Στοχαστικές Ανελίξεις
Λύσεις Ασκήσεων κ. Οικονόμου

Βασίλης Κατσιάνος

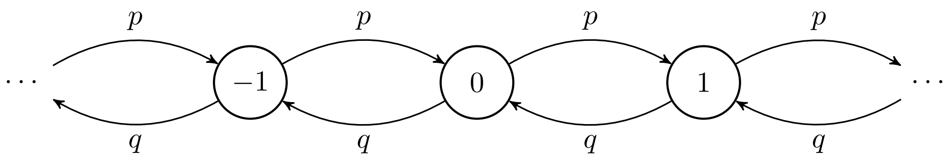
Περιεχόμενα

1 Μοντελοποίηση Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου

Άσκηση 1.1. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{Z}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\right) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ q, & j = i-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

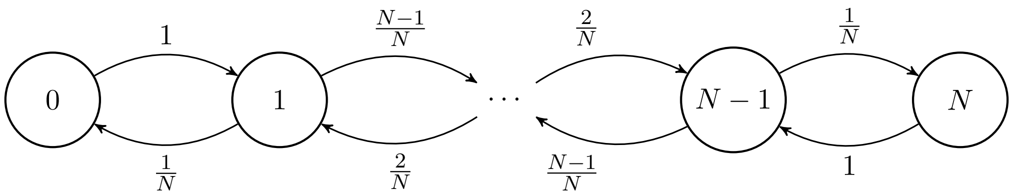
Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Άσκηση 1.2. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\right) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \begin{cases} \frac{i}{N}, & j = i-1 \\ \frac{N-i}{N}, & j = i+1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Άσκηση 1.3. Έστω Y_{kn} το πλήθος απογόνων του k-οστού ατόμου της γενιάς n. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $X_{n+1} = Y_{1n} + Y_{2n} + \cdots + Y_{X_n n}$, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\right) &= P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) \\ &= P\left(Y_{1n} + Y_{2n} + \cdots + Y_{X_n n} = j \mid X_n = i\right) \\ &= P\left(Y_{1n} + Y_{2n} + \cdots + Y_{in} = j \mid X_n = i\right) \\ &= P\left(Y_{1n} + Y_{2n} + \cdots + Y_{in} = j\right). \end{aligned}$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές Y_{kn} είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με πιθανογεννήτρια

$g(z) = E\left(z^{Y_{kn}}\right)$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}(z) &= E\left(z^{X_{n+1}}\right) = E\left(z^{Y_{1n}+Y_{2n}+\cdots+Y_{X_n n}}\right) = E\left(\prod_{k=1}^{X_n} z^{Y_{kn}}\right) = E\left[E\left(\prod_{k=1}^{X_n} z^{Y_{kn}}\middle| X_n\right)\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_n=\ell) E\left(\prod_{k=1}^{X_n} z^{Y_{kn}}\middle| X_n=\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_n=\ell) E\left(\prod_{k=1}^{\ell} z^{Y_{kn}}\middle| X_n=\ell\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_n=\ell) E\left(\prod_{k=1}^{\ell} z^{Y_{kn}}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_n=\ell) \prod_{k=1}^{\ell} E\left(z^{Y_{kn}}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_n=\ell)\left[g(z)\right]^{\ell} \\
&= E\left[(g(z))^{X_n}\right] = \phi_n\left(g(z)\right), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Έστω $a_k = P(Z_n = k)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Δεδομένου ότι $X_n = 0$, παρατηρούμε ότι $X_{n+1} = Z_n$, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=0\right) &= P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=0\right) \\
&= P\left(Z_n=j \mid X_n=0\right) = P\left(Z_n=j\right) = a_j.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $X_n > 0$, παρατηρούμε ότι $X_{n+1} = X_n - 1 + Z_n$, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i\right) &= P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right) \\
&= P\left(X_n-1+Z_n=j \mid X_n=i\right) \\
&= P\left(i-1+Z_n=j \mid X_n=i\right) \\
&= P\left(Z_n=j-i+1\right) = \begin{cases} a_{j-i+1}, & j \geqslant i-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

2 Βασικοί Υπολογισμοί σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου σε Πεπερασμένη Χρονική Στιγμή

Άσκηση 2.1. (1) Αν $\alpha = \beta = 0$, τότε προφανώς ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Διαφορετικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\det(\mathbb{P}-\lambda\mathbb{I}) = (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda)-\alpha\beta = \lambda^2+(\alpha+\beta-2)\lambda-(\alpha+\beta-1) = (\lambda-1)(\lambda+\alpha+\beta-1).$$

Επομένως, ο $\mathbb{P}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1-\alpha-\beta$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(\mathbb{P}-\lambda_1\mathbb{I})\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = y_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbb{P}-\lambda_2\mathbb{I})\, v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha y_2 = -\beta x_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n & \alpha-\alpha(1-\alpha-\beta)^n \\ \beta-\beta(1-\alpha-\beta)^n & \alpha+\beta(1-\alpha-\beta)^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} f_{11}^{(1)} = 1-\alpha \\ f_{11}^{(2)} = \alpha\beta \\ f_{11}^{(3)} = \alpha(1-\beta)\beta \\ f_{11}^{(4)} = \alpha(1-\beta)^2\beta \\ \qquad\vdots \end{cases} \Rightarrow f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1-\alpha, & n=1 \\ \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta, & n \geqslant 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} f_{12}^{(1)} = \alpha \\ f_{12}^{(2)} = (1-\alpha)\alpha \\ f_{12}^{(3)} = (1-\alpha)^2\alpha \\ \qquad\vdots \end{cases} \Rightarrow f_{12}^{(n)} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha.$$

Λόγω συμμετρίας, παίρνουμε ότι:

$$f_{22}^{(n)} = \begin{cases} 1-\beta, & n=1 \\ \beta(1-\alpha)^{n-2}\alpha, & n \geqslant 2 \end{cases}, \quad f_{21}^{(n)} = (1-\beta)^{n-1}\beta.$$

(3) Από τα στοιχεία της γεωμετρικής κατανομής, γνωρίζουμε ότι:

$$m_{12} = E\left(T_2 \mid X_0 = 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(T_2 = n \mid X_0 = 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{12}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1}\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Λόγω συμμετρίας, παίρνουμε ότι $m_{21} = \frac{1}{\beta}$. Ομοίως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 - \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha(1-\beta)^{n-2}\beta = 1 - \alpha + \alpha \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-\beta)^{k-1}\beta \\ &= 1 - \alpha + \alpha \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\beta)^{k-1}\beta + \sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)^{k-1}\beta\right] = 1 - \alpha + \alpha\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \end{aligned}$$

$$m_{22} = 1 - \beta + \beta\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

***Άσκηση* 2.2.** Υπολογίζουμε ότι:

$$\det(\mathbb{P} - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{4} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4} = \lambda^2(1-\lambda) + \frac{1}{4}(1-\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Επομένως, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{i}{2}$ και $\lambda_3 = -\frac{i}{2}$. Γνωρίζουμε ότι:

$$p_{11}^{(n)} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $p_{11}^{(0)} = 1$, $p_{11}^{(1)} = 0$ και $p_{11}^{(2)} = 0$, οπότε χρησιμοποιούμε αυτές τις αρχικές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1, c_2 και c_3:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_1 + c_2\frac{i}{2} - c_3\frac{i}{2} = 0, \\ c_1 - c_2\frac{1}{4} - c_3\frac{1}{4} = 0. \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{2+i}{5}, \quad c_3 = \frac{2-i}{5}.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$p_{11}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^{n-2}}, & n = 4k \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\frac{1}{2^{n-1}}, & n = 4k+1 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\frac{1}{2^{n-2}}, & n = 4k+2 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^{n-1}}, & n = 4k+3 \end{cases}.$$

***Άσκηση* 2.3.** Έστω X_n το πλήθος μεταβάσεων τύπου $i \to i+1$ στις πρώτες n περιόδους, Y_n το πλήθος μεταβάσεων τύπου $i \to i-1$ στις πρώτες n περιόδους και Z_n το πλήθος μεταβάσεων τύπου $i \to i$ στις πρώτες n περιόδους. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n)} &= P(X_n + Y_n + Z_n = n, X_n = Y_n) = P(2X_n + Z_n = n, X_n = Y_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(2X_n + Z_n = n, X_n = Y_n, X_n = k) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(Z_n = n-2k, X_n = Y_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!k!(n-2k)!} p^k q^k r^{n-2k}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
p_{00}^{(n)} &= P(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 0) P(X_n = 0 \mid X_0 = 0, X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 0) P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 0) \cdot q \\
&= q \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 0) = q.
\end{aligned}
$$

Αν $n < j$, τότε προφανώς ισχύει ότι $p_{0j}^{(n)} = 0$. Αν $n = j$, τότε προφανώς ισχύει ότι $p_{0j}^{(n)} = p^n$. Αν $n > j$, τότε υπολογίζουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
p_{0j}^{(n)} &= P(X_n = j \mid X_0 = 0) = P(X_n = j, X_{n-1} = j-1, \ldots, X_{n-j+1} = 1, X_{n-j} = 0 \mid X_0 = 0) \\
&= P(X_n = j \mid X_{n-1} = j-1) P(X_{n-1} = j-1 \mid X_{n-2} = j-2) \cdots \\
&\qquad P(X_{n-j+1} = 1 \mid X_{n-j} = 0) P(X_{n-j} = 0 \mid X_0 = 0) = p^j q.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.5. (1) Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$
P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \frac{i^2}{N^2}, & j = i-1 \\ \frac{(N-i)^2}{N^2}, & j = i+1 \\ \frac{2i(N-i)}{N^2}, & j = i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου.

(2) Παρατηρούμε ότι:

$$
E(X_{n+1} \mid X_n = i) = (i-1)\frac{i^2}{N^2} + (i+1)\frac{(N-i)^2}{N^2} + i\frac{2i(N-i)}{N^2} = \frac{N^2 i - 2Ni + N^2}{N^2} = i - \frac{2i}{N} + 1.
$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$
E(X_{n+1}) = E\left[E(X_{n+1} \mid X_n)\right] = E\left(X_n - \frac{2X_n}{N} + 1\right) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_n) + 1.
$$

(3) Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_{n-1}) + 1 = \left(1 - \frac{2}{N}\right)\left[\left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_{n-2}) + 1\right] + 1 \\
&= \left(1 - \frac{2}{N}\right)^2 E(X_{n-2}) + \left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1-\frac{2}{N}\right)^2 \left[\left(1-\frac{2}{N}\right) E(X_{n-3}) + 1\right] + \left(1-\frac{2}{N}\right) + 1 \\
&= \left(1-\frac{2}{N}\right)^3 E(X_{n-3}) + \left(1-\frac{2}{N}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{N}\right) + 1 = \cdots \\
&= \left(1-\frac{2}{N}\right)^n E(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{2}{N}\right)^k = \left(1-\frac{2}{N}\right)^n N + \frac{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^n}{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)} \\
&= \left(1-\frac{2}{N}\right)^n N + \left[1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\right]\frac{N}{2}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.6. (1) Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{a, a+1, \ldots, a+b\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$
P\left(X_n = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i\right) = P\left(X_n = j \mid X_{n-1} = i\right) = \begin{cases} \frac{i}{a+b}, & j = i \\ 1-\frac{i}{a+b}, & j = i+1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Παρατηρούμε ότι:

$$
E(X_n \mid X_{n-1} = i) = i\frac{i}{a+b} + (i+1)\left(1-\frac{i}{a+b}\right) = \frac{(a+b-1)i + a + b}{a+b} = \left(1-\frac{1}{a+b}\right) i + 1.
$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$
E(X_n) = E\left[E(X_n \mid X_{n-1})\right] = E\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right) X_{n-1} + 1\right] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right) E(X_{n-1}) + 1.
$$

(2) Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right) E(X_{n-2}) + 1\right] + 1 \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E(X_{n-2}) + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1 \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 \left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right) E(X_{n-3}) + 1\right] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1 \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^3 E(X_{n-3}) + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1 = \cdots \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n E(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^k = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n a + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)} \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n a + \left[1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n\right](a+b) = a + \left[1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n\right] b.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.7. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$P\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\ldots,X_n=i\right)=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)=\begin{cases} \frac{i}{N}q, & j=i-1 \\ \frac{N-i}{N}p, & j=i+1 \\ \frac{i}{N}p+\frac{N-i}{N}q, & j=i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Παρατηρούμε ότι:

$$E(X_{n+1} \mid X_n=i)=(i-1)\frac{i}{N}q+(i+1)\frac{N-i}{N}p+i\left(\frac{i}{N}p+\frac{N-i}{N}q\right)=\frac{Ni-i+Np}{N}=i-\frac{i}{N}+p.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

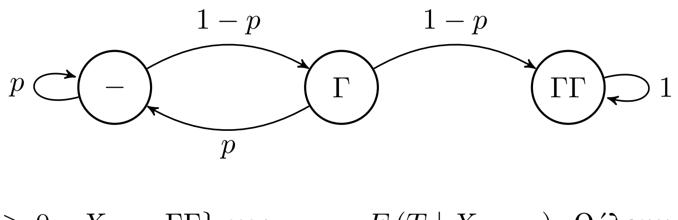
$$E(X_{n+1})=E\left[E(X_{n+1} \mid X_n)\right]=E\left(X_n-\frac{X_n}{N}+p\right)=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_n)+p.$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} E(X_n)&=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_{n-1})+p=\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_{n-2})+p\right]+p \\ &=\left(1-\frac{1}{N}\right)^2E(X_{n-2})+\left(1-\frac{1}{N}\right)p+p \\ &=\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_{n-3})+p\right]+\left(1-\frac{1}{N}\right)p+p \\ &=\left(1-\frac{1}{N}\right)^3E(X_{n-3})+\left(1-\frac{1}{N}\right)^2p+\left(1-\frac{1}{N}\right)p+p=\cdots \\ &=\left(1-\frac{1}{N}\right)^nE(X_0)+p\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^k=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\cdot 0+p\frac{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)} \\ &=pN\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

3 Υπολογισμοί Πιθανοτήτων και Μέσων Χρόνων Πρώτης Επανόδου για Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

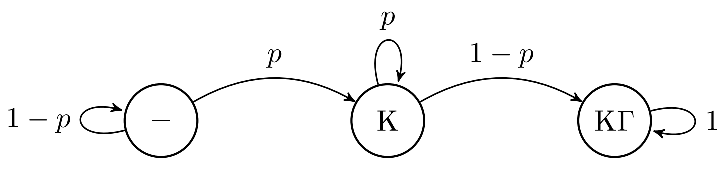
Άσκηση 3.1. (1) Ορίζουμε την παρακάτω Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$:



Έστω $T=\min\{n\geqslant 0 : X_n=\Gamma\Gamma\}$ και $m_*=E\left(T \mid X_0=*\right)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το m_-. Προφανώς ισχύει ότι $m_{\Gamma\Gamma}=0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} m_- = 1 + pm_- + (1-p)m_\Gamma, \\ m_\Gamma = 1 + pm_- + (1-p)\cancelto{0}{m_{\Gamma\Gamma}}. \end{cases} \Rightarrow m_- = 1 + pm_- + (1-p)(1+pm_-) \Rightarrow m_- = \frac{2-p}{(1-p)^2}.$$

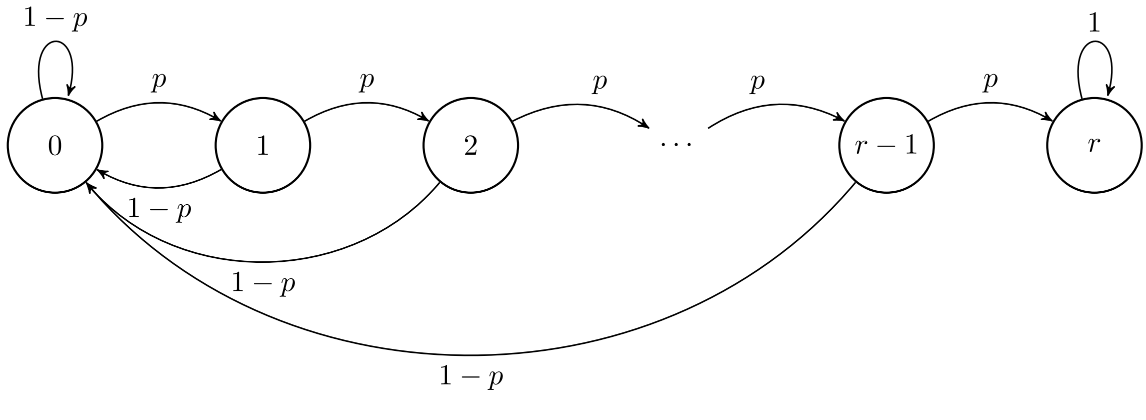
(2) Ορίζουμε την παρακάτω Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$:



Έστω $T = \min\{n \geqslant 0 : X_n = \mathrm{K\Gamma}\}$ και $m_* = E\,(T \mid X_0 = *)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το m_-, ενώ ισχύει ότι $m_{\mathrm{K\Gamma}} = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} m_- = 1 + (1-p)m_- + pm_{\mathrm{K}}, \\ m_{\mathrm{K}} = 1 + pm_{\mathrm{K}} + (1-p)\cancel{m_{\mathrm{K\Gamma}}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{\mathrm{K}} = \frac{1}{1-p}, \\ \cancel{m_-} = 1 + \cancel{m_-} - pm_- + \frac{p}{1-p}. \end{cases} \Rightarrow m_- = \frac{1}{p(1-p)}.$$

***Άσκηση* 3.2.** Έστω X_n το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων K στις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Έστω $T = \min\{n \geqslant 0 : X_n = r\}$ και $m_k = E\,(T \mid X_0 = k)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το m_0. Προφανώς ισχύει ότι $m_r = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$m_k = 1 + (1-p)m_0 + pm_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

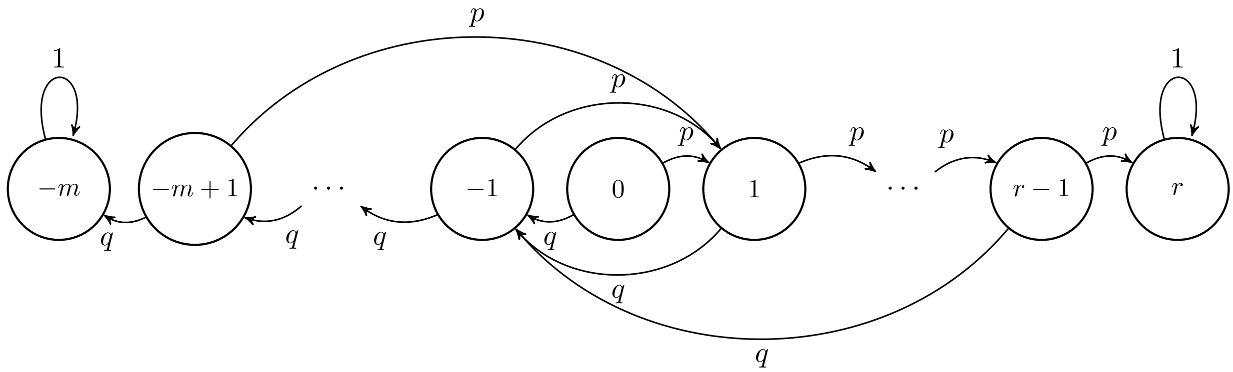
Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 + (1-p)m_0 + pm_1 = 1 + (1-p)m_0 + p\,[1 + (1-p)m_0 + pm_2] \\ &= 1 + (1-p)m_0 + p\,[1 + (1-p)m_0] + p^2 m_2 \\ &= 1 + (1-p)m_0 + p\,[1 + (1-p)m_0] + p^2\,[1 + (1-p)m_0 + pm_3] \\ &= 1 + (1-p)m_0 + p\,[1 + (1-p)m_0] + p^2\,[1 + (1-p)m_0] + p^3 m_3 = \cdots \end{aligned}$$

$$= [1 + (1-p)m_0] \sum_{k=0}^{r-1} p^k + p^r \cancelto{0}{m_r} = [1 + (1-p)m_0] \, \frac{1-p^r}{1-p} = \frac{1-p^r}{1-p} + (1-p^r)\, m_0 \Rightarrow$$

$$m_0 = \frac{1}{p^r} \frac{1-p^r}{1-p}.$$

***Άσκηση* 3.3.** Αν τελευταία εμφανίστηκαν k συνεχόμενα Κ στις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος, τότε ορίζουμε $X_n = k$. Αν τελευταία εμφανίστηκαν k συνεχόμενα Γ στις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος, τότε ορίζουμε $X_n = -k$. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Έστω $T = \min\{n \geqslant 1 : X_n = r\}$ και $u_k = P\,(T < \infty \mid X_0 = k)$ η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση r δεδομένου ότι $X_0 = k$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το u_0. Προφανώς ισχύει ότι $u_r = 1$ και $u_{-m} = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} u_0 = pu_1 + qu_{-1}, \\ u_k = pu_{k+1} + qu_{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, r-1, \\ u_k = qu_{k-1} + pu_1, \quad k = -1, -2, \ldots, -m+1. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} u_1 &= pu_2 + qu_{-1} = p\,(pu_3 + qu_{-1}) + qu_{-1} = p^2 u_3 + pqu_{-1} + qu_{-1} \\ &= p^2\,(pu_4 + qu_{-1}) + pqu_{-1} + qu_{-1} = p^3 u_4 + p^2 qu_{-1} + pqu_{-1} + qu_{-1} = \cdots \\ &= p^{r-1} \cancelto{1}{u_r} + qu_{-1} \sum_{k=0}^{r-2} p^k = p^{r-1} + \cancel{q} u_{-1} \frac{1-p^{r-1}}{\cancel{1-p}} = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right) u_{-1}. \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, παίρνουμε ότι:

$$u_{-1} = q^{m-1} \cancelto{0}{u_{-m}} + pu_1 \sum_{k=0}^{m-2} q^k = \cancel{p} u_1 \frac{1-q^{m-1}}{\cancel{1-q}} = \left(1 - q^{m-1}\right) u_1.$$

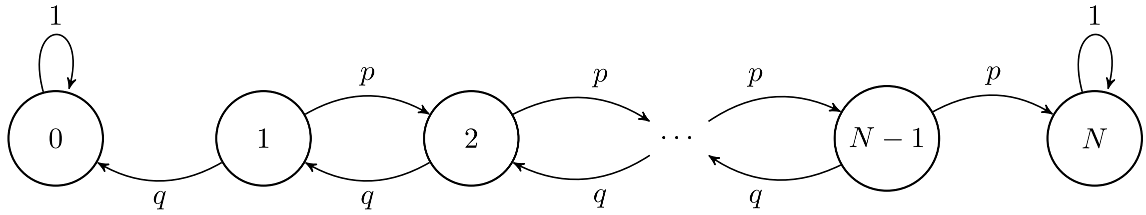
Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$u_1 = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{m-1}\right) u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{p^{r-1}}{1 - (1-p^{r-1})\,(1-q^{m-1})} \Rightarrow$$

$$u_{-1} = \frac{p^{r-1}\left(1-q^{m-1}\right)}{1-\left(1-p^{r-1}\right)\left(1-q^{m-1}\right)} \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{p^r}{1-\left(1-p^{r-1}\right)\left(1-q^{m-1}\right)} + \frac{qp^{r-1}\left(1-q^{m-1}\right)}{1-\left(1-p^{r-1}\right)\left(1-q^{m-1}\right)} = \frac{p^{r-1}\left(1-q^{m}\right)}{1-\left(1-p^{r-1}\right)\left(1-q^{m-1}\right)}.$$

Άσκηση 3.4. (1) Ο απλός τυχαίος περίπατος $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Έστω $T_0 = \min\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$ και $u_k = P\left(T_0 < \infty \mid X_0 = k\right)$ η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 0 δεδομένου ότι $X_0 = k$. Προφανώς ισχύει ότι $u_0 = 1$ και $u_N = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $u_k = \lambda^k$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$\lambda^k = p\lambda^{k+1} + q\lambda^{k-1} \Rightarrow \lambda = p\lambda^2 + q \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{q}{p}.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$u_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $u_0 = 1$ και $u_N = 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0. \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\left(\frac{q}{p}\right)^N, \quad c_2 = -\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \Rightarrow$$

$$u_k = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\left(\frac{q}{p}\right)^N - \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\left(\frac{q}{p}\right)^k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

(2) Αν $p = q$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, οπότε παίρνουμε ότι $u_k = (c_1 + c_2k)\lambda_1^k = c_1 + c_2k$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $u_0 = 1$ και $u_N = 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 + c_2N = 0. \end{cases} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{N} \Rightarrow u_k = 1 - \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

(3) Έστω $m_k = E(T \mid X_0 = k)$. Προφανώς ισχύει ότι $m_0 = 0$ και $m_N = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$m_k = 1 + pm_{k+1} + qm_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι η ομογενής εξίσωση $m_k = pm_{k+1} + qm_{k-1}$ έχει γενική λύση $m_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$, όπου $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Αναζητούμε μία ειδική λύση της μορφής $m_k = Ak$ για τη μη-ομογενή εξίσωση $m_k = 1 + pm_{k+1} + qm_{k-1}$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$Ak = 1 + pA(k+1) + qA(k-1) \Rightarrow A = \frac{1}{q-p}.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$m_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + Ak = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{k}{q-p}.$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $m_0 = 0$ και $m_N = 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^N + \frac{N}{q-p} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = -\frac{N}{q-p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad c_2 = \frac{N}{q-p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_k &= -\frac{N}{q-p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} + \frac{N}{q-p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{k}{q-p} \\ &= \frac{k}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

(4) Αν $p = q$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, οπότε η ομογενής εξίσωση $m_k = pm_{k+1} + qm_{k-1}$ έχει γενική λύση $m_k = (c_1 + c_2k)\lambda_1^k = c_1 + c_2k$. Αναζητούμε μία ειδική λύση της μορφής $m_k = Ak^2$ για τη μη-ομογενή εξίσωση $m_k = 1 + pm_{k+1} + qm_{k-1}$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$Ak^2 = 1 + pA(k+1)^2 + qA(k-1)^2 \Rightarrow A = -1.$$

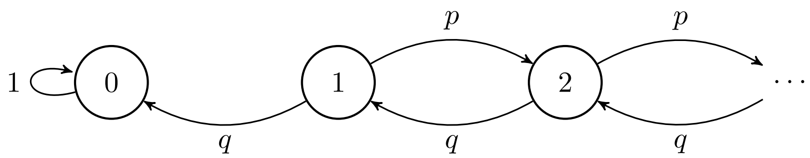
Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$m_k = (c_1 + c_2k)\lambda_1^k + Ak^2 = c_1 + c_2k - k^2.$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $m_0 = 0$ και $m_N = 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2N - N^2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow c_2 = -N \Rightarrow m_k = Nk - k^2 = (N-k)k, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Άσκηση **3.5.** Ο απλός τυχαίος περίπατος $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Προφανώς ισχύει ότι $\phi_0(z) = 1$. Παρατηρούμε ότι $(T \mid X_0 = i, X_1 = j) \overset{d}{=} (T + 1 \mid X_0 = j)$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
\phi_k(z) &= E\left(z^T \mid X_0 = k\right) = E\left[E\left(z^T \mid X_0 = k, X_1\right)\right] \\
&= P\left(X_1 = k+1 \mid X_0 = k\right) E\left(z^T \mid X_0 = k, X_1 = k+1\right) + \\
&\quad P\left(X_1 = k-1 \mid X_0 = k\right) E\left(z^T \mid X_0 = k, X_1 = k-1\right) \\
&= pE\left(z^{T+1} \mid X_0 = k+1\right) + qE\left(z^{T+1} \mid X_0 = k-1\right) \\
&= pzE\left(z^T \mid X_0 = k+1\right) + qzE\left(z^T \mid X_0 = k-1\right) = pz\phi_{k+1}(z) + qz\phi_{k-1}(z), k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\phi_k(z) = [\lambda(z)]^k$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$
[\lambda(z)]^k = pz\,[\lambda(z)]^{k+1} + qz\,[\lambda(z)]^{k-1} \Rightarrow \lambda(z) = pz\,[\lambda(z)]^2 + qz \Rightarrow
$$

$$
\lambda_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz}, \quad \lambda_2(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz}.
$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$
\phi_k(z) = c_1(z)\,[\lambda_1(z)]^k + c_2(z)\,[\lambda_2(z)]^k.
$$

Για $z \in (0, 1)$, παρατηρούμε ότι:

$$
1 - 4pqz^2 = 1 - 4p(1-p)z^2 = 1 - 4pz^2 + 4p^2z^2 > 1 - 4pz + 4p^2z^2 = (1 - 2pz)^2 \Rightarrow
$$

$$
\lambda_2(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pq} > \frac{1 + |1 - 2pz|}{2pz} = \begin{cases} \frac{1-pz}{pz}, & 2pz \leqslant 1 \\ 1, & 2pz > 1 \end{cases}.
$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$
\frac{1 - pz}{pz} \geqslant 1 \Leftrightarrow 1 - pz \geqslant pz \Leftrightarrow 2pz \leqslant 1.
$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_2(z) > 1$ για $z \in (0, 1)$. Για $z \in (-1, 0)$, παρατηρούμε ότι:

$$
1 - 4pqz^2 = 1 - 4p(1-p)z^2 = 1 - 4pz^2 + 4p^2z^2 > 1 + 4pz + 4p^2z^2 = (1 + 2pz)^2 \Rightarrow
$$

$$
\lambda_2(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pq} < \frac{1 + |1 + 2pz|}{2pz} = \begin{cases} \frac{1+pz}{pz}, & 2pz \geqslant -1 \\ -1, & 2pz < -1 \end{cases}.
$$

Όμως, ισχύει ότι:
$$\frac{1+pz}{pz} \leqslant -1 \Leftrightarrow 1+pz \geqslant -pz \Leftrightarrow 2pz \geqslant -1.$$
Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_2(z) < -1$ για $z \in (-1,0)$. Εφόσον η πιθανογεννήτρια $\phi_k(z)$ πρέπει να συγκλίνει για $|z| \leqslant 1$ και δείξαμε ότι $|\lambda_2(z)| > 1$ για $z \in (-1,0) \cup (0,1)$, θα πρέπει να ισχύει ότι $c_2(z) = 0$. Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $\phi_0(z) = 1$, υπολογίζουμε ότι $c_1(z) = 1$, οπότε:
$$\phi_k(z) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}\right)^k = [\phi_1(z)]^k\,, \quad k = 0,1,\dots .$$

4 Προσβασιμότητα και Επικοινωνία Καταστάσεων Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου

***Άσκηση* 4.1.** Από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P}_1$, βλέπουμε ότι έχουμε τις εξής κλάσεις επικοινωνίας:
$$C_1 = \{1,2\}, \quad C_2 = \{3,4\}, \quad T = \{5,6\}.$$
Τα σύνολα C_1, C_2 είναι στοχαστικά κλειστά και πεπερασμένα, άρα οι κλάσεις C_1, C_2 είναι θετικά επαναληπτικές. Το σύνολο T είναι ανοικτό, επομένως η T είναι παροδική κλάση. Έπεται ότι οι καταστάσεις:

- 1, 2 είναι θετικά επαναληπτικές και περιοδικές με περίοδο 2, αφού επάνοδος είναι δυνατή μόνο σε άρτιο αριθμό βημάτων,
- 3, 4 είναι θετικά επαναληπτικές και απεριοδικές, αφού $p_{33} = \frac{1}{4} > 0$,
- 5, 6 είναι παροδικές και απεριοδικές, αφού $p_{55} = \frac{1}{6} > 0$.

Από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P}_2$, βλέπουμε ότι έχουμε τις εξής κλάσεις επικοινωνίας:
$$C_1 = \{1,6\}, \quad C_2 = \{2,3\}, \quad T = \{4,5\}.$$
Τα σύνολα C_1, C_2 είναι στοχαστικά κλειστά και πεπερασμένα, άρα οι κλάσεις C_1, C_2 είναι θετικά επαναληπτικές. Το σύνολο T είναι ανοικτό, επομένως η T είναι παροδική κλάση. Έπεται ότι οι καταστάσεις:

- 1, 6 είναι θετικά επαναληπτικές και περιοδικές με περίοδο 2, αφού επάνοδος είναι δυνατή μόνο σε άρτιο αριθμό βημάτων,
- 2, 3 είναι θετικά επαναληπτικές και απεριοδικές, αφού $p_{22} = \frac{1}{2} > 0$,
- 4, 5 είναι παροδικές και απεριοδικές, αφού $p_{44} = \frac{1}{8} > 0$.

***Άσκηση* 4.2.** Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη με $p_{00} = p_0 > 0$, οπότε απεριοδική. Έστω $T = \min\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$, $u_k = P\,(T < \infty \mid X_0 = k)$ και $m_k = E\,(T \mid X_0 = k)$.

Παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= P\left(T<\infty \mid X_0=0\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P\left(T=k \mid X_0=0\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X_1=k-1 \mid X_0=0\right)=\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} p_k=1,
\end{aligned}
$$

οπότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι επαναληπτική. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= E\left(T \mid X_0=0\right)=\sum_{k=1}^{\infty} k P\left(T=k \mid X_0=0\right)=\sum_{k=1}^{\infty} k p_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1) p_k=\sum_{k=0}^{\infty} k p_k+\sum_{k=0}^{\infty} p_k=\infty,
\end{aligned}
$$

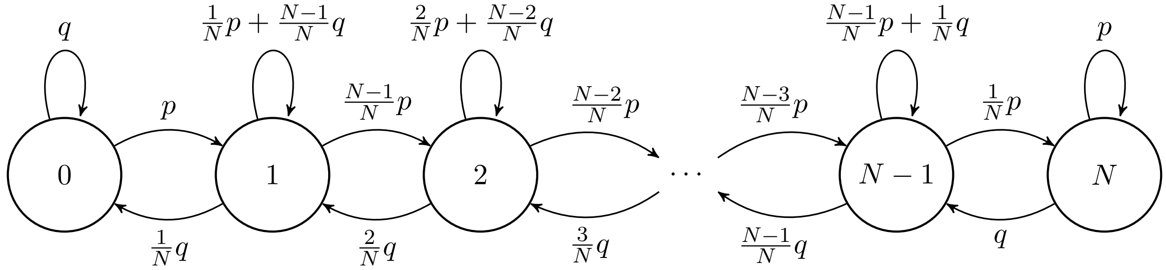
οπότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μηδενικά επαναληπτική.

5 Υπολογισμοί Στάσιμων και Οριακών Κατανομών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου

Άσκηση 5.1. Έχουμε δείξει ότι:

$$
p_{ij}=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)=\begin{cases}
\frac{i}{N} q, & j=i-1 \\
\frac{N-i}{N} p, & j=i+1 \\
\frac{i}{N} p+\frac{N-i}{N} q, & j=i \\
0, & \text{διαφορετικά}
\end{cases}.
$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας στα σύνολα $A_i=\{0,1,\ldots,i-1\}$ για $i=1,2,\ldots,N$:

$$
\sum_{j \in A_i} \sum_{\ell \in A_i^c} \pi_j p_{j\ell}=\sum_{\ell \in A_i^c} \sum_{j \in A_i} \pi_\ell p_{\ell j} \Rightarrow \frac{N-i+1}{N} p \pi_{i-1}=\frac{i}{N} q \pi_i, \quad i=1,2,\ldots,N.
$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παίρνουμε ότι:

$$\pi_i = \frac{N-i+1}{i}\frac{p}{q}\pi_{i-1} = \frac{N-i+1}{i}\frac{p}{q}\frac{N-i+2}{i-1}\frac{p}{q}\pi_{i-2} = \cdots = \frac{N(N-1)\cdots(N-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}\left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0$$
$$= \frac{N!}{i!(N-i)!}\left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0 = \binom{N}{i}\left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του π_0:

$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow \pi_0 \left(1 + \frac{p}{q}\right)^N = 1 \Rightarrow \pi_0 = q^N \Rightarrow$$

$$\pi_i = \binom{N}{i}\left(\frac{p}{q}\right)^i q^N = \binom{N}{i} p^i q^{N-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

δηλαδή η στάσιμη κατανομή είναι διωνυμική με πλήθος δοκιμών N και πιθανότητα επιτυχίας p.

Άσκηση 5.2. (1) Έστω Y_n το πλήθος των μη-ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται τη n-οστή μέρα. Παρατηρούμε ότι:

$$P(Y_n = k) = \begin{cases} (1-p)^2, & k = 0 \\ 2p(1-p), & k = 1 \\ p^2, & k = 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Δεδομένου ότι $X_n = 0$, παρατηρούμε ότι:

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0, & Y_n \in \{0, 1\} \\ 1, & Y_n = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p_{0j} = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = 0\right) = \begin{cases} (1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - p^2, & j = 0 \\ p^2, & j = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Δεδομένου ότι $X_n > 0$, παρατηρούμε ότι $X_{n+1} = X_n - 1 + Y_n$, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$p_{0j} = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = 0\right) = P\left(X_n - 1 + Y_n = j \mid X_n = i\right)$$
$$= P\left(i - 1 + Y_n = j \mid X_n = i\right) = P\left(Y_n = j - i + 1\right) = \begin{cases} (1-p)^2, & j = i - 1 \\ 2p(1-p), & j = i \\ p^2, & j = i + 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Επομένως, η $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p^2 & p^2 & 0 & 0 & \cdots \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 & 0 & \cdots \\ 0 & (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 & \cdots \\ 0 & 0 & (1-p)^2 & 2p(1-p) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(2) Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας στα σύνολα $A_i = \{0, 1, \ldots, i-1\}$ για $i = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{j\in A_i}\sum_{\ell\in A_i^c} \pi_j p_{j\ell} = \sum_{\ell\in A_i^c}\sum_{j\in A_i} \pi_\ell p_{\ell j} \Rightarrow \pi_{i-1}p^2 = \pi_i(1-p)^2, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παίρνουμε ότι:

$$\pi_i = \frac{p^2}{(1-p)^2}\pi_{i-1} = \frac{p^2}{(1-p)^2}\frac{p^2}{(1-p)^2}\pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i}\pi_0, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του π_0:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i} = 1 \Rightarrow \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{p^2}{(1-p)^2}\right]^i = 1.$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\frac{p^2}{(1-p)^2} < 1 \Leftrightarrow p^2 < (1-p)^2 \Leftrightarrow 1-2p > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}.$$

Επομένως, αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζουμε ότι:

$$\pi_0\frac{1}{1-\frac{p^2}{(1-p)^2}} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-2p}{(1-p)^2} \Rightarrow \pi_i = \frac{1-2p}{(1-p)^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

(3) Έστω $c(i)$ το κόστος ανά ημέρα με αρχικό απόθεμα i. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$c(0) = (1-p)^2\cdot d + 2p(1-p)\cdot 0 + p^2\cdot c = (1-p)^2 d + p^2 c,$$

$$c(i) = (1-p)^2\cdot(i-1)c + 2p(1-p)\cdot ic + p^2\cdot(i+1)c = (i+2p-1)c, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i c(i) = \frac{1-2p}{(1-p)^2}\left[(1-p)^2 d + p^2 c\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-2p}{(1-p)^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i}(i+2p-1)c$$

$$= \frac{1-2p}{(1-p)^2}\left[(1-p)^2 d + p^2 c\right] + c\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{1-2p}{(1-p)^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i}$$
$$- (1-2p)c\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-2p}{(1-p)^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2i}$$
$$= \frac{1-2p}{(1-p)^2}\left[(1-p)^2 d + p^2 c\right] + \frac{p^2 c}{1-2p} - \frac{(1-2p)p^2 c}{(1-p)^2} = (1-2p)d + \frac{p^2 c}{1-2p}.$$

Άσκηση 5.3. Η $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_N \\ a_N & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_N & a_0 & a_2 & \cdots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_N & a_0 & \cdots & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι διπλά στοχαστικός, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του είναι μονάδα. Επομένως, η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας θα είναι η διακριτή ομοιόμορφη στον χώρο καταστάσεων, δηλαδή:

$$\pi_i = \frac{1}{N+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Για να το επαληθεύσουμε, εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας για $j = 0, 1, \ldots, N$:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{j} a_{j-i} + \frac{1}{N+1}\sum_{i=j+1}^{N} a_{N+1+j-i} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{N} a_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k = 1,$$

το οποίο ισχύει. Εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη, θα είναι και θετικά επαναληπτική, οπότε θα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή την οποία προσδιορίσαμε. Έστω $c(i)$ το κόστος ανά ημέρα παραμονής στην πόλη i. Τότε, γνωρίζουμε ότι:

$$c(i) = \begin{cases} c_0, & i = 0 \\ c, & i = 1, 2, \ldots, N \end{cases}.$$

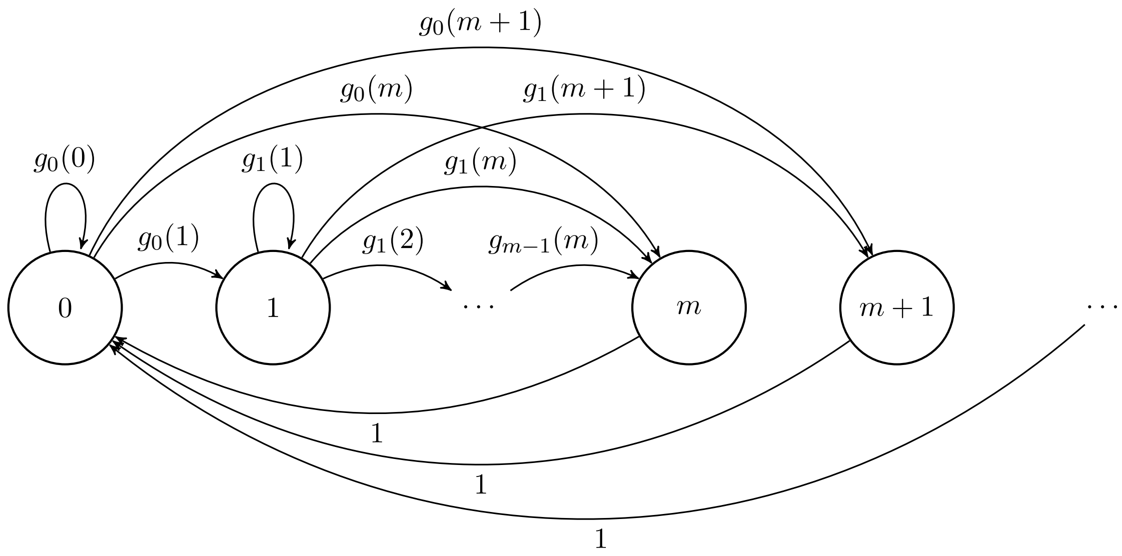
Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i c(i) = \frac{c_0 + Nc}{N+1}.$$

Άσκηση 5.4. (1) Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$P\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i\right)=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)$$
$$=\begin{cases} g_i(j), & i<m, \quad j \geqslant i \\ 1, & i \geqslant m, \quad j=0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



(2) Για να είναι η Μαρκοβιανή αλυσίδα αδιαχώριστη, αρκεί να ισχύει ότι $g_0(j)>0$ για $j=1,2,\ldots$. Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_0=g_0(0)\pi_0+\sum_{i=m}^{\infty}\pi_i \Rightarrow \pi_0=g_0(0)\pi_0+1-\sum_{i=0}^{m-1}\pi_i,$$

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{j}\pi_i g_i(j), \quad j=1,2,\ldots,m-1,$$

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{m-1}\pi_i g_i(j), \quad j=m,m+1,\ldots.$$

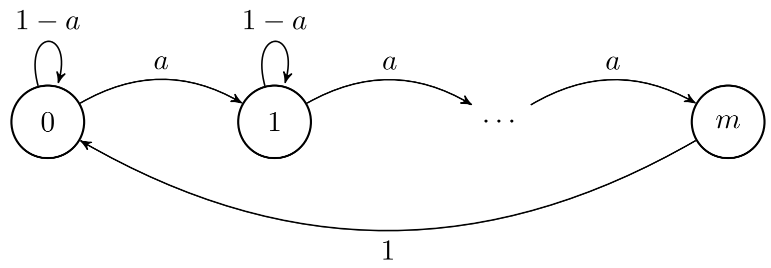
(3) Έστω $c(i)$ το κόστος ανά ημέρα λειτουργίας της μηχανής στην κατάσταση i. Τότε, γνωρίζουμε ότι:

$$c(i)=\begin{cases} b(i), & i<m \\ b(i)+r, & i\geqslant m \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i c(i) = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i b(i) + \sum_{i=m}^{\infty} \pi_i \left[b(i) + r\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b(i) + \left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i\right) r.$$

(4) Παρατηρούμε ότι τώρα ο χώρος καταστάσεων $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\begin{cases} \pi_0 = (1-a)\pi_0 + \pi_m, \\ \pi_j = a\pi_{j-1} + (1-a)\pi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ \pi_m = a\pi_{m-1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_{m-1}, \\ \pi_m = a\pi_0. \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του π_0:

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1 \Rightarrow m\pi_0 + a\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \cdots \pi_{m-1} = \frac{1}{m+a}, \quad \pi_m = \frac{a}{m+a}.$$

Σχετικά με το κόστος ανά ημέρα, γνωρίζουμε ότι:

$$c(i) = \begin{cases} 1 - b^i, & i < m \\ 1 - b^m + r, & i = m \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \pi_i c(i) &= \frac{1}{m+a} \sum_{i=0}^{m-1} \left(1 - b^i\right) + \frac{a}{m+a} \left(1 - b^m + r\right) \\ &= \frac{1}{m+a} \left(m - \frac{1-b^m}{1-b}\right) + \frac{a}{m+a} \left(1 - b^m + r\right). \end{aligned}$$

Άσκηση 5.5. Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια μίας τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πιθανότητας $(\alpha_i)_{i\geqslant 0}$ ως:

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \pi_i \Rightarrow \pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} \alpha_k \pi_i,$$

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \pi_{j-1+i}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\pi_j = z^j$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$z^j = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^{j-1+i} \Rightarrow z = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i \Rightarrow z = A(z).$$

Επομένως, θέλουμε η εξίσωση $A(z) = z$ να έχει λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. Γνωρίζουμε ότι $A(0) = \alpha_0 \in (0,1)$ και $A(1) = 1$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η $A(z)$ είναι αύξουσα και κυρτή στο διάστημα $[0,1]$ ως πιθανογεννήτρια. Προκειμένου το γράφημα της $A(z)$ να τέμνει την ευθεία $y = x$ στο εσωτερικό του ορθογωνίου $[0,1] \times [0,1]$, θα πρέπει η εφαπτομένη της $A(z)$ στο σημείο $z = 1$ να έχει μεγαλύτερη κλίση από την ευθεία $y = x$, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ότι $A'(1) > 1$. Όμως,

$$A'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i i z^{i-1} \Rightarrow A'(1) = \sum_{i=0}^{\infty} i\alpha_i \Rightarrow A'(1) = \mu.$$

Δηλαδή, μία ικανή συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι να ισχύει ότι $\mu > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει $p \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\pi_j = c_0 p^j$ για $j = 0, 1, \ldots$. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του c_0:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow c_0 \sum_{j=0}^{\infty} p^j = 1 \Rightarrow \frac{c_0}{1-p} = 1 \Rightarrow c_0 = 1 - p \Rightarrow \pi_j = (1-p)p^j, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Άσκηση 5.6. Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_j = \beta_j \pi_0 + \sum_{i=1}^{j+1} \alpha_{j+1-i} \pi_i, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Πολλαπλασιάζουμε την j-οστή εξίσωση επί z^j και τις αθροίζουμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \pi_0 z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \alpha_{j+1-i} \pi_i z^j \Rightarrow \Pi(z) = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} \alpha_{j+1-i} \pi_i z^j \overset{k=j+1-i}{\Rightarrow}$$

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{k+i-1} \Rightarrow \Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^{i-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^{i-1} A(z) \Rightarrow \Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{A(z)}{z} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^i \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{A(z)}{z}\left[\Pi(z) - \pi_0\right] \Rightarrow \Pi(z) = \frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)}\pi_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $\Pi(1) = A(1) = B(1) = 1$ και η $\Pi(z)$ είναι συνεχής. Σύμφωνα με τα δεδομένα, ισχύει ότι $A'(1) = \mu$ και $B'(1) = \nu$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l'Hôpital, παίρνουμε ότι:

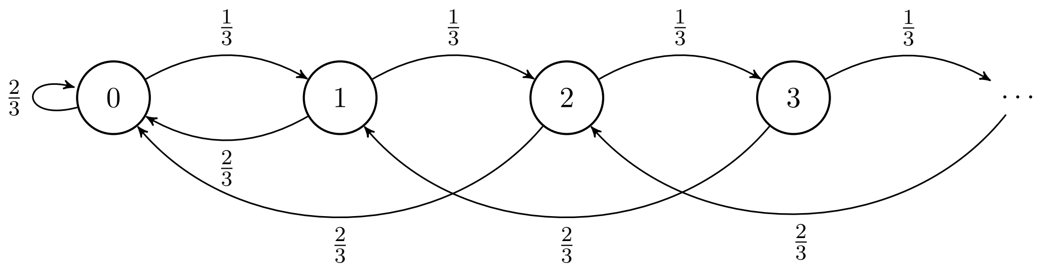
$$\lim_{z\to 1}\Pi(z) = 1 \Rightarrow \lim_{z\to 1}\frac{B(z) + zB'(z) - A'(z)}{1 - A'(z)}\pi_0 = 1 \Rightarrow \frac{B(1) + B'(1) - A'(1)}{1 - A'(1)}\pi_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\nu + 1 - \mu}{1 - \mu}\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1 - \mu}{\nu + 1 - \mu}.$$

Επομένως, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι να ισχύει ότι $\pi_0 > 0$, δηλαδή ότι $\mu < 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, καταλήγουμε ότι:

$$\Pi(z) = \frac{1 - \mu}{\nu + 1 - \mu}\frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)}.$$

Άσκηση 5.7. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_0 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2,$$

$$\pi_j = \frac{1}{3}\pi_{j-1} + \frac{2}{3}\pi_{j+2}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\pi_j = \lambda^j$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$\lambda^j = \frac{1}{3}\lambda^{j-1} + \frac{2}{3}\lambda^{j+2} \Rightarrow 3\lambda = 1 + 2\lambda^3 \Rightarrow (\lambda - 1)\left(2\lambda^2 + 2\lambda - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

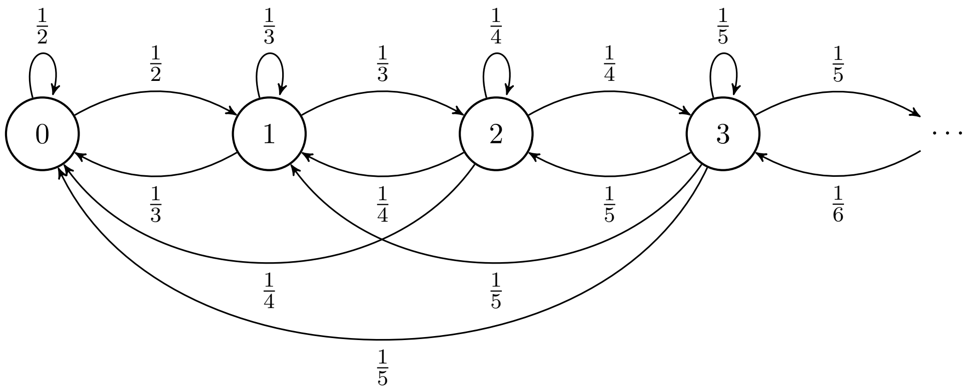
$$\pi_j = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j + c_3\lambda_3^j.$$

Παρατηρούμε ότι $|\lambda_2| > 1$ και $|\lambda_3| < 1$, οπότε θα πρέπει να ισχύει ότι $c_1 = c_2 = 0$. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του c_3:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1 \Rightarrow c_3\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_3^j = 1 \Rightarrow \frac{c_3}{1 - \lambda_3} = 1 \Rightarrow c_3 = 1 - \lambda_3 \Rightarrow \pi_j = (1 - \lambda_3)\lambda_3^j, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μοναδική γνήσια θετική στάσιμη κατανομή, συμπεραίνουμε ότι είναι θετικά επαναληπτική.

Άσκηση 5.8. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια μίας τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πιθανότητας $(\pi_i)_{i\geqslant 0}$ ως:

$$\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2},$$

$$\pi_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Πολλαπλασιάζουμε την j-οστή εξίσωση επί z^j και τις αθροίζουμε:

$$\pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} z^j \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\pi_i}{i+2} z^j \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} \sum_{j=1}^{i+1} z^j \Rightarrow \Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} \sum_{k=0}^{i} z^{k+1} \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} \sum_{k=0}^{i} z^k \Rightarrow \Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} \frac{1 - z^{i+1}}{1 - z} \Rightarrow$$

$$(1-z)\Pi(z) = (1-z) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} + z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i z^{i+2}}{i+2} \Rightarrow (1-z)\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i z^{i+2}}{i+2} \Rightarrow$$

$$-\Pi(z) + (1-z)\Pi'(z) = -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^{i+1} \Rightarrow -\Pi(z) + (1-z)\Pi'(z) = -z \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i \Rightarrow$$

$$-\Pi(z) + (1-z)\Pi'(z) = -z\Pi(z) \Rightarrow \Pi'(z) = \Pi(z) \Rightarrow \Pi(z) = c_0 e^z.$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των πιθανογεννητριών, γνωρίζουμε ότι $\Pi(1) = 1$, οπότε παίρνουμε ότι:

$$c_0 e = 1 \Rightarrow c_0 = e^{-1} \Rightarrow \Pi(z) = e^{-1}e^z \Rightarrow \Pi(z) = e^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!} \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{j!}z^j \Rightarrow \pi_j = \frac{e^{-1}}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

δηλαδή η στάσιμη κατανομή είναι Poisson με παράμετρο 1. Εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μοναδική γνήσια θετική στάσιμη κατανομή, συμπεραίνουμε ότι είναι θετικά επαναληπτική.

6 Αντίστροφες Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου και Αντιστρέψιμες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Άσκηση 6.1. (1) Έστω X_n η θέση του Βασιλιά μετά τη n-οστή κίνηση και $d(i)$ το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων του τετραγώνου i, δηλαδή των τετραγώνων στα οποία μπορεί να μετακινηθεί ο Βασιλιάς ξεκινώντας από το τετράγωνο i. Τότε,

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \begin{cases} \frac{1}{d(i)}, & j \text{ γειτονικό του } i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Έστω ένα κύκλος καταστάσεων της μορφής $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_{n-1} \to i_0$. Τότε,

$$\begin{aligned} p_{i_0 i_1}p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}p_{i_{n-1}i_0} &= \frac{1}{d(i_0)}\frac{1}{d(i_1)}\cdots\frac{1}{d(i_{n-2})}\frac{1}{d(i_{n-1})} \\ &= \frac{1}{d(i_0)}\frac{1}{d(i_{n-1})}\cdots\frac{1}{d(i_2)}\frac{1}{d(i_1)} = p_{i_0 i_{n-1}}p_{i_{n-1}i_{n-2}}\cdots p_{i_2 i_1}p_{i_1 i_0}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο αντιστρεψιμότητας του Kolmogorov, η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αντιστρέψιμη. Επομένως, εφαρμόζουμε τις εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \Rightarrow \frac{\pi_i}{d(i)} = \frac{\pi_j}{d(j)} \Rightarrow \frac{\pi_i}{d(i)} = c_0 \Rightarrow \pi_i = c_0 d(i).$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του c_0:

$$\sum_j \pi_j = 1 \Rightarrow c_0\sum_j d(j) = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sum_j d(j)} \Rightarrow \pi_i = \frac{d(i)}{\sum_j d(j)}.$$

Στην περίπτωση του Βασιλιά, γνωρίζουμε ότι:

$$d(i) = \begin{cases} 3, & i = \mathrm{A1, A8, H1, H8} \\ 5, & i = \mathrm{A2, \ldots, A7, B1, \ldots, G1, B8, \ldots, G8, H2, \ldots, H7} \\ 8, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

δηλαδή υπάρχουν 4 τετράγωνα με 3 γείτονες, 24 τετράγωνα με 5 γείτονες, ενώ τα υπόλοιπα 36 τετράγωνα έχουν 8 γείτονες. Επομένως,

$$\sum_j d(j) = 4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 420.$$

8

7

6

5

4

3

2

1

A B C D E F G H

Συνεπώς, ο μακροπρόθεσμος μέσος χρόνος επανόδου του Βασιλιά στην κάτω δεξιά γωνία της σκακιέρας θα είναι:

$$m_{\mathrm{H1}} = \frac{1}{\pi_{\mathrm{H1}}} = \frac{1}{d\,(\mathrm{H1})} \sum_j d(j) = \frac{420}{3} = 140.$$

(2) Στην περίπτωση του Ίππου, γνωρίζουμε ότι:

$$d(i) = \begin{cases} 2, & i = \mathrm{A1}, \mathrm{A8}, \mathrm{H1}, \mathrm{H8} \\ 3, & i = \mathrm{A2}, \mathrm{A7}, \mathrm{B1}, \mathrm{G1}, \mathrm{B8}, \mathrm{G8}, \mathrm{H2}, \mathrm{H7} \\ 4, & i = \mathrm{B2}, \mathrm{B7}, \mathrm{G2}, \mathrm{G7}, \mathrm{A3}, \ldots, \mathrm{A6}, \mathrm{C1}, \ldots, \mathrm{F1}, \mathrm{C8}, \ldots, \mathrm{F8}, \mathrm{H3}, \ldots, \mathrm{H6} \\ 6, & i = \mathrm{B3}, \ldots, \mathrm{B6}, \mathrm{C2}, \ldots, \mathrm{F2}, \mathrm{C7}, \ldots, \mathrm{F7}, \mathrm{G3}, \ldots, \mathrm{G6} \\ 8, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

δηλαδή υπάρχουν 4 τετράγωνα με 2 γείτονες, 8 τετράγωνα με 3 γείτονες, 20 τετράγωνα με 4 γείτονες, 16 τετράγωνα με 6 γείτονες, ενώ τα υπόλοιπα 16 τετράγωνα έχουν 8 γείτονες. Επομένως,

$$\sum_j d(j) = 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336.$$

Συνεπώς, ο μακροπρόθεσμος μέσος χρόνος επανόδου του Ίππου στην κάτω δεξιά γωνία της σκακιέρας θα είναι:

$$m_{\mathrm{H1}} = \frac{1}{\pi_{\mathrm{H1}}} = \frac{1}{d\left(\mathrm{H1}\right)} \sum_j d(j) = \frac{336}{2} = 168.$$

Ο Αξιωματικός κινείται μόνο επάνω στα μισά τετράγωνα της σκακιέρας, οπότε παίρνουμε ότι:

$$d(i) = \begin{cases} 13, & i = \mathrm{D5}, \mathrm{E4} \\ 11, & i = \mathrm{C4}, \mathrm{C6}, \mathrm{D3}, \mathrm{E6}, \mathrm{F3}, \mathrm{F5} \\ 9, & i = \mathrm{B3}, \mathrm{B5}, \mathrm{B7}, \mathrm{C2}, \mathrm{D7}, \mathrm{E2}, \mathrm{F7}, \mathrm{G2}, \mathrm{G4}, \mathrm{G6} \\ 7, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

δηλαδή υπάρχουν 2 τετράγωνα με 13 γείτονες, 6 τετράγωνα με 11 γείτονες, 10 τετράγωνα με 9 γείτονες, ενώ τα υπόλοιπα 14 τετράγωνα έχουν 7 γείτονες. Επομένως,

$$\sum_j d(j) = 2 \cdot 13 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 9 + 14 \cdot 7 = 280.$$

Συνεπώς, ο μακροπρόθεσμος μέσος χρόνος επανόδου του Αξιωματικού στην κάτω δεξιά γωνία της σκακιέρας θα είναι:

$$m_{\mathrm{H1}} = \frac{1}{\pi_{\mathrm{H1}}} = \frac{1}{d\left(\mathrm{H1}\right)} \sum_j d(j) = \frac{280}{7} = 40.$$

***Άσκηση* 6.2.** (1) Γνωρίζουμε ότι το μακροπρόθεσμο ποσοστό περιόδων όπου η Μαρκοβιανή αλυσίδα επισκέπτεται μία κατάσταση ισούται με τη στάσιμη πιθανότητα αυτής της κατάστασης. Έχουμε δείξει ότι:

$$\pi_i = \frac{1}{N+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

(2) Σχετικά με τις πιθανότητες μετάβασης της αντίστροφης Μαρκοβιανής αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\cancel{\pi_i} \widehat{p}_{ij} = \cancel{\pi_j} p_{ji} \Rightarrow \widehat{p}_{ij} = p_{ji} \Rightarrow \widehat{p}_{ij} = \begin{cases} a_{i-j}, & i \geqslant j \\ a_{N+1+i-j}, & i < j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, N.$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^{\mathrm{T}}$.

(3) Γνωρίζουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $\widehat{p}_{ij} = p_{ij}$ για κάθε $i, j = 0, 1, \ldots, N$. Επομένως, αρκεί να ισχύει ότι:

$$a_k = a_{N+1-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor.$$

7 Γενικές Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

Άσκηση 7.1. Έστω ότι η κατανομή $(\pi_i)_{i\in S}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Θεωρούμε τα μονοσύνολα $T = \{j\}$ για $j \in S$ και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας:

$$\sum_{i\neq j} \pi_j p_{ji} = \sum_{i\neq j} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \pi_j \sum_{i\neq j} p_{ji} = \sum_{i\neq j} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \pi_j \left(1 - p_{jj}\right) = \sum_{i\neq j} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\pi_j = \pi_j p_{jj} + \sum_{i\neq j} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}.$$

Καταλήξαμε ότι η κατανομή $(\pi_i)_{i\in S}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας, οπότε είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Έστω ότι η κατανομή $(\pi_i)_{i\in S}$ είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{i\in S} p_{ji} = 1.$$

Θεωρούμε ένα σύνολο $T \subseteq S$. Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \pi_j \sum_{i\in S} p_{ji} = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \sum_{j\in T}\sum_{i\in S} \pi_j p_{ji} = \sum_{j\in T}\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in T} \pi_j p_{ji} + \sum_{i\in T^c} \pi_j p_{ji}\right) = \sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in T} \pi_i p_{ij} + \sum_{i\in T^c} \pi_i p_{ij}\right) \Rightarrow$$

$$\cancel{\sum_{j\in T}\sum_{i\in T} \pi_j p_{ji}} + \sum_{j\in T}\sum_{i\in T^c} \pi_j p_{ji} = \cancel{\sum_{j\in T}\sum_{i\in T} \pi_i p_{ij}} + \sum_{j\in T}\sum_{i\in T^c} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \sum_{j\in T}\sum_{i\in T^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{j\in T}\sum_{i\in T^c} \pi_i p_{ij}.$$

Άσκηση 7.2. (1) Παρατηρούμε ότι $(X_1, X_2, \ldots, X_N \mid X_1 = j) \overset{d}{=} (X_0, X_1, \ldots, X_{N-1} \mid X_0 = j)$.
Αρχικά, βλέπουμε ότι $\phi_i^{(0)} = c(i)$ για $i \in S$. Για $N \geqslant 1$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\phi_i^{(N)} &= E\left[\sum_{n=0}^{N} a^n c(X_n) \mid X_0 = i\right] = E\left[c(X_0) + \sum_{n=1}^{N} a^n c(X_n) \mid X_0 = i\right] \\
&= c(i) + E\left[\sum_{n=1}^{N} a^n c(X_n) \mid X_0 = i\right] = c(i) + E\left[E\left(\sum_{n=1}^{N} a^n c(X_n) \mid X_0 = i, X_1\right)\right] \\
&= c(i) + \sum_{j\in S} P\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right) E\left[\sum_{n=1}^{N} a^n c(X_n) \mid X_0 = i, X_1 = j\right] \\
&= c(i) + \sum_{j\in S} p_{ij} E\left[\sum_{n=1}^{N} a^n c(X_n) \mid X_1 = j\right] = c(i) + \sum_{j\in S} p_{ij} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} a^{k+1} c(X_k) \mid X_0 = j\right] \\
&= c(i) + a\sum_{j\in S} p_{ij} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} a^k c(X_k) \mid X_0 = j\right] = c(i) + a\sum_{j\in S} p_{ij}\phi_j^{(N-1)}.
\end{aligned}$$

(2) Αρχικά, βλέπουμε ότι $g_i^{(0)} = c(i)$ για $i \in S$. Για $N \geqslant 1$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
g_i^{(N)} &= \frac{1}{N+1} E\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n) \mid X_0 = i\right] = \frac{1}{N+1} E\left[c(X_0) + \sum_{n=1}^{N} c(X_n) \mid X_0 = i\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{1}{N+1} E\left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n) \mid X_0 = i\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{1}{N+1} E\left[E\left(\sum_{n=1}^{N} c(X_n) \mid X_0 = i, X_1\right)\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j\in S} P\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right) E\left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n) \mid X_0 = i, X_1 = j\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j\in S} p_{ij} E\left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n) \mid X_1 = j\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j\in S} p_{ij} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} c(X_k) \mid X_0 = j\right] \\
&= \frac{c(i)}{N+1} + \frac{N}{N+1} \sum_{j\in S} p_{ij} \frac{1}{N} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} c(X_k) \mid X_0 = j\right] = \frac{c(i)}{N+1} + \frac{N}{N+1} \sum_{j\in S} p_{ij} g_j^{(N-1)}.
\end{aligned}$$

8 Μοντελοποίηση Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου

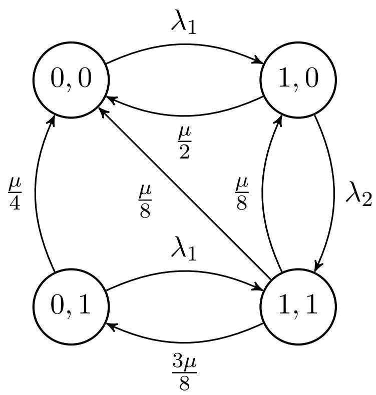
Άσκηση 8.1. Υποθέτουμε ότι:

$$X_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{η } i\text{-οστή μονάδα δε λειτουργεί τη στιγμή } t \\ 1, & \text{η } i\text{-οστή μονάδα λειτουργεί τη στιγμή } t \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{(X_1(t), X_2(t))\}_{t\geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
$(0,0)$	$(1,0)$	$\text{Exp}\left(\lambda_1\right)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$\text{Exp}\left(\frac{\mu}{2}\right)$
	$(1,1)$	$\text{Exp}\left(\lambda_2\right)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$\text{Exp}\left(\frac{\mu}{4}\right)$
	$(1,1)$	$\text{Exp}\left(\lambda_1\right)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$\text{Exp}\left(\frac{\mu}{8}\right)$
	$(1,0)$	$\text{Exp}\left(\frac{\mu}{8}\right)$
	$(0,1)$	$\text{Exp}\left(\frac{3\mu}{8}\right)$

Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{(X_1(t), X_2(t))\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



9 Βασικοί Υπολογισμοί σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου σε Πεπερασμένη Χρονική Στιγμή

Άσκηση 9.1. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
$i \geqslant 1$	$i-1$	$\text{Exp}\,(0.3\mu i)$
	$i+1$	$\text{Exp}\,(0.4\mu i)$
	$i+2$	$\text{Exp}\,(0.3\mu i)$

Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Αρχικά βλέπουμε ότι $m_i(0) = i$ για $i \in \mathbb{N}$. Έπειτα, παρατηρούμε ότι:

$$m_i(t) = E\left[X(t) \mid X(0) = i\right] = \sum_{j=1}^{\infty} jP\left(X(t) = j \mid X(0) = i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij}(t) \Rightarrow m_i'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij}'(t).$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov:

$$p_{i,1}'(t) = -\mu p_{i,1}(t) + 0.6\mu p_{i,2}(t),$$

$$p_{i,j}'(t) = -\mu j p_{i,j}(t) + 0.3\mu(j+1)p_{i,j+1}(t) + 0.4\mu(j-1)p_{i,j-1}(t) + 0.3\mu(j-2)p_{i,j-2}(t), \quad j \geqslant 2.$$

Πολλαπλασιάζουμε την j-οστή εξίσωση επί j και τις αθροίζουμε:

$$p_{i,1}'(t) + \sum_{j=2}^{\infty} jp_{i,j}'(t) = -\mu p_{i,1}(t) - \mu\sum_{j=2}^{\infty} j^2 p_{i,j}(t) + 0.6\mu p_{i,2}(t) + 0.3\mu\sum_{j=2}^{\infty} j(j+1)p_{i,j+1}(t)$$

$$+0.4\mu\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)p_{i,j-1}(t)+0.3\mu\sum_{j=2}^{\infty}j(j-2)p_{i,j-2}(t)\Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}jp'_{ij}(t)=-\mu\sum_{j=1}^{\infty}j^2p_{i,j}(t)+0.3\mu\sum_{j=1}^{\infty}j(j+1)p_{i,j+1}(t)$$
$$+0.4\mu\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)p_{i,j-1}(t)+0.3\mu\sum_{j=2}^{\infty}j(j-2)p_{i,j-2}(t)\Rightarrow$$

$$m'_i(t)=-\mu\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_{i,k}(t)+0.3\mu\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)p_{i,k}(t)$$
$$+0.4\mu\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)p_{i,k}(t)+0.3\mu\sum_{k=1}^{\infty}k(k+2)p_{i,k}(t)\Rightarrow$$

$$m'_i(t)=\cancel{-\mu\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_{i,k}(t)}+\cancel{0.3\mu\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_{i,k}(t)}-0.3\mu\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)+\cancel{0.4\mu\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_{i,k}(t)}$$
$$+0.4\mu\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)+\cancel{0.3\mu\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_{i,k}(t)}+0.6\mu\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)\Rightarrow$$

$$m'_i(t)=0.7\mu\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)\Rightarrow m'_i(t)=0.7\mu m_i(t).$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι $m_i(t)=c_0e^{0.7\mu t}$. Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $m_i(0)=i$ για τον υπολογισμό του c_0:

$$c_0=i\Rightarrow m_i(t)=ie^{0.7\mu t},\quad i\in\mathbb{N},\quad t\geqslant 0.$$

Άσκηση 9.2. Ορίζουμε:

$$Y(t)=X(t)\mod 2=\begin{cases}0, & X(t)\text{ άρτιος}\\ 1, & X(t)\text{ περιττός}\end{cases}.$$

Τότε,

$$P\left(X(t)\text{ περιττός}\mid X(0)=0\right)=P\left(Y(t)=1\mid Y(0)=0\right)=p_{01}(t).$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{Y(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha\\ \beta & -\beta\end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov:

$$\begin{cases}p'_{00}(t)=-\alpha p_{00}(t)+\beta p_{01}(t),\\ p'_{01}(t)=-\beta p_{01}(t)+\alpha p_{00}(t).\end{cases}$$

Όμως, ισχύει ότι $p_{00}(t)+p_{01}(t)=1$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$p'_{01}(t)=-\beta p_{01}(t)+\alpha\left[1-p_{01}(t)\right]\Rightarrow p'_{01}(t)+(\alpha+\beta)p_{01}(t)=\alpha\Rightarrow$$

$$p'_{01}(t)e^{(\alpha+\beta)t}+(\alpha+\beta)p_{01}(t)e^{(\alpha+\beta)t}=\alpha e^{(\alpha+\beta)t}\Rightarrow\left[p_{01}(t)e^{(\alpha+\beta)t}\right]'=\alpha e^{(\alpha+\beta)t}\Rightarrow$$

$$p_{01}(t)e^{(\alpha+\beta)t}=\frac{\alpha e^{(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}+c_0\Rightarrow p_{01}(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+c_0e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$p_{01}(0)=P\left(Y(0)=1\mid Y(0)=0\right)=0.$$

Χρησιμοποιούμε αυτήν την αρχική συνθήκη για τον υπολογισμό του c_0:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+c_0=0\Rightarrow c_0=-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Rightarrow p_{01}(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right],\quad t\geqslant 0.$$

Άσκηση 9.3. Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια:

$$P_i(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}(t)z^j.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial t}=\sum_{j=0}^{\infty}p'_{i,j}(t)z^j,\quad \frac{\partial P_i(t,z)}{\partial z}=\sum_{j=1}^{\infty}jp_{i,j}(t)z^{j-1}.$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov:

$$p'_{i,0}(t)=0,$$

$$p'_{i,j}(t)=-\lambda jp_{i,j}(t)+\lambda(j-1)p_{i,j-1}(t),\quad j=1,2,\ldots.$$

Πολλαπλασιάζουμε την j-οστή εξίσωση επί z^j και τις αθροίζουμε:

$$p'_{i,0}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}p'_{i,j}(t)z^j=-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}jp_{i,j}(t)z^j+\lambda\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)p_{i,j-1}(t)z^j\Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}p'_{i,j}(t)z^j=-\lambda z\sum_{j=1}^{\infty}jp_{i,j}(t)z^{j-1}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)z^{k+1}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial t}=-\lambda z\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial z}+\lambda z^2\sum_{k=1}^{\infty}kp_{i,k}(t)z^{k-1}\Rightarrow\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial t}=-\lambda z\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial z}+\lambda z^2\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial z}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial t}+\lambda z(1-z)\frac{\partial P_i(t,z)}{\partial z}=0.$$

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda z(1-z) \Rightarrow \frac{1}{z(1-z)}\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda \Rightarrow \int \frac{1}{z(1-z)}\frac{\partial z}{\partial t}dt = \int \lambda dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{z(1-z)}dz = \int \lambda dt \Rightarrow \log z - \log(1-z) = \lambda t + c_0 \overset{c_1=e^{c_0}}{\Rightarrow} \frac{z}{1-z} = c_1 e^{\lambda t} \overset{c_2=\frac{1}{c_1}}{\Rightarrow} \frac{1-z}{z}e^{\lambda t} = c_2.$$

Έστω $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε, καταλήγουμε ότι:

$$P_i(t,z) = F_i\left(\frac{1-z}{z}e^{\lambda t}\right).$$

Όμως, παρατηρούμε ότι:

$$P_i(0,z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(0)z^j = \cancelto{1}{p_{ii}(0)}\, z^i + \sum_{j\neq i} \cancelto{0}{p_{ij}(0)}\, z^j = z^i.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$F_i\left(\frac{1-z}{z}\right) = z^i \overset{u=\frac{1-z}{z}}{\Rightarrow} F_i(u) = \left(\frac{1}{1+u}\right)^i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
P_i(t,z) &= \left(\frac{1}{1+\frac{1-z}{z}e^{\lambda t}}\right)^i = \left(\frac{ze^{-\lambda t}}{ze^{-\lambda t}+1-z}\right)^i = \left[\frac{ze^{-\lambda t}}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)z}\right]^i \\
&= \left(ze^{-\lambda t}\right)^i \left[1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)z\right]^{-i} = \left(ze^{-\lambda t}\right)^i \sum_{k=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k}\left[\left(1-e^{-\lambda t}\right)z\right]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{i-1}\left(e^{-\lambda t}\right)^i\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k z^{k+i} \overset{j=k+i}{=} \sum_{j=i}^{\infty}\binom{j-1}{i-1}\left(e^{-\lambda t}\right)^i\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-i} z^j.
\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$p_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1}\left(e^{-\lambda t}\right)^i\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-i}, \quad j = i, i+1, \ldots,$$

δηλαδή η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι αρνητική διωνυμική με πλήθος επιτυχιών i και πιθανότητα επιτυχίας $e^{-\lambda t}$.

Άσκηση 9.4. Αρχικά βλέπουμε ότι $m_i(0) = i$ για $i \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov:

$$p'_{i,0}(t) = -\lambda p_{i,0}(t) + \mu p_{i,1}(t),$$

$$p'_{i,j}(t) = -(\lambda + \mu j)p_{i,j}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t) + \mu(j+1)p_{i,j+1}(t), \quad j \geqslant 1.$$

Πολλαπλασιάζουμε την j-οστή εξίσωση επί j και τις αθροίζουμε:

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp'_{i,j}(t) = -\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda + \mu j)jp_{i,j}(t) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} jp_{i,j-1}(t) + \mu \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)p_{i,j+1}(t) \Rightarrow$$

$$m'_i(t) = -\lambda \sum_{j=1}^{\infty} jp_{i,j}(t) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_{i,j}(t) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_{i,k}(t) + \mu \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_{i,k}(t) \Rightarrow$$

$$m'_i(t) = -\lambda m_i(t) - \mu \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_{i,k}(t)} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} kp_{i,k}(t) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t) + \mu \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_{i,k}(t)} - \mu \sum_{k=1}^{\infty} kp_{i,k}(t) \Rightarrow$$

$$m'_i(t) = -\cancel{\lambda m_i(t)} + \cancel{\lambda m_i(t)} + \lambda - \mu m_i(t) \Rightarrow m'_i(t) + \mu m_i(t) = \lambda \Rightarrow m'_i(t)e^{\mu t} + \mu m_i(t)e^{\mu t} = \lambda e^{\mu t} \Rightarrow$$

$$\left[m_i(t)e^{\mu t}\right]' = \lambda e^{\mu t} \Rightarrow m_i(t)e^{\mu t} = \frac{\lambda e^{\mu t}}{\mu} + c_0 \Rightarrow m_i(t) = \frac{\lambda}{\mu} + c_0 e^{-\mu t}.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $m_i(0) = i$ για τον υπολογισμό του c_0:

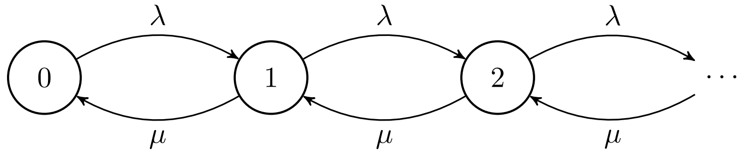
$$\frac{\lambda}{\mu} + c_0 = i \Rightarrow c_0 = i - \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow m_i(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \left(i - \frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-\mu t}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \geqslant 0.$$

10 Υπολογισμοί Στάσιμων και Οριακών Κατανομών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου

Άσκηση 10.1. (1) Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t \geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$\text{Exp}(\lambda)$
$i \geqslant 1$	$i-1$	$\text{Exp}(\mu)$
	$i+1$	$\text{Exp}(\lambda)$

Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, έπεται ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geqslant 0}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



(2) Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας στα σύνολα $A_i = \{0, 1, \ldots, i-1\}$ για $i = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{j \in A_i} \sum_{\ell \in A_i^c} p_j q_{j\ell} = \sum_{\ell \in A_i^c} \sum_{j \in A_i} p_\ell q_{\ell j} \Rightarrow \lambda p_{i-1} = \mu p_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παίρνουμε ότι:

$$p_i = \frac{\lambda}{\mu} p_{i-1} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu} p_{i-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του p_0:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1.$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu.$$

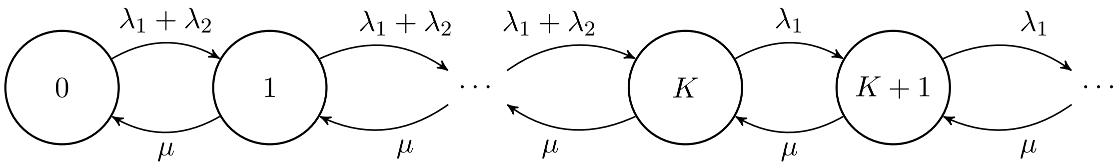
Επομένως, αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζουμε ότι:

$$p_0 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow p_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

(3) Γνωρίζουμε ότι $c(i) = -Ci$ είναι το κέρδος παραμονής i πελατών στο σύστημα και $d(i, i+1) = R$ είναι το κέρδος άφιξης ενός πελάτη στο σύστημα. Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} p_i c(i) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i q_{i,i+1} d(i, i+1) &= -C \sum_{i=0}^{\infty} i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \lambda R \sum_{i=0}^{\infty} p_i \\ &= -C \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} + \lambda R = \lambda R - \frac{\lambda C}{\mu - \lambda}.\end{aligned}$$

Άσκηση 10.2. (1) Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t \geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Ο πίνακας των χρόνων μετάβασης φαίνεται στην επόμενη σελίδα. Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$\text{Exp}\,(\lambda_1+\lambda_2)$
$0<i<K$	$i-1$	$\text{Exp}\,(\mu)$
	$i+1$	$\text{Exp}\,(\lambda_1+\lambda_2)$
$i \geqslant K$	$i-1$	$\text{Exp}\,(\mu)$
	$i+1$	$\text{Exp}\,(\lambda_1)$

(2) Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας στα σύνολα $A_i = \{0, 1, \ldots, i-1\}$ για $i = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{j\in A_i}\sum_{\ell\in A_i^c} p_j q_{j\ell} = \sum_{\ell\in A_i^c}\sum_{j\in A_i} p_\ell q_{\ell j} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2)\, p_{i-1} = \mu p_i, & i = 1, 2, \ldots, K, \\ \lambda_1 p_{i-1} = \mu p_i, & i = K+1, K+2, \ldots. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παίρνουμε ότι:

$$p_i = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu} p_{i-1} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu} p_{i-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^i p_0, \quad i = 0, 1, \ldots, K,$$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\lambda_1}{\mu} p_{i-1} = \frac{\lambda_1}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu} p_{i-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-K} p_K \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-K}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K p_0, \quad i = K, K+1, \ldots. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του p_0:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{i=0}^{K-1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^i + p_0\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K \sum_{i=K}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-K} = 1 \Rightarrow$$

$$p_0 \frac{1-\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K}{1-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}} + p_0\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^j = 1.$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\frac{\lambda_1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda_1 < \mu.$$

Επομένως, αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζουμε ότι:

$$p_0 \frac{1-\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K}{1-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}} + p_0\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K \frac{1}{1-\frac{\lambda_1}{\mu}} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda_1-\lambda_2)\mu^{K-1}}{(\mu-\lambda_1)\mu^K - \lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)^K} \Rightarrow$$

$$p_i = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^i p_0, & i = 0,1,\ldots,K-1 \\ \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-K}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K p_0, & i = K, K+1,\ldots \end{cases}.$$

(3) Γνωρίζουμε ότι:

$$d(i,i+1) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}R_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}R_2, & i = 0,1,\ldots,K-1 \\ R_1, & i = K, K+1,\ldots \end{cases}.$$

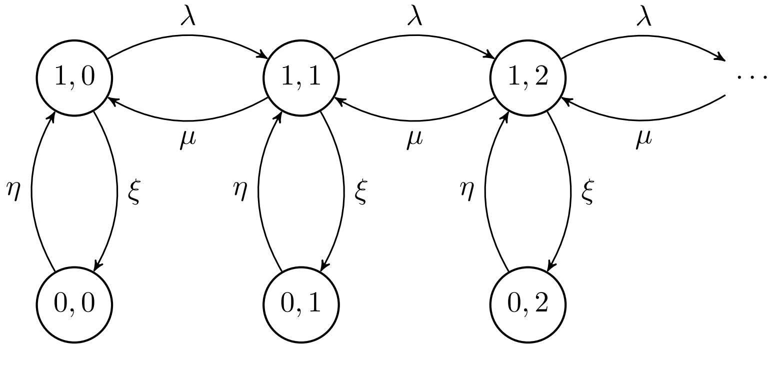
Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i q_{i,i+1} d(i,i+1) &= \sum_{i=0}^{K-1} p_i(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}R_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}R_2\right) + \sum_{i=K}^{\infty} p_i \lambda_1 R_1 \\ &= \lambda_1 R_1 \sum_{i=0}^{\infty} p_i + \lambda_2 R_2 p_0 \sum_{i=0}^{K-1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^i \\ &= \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 p_0 \frac{1-\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^K}{1-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}} \\ &= \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \frac{(\mu-\lambda_1)\left[\mu^K - (\lambda_1+\lambda_2)^K\right]}{(\mu-\lambda_1)\mu^K - \lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)^K}. \end{aligned}$$

Άσκηση 10.3. (1) Ισχύει ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{0,1\} \times \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{(I(t), N(t))\}_{t\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Παραθέτουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
$(0,i)$	$(1,i)$	$\mathrm{Exp}\,(\eta)$
$(1,i)$	$(0,i)$	$\mathrm{Exp}\,(\xi)$
	$(1,i-1)$	$\mathrm{Exp}\,(\mu)$
	$(1,i+1)$	$\mathrm{Exp}\,(\lambda)$

Εφόσον οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, η στοχαστική διαδικασία $\{(I(t), N(t))\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



(2) Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας στα μονοσύνολα $A_i = \{(0,i)\}$ για $i = 0,1,\ldots$ και στα σύνολα $B_i = \{(1,0),(1,1),\ldots,(1,i-1),(0,0),(0,1),\ldots,(0,i-1)\}$ για $i = 1,2,\ldots$:

$$\begin{cases} \eta p_{0,i} = \xi p_{1,i}, \quad i = 0,1,\ldots, \\ \lambda p_{1,i-1} = \mu p_{1,i}, \quad i = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παίρνουμε ότι:

$$p_{1,i} = \frac{\lambda}{\mu} p_{1,i-1} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu} p_{1,i-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_{1,0}, \quad i = 0,1,\ldots,$$

$$p_{0,i} = \frac{\xi}{\eta} p_{1,i} = \frac{\xi}{\eta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_{1,0}, \quad i = 0,1,\ldots.$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του $p_{1,0}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{1,i} + \sum_{i=0}^{\infty} p_{0,i} = 1 \Rightarrow p_{1,0} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + p_{1,0}\frac{\xi}{\eta}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1.$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu.$$

Επομένως, αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζουμε ότι:

$$p_{1,0}\left(1 + \frac{\xi}{\eta}\right)\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1 \Rightarrow p_{1,0} = \frac{\eta}{\eta + \xi}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \Rightarrow$$

$$p_{1,i} = \frac{\eta}{\eta + \xi}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad p_{0,i} = \frac{\xi}{\eta + \xi}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad i = 0,1,\ldots.$$

(3) Έστω $m_{k,i}$ ο μέσος χρόνος μέχρι να αποχωρήσουν i πελάτες από το σύστημα δεδομένου ότι αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση k. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $m_{1,n+1}$. Προφανώς ισχύει ότι $m_{1,0} = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$m_{1,i} = \frac{1}{\mu + \xi} + \frac{\mu}{\mu + \xi} m_{1,i-1} + \frac{\xi}{\mu + \xi} m_{0,i}, \quad i = 1,2,\ldots,$$

$$m_{0,i} = \frac{1}{\eta} + m_{1,i}, \quad i = 0,1,\ldots.$$

Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι:

$$m_{1,i} = \frac{1}{\mu + \xi} + \frac{\mu}{\mu + \xi} m_{1,i-1} + \frac{\xi}{\mu + \xi}\left(\frac{1}{\eta} + m_{1,i}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu}{\mu + \xi} m_{1,i} = \frac{\mu}{\mu + \xi} m_{1,i-1} + \left(1 + \frac{\xi}{\eta}\right)\frac{1}{\mu + \xi} \Rightarrow$$

$$m_{1,i} = m_{1,i-1} + \frac{\eta + \xi}{\eta\mu} = m_{1,i-2} + \frac{\eta + \xi}{\eta\mu} + \frac{\eta + \xi}{\eta\mu} = \cdots = \cancelto{0}{m_{1,0}} + i \cdot \frac{\eta + \xi}{\eta\mu}.$$

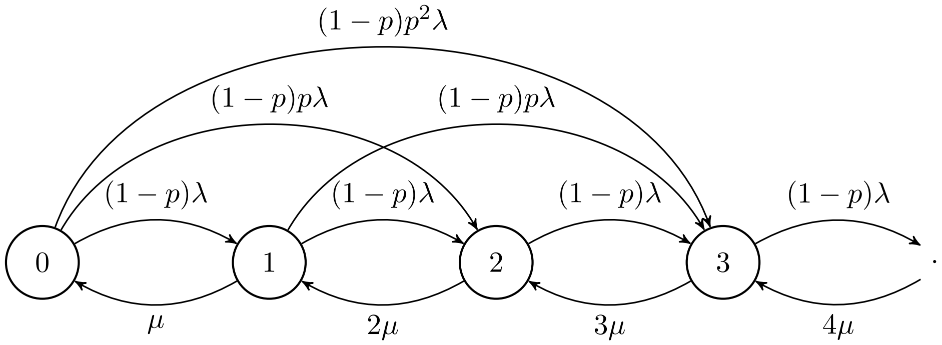
Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$m_{1,n+1} = (n+1)\frac{\eta + \xi}{\eta\mu}.$$

Άσκηση 10.4. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι αριθμήσιμος. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	$j \geqslant 1$	$\text{Exp}\left((1-p)p^{j-1}\lambda\right)$
$i \geqslant 1$	$i-1$	$\text{Exp}\,(i\mu)$
	$j \geqslant i+1$	$\text{Exp}\left((1-p)p^{j-i-1}\lambda\right)$

Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$(\lambda + k\mu)\, p_k = (k+1)\mu p_{k+1} + \lambda(1-p)\sum_{i=0}^{k-1} p^{k-i-1} p_i, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Πολλαπλασιάζουμε την k-οστή εξίσωση επί z^k και τις αθροίζουμε:

$$\lambda p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda + k\mu)\, p_k z^k = \mu p_1 + \mu \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) p_{k+1} z^k + \lambda(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} p^{k-i-1} p_i z^k \Rightarrow$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^k = \mu \sum_{j=1}^{\infty} j p_j z^{j-1} + \lambda(1-p)\sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=i+1}^{\infty} p^{k-i-1} z^k \Rightarrow$$

$$\lambda G(z)+\mu z\sum_{k=1}^{\infty}kp_kz^{k-1}=\mu G'(z)+\lambda(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}p_i\sum_{j=0}^{\infty}p^jz^{j+i+1}\Rightarrow$$

$$\lambda G(z)+\mu zG'(z)=\mu G'(z)+\lambda(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^{i+1}\sum_{j=0}^{\infty}(pz)^j\Rightarrow$$

$$\lambda G(z)+\mu zG'(z)=\mu G'(z)+\lambda(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^{i+1}\frac{1}{1-pz}\Rightarrow$$

$$\lambda G(z)+\mu zG'(z)=\mu G'(z)+\frac{\lambda z(1-p)}{1-pz}\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i\Rightarrow\lambda G(z)+\mu zG'(z)=\mu G'(z)+\frac{\lambda z(1-p)}{1-pz}G(z)\Rightarrow$$

$$\mu(1-z)(1-pz)G'(z)=\left[\lambda(1-pz)-\lambda z(1-p)\right]G(z)\Rightarrow G'(z)=\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{1-pz}G(z).$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{G'(z)}{G(z)}=\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{1-pz}\Rightarrow\int\frac{G'(z)}{G(z)}dz=\int\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{1-pz}dz\Rightarrow$$

$$\log G(z)=-\frac{\lambda}{p\mu}\log(1-pz)+c_0\overset{c_1=e^{c_0}}{\Rightarrow}G(z)=c_1(1-pz)^{-\frac{\lambda}{p\mu}}.$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των πιθανογεννητριών, γνωρίζουμε ότι $G(1)=1$, οπότε παίρνουμε ότι:

$$c_1(1-p)^{-\frac{\lambda}{p\mu}}=1\Rightarrow c_1=(1-p)^{\frac{\lambda}{p\mu}}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}G(z)&=(1-p)^{\frac{\lambda}{p\mu}}(1-pz)^{-\frac{\lambda}{p\mu}}\\&=(1-p)^{\frac{\lambda}{p\mu}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{\lambda}{p\mu}+k-1}{k}(pz)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{\lambda}{p\mu}+k-1}{k}(1-p)^{\frac{\lambda}{p\mu}}p^kz^k\Rightarrow\end{aligned}$$

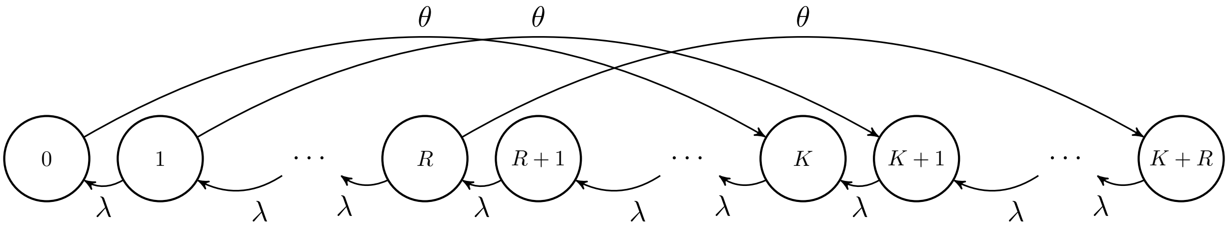
$$p_k=\binom{\frac{\lambda}{p\mu}+k-1}{k}(1-p)^{\frac{\lambda}{p\mu}}p^k,\quad k=0,1,\ldots.$$

δηλαδή η στάσιμη κατανομή είναι αρνητική διωνυμική με πλήθος επιτυχιών $\frac{\lambda}{p\mu}$ και πιθανότητα επιτυχίας $1-p$.

Άσκηση 10.5. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S=\{0,1,\ldots,K+R\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t\geqslant0}$ είναι πεπερασμένος. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των χρόνων μετάβασης:

Τρέχουσα Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	K	$\mathrm{Exp}\,(\theta)$
$1\leqslant i\leqslant R$	$i+K$	$\mathrm{Exp}\,(\theta)$
	$i-1$	$\mathrm{Exp}\,(\lambda)$
$i>R$	$i-1$	$\mathrm{Exp}\,(\lambda)$

Εφόσον όλοι οι χρόνοι μετάβασης είναι εκθετικοί, συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας:

$$\begin{cases} \theta p_0 = \lambda p_1, \\ (\theta+\lambda)p_{j-1} = \lambda p_j, \quad j = 0, 1, \ldots, R+1, \\ \lambda p_{j-1} = \lambda p_j, \quad j = R+2, R+3, \ldots, K, \\ \lambda p_{j-1} = \theta p_{j-K-1} + \lambda p_j, \quad j = K+1, K+2, \ldots, K+R, \\ \lambda p_{K+R} = \theta p_R. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\theta+\lambda}{\lambda} p_{j-1} = \frac{\theta+\lambda}{\lambda}\frac{\theta+\lambda}{\lambda} p_{j-2} = \cdots \\ &= \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-1} p_1 = \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-1} \frac{\theta}{\lambda} p_0, \quad j = 1, 2, \ldots, R+1, \end{aligned}$$

$$p_K = p_{K-1} = \cdots = p_{R+1} = \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} \frac{\theta}{\lambda} p_0,$$

$$p_{K+1} = p_K - \frac{\theta}{\lambda} p_0 = \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} \frac{\theta}{\lambda} p_0 - \frac{\theta}{\lambda} p_0 = \left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} - 1\right] \frac{\theta}{\lambda} p_0,$$

$$\begin{aligned} p_j &= p_{j-1} - \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-2} p_0 \\ &= p_{j-2} - \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-3} p_0 - \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-2} p_0 = \cdots = \\ &= p_{K+1} - \sum_{i=0}^{j-K-2} \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{i} p_0 = \left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} - 1\right] \frac{\theta}{\lambda} p_0 - \frac{1-\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-1}}{1-\frac{\theta+\lambda}{\lambda}} \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 p_0 \\ &= \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} \frac{\theta}{\lambda} p_0 - \cancel{\frac{\theta}{\lambda} p_0} + \cancel{\frac{\theta}{\lambda} p_0} - \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-1} \frac{\theta}{\lambda} p_0 \\ &= \left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} - \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-1}\right] \frac{\theta}{\lambda} p_0, \quad j = K+1, K+2, \ldots, K+R. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης για τον υπολογισμό του p_0:

$$p_0 + \sum_{j=1}^{R} \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-1} \frac{\theta}{\lambda} p_0 + (K-R)\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R} \frac{\theta}{\lambda} p_0$$

$$+\sum_{j=K+1}^{K+R}\left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}-\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-1}\right]\frac{\theta}{\lambda}p_0=1\Rightarrow$$

$$p_0+\cancel{\sum_{\ell=0}^{R-1}\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{\ell}\frac{\theta}{\lambda}}p_0+(K-R)\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}p_0$$

$$+R\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}p_0-\cancel{\sum_{\ell=0}^{R-1}\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{\ell}\frac{\theta}{\lambda}}p_0=1\Rightarrow$$

$$\left[1+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}\right]p_0=1\Rightarrow p_0=\frac{1}{1+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}}\Rightarrow$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{1}{1+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}}, & j=0\\ \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-1}\frac{1}{\frac{\lambda}{\theta}+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}}, & j=1,2,\ldots,R\\ \left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}-1\right]\frac{1}{\frac{\lambda}{\theta}+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}}, & j=R+1,R+2,\ldots,K\\ \left[\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}-\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{j-K-1}\right]\frac{1}{\frac{\lambda}{\theta}+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}}, & j=K+1,K+2,\ldots,K+R\end{cases}.$$

Εφόσον όσες παραγγελίες φτάσουν όσο η αποθήκη είναι άδεια χάνονται, το ποσοστό των χαμένων παραγγελιών στην αποθήκη ισούται με:

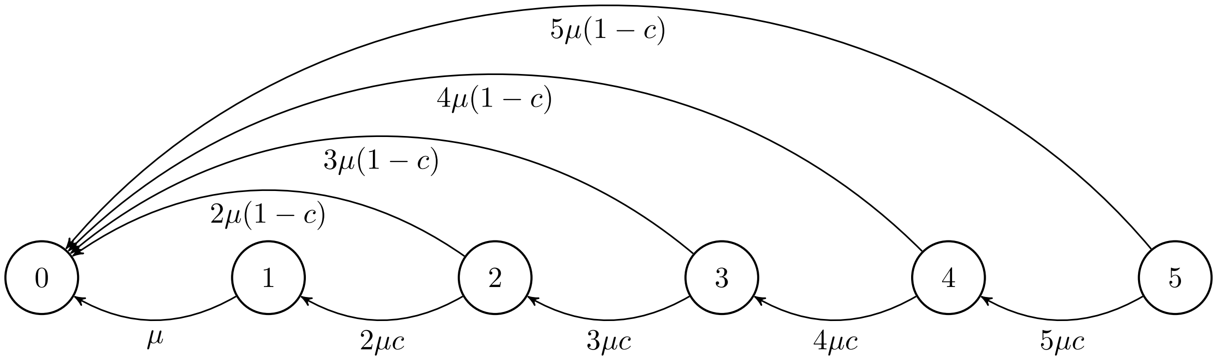
$$p_0=\frac{1}{1+K\left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^{R}\frac{\theta}{\lambda}}.$$

Άσκηση 10.6. Έστω $X(t)$ το πλήθος των μονάδων επεξεργασίας που λειτουργούν τη χρονική στιγμή t. Παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι πεπερασμένος. Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ \mu&-\mu&0&0&0&0\\ 2\mu(1-c)&2\mu c&-2\mu&0&0&0\\ 3\mu(1-c)&0&3\mu c&-3\mu&0&0\\ 4\mu(1-c)&0&0&4\mu c&-4\mu&0\\ 5\mu(1-c)&0&0&0&5\mu c&-5\mu\end{bmatrix}.$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης φαίνεται στην επόμενη σελίδα. Θεωρούμε ότι $T=\min\{t\geqslant 0: X(t)=0\}$ και $m_k=E\left[T\mid X(0)=k\right]$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το m_5. Προφανώς ισχύει ότι $m_0=0$. Επιπλέον, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$m_k=\frac{1}{k\mu}+cm_{k-1}+(1-c)\cancelto{0}{m_0},\quad k=1,2,3,4,5.$$



Αντικαθιστώντας αναδρομικά, παρατηρούμε ότι:

$$m_5 = \frac{1}{5\mu} + cm_4 = \frac{1}{5\mu} + c\left(\frac{1}{4\mu} + cm_3\right) = \cdots = \frac{1}{5\mu} + \frac{c}{4\mu} + \frac{c^2}{3\mu} + \frac{c^3}{2\mu} + \frac{c^4}{\mu}.$$