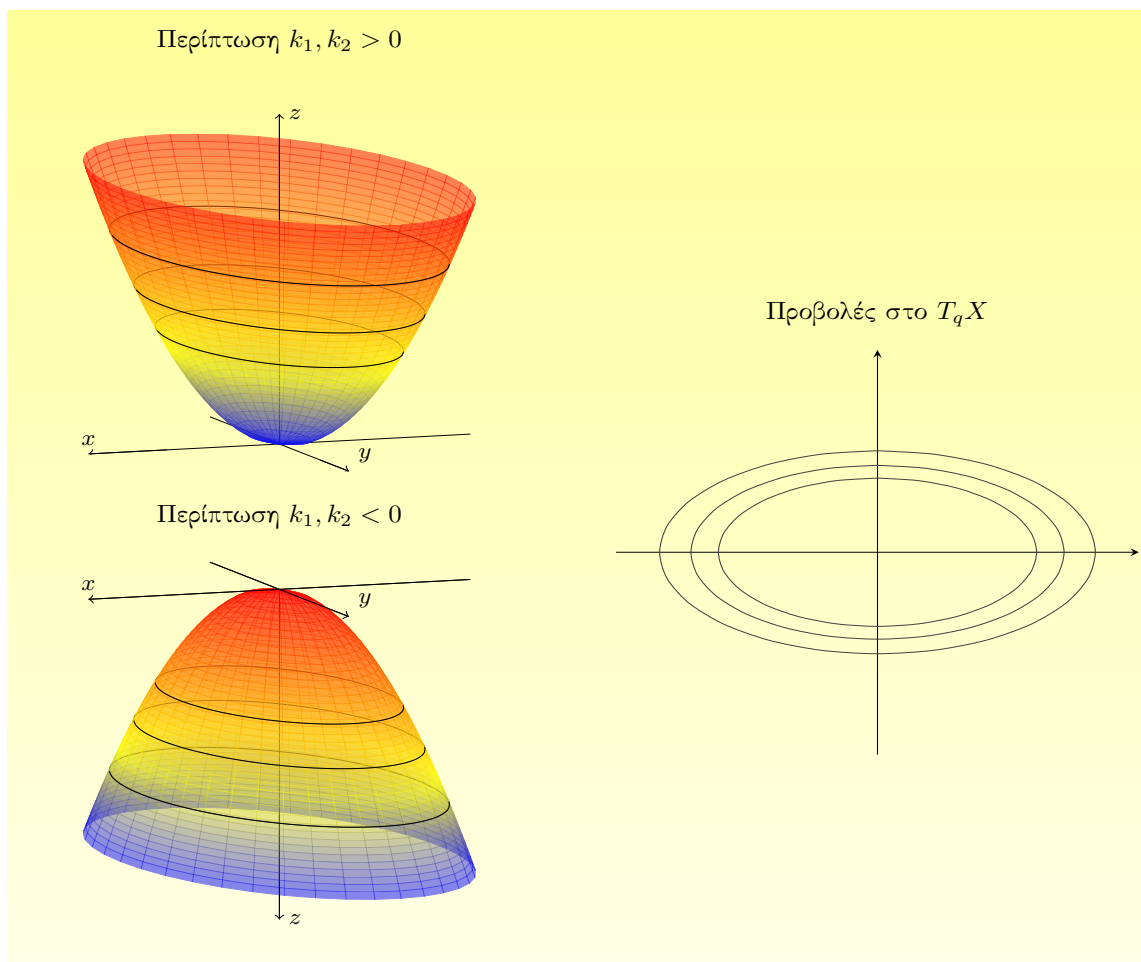
$$h(u, v) = h(0, 0) + h_u(0, 0)u + h_v(0, 0)v + \frac{1}{2} [h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2] + R(u, v)$$

$$h(u, v) = \frac{1}{2} (\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2) + R(u, v)$$

με $\frac{|R(u, v)|}{u^2 + v^2} \rightarrow 0$. Άρα $z = \frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2)$.

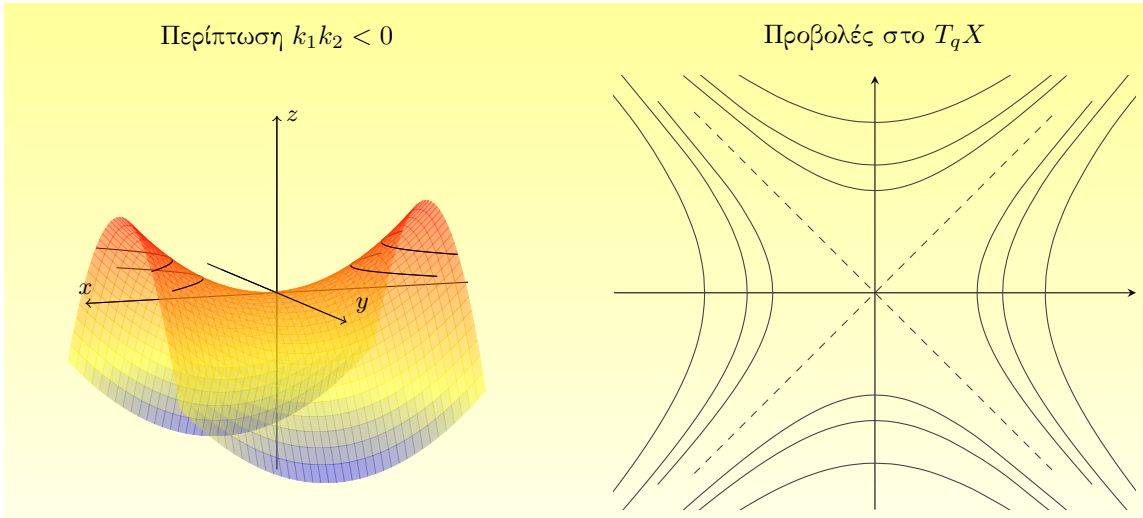
Περίπτωση 1 : $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο $T_q\mathcal{X}$ είναι το \emptyset , το $\{\mathcal{X}(q)\}$ και ελλείψεις.

Περίπτωση 2 : $\kappa_1, \kappa_2 < 0$ Ομοίως.



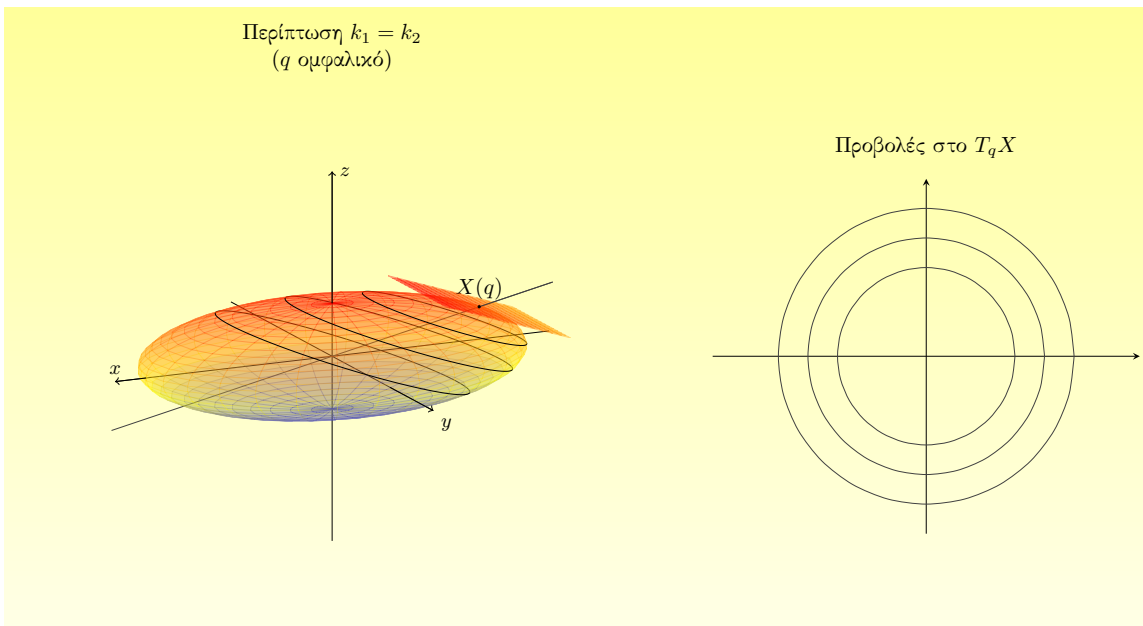
Σχήμα 2.24

Περίπτωση 3 : $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ Έχω $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = c$ και οι τομές κοντά στο σημείο που μας ενδιαφέρει είναι υπερβολές.



Σχήμα 2.25

Περίπτωση 4 : $\kappa_1 = \kappa_2$ Αν δηλαδή το q είναι ομφαλικό, οι τομές είναι προσεγγιστικά κύκλοι.



Σχήμα 2.26

Παράδειγμα 2.3.17. Έστω το ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $0 < a < b < c$. Να βρεθούν όλα τα επίπεδα που το τέμνουν κατά κύκλο.

Έχουμε ότι οι τομές είναι καμπύλες δευτέρου βαθμού και αν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση του

επιπέδου, το είδος δεν αλλάζει. Άρα το τυχαίο σημείο του χώρου γράφεται $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 \\ z = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 \end{array} \right\}$.

Θα αλλάξουν μόνο τα $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Το σημείο q πρέπει να είναι ομφαλικό. Άρα τα ζητούμενα επίπεδα είναι τα παράλληλα στα εφαπτόμενα στα ομφαλικά σημεία του ελλειψοειδούς.

Επιφάνειες εκ περιστροφής

Εστω $\mathcal{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, y(v))$. Τότε

$$\mathcal{X}_u = (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0), \quad \mathcal{X}_v = (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, y'(v))$$

$$E = \varphi(v)^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi'(v)^2 + y'(v)^2$$

$$\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v = (\varphi(v)y'(v) \cos u, \varphi(v)y'(v) \sin u, -\varphi(v)\varphi'(v))$$

$$|\mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v| = \varphi(v)\sqrt{\varphi'(v)^2 + y'(v)^2}$$

Αφού $\varphi(v) > 0$ έχω

$$N = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + y'(v)^2}} (y'(v) \cos u, y'(v) \sin u, -\varphi'(v))$$

$$\mathcal{X}_{uu} = (-\varphi(v) \cos u, -\varphi(v) \sin u, 0)$$

$$\mathcal{X}_{uv} = (-\varphi'(v) \sin u, \varphi'(v) \cos u, 0)$$

$$\mathcal{X}_{vv} = (\varphi''(v) \cos u, \varphi''(v) \sin u, y''(v))$$

$$e = \mathcal{X}_{uu} \cdot N = \frac{-\varphi(v)y'(v)}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + y'(v)^2}}, \quad f = \mathcal{X}_{uv} \cdot N = 0, \quad g = \frac{y'(v)\varphi''(v) - \varphi'(v)y''(v)}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + y'(v)^2}}$$

Επειδή $F = f = 0$, τα $\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v$ κύρια και οι κύριες καμπυλότητες είναι

$$\kappa_1 = \frac{e}{E} = \frac{y'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (y')^2}}, \quad \kappa_2 = \frac{g}{G} = \frac{y'\varphi'' - y''\varphi'}{((\varphi')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Αν (φ, y) είναι μοναδιαίας ταχύτητας, δηλαδή $(\varphi')^2 + (y')^2 = 1$, έχω

$$\kappa_1 = -\frac{y'}{\varphi}, \quad \kappa_2 = y'\varphi'' - y''\varphi'$$

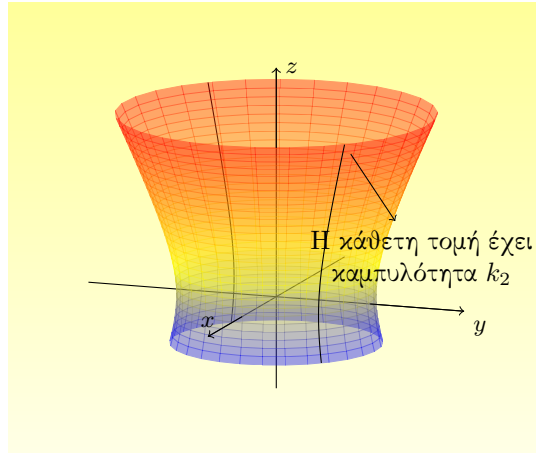
και η καμπυλότητα Gauss είναι

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{y'(y'\varphi'' - y''\varphi')}{\varphi}$$

Παραγωγίζοντας την $(\varphi')^2 + (y')^2 = 1$ έχω ότι $\varphi'\varphi'' + y'y'' = 0$, άρα

$$K = -\frac{(y')^2\varphi'' - y'y''\varphi'}{\varphi} = -\frac{(y')^2\varphi'' + \varphi'\varphi''\varphi'}{\varphi} = -\frac{\varphi''((y')^2 + (\varphi')^2)}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi} \Rightarrow$$

$$K = -\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)}$$



Σχήμα 2.27

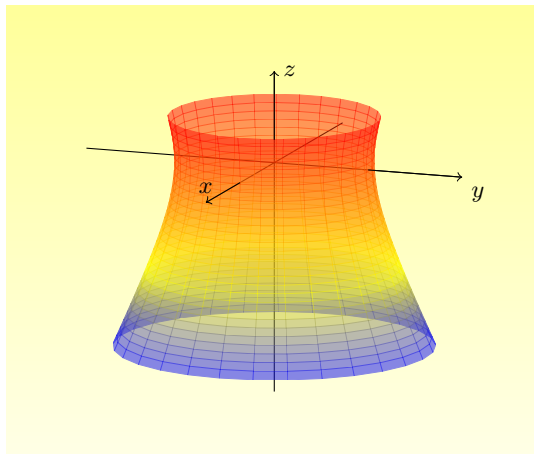
Επιφάνειες εκ περιστροφής με σταθερή K , $K = c$

Έχουμε $\varphi'' + c\varphi = 0$ και διακρίνουμε περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 : Αν $c = 0$ η γενική λύση είναι $\varphi(v) = \lambda v + \mu$ και $y'(v)^2 = 1 - \lambda^2$, άρα $|\lambda| \leq 1$ και $y(v) = \pm\sqrt{1 - \lambda^2}v + \gamma$ που είναι ευθεία και με οριζόντια περιστροφή έχω τμήμα επιπέδου, με κάθετη περιστροφή έχω τμήμα κυλίνδρου και με πλάγια περιστροφή έχω τμήμα κώνου.

Περίπτωση 2 : Αν $c > 0$ ή $c = 1$ η γενική λύση είναι $\varphi(v) = A \sin(v + \lambda)$, άρα $y'(v)^2 = 1 - A^2 \cos^2(v + \lambda)$ και για $A = \pm 1$ έχω $y(v) = \pm \cos(v + \lambda)$ που είναι ημικύκλιο και με περιστροφή είναι σφαίρα. Αν $A \neq 1$ έχω $\int \sqrt{1 - A^2 \cos^2(v + \lambda)} dv$.

Περίπτωση 3 : Αν $c = -1$ η γενική λύση είναι $y(v) = \alpha e^v + \beta e^{-v}$ και άρα προκύπτει $y(v) = \int \sqrt{1 - (\alpha e^v + \beta e^{-v})^2} dv$, που ονομάζεται ψευδόσφαιρα.



Σχήμα 2.28

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Gauss

Θεώρημα 3.0.18. Ισομετρικές επιφάνειες έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss και το K είναι συνάρτηση των E, F, G και των παραγώγων τους και όχι των e, f, g .

Παραδείγματα 3.0.19. (i) Υπάρχει $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $E = G = 1, F = 0, e = g = 1, f = 0$; Αν υπήρχε θα ήταν ισοπεριμετρική με το επίπεδο άρα $K_{\mathcal{X}} = K_{\varepsilon\pi} = 0$. Αλλά $K_{\mathcal{X}} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \equiv 1$. Άτοπο, άρα δεν υπάρχει.

(ii) Υπάρχει $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $E = \sin^2 v, G = 1, F = 0, e = g = 1, f = 0$; Αν υπήρχε θα ήταν ισοπεριμετρική με τη σφαίρα που έχει $K_{\sigma\varphi} = 1$ αλλά $K_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sin^2 v}$. Άτοπο.

Ορισμός 3.0.20. Τα Γ_{ij}^k ονομάζονται σύμβολα Christoffel της \mathcal{X} .

$$(i) \mathcal{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v + eN$$

$$(ii) \mathcal{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathcal{X}_v + fN$$

$$(iii) \mathcal{X}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathcal{X}_v + fN$$

$$(iv) \mathcal{X}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathcal{X}_v + gN$$

Υπολογισμός συμβόλων Christoffel

$$(i) \text{ Έχουμε το σύστημα των } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F + 0 \\ \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + 0 \end{array} \right\} \text{ αλλά}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_u = \left(\frac{1}{2} \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u\right)_u = \frac{1}{2} E_u \\ \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_v = (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)_u - \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_{vu} = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{array} \right\}$$

Άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{array} \right\}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε τα Γ_{11}^1 και Γ_{11}^2 .

(ii) Λύνουμε το σύστημα των

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{array} \right\}$$

(iii) Λύνουμε το σύστημα των

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{vv} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \mathcal{X}_{vv} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{array} \right\}$$

Πρόταση 3.0.21. Τα Γ_{ij}^k είναι συναρτήσεις της πρώτης θεμελιώδους μορφής και των παραγώγων τους.

Παράδειγμα 3.0.22. Έστω $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $E = 1 + u^2, F = uv, G = 1 + v^2$. Τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1(1 + u^2) + \Gamma_{11}^2 uv = \frac{1}{2} u \\ \Gamma_{11}^1 uv + \Gamma_{11}^2(1 + v^2) = v \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} u & uv \\ v & 1 + v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + u^2 & uv \\ uv & 1 + v^2 \end{vmatrix}} = \frac{u(1 + v^2) - uv^2}{(1 + u^2)(1 + v^2) - u^2v^2} = \frac{u}{1 + v^2 + u^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + u^2 & u \\ uv & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + u^2 & uv \\ uv & 1 + v^2 \end{vmatrix}} = \frac{v(1 + u^2) - u^2v}{(1 + u^2)(1 + v^2) - u^2v^2} = \frac{v}{1 + v^2 + u^2}$$

Θεώρημα 3.0.23 (Θεώρημα Gauss).

$$(\mathcal{X}_u)_u = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v + eN$$

$$(\mathcal{X}_u)_v = \Gamma_{12}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathcal{X}_v + fN$$

$$(\mathcal{X}_v)_u = \Gamma_{21}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathcal{X}_v + fN$$

$$(\mathcal{X}_v)_v = \Gamma_{22}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathcal{X}_v + gN$$

$$N_u = -\alpha_{11} \mathcal{X}_u - \alpha_{21} \mathcal{X}_v$$

$$N_v = -\alpha_{12} \mathcal{X}_u - \alpha_{22} \mathcal{X}_v$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται εξισώσεις κίνησης τριέδρου $\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v, N$.

Κεφάλαιο 4

Επανάληψη

Παράδειγμα 4.0.24. Έστω $\mathcal{X}(u, v) = (2 \cos v \cos u, 2 \sin u \cos v, 2 \sin v)$ με $u \in (-\pi, \pi)$ και $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $\mathcal{X}(T)$, όπου $T : (0, 0), (\frac{\pi}{4}, 0), (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
Έχουμε

$$\mathcal{X}_u = (-2 \cos v \sin u, 2 \cos v \cos u, 0)$$

$$\mathcal{X}_v = (-2 \cos u \sin v, -2 \sin u \sin v, 2 \cos v)$$

$$E = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u = 4 \cos^2 v \sin^2 u + 4 \cos^2 v \cos^2 u = 4 \cos^2 v$$

$$F = \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v = 4 \cos v \sin u \cos u \sin v - 4 \cos v \cos u \sin u \sin v = 0$$

$$G = \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_v = 4 \cos^2 u \sin^2 v + 4 \sin^2 u \sin^2 v + 4 \cos^2 v = 4 \sin^2 v \cdot 1 + 4 \cos^2 v = 4$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_T \sqrt{EG - F^2} &= \iint_T 4 |\cos v| = \int_0^{\pi/4} \int_0^u 4 \cos v \, dv \, du = \\ &= \int_0^{\pi/4} [4 \sin v]_0^u \, du = [-4 \cos u]_0^{\pi/4} = 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Να βρείτε τα σύμβολα Christoffel αν $e = 2 \cos^2 v$, $f = 0$, $g = 2$.

(i) $\mathcal{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v + eN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_u \right)_u = (4 \cos^2 v) \Gamma_{11}^1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} E_u = (4 \cos^2 v) \Gamma_{11}^1 \Rightarrow 0 = (4 \cos^2 v) \Gamma_{11}^1 \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0$$

(ii) $\mathcal{X}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathcal{X}_v + gN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{vv} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \Rightarrow \left(\frac{1}{2} G \right)_v = 4 \Gamma_{22}^2 \Rightarrow 0 = 4 \Gamma_{22}^2 \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0$$

(iii) $\mathcal{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathcal{X}_v + fN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \Rightarrow \left(\frac{1}{2} E \right)_v = 4 \cos^2 v \Gamma_{12}^1 \Rightarrow$$

$$-4 \cos v \sin v = 4 \cos^2 v \Gamma_{12}^1 \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = -\tan v$$

(iv) $\mathcal{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v + eN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)_u - \mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_{vu} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow -\frac{1}{2}(-8 \cos v \sin v) = \Gamma_{11}^2 \cdot 4 \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = \sin v \cos v$$

(v) $\mathcal{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathcal{X}_v + fN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \Rightarrow (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)_u \cdot \frac{1}{2} = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} F_u = \Gamma_{12}^2 \cdot 4 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = 0$$

(vi) $\mathcal{X}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathcal{X}_v + gN$. Έχουμε

$$\mathcal{X}_{vv} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \Rightarrow (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)_v - \mathcal{X}_{uv} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{22}^1 E \Rightarrow F_v - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{22}^1 E \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(-8 \cos v \sin v) = \Gamma_{22}^1 \cdot 4 \cos^2 v \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = \tan v$$

Παράδειγμα 4.0.25. Αν $E = 1 + u^2 v$, $F = u^2 + v$, $G = 2 + uv^2$ να βρείτε τα $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$. Έχω $\mathcal{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v + eN$, άρα

$$(i) \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_u = \Gamma_{11}^1 \mathcal{X}_u \mathcal{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathcal{X}_v \mathcal{X}_u + eN \mathcal{X}_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F + 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} E\right)_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \Rightarrow \frac{1}{2} 2uv = \Gamma_{11}^1 (1 + u^2 v) + \Gamma_{11}^2 (u^2 + v) \quad (1)$$

$$(ii) \mathcal{X}_{uu} \cdot \mathcal{X}_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow (\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v)_u - \mathcal{X}_v \cdot \mathcal{X}_{vu} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \Rightarrow 2u - \frac{1}{2} u^2 = \Gamma_{11}^1 (u^2 + v) + \Gamma_{11}^2 (2 + uv^2) \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και τα βρίσκουμε.

Παράδειγμα 4.0.26. Δίνεται παραμετρική επιφάνεια \mathcal{X} με E, F, G, e, f, g και $F = f = 0$. Να δείξετε ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι κύρια (Έχει γίνει σε προηγούμενο παράδειγμα). Αν $\kappa_1 = \frac{e}{E}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G}$ (< 1) και $\mathcal{Y}(u, v) = \mathcal{X}(u, v) + N(u, v)$, να δείξετε ότι η \mathcal{Y} είναι παραμετρική επιφάνεια.

Επειδή

$$\left\{ \begin{array}{l} N_u = -S(\mathcal{X}_u) = -\kappa_1 \mathcal{X}_u \\ N_v = -S(\mathcal{X}_v) = -\kappa_2 \mathcal{X}_v \end{array} \right\}$$

έχω ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y}_u = \mathcal{X}_u + N_u = \mathcal{X}_u - \kappa_1 \mathcal{X}_u = (1 - \kappa_1) \mathcal{X}_u \\ \mathcal{Y}_v = \mathcal{X}_v + N_v = \mathcal{X}_v - \kappa_2 \mathcal{X}_v = (1 - \kappa_2) \mathcal{X}_v \end{array} \right\}$$

Για να είναι η \mathcal{Y} παραμετρική επιφάνεια πρέπει τα $\mathcal{Y}_u, \mathcal{Y}_v$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού $1 - \kappa_1, 1 - \kappa_2 > 0$ έχω ότι

$$\mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v = (1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \neq 0$$

άρα είναι παραμετρική επιφάνεια.

Παράδειγμα 4.0.27. Να βρεθεί καμπύλη με $\kappa = \tau = \frac{1}{2}$.

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = \frac{1}{2}n \\ n' = -\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}b \\ b' = -\frac{1}{2}n \end{array} \right\} \Rightarrow T' + b' = 0 \Rightarrow T + b = \bar{c}$$

$$T'' = \frac{1}{2}n' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}b \right) = -\frac{1}{4}T + \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}\bar{c} - \frac{1}{2}T \Rightarrow T'' + \frac{1}{2}T = \frac{1}{4}\bar{c}$$

Άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \alpha \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \beta \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + c \\ n(s) = -\alpha\sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \beta\sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ b(s) = 2c - T = T(s) = -\alpha \cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \beta \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + c \end{array} \right\}$$

Θέλουμε $T(0), n(0), b(0)$ ορθοκανονικά και

$$T(0) = \alpha + c, \quad n(0) = \beta\sqrt{2}, \quad b(0) = -\alpha + c$$

$$|\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta \perp \alpha, \quad \beta \perp c$$

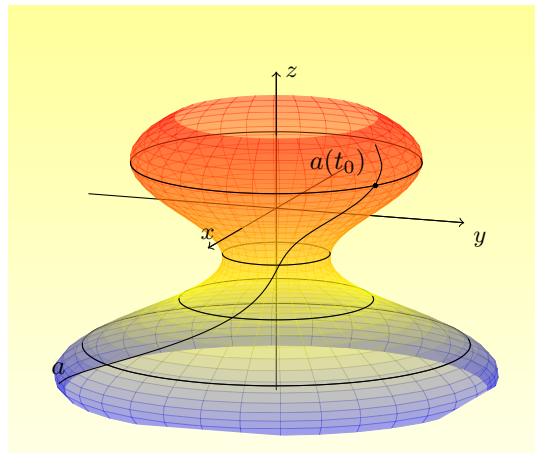
Άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} |\alpha + c|^2 = 1 \\ |-\alpha + c|^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |\alpha|^2 \pm 2\alpha c + |c|^2 = 1 \Rightarrow \alpha \cdot c = 0$$

$$(\alpha + c)(-\alpha + c) = -|\alpha|^2 + |c|^2 = 0 \Rightarrow |\alpha| = |c| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Παράδειγμα 4.0.28. Υπάρχει επιφάνεια με $E = \sin^2 v, F = 0, G = 1, e = 1, f = 0, g = 1$; Γνωρίζουμε ότι τα παραπάνω δείχνουν ότι πρέπει να έχω ισομορφία με τη σφαίρα, δηλαδή $K = 1$ από θεώρημα Gauss. Όμως εδώ έχω $K = \frac{1}{\sin^2 v} \neq 1$. Άτοπο, άρα δεν υπάρχει τέτοια επιφάνεια.

Παράδειγμα 4.0.29. Να βρεθεί καμπύλη που τέμνει υπό σταθερή γωνία μια επιφάνεια εκ περιστροφής, με $E = \varphi(v)^2, F = 0, G = 1$ και $(\varphi')^2 + (y')^2 = 1$ (παραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας).



Σχήμα 4.1

Έχουμε ότι

$$\mathcal{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, y(v))$$

και $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ καμπύλη με $\vartheta = \sigma\tau\alpha\vartheta$ με τους παράλληλους, δηλαδή μεταβάλλεται η u . Σταθεροποιώ ένα t_0 και η παράλληλη που διέρχεται από το $\alpha(t_0) = \mathcal{X}(u(t_0), v(t_0))$ είναι η $\beta(s) = \mathcal{X}(s, v(t_0))$. Έχω τομή των α και β για $t = t_0$ και $s = u(t_0)$. Επίσης

$$\beta'(u(t_0)) = \mathcal{X}_u(u(t_0), v(t_0))$$

$$\alpha'(t_0) = \mathcal{X}_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + \mathcal{X}_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)$$

Άρα για $0 < \lambda < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda = \sigma\tau\alpha\vartheta = \cos \vartheta &= \frac{\alpha'(t_0)\beta'(u(t_0))}{|\alpha'(t_0)||\beta'(u(t_0))|} = \\ &= \frac{\varphi(v(t_0))^2 u'(t_0)}{\sqrt{\varphi(v(t_0))^2 u'(t_0)^2 + v'(t_0)^2} \cdot \varphi(v(t_0))} = \frac{\varphi(v(t))u'(t)}{\sqrt{\varphi(v(t))^2 u'(t)^2 + v'(t)^2}} \Rightarrow \\ &= \frac{\varphi(v(t))du}{\sqrt{\varphi(v)^2 du^2 + dv^2}} = \lambda \end{aligned}$$

και λύνουμε τη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 4.0.30. Να βρείτε τη φυσική εξίσωση της καμπύλης $\gamma(t) = (t, \frac{t}{2})$. Έχω

$$\kappa(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

και $s = \int \sqrt{1+t^2} dt$. Θέτω $\sqrt{1+t^2} = u - t$ και έχω

$$s = \int \sqrt{1+t^2} dt = \int \left(u - \frac{u^2-1}{2u} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2} \right) du = \dots = h(t)$$

Πρέπει να κάνουμε απαλοιφή του t από την $\kappa(t)$ και αντιστρέφουμε για να βρούμε $\kappa = \kappa(s)$.

Παράδειγμα 4.0.31. Να βρείτε τη φυσική εξίσωση της καμπύλης $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$.

Έχω

$$\kappa(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \right)^3} = \frac{\cos t - 1}{\sqrt{(2 - 2 \cos t)^3}} = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{2 - 2 \cos u} du = 2 \int_0^t \left| \sin \frac{u}{2} \right| du = -4 \cos \frac{t}{2} + 4 \Rightarrow \\ s(t) - 4 &= -4 \cos \frac{t}{2} \Rightarrow \cos \frac{t}{2} = \frac{s(t) - 4}{-4} \end{aligned}$$

Όμως

$$\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 = 2 \left(\frac{4 - s(t)}{4} \right)^2 - 1 = 2 \left(1 - \frac{s(t)}{4} \right)^2 - 1 = 2 - s(t) + \frac{s(t)^2}{8} - 1 = 1 - s(t) + \frac{s(t)^2}{8}$$

Άρα

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 1 + s - \frac{s^2}{8}}} \Rightarrow \kappa(s) = -\frac{1}{\sqrt{8s - s^2}}$$

Παράδειγμα 4.0.32. Έστω γ επίπεδη καμπύλη και $\gamma' = 1$, $\kappa \neq 0$, $\kappa' \neq 0$ και $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$. Να δείξετε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο s είναι κάθετο στο κάθετο διάνυσμα της β στο s .
Έχω

$$\beta' = \gamma' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' n + \frac{1}{\kappa} n' = T + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' n + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) \Rightarrow \beta' = \left(\frac{1}{\kappa}\right)' n$$

Άρα $T(s) \cdot \beta'(s) = 0$.

Παράδειγμα 4.0.33. Έστω $\alpha(t) = (\sin(2t + 1), f(t), \cos(2t + 1))$.

(i) Να βρείτε την $f(t)$ έτσι ώστε $|\alpha'| = \text{σταθ}$.

Έχω

$$\alpha'(t) = (\cos(2t + 1) \cdot 2, f'(t), -\sin(2t + 1) \cdot 2)$$

και

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{4 \cos^2(2t + 1) + f'(t)^2 + 4 \sin^2(2t + 1)} = c \Rightarrow 4 + f'(t)^2 = c \Rightarrow$$

$$f(t) = \lambda t + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(ii) Να βρείτε αναπαράμετρηση μοναδιαίας ταχύτητας της α .

Έχω

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{4 + \lambda^2}$$

άρα

$$h(t) = \int_0^1 |\alpha'(u)| du = t\sqrt{4 + \lambda^2}$$

Έτσι

$$\varphi(s) = h^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{4 + \lambda^2}}$$

Παράδειγμα 4.0.34. Έστω $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ και t_0 ώστε το $|\alpha(t_0)|$ να είναι μέγιστο. Να δείξετε ότι $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{|\alpha(t_0)|}$.

Υποθέτω ότι α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και έστω $f(t) = |\alpha(t)|^2$ και t_0 το τοπικό μέγιστο της f . Τότε

$$f'(t) = 2\alpha(t)\alpha'(t), \quad \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

Επίσης πρέπει $f'' < 0$ αφού t_0 τοπικό μέγιστο, δηλαδή

$$f''(t_0) = 2 \left[\alpha(t_0)\alpha''(t_0) + |\alpha'(t_0)|^2 \right] \leq 0$$

Αφού $|\alpha'(t_0)|^2 = 1$ πρέπει $\alpha(t_0) \cdot \alpha''(t_0) \leq -1$, δηλαδή $\alpha(t_0) \cdot \kappa(t_0) \cdot n(t_0) \leq -1$ και αφού $\alpha(t_0) \perp T(t_0)$, έχω ότι ισχύει

$$\alpha(t_0) = \pm |\alpha(t_0)| n(t_0) \Rightarrow -|\alpha(t_0)| \kappa(t_0) \leq -1 \Rightarrow \kappa(t_0) \geq \frac{1}{|\alpha(t_0)|}$$