Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Λύσεις Ασκήσεων του κ. Γκίκα

Βασίλης Κατσιάνος

Περιεχόμενα

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

(1) Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από ένα νόμο της μορφής $f(E, P, A)$ όπου τα μεγέθη E, P και A παριστάνουν, αντίστοιχα, ενέργεια, πίεση και εμβαδόν επιφανείας. Δείξτε ότι υπάρχει ένας ισοδύναμος νόμος της μορφής

$$\frac{PA^{\frac{3}{2}}}{E} = c,$$

όπου $c > 0$ είναι μία θετική σταθερά. Δίδεται ότι το A έχει διαστάσεις της μορφής μήκος^2, το P της μορφής μάζα·χρόνος^{-2} · μήκος^{-1} και το E της μορφής μάζα·χρόνος^{-2} · μήκος^2.

(2) Ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από τις ποσότητες P, l, m, t και ρ, που παριστάνουν, αντίστοιχα, πίεση, μήκος, μάζα, χρόνο και πυκνότητα. Αν υπάρχει ένας φυσικός νόμος της μορφής

$$f(P, l, m, t, \rho) = 0$$

που συσχετίζει αυτές τις ποσότητες. Δείξτε ότι υπάρχει ένας ισοδύναμος νόμος της μορφής

$$G(\frac{l^3\rho}{m}, \frac{t^6P^3}{m^2\rho}) = 0.$$

Δίδεται ότι το t έχει διαστάσεις χρόνου, το l διαστάσεις μήκους, το ρ έχει διαστάσεις της μορφής μάζα·μήκος^{-3} και το P της μορφής μάζα·χρόνος^{-2} · μήκος^{-1}.

(3) Με την μέθοδο των κανονικών διαταραχών βρείτε μια προσέγγιση με δύο όρους των δύο ριζών της εξίσωσης

$$x^2 - \varepsilon x - 4 = 0, \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1.$$

(4) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} my' + 2ay + by^3 = 0, \quad t > 0, \\ y(0) = V_0 \end{aligned}$$

όπου m, a, b, V_0 θετικές σταθερές και $0 < b << 1$. Προσδιορίστε τις κατάλληλες κανονικοποιήσεις στο t και y, έτσι ώστε το παραπάνω πρόβλημα να μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{y}' + \overline{y} + \varepsilon\overline{y}^3 = 0, \quad \bar{t} > 0 \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon = \frac{bV_0^2}{2a} << 1, \\ &\overline{y}(0) = 1. \end{aligned}$$

Ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς την νέα μεταβλητή $\bar{t}$. Τέλος βρείτε μία προσσεγγιστική λύση με δύο όρους για το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών.

(5) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} my'' + ay + by^2 &= 0, \quad t > 0, \\ y(0) &= V_0, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

όπου $m,\ a,\ b, V_0$ θετικές σταθερές και $0 < b << 1$. Προσδιορίστε τις κατάλληλες κανονικοποιήσεις στο t και y, έτσι ώστε το παραπάνω πρόβλημα να μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} \overline{y}'' + \overline{y} + \varepsilon\overline{y}^2 &= 0, \quad \bar{t} > 0 \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon = \frac{bV_0}{a} << 1, \\ \overline{y}(0) &= 1, \\ \overline{y}'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς την νέα μεταβλητή $\bar{t}$. Τέλος βρείτε μία προσεγγιστική λύση με δύο όρους για το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών. Δίδεται ότι

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

1 Διαστατική Ανάλυση, Κανονικοποίηση και Κανονική Διαταραχή

Άσκηση 1. Το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε ανεξάρτητα θεμελιώδη μεγέθη ως προς τα οποία να μπορούν να εκφρασθούν όλες οι παραπάνω διαστατικές ποσότητες. Μία κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών εδώ είναι οι ποσότητες M (μάζα), T (χρόνος) και L (μήκος). Έχουμε:

$$[E] = MT^{-2}L^2, \quad [P] = MT^{-2}L^{-1}, \quad [A] = L^2.$$

Ο πίνακας διαστάσεων είναι:

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ T \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & P & A \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Εδώ έχουμε $m = n = 3$ και η τάξη του πίνακα A είναι 2, αφού η δεύτερη γραμμή του είναι πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής του. Συνεπώς, υπάρχει $3 - 2 = 1$ αδιάστατη ποσότητα, η οποία είναι δυνατόν να σχηματιστεί από τα μεγέθη E, P και A. Αν το π είναι μία τέτοια αδιάστατη ποσότητα, τότε για κάποια επιλογή εκθετών a_1, a_2, a_3 θα έχουμε:

$$1 = [\pi] = [E^{a_1}P^{a_2}A^{a_3}] = M^{a_1}T^{-2a_1}L^{2a_1}M^{a_2}T^{-2a_2}L^{-a_2}L^{2a_3} = M^{a_1+a_2}T^{-2a_1-2a_2}L^{2a_1-a_2+2a_3}.$$

Άρα, οι εκθέτες των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι, παίρνουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 - 2a_2 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}.$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε ότι μία μη-μηδενική λύση του είναι η εξής:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{3}{2}.$$

Η λύση αυτή δίνει την εξής αδιάστατη ποσότητα:

$$\pi = \frac{PA^{\frac{3}{2}}}{E}.$$

Άρα το θεώρημα π εξασφαλίζει ότι ο αρχικός φυσικός νόμος είναι ισοδύναμος με έναν νόμο της μορφής $F(\pi) = 0$. Λύνοντας ως προς π, έχουμε:

$$\frac{PA^{\frac{3}{2}}}{E} = c.$$

Άσκηση 2. Το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε ανεξάρτητα θεμελιώδη μεγέθη ως προς τα οποία να μπορούν να εκφρασθούν όλες οι παραπάνω διαστατικές ποσότητες. Μία κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών εδώ είναι οι ποσότητες M (μάζα), T (χρόνος) και L (μήκος). Έχουμε:

$$[P] = MT^{-2}L^{-1}, \quad [\ell] = L, \quad [m] = M, \quad [t] = T, \quad [\rho] = ML^{-3}.$$

Ο πίνακας διαστάσεων είναι ο εξής:

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ T \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P & \ell & m & t & \rho \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Εδώ έχουμε $m = 5$, $n = 3$ και η τάξη του πίνακα A είναι 3. Συνεπώς, υπάρχουν $5 - 3 = 2$ αδιάστατες ποσότητες, οι οποίες είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα μεγέθη P, ℓ, m, t και ρ. Αν το π είναι μία τέτοια αδιάστατη ποσότητα, τότε για κάποια επιλογή εκθετών a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 = [\pi] &= [P^{a_1}\ell^{a_2}m^{a_3}t^{a_4}\rho^{a_5}] \\ &= M^{a_1}T^{-2a_1}L^{-a_1}L^{a_2}M^{a_3}T^{a_4}M^{a_5}L^{-3a_5} \\ &= M^{a_1+a_3+a_5}T^{-2a_1+a_4}L^{-a_1+a_2-3a_5}. \end{aligned}$$

Άρα, οι εκθέτες των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι, παίρνουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 0 \\ -2a_1 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_2 - 3a_5 = 0 \end{cases}.$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του είναι οι εξής:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 1,$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = -1.$$

Οι λύσεις αυτές δίνουν τις εξής αδιάστατες ποσότητες:

$$\pi_1 = \frac{\rho\ell^3}{m}, \quad \pi_2 = \frac{P^3t^6}{\rho m^2}.$$

Άρα το θεώρημα π εξασφαλίζει ότι ο αρχικός φυσικός νόμος είναι ισοδύναμος με έναν νόμο της μορφής $G(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Άσκηση 3. Αναζητούμε λύσεις της μορφής $x = x_0 + x_1\varepsilon + \cdots$. Αντικαθιστούμε:

$$(x_0 + x_1\varepsilon + \cdots)^2 - \varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + \cdots) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0^2 + 2x_0x_1\varepsilon + x_1^2\varepsilon^2 - x_0\varepsilon - x_1\varepsilon^2 - 4 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x_0^2 - 4\right) + \left(2x_0x_1 - x_0\right)\varepsilon + \left(x_1^2 - x_1\right)\varepsilon^2 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x_0^2 - 4\right) + \left(2x_0x_1 - x_0\right)\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ 2x_0x_1 - x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^{(1)} = -2 + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots, \quad x^{(2)} = 2 + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots.$$

Άσκηση 4. Προφανώς, μία κατάλληλη κανονικοποίηση στο y για την οποία θα ισχύει $\overline{y}(0) = 1$ είναι η εξής:

$$\overline{y}(t) = \frac{y(t)}{V_0}, \quad t > 0.$$

Αυτή η κανονικοποίηση μας δίνει ότι:

$$mV_0\frac{d\overline{y}}{dt} + 2aV_0\overline{y} + bV_0^3\overline{y}^3 = 0 \Rightarrow \frac{m}{2a}\cdot\frac{d\overline{y}}{dt} + \overline{y} + \frac{bV_0^2}{2a}\overline{y}^3 = 0, \quad 0 < \varepsilon = \frac{bV_0^2}{2a} \ll 1.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η εξής κατάλληλη κανονικοποίηση στο t:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} = \frac{m}{2a}\cdot\frac{d\overline{y}}{dt}.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} = \frac{d\overline{y}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\overline{t}} \Rightarrow \frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{m}{2a} \Rightarrow t = \frac{m\overline{t}}{2a} \Rightarrow \overline{t} = \frac{2a}{m}\cdot t > 0.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το αρχικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} + \overline{y} + \varepsilon\overline{y}^3 = 0, \quad \overline{t} > 0, \quad \overline{y}(0) = 1.$$

Αναζητούμε λύση της μορφής $\overline{y} = \overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots$ με $\overline{y}_0(0) = 1$ και $\overline{y}_1(0) = 0$. Αντικαθιστούμε:

$$\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots\right)' + \left(\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots\right) + \varepsilon\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots\right)^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{y}_0' + \overline{y}_1'\varepsilon + \overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \overline{y}_0^3\varepsilon + 3\overline{y}_0^2\overline{y}_1\varepsilon^2 + 3\overline{y}_0\overline{y}_1^2\varepsilon^3 + \overline{y}_1^3\varepsilon^4 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{y}_0' + \overline{y}_0\right) + \left(\overline{y}_1' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^3\right)\varepsilon + 3\overline{y}_0^2\overline{y}_1\varepsilon^2 + 3\overline{y}_0\overline{y}_1^2\varepsilon^3 + \overline{y}_1^3\varepsilon^4 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{y}_0' + \overline{y}_0\right) + \left(\overline{y}_1' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^3\right)\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{y}_0' + \overline{y}_0 = 0, \quad \overline{y}_0(0) = 1 \\ \overline{y}_1' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^3 = 0, \quad \overline{y}_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{y}_0(\overline{t}) = e^{-\overline{t}}, \quad \overline{t} > 0 \\ \overline{y}_1' + \overline{y}_1 + e^{-3\overline{t}} = 0, \quad \overline{y}_1(0) = 0 \end{cases}.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $\overline{y}_1' + \overline{y}_1 = 0$ έχει γενική λύση $ce^{-\overline{t}}$, ενώ η μη-ομογενής εξίσωση $\overline{y}_1' + \overline{y}_1 + e^{-3\overline{t}} = 0$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $Ae^{-3\overline{t}}$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι $A = \frac{1}{2}$, οπότε $\overline{y}_1(\overline{t}) = ce^{-\overline{t}} + \frac{e^{-3\overline{t}}}{2}$. Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $\overline{y}_1(0) = 0$, υπολογίζουμε ότι $c = -\frac{1}{2}$, οπότε $\overline{y}_1(\overline{t}) = \frac{e^{-3\overline{t}} - e^{-\overline{t}}}{2}$. Επομένως,

$$\overline{y}(\overline{t}) = e^{-\overline{t}} + \frac{e^{-3\overline{t}} - e^{-\overline{t}}}{2} \cdot \varepsilon + \cdots, \quad \overline{t} > 0.$$

Άσκηση 5. Προφανώς, μία κατάλληλη κανονικοποίηση στο y για την οποία θα ισχύει $\overline{y}(0) = 1$ είναι η εξής:

$$\overline{y}(t) = \frac{y(t)}{V_0}, \quad t > 0.$$

Αυτή η κανονικοποίηση μας δίνει ότι:

$$mV_0 \frac{d^2\overline{y}}{dt^2} + aV_0\overline{y} + bV_0^2\overline{y}^2 = 0 \Rightarrow \frac{m}{a} \cdot \frac{d^2\overline{y}}{dt^2} + \overline{y} + \frac{bV_0}{a}\overline{y}^2 = 0, \quad 0 < \varepsilon = \frac{bV_0}{a} \ll 1.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η εξής κατάλληλη κανονικοποίηση στο t:

$$\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{t}^2} = \frac{m}{a} \cdot \frac{d^2\overline{y}}{dt^2}.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} = \frac{d\overline{y}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\overline{t}} \Rightarrow \frac{d^2\overline{y}}{d\overline{t}^2} = \frac{d}{d\overline{t}}\frac{d\overline{y}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\overline{t}} + \frac{d\overline{y}}{dt} \cdot \frac{d}{d\overline{t}}\frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{d^2\overline{y}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 + \frac{d\overline{y}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 = \frac{m}{a}, \quad \frac{d^2t}{d\overline{t}^2} = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{a}} \cdot \overline{t} \Rightarrow \overline{t} = \sqrt{\frac{a}{m}} \cdot t > 0.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{t}}(0) = \frac{d\overline{y}}{dt}(0) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}}(0) = \frac{0}{V_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{a}} = 0.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το αρχικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{t}^2} + \overline{y} + \varepsilon\overline{y}^2 = 0, \quad \overline{t} > 0, \quad \overline{y}(0) = 1, \quad \overline{y}'(0) = 0.$$

Αναζητούμε λύση της μορφής $\overline{y} = \overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots$ με $\overline{y}_0(0) = 1$, $\overline{y}_1(0) = 0$, $\overline{y}_0'(0) = 0$ και $\overline{y}_1'(0) = 0$. Αντικαθιστούμε:

$$(\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots)'' + (\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots) + \varepsilon\,(\overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \cdots)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{y}_0'' + \overline{y}_1''\varepsilon + \overline{y}_0 + \overline{y}_1\varepsilon + \overline{y}_0^2\varepsilon + 2\overline{y}_0\overline{y}_1\varepsilon^2 + \overline{y}_1^2\varepsilon^3 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{y}_0'' + \overline{y}_0\right) + \left(\overline{y}_1'' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^2\right)\varepsilon + 2\overline{y}_0\overline{y}_1\varepsilon^2 + \overline{y}_1^2\varepsilon^3 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{y}_0'' + \overline{y}_0\right) + \left(\overline{y}_1'' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^2\right)\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{y}_0'' + \overline{y}_0 = 0, \quad \overline{y}_0(0) = 1, \quad \overline{y}_0'(0) = 0 \\ \overline{y}_1'' + \overline{y}_1 + \overline{y}_0^2 = 0, \quad \overline{y}_1(0) = 0, \quad \overline{y}_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{y}_0(\overline{t}) = \cos\overline{t}, \quad \overline{t} > 0 \\ \overline{y}_1'' + \overline{y}_1 + \cos^2\overline{t} = 0, \quad \overline{y}_1(0) = 0, \quad \overline{y}_1'(0) = 0 \end{cases} .$$

Η ομογενής εξίσωση $\overline{y}_1''+\overline{y}_1 = 0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\overline{t}+c_2\sin\overline{t}$, ενώ η μη-ομογενής εξίσωση $\overline{y}_1''+\overline{y}_1+\frac{1+\cos(2\overline{t})}{2} = 0$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $A+B\cos(2\overline{t})+C\sin(2\overline{t})$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι $A = -\frac{1}{2}$, $= \frac{1}{6}$ και $C = 0$, οπότε $\overline{y}_1(\overline{t}) = c_1\cos\overline{t} + c_2\sin\overline{t} - \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\overline{t})}{6}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $\overline{y}_1(0) = 0$ και $\overline{y}_1'(0) = 0$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \frac{1}{3}$ και $c_2 = 0$, οπότε $\overline{y}_1(\overline{t}) = \frac{\cos\overline{t}}{3} + \frac{\cos(2\overline{t})}{6} - \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\overline{y}(\overline{t}) = \cos\overline{t} + \left[\frac{\cos\overline{t}}{3} + \frac{\cos(2\overline{t})}{6} - \frac{1}{2}\right]\varepsilon + \cdots, \quad \overline{t} > 0.$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών με δύο όρους για τα ακόλουθα προβλήματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Poincaré-Lindstedt:

α)

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \varepsilon y(t)(y')^2(t), \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1 \text{ και } t > 0, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \varepsilon y(t)(1 - (y')^2(t)), \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1 \text{ και } t > 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \varepsilon y^3(t), \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1 \text{ και } t > 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών

$$\psi(\tau) = y(\frac{\tau}{\omega}), \quad \text{όπου} \quad \tau = \omega t \text{ και } \omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + ...$$

και θεωρώντας ότι η λύση είναι της μορφής $\psi(\tau) = \psi_0(\tau) + \varepsilon\psi_1(\tau) + ...$, τότε οι αρχικές τιμές γίνονται

$$\psi_0(0) + \varepsilon\psi_1(0) + ... = 0 \Rightarrow \psi_0(0) = \psi_1(0) = 0$$

και

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + ...)(\psi_0'(0) + \varepsilon\psi_1'(0) + ...) = 1 \Rightarrow \psi_0'(0) = 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon\omega_1\psi_0'(0) + \varepsilon\psi_1'(0) = 0.$$

Δίδεται ότι

$$\begin{aligned} \cos^3(\tau) &= \frac{1}{4}(\cos(3\tau) + 3\cos(\tau)), \\ \sin^3(\tau) &= \frac{1}{4}(3\sin(\tau) - \sin(3\tau)). \end{aligned}$$

2 Η Μέθοδος Poincaré - Lindstedt

Άσκηση 1. Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{dy}{dt}(0)\cdot\frac{dt}{d\tau}(0) = 0\cdot\frac{1}{1+w_1\varepsilon+\cdots} = 0.$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2} + y = \varepsilon y\cdot(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2, \quad \tau > 0,$$

$$y(0) = 2, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\left(1+2w_1\varepsilon+w_1^2\varepsilon^2+\cdots\right)\left(y_0''+y_1''\varepsilon+\cdots\right)+(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\\ &\qquad = \varepsilon\left(1+2w_1\varepsilon+w_1^2\varepsilon^2+\cdots\right)(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\left(y_0'+y_1'\varepsilon+\cdots\right)^2 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(y_0''+y_1''\varepsilon+2w_1y_0''\varepsilon+2w_1y_1''\varepsilon^2+\cdots\right)+(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\\ &\qquad = \left(y_0\varepsilon+y_1\varepsilon^2+2w_1y_0\varepsilon^2+2w_1y_1\varepsilon^3+\cdots\right)\left[\left(y_0'\right)^2+2y_0'y_1'\varepsilon+\left(y_1'\right)^2\varepsilon^2+\cdots\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(y_0''+y_0\right)+\left(y_1''+2w_1y_0''+y_1\right)\varepsilon+2w_1y_1''\varepsilon^2+\cdots\\ &\qquad = y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon+2y_0y_0'y_1'\varepsilon^2+y_1\left(y_0'\right)^2\varepsilon^2+2w_1y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon^2+\cdots \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left(y_0''+y_0\right)+\left(y_1''+2w_1y_0''+y_1\right)\varepsilon+\cdots = y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon+\cdots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0''+y_0=0, \quad y_0(0)=2, \quad y_0'(0)=0 \\ y_1''+y_1 = y_0\left(y_0'\right)^2 - 2w_1y_0'', \quad y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0(\tau) = 2\cos\tau, \quad \tau>0 \\ y_1''+y_1 = 8\cos\tau\sin^2\tau + 4w_1\cos\tau, \quad y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=0 \end{cases}.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$y_1'' + y_1 = 8\cos\tau\left(1-\cos^2\tau\right) + 4w_1\cos\tau \Rightarrow$$

$$y_1'' + y_1 = 4(w_1+2)\cos\tau - 8\cos^3\tau \Rightarrow$$

$$y_1'' + y_1 = 4(w_1+2)\cos\tau - 8\cdot\frac{\cos(3\tau)+3\cos\tau}{4} \Rightarrow$$

$$y_1'' + y_1 = 2(2w_1+1)\cos\tau - 2\cos(3\tau).$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1''+y_1=0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau + c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $2(2w_1+1)\cos\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1=-\frac{1}{2}$ για να τον αποφύγουμε. Η μη-ομογενής εξίσωση $y_1''+y_1=-2\cos(3\tau)$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $A\cos(3\tau)+B\sin(3\tau)$. Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε ότι $A=\frac{1}{4}$ και $B=0$, οπότε $y_1(\tau)=c_1\cos\tau + c_2\sin\tau + \frac{\cos(3\tau)}{4}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0)=0$ και $y_1'(0)=0$, υπολογίζουμε ότι $c_1=-\frac{1}{4}$ και $c_2=0$, οπότε $y_1(\tau)=\frac{\cos(3\tau)-\cos\tau}{4}$. Επομένως,

$$y(\tau) = 2\cos\tau + \frac{\cos(3\tau)-\cos\tau}{4}\cdot\varepsilon + \cdots, \quad \tau = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\cdots\right)t > 0.$$

***Άσκηση* 2.** Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1+w_1\varepsilon+\cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{dy}{dt}(0)\cdot\frac{dt}{d\tau}(0) = 0\cdot\frac{1}{1+w_1\varepsilon+\cdots} = 0.$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2} + y = \varepsilon y\left[1-(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right], \quad \tau>0,$$

$$y(0)=1, \quad \frac{dy}{d\tau}(0)=0.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\left(1+2w_1\varepsilon+w_1^2\varepsilon^2+\cdots\right)\left(y_0''+y_1''\varepsilon+\cdots\right)+(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\\&\qquad=\varepsilon\left(y_0+y_1\varepsilon+\cdots\right)\left[1-\left(1+2w_1\varepsilon+w_1^2\varepsilon^2+\cdots\right)\left(y_0'+y_1'\varepsilon+\cdots\right)^2\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + 2w_1 y_0''\varepsilon + 2w_1 y_1''\varepsilon^2 + \cdots\right) + \left(y_0 + y_1\varepsilon + \cdots\right)$$
$$= \left(y_0\varepsilon + y_1\varepsilon^2 + \cdots\right)\left[1 - \left(y_0'\right)^2 - 2y_0'y_1'\varepsilon - 2w_1\left(y_0'\right)^2\varepsilon + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1 y_0'' + y_1\right)\varepsilon + 2w_1 y_1''\varepsilon^2 + \cdots$$
$$= y_0\varepsilon - y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon - 2y_0y_0'y_1'\varepsilon^2 - 2w_1y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon^2 + y_1\varepsilon^2 - y_1\left(y_0'\right)^2\varepsilon^2 + \cdots \Rightarrow$$

$$\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1 y_0'' + y_1\right)\varepsilon + \cdots = y_0\left[1 - \left(y_0'\right)^2\right]\varepsilon + \cdots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0 \\ y_1'' + y_1 = y_0\left[1 - (y_0')^2\right] - 2w_1 y_0'', \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0(\tau) = \cos\tau, \quad \tau > 0 \\ y_1'' + y_1 = \cos\tau\left(1 - \sin^2\tau\right) + 2w_1\cos\tau, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \end{cases}.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$y_1'' + y_1 = \cos^3\tau + 2w_1\cos\tau \Rightarrow$$

$$y_1'' + y_1 = \frac{\cos(3\tau) + 3\cos\tau}{4} + 2w_1\cos\tau \Rightarrow$$

$$y_1'' + y_1 = \left(2w_1 + \frac{3}{4}\right)\cos\tau + \frac{\cos(3\tau)}{4}.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1'' + y_1 = 0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau + c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $\left(2w_1 + \frac{3}{4}\right)\cos\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1 = -\frac{3}{8}$ για να τον αποφύγουμε. Η μη-ομογενής εξίσωση $y_1'' + y_1 = \frac{\cos(3\tau)}{4}$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $A\cos(3\tau) + B\sin(3\tau)$. Υπολογίζουμε ότι $A = -\frac{1}{32}$ και $B = 0$, οπότε $y_1(\tau) = c_1\cos\tau + c_2\sin\tau - \frac{\cos(3\tau)}{32}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0$ και $y_1'(0) = 0$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \frac{1}{32}$ και $c_2 = 0$, οπότε $y_1(\tau) = \frac{\cos\tau - \cos(3\tau)}{32}$. Επομένως,

$$y(\tau) = \cos\tau + \frac{\cos\tau - \cos(3\tau)}{32}\cdot\varepsilon + \cdots, \quad \tau = \left(1 - \frac{3\varepsilon}{8} + \cdots\right)t > 0.$$

Άσκηση 3. Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)\cdot\frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{dy}{dt}(0) &= \frac{dy}{d\tau}(0) \cdot \frac{d\tau}{dt}(0) = \left[y_0'(0) + y_1'(0)\varepsilon + \cdots\right](1 + w_1\varepsilon + \cdots) \\
&= y_0'(0) + w_1 y_0'(0)\varepsilon + y_1'(0)\varepsilon + w_1 y_1'(0)\varepsilon^2 + \cdots = y_0'(0) + \left[w_1 y_0'(0) + y_1'(0)\right]\varepsilon + \cdots \Rightarrow .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} y_0'(0) = 1 \\ w_1 y_0'(0) + y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0'(0) = 1 \\ y_1'(0) = -w_1 \end{cases}
$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$
(1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} + y = \varepsilon y^3, \quad \tau > 0,
$$

$$
y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{1}{1 + w_1\varepsilon + \cdots}.
$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$
\left(1 + 2w_1\varepsilon + w_1^2\varepsilon^2 + \cdots\right)\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + \cdots\right) + (y_0 + y_1\varepsilon + \cdots) = \varepsilon\,(y_0 + y_1\varepsilon + \cdots)^3 \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + 2w_1 y_0''\varepsilon + 2w_1 y_1''\varepsilon^2 + \cdots\right) + (y_0 + y_1\varepsilon + \cdots) \\
= y_0^3\varepsilon + 3y_0^2 y_1\varepsilon^2 + 3y_0 y_1^2\varepsilon^3 + y_1^3\varepsilon^4 + \cdots \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1 y_0'' + y_1\right)\varepsilon + \cdots = y_0^3\varepsilon + \cdots \Rightarrow
$$

$$
\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \\ y_1'' + y_1 = y_0^3 - 2w_1 y_0'', \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -w_1 \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\begin{cases} y_0(\tau) = \sin\tau, \quad \tau > 0 \\ y_1'' + y_1 = \sin^3\tau + 2w_1\sin\tau, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -w_1 \end{cases} .
$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$
y_1'' + y_1 = \frac{3\sin\tau - \sin(3\tau)}{4} + 2w_1\sin\tau \Rightarrow
$$

$$
y_1'' + y_1 = \left(2w_1 + \frac{3}{4}\right)\sin\tau - \frac{\sin(3\tau)}{4}.
$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1'' + y_1 = 0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau + c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $\left(2w_1 + \frac{3}{4}\right)\sin\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1 = -\frac{3}{8}$ για να τον αποφύγουμε. Η μη-ομογενής εξίσωση $y_1''+y_1 = -\frac{\sin(3\tau)}{4}$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $A\cos(3\tau)+B\sin(3\tau)$. Υπολογίζουμε ότι $A = 0$ και $B = \frac{1}{32}$, οπότε $y_1(\tau) = c_1\cos\tau + c_2\sin\tau + \frac{\sin(3\tau)}{32}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0$ και $y_1'(0) = \frac{3}{8}$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{9}{32}$, οπότε

$y_1(\tau) = \frac{9\sin\tau + \sin(3\tau)}{32}$. Επομένως,

$$y(\tau) = \sin\tau + \frac{9\sin\tau + \sin(3\tau)}{32} \cdot \varepsilon + \cdots, \quad \tau = \left(1 - \frac{3\varepsilon}{8} + \cdots\right) t > 0.$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών με ένα όρο για τα ακόλουθο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών.

$$\begin{aligned} y''(t) + 9y(t) &= \varepsilon y(t)(y')^2(t), \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1 \text{ και } t > 0, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική λύση που βρήκατε πληροί τη διαφορική εξίσωση ομοιόμορφα για $t \geq 0$;

2) Με χρήση της μεθόδου των ιδιόμορφων διαταραχών βρείτε μια προσεγγιστική λύση με δύο όρους της εξίσωσης

$$\varepsilon x^3 - x - 2 = 0, \quad \text{όπου} \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

Υπόδειξη. Για την κανονικοποιημένη εξίσωση υποθέστε ότι $y = y_0 + \sqrt{\varepsilon} y_1 + \varepsilon y_2 \ldots$.

3) Με τη χρήση της μεθόδου των ιδιόμορφων διαταραχών βρείτε μία ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση για τα ακόλουθα προβλήματα, υποθέτοντας ότι $0 < \varepsilon << 1$ και $0 < t < 1$.

α) $\varepsilon y'' + y' + y^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}$ και $y(1) = \frac{1}{2}$.

β) $\varepsilon y'' + (1+t)y' = 1, \quad y(0) = 0$ και $y(1) = 1 + \ln 2$.

γ) $\varepsilon y'' - (2 - t^2)y = -1, \quad y(0) = 0$ και $y(1) = 1$.

3 Ασυμπτωτική Ανάλυση και Ιδιόμορφη Διαταραχή

Άσκηση 1. Αναζητούμε λύση της μορφής $y = y_0 + y_1\varepsilon + \cdots$ με $y_0(0) = 2$ και $y_0'(0) = 0$. Αντικαθιστούμε:

$$y_0'' + 9y_0 + \cdots = y_0\left(y_0'\right)^2\varepsilon + \cdots \Rightarrow$$

$$y_0'' + 9y_0 = 0, \quad y_0(0) = 2, \quad y_0'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y_0(t) = 2\cos(3t), \quad t > 0 \Rightarrow$$

$$r(t,\varepsilon) = y_0''(t) + 9y_0(t) - \varepsilon y_0(t)\left[y_0'(t)\right]^2 = -\cancel{18\cos(3t)} + \cancel{18\cos(3t)} - 72\varepsilon\cos(3t)\sin^2(3t).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$|r(t,\varepsilon)| = \left|72\varepsilon\cos(3t)\sin^2(3t)\right| \leqslant 72\varepsilon \to 0, \quad \forall t > 0,$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Επομένως, η προσεγγιστική λύση με έναν όρο πληροί τη διαφορική εξίσωση ομοιόμορφα για $t \geqslant 0$.

Άσκηση 2. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, θέτοντας $x = x_0 + x_1\varepsilon + \cdots$. Αντικαθιστούμε:

$$\varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + \cdots)^3 - (x_0 + x_1\varepsilon + \cdots) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0^3\varepsilon + 3x_0^2x_1\varepsilon^2 + 3x_0x_1^2\varepsilon^3 + x_1^3\varepsilon^4 - x_0 - x_1\varepsilon - 2 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$-(x_0 + 2) + \left(x_0^3 - x_1\right)\varepsilon + 3x_0^2x_1\varepsilon^2 + 3x_0x_1^2\varepsilon^3 + x_1^3\varepsilon^4 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$-(x_0 + 2) + \left(x_0^3 - x_1\right)\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0^3 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = -8 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = -2 - 8\varepsilon + \cdots.$$

Η μέθοδος των κανονικών διαταραχών μας δίνει μία μόνο ρίζα. Για να βρούμε τις άλλες δύο ρίζες πρέπει να υποθέσουμε ότι ο όρος εx^3 δεν είναι μικρός. Αν θέλουμε λοιπόν να απαλείψουμε κάποιον όρο της εξίσωσης ώστε να την κάνουμε απλούστερη, υπάρχουν δύο δυνατότητες:

- Τα εx^3 και -2 είναι της ίδιας τάξης και είναι μεγάλα σε σύγκριση με το $-x$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε ότι $x = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)$. Όμως τότε το x θα είναι μεγάλο.
- Τα εx^3 και $-x$ είναι της ίδιας τάξης και είναι μεγάλα σε σύγκριση με το -2. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε ότι $x = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$. Άρα οι συνθήκες αυτής της περίπτωσης είναι συμβιβαστές.

Αυτό μας δίνει μία ιδέα για την κανονικοποίηση που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Για να βρούμε τις άλλες δύο ρίζες θα κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής στην εξίσωση, επιλέγοντας τη νέα μεταβλητή y ως:

$$y = \frac{x}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}.$$

Με αυτήν την αλλαγή μεταβλητής η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$\varepsilon \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2}} y^3 - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} y - 2 = 0 \Rightarrow y^3 - y - 2\sqrt{\varepsilon} = 0.$$

Θεωρούμε τη σειρά διαταραχών:

$$y = y_0 + y_1\sqrt{\varepsilon} + \cdots .$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση:

$$\left(y_0 + y_1\sqrt{\varepsilon} + \cdots\right)^3 - \left(y_0 + y_1\sqrt{\varepsilon} + \cdots\right) - 2\sqrt{\varepsilon} = 0 \Rightarrow$$

$$y_0^3 + 3y_0^2 y_1\sqrt{\varepsilon} + 3y_0 y_1^2\varepsilon + y_1^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon} - y_0 - y_1\sqrt{\varepsilon} - 2\sqrt{\varepsilon} + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_0^3 - y_0\right) + \left(3y_0^2 y_1 - y_1 - 2\right)\sqrt{\varepsilon} + 3y_0 y_1^2\varepsilon + y_1^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_0^3 - y_0\right) + \left(3y_0^2 y_1 - y_1 - 2\right)\sqrt{\varepsilon} + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0^3 - y_0 = 0 \\ 3y_0^2 y_1 - y_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = \pm 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1 + \sqrt{\varepsilon} + \cdots \Rightarrow$$

$$x^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 + \cdots, \quad x^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 + \cdots .$$

Άσκηση 3. α) Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $y' + y^2 = 0$ που είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και έχει γενική λύση:

$$y(t) = \frac{1}{t - c}, \quad 0 < t < 1.$$

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός οριακού στρώματος στο $t = 0$. Αφού το $t = 1$ βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = \frac{1}{2}$ στη γενική λύση του μη-διαταραγμένου προβλήματος, βρίσκουμε την εξωτερική προσέγγιση:

$$y_0(t) = \frac{1}{t+1}, \quad t = O(1).$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}Y'' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)}Y' + Y^2 = 0.$$

Αν $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim 1$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ και ο δεύτερος όρος $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ θα είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$, οπότε δε θα είναι μικρός σε σχέση με τους κυρίαρχους όρους. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης. Τότε $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ και ο όρος 1 είναι μικρός σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}$ και $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ που είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + Y' + \varepsilon Y^2 = 0.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την εξίσωση $Y'' + Y' = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0) = \frac{1}{4}$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = \frac{1}{4} - c_1$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{1}{4} - c_1.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\sqrt{\varepsilon}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_i\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\eta\sqrt{\varepsilon}+1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(c_1 e^{-\frac{\eta\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}} + \frac{1}{4} - c_1\right) \Rightarrow$$

$$1 = \frac{1}{4} - c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_i(t) = -\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + 1.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με 1. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}.$$

β) Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $(1+t)y' = 1$ που έχει γενική λύση:

$$y(t) = \ln(t+1) + c, \quad 0 < t < 1.$$

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός οριακού στρώματος στο $t = 0$. Αφού το $t = 1$ βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = 1 + \ln 2$ στη γενική λύση του μη-διαταραγμένου προβλήματος, βρίσκουμε την εξωτερική προσέγγιση:

$$y_0(t) = \ln(t+1) + 1, \quad t = O(1).$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} Y'' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} Y' + \tau Y' = 1.$$

Αν $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim 1$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ και ο δεύτερος όρος $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ θα είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$, οπότε δε θα είναι μικρός σε σχέση με τους κυρίαρχους όρους. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης. Τότε $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ και ο όρος 1 είναι μικρός σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}$ και $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ που είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + Y' + \varepsilon\tau Y' = \varepsilon.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την εξίσωση $Y'' + Y' = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = -c_1$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - c_1.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\sqrt{\varepsilon}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_0\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} y_i\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\left(\eta\sqrt{\varepsilon}+1\right)+1\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(c_1 e^{-\frac{\eta\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}} - c_1\right) \Rightarrow$$

$$1 = -c_1 \Rightarrow c_1 = -1 \Rightarrow y_i(t) = -e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + 1.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με 1. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \ln(t+1) - e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + 1.$$

γ) Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $-\left(2-t^2\right)y' = -1$. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-t\right)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+t\right)},$$

παίρνουμε:

$$y(t) = -\frac{\ln\left(\sqrt{2}-t\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{\ln\left(\sqrt{2}+t\right)}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right) + c, \quad 0 < t < 1.$$

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός οριακού στρώματος στο $t=1$. Αφού το $t=0$ βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0)=0$ στη γενική λύση του μη-διαταραγμένου προβλήματος, βρίσκουμε την εξωτερική προσέγγιση:

$$y_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right).$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t=1$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{1-t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\cdot\frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\cdot\frac{d^2Y}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)}\cdot\frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}Y'' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)}Y' + 2\tau Y' - \delta(\varepsilon)\tau^2 Y' = -1.$$

Αν $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim 1$ είναι η συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ και ο δεύτερος όρος $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ θα είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$, οπότε δε θα είναι μικρός σε σχέση με τους κυρίαρχους όρους. Αν $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \delta(\varepsilon)$ είναι η συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$ και ο δεύτερος όρος $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ θα είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)$, οπότε δε θα είναι μικρός σε σχέση με τους κυρίαρχους όρους. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης. Τότε $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ και οι όροι $\delta(\varepsilon)$ 1 είναι μικρός σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}$ και $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ που είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + Y' + 2\varepsilon\tau Y' - \varepsilon^2\tau^2 Y' = -\varepsilon.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την $Y'' + Y' = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = 1$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = 1 - c_1$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}} + 1 - c_1.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\sqrt{\varepsilon}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_i\left(\eta\sqrt{\varepsilon}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\eta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}-\eta\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(c_1 e^{-\frac{1-\eta\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}} + 1 - c_1\right) \Rightarrow$$

$$0 = 1 - c_1 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow y_i(t) = e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με 0. Άρα η προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right) + e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}}.$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

4^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο WKB για να βρείτε μία προσεγγιστική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - (1+\varepsilon^2 t^2)^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \varepsilon, \quad \text{όπου} \;\; 0 < \varepsilon << 1.$$

Υπόδειξη. Θέστε $\tau = \varepsilon t$ και κάντε την κανονικοποίηση.

2) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο WKB για να βρείτε μία προσεγγιστική λύση του προβλήματος

$$y'' + q^2(\varepsilon x) y = 0,$$

όπου $0 < \varepsilon << 1$ και q είναι μια γνήσια θετική συνάρτηση.

3) Βρείτε μια προσέγγιση για τις μεγάλες ιδιοτιμές του προβλήματος

$$y'' + \lambda e^{4x} y = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; y(0) = y(1) = 0.$$

4 Η Προσέγγιση WKB

Άσκηση 1. Θέτουμε $\tau = \varepsilon t$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{dy}{dt}(0) \cdot \frac{dt}{d\tau}(0) = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1.$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$\varepsilon^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} - \left(1+\tau^2\right)^2 y = 0, \quad \tau > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1.$$

Αν το $k(\tau) = 1 + \tau^2 > 0$ ήταν σταθερά, τότε η διαφορική εξίσωση θα είχε πραγματικές λύσεις εκθετικής μορφής $e^{\pm\frac{k\tau}{\varepsilon}}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί να δοκιμάσουμε στην εξίσωση την αντικατάσταση $y = e^{\frac{u(\tau)}{\varepsilon}}$. Τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon^2 \frac{u''(\tau)}{\varepsilon} e^{\frac{u(\tau)}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \left[\frac{u'(\tau)}{\varepsilon}\right]^2 e^{\frac{u(\tau)}{\varepsilon}} - \left(1+\tau^2\right)^2 e^{\frac{u(\tau)}{\varepsilon}} = 0 \overset{w=u'}{\Rightarrow}$$

$$\varepsilon w' + w^2 - \left(1+\tau^2\right)^2 = 0.$$

Ας επιχειρήσουμε τώρα ένα ανάπτυγμα κανονικών διαταραχών της μορφής:

$$w(\tau) = w_0(\tau) + w_1(\tau)\varepsilon + \cdots.$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση αυτή στην εξίσωση, παίρνουμε:

$$\varepsilon \left[w_0'(\tau) + w_1'(\tau)\varepsilon + \cdots\right] + \left[w_0(\tau) + w_1(\tau)\varepsilon + \cdots\right]^2 - \left(1+\tau^2\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$w_0'(\tau)\varepsilon + w_1'(\tau)\varepsilon^2 + w_0^2(\tau) + 2w_0(\tau)w_1(\tau)\varepsilon + w_1(\tau)^2\varepsilon^2 - \left(1+\tau^2\right)^2 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left[w_0^2(\tau) - \left(1+\tau^2\right)^2\right] + \left[w_0'(\tau) + 2w_0(\tau)w_1(\tau)\right]\varepsilon + \left[w_1'(\tau) + w_1^2(\tau)\right]\varepsilon^2 + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left[w_0^2(\tau) - \left(1+\tau^2\right)^2\right] + \left[w_0'(\tau) + 2w_0(\tau)w_1(\tau)\right]\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} w_0^2(\tau) - \left(1+\tau^2\right)^2 = 0 \\ w_0'(\tau) + 2w_0(\tau)w_1(\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0(\tau) = \pm\left(1+\tau^2\right) \\ w_1(\tau) = -\frac{\tau}{1+\tau^2} \end{cases} \Rightarrow w(\tau) = \pm\left(1+\tau^2\right) - \frac{\tau\varepsilon}{1+\tau^2} + \cdots.$$

Συνεπώς, το $u(\tau)$ δίνεται από τη σχέση:

$$u(\tau) = \pm \int_0^\tau \left(1+\xi^2\right) d\xi - \varepsilon \int_0^\tau \frac{\xi}{1+\xi^2} d\xi + \cdots = \pm\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\ln\left(1+\tau^2\right) + \cdots.$$

Άρα το ανάπτυγμα για την $y(\tau)$ είναι:

$$y(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \exp\left\{\pm\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right\}.$$

Η εξίσωση αυτή ορίζει δύο γραμμικά ανεξάρτητες προσεγγίσεις της διαφορικής εξίσωσης. Ο γραμμικός συνδυασμός των προσεγγίσεων αυτών μας δίνει την προσέγγιση WKB:

$$y_{\mathrm{WKB}}(\tau) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\tau^2}} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right\} + \frac{c_2}{\sqrt{1+\tau^2}} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $\frac{dy}{d\tau}(0) = 1$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = -\frac{\varepsilon}{2}$ και $c_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως,

$$y_{\mathrm{WKB}}(\tau) = -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+\tau^2}} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right\} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+\tau^2}} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$y_{\mathrm{WKB}}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+\varepsilon^2 t^2}} \exp\left\{-\left(t + \frac{\varepsilon^2 t^3}{3}\right)\right\} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+\varepsilon^2 t^2}} \exp\left\{t + \frac{\varepsilon^2 t^3}{3})\right\}.$$

Άσκηση 2. Θέτουμε $\tau = \varepsilon x$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = \varepsilon \cdot \frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \varepsilon \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dx} = \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$\varepsilon^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} + q^2(\tau)y = 0, \quad \tau > 0.$$

Αν το $q(\tau) > 0$ ήταν σταθερά, τότε η διαφορική εξίσωση θα είχε πραγματικές λύσεις εκθετικής μορφής $e^{\pm\frac{iq\tau}{\varepsilon}}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί να δοκιμάσουμε στην εξίσωση την αντικατάσταση $y = e^{\frac{iu(\tau)}{\varepsilon}}$. Τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon^2 \frac{iu''(\tau)}{\varepsilon} e^{\frac{iu(\tau)}{\varepsilon}} - \varepsilon^2 \left[\frac{u'(\tau)}{\varepsilon}\right]^2 e^{\frac{iu(\tau)}{\varepsilon}} + q^2(\tau) e^{\frac{iu(\tau)}{\varepsilon}} = 0 \overset{w=u'}{\Rightarrow}$$

$$i\varepsilon w'(\tau) - w^2(\tau) + q^2(\tau) = 0.$$

Ας επιχειρήσουμε τώρα ένα ανάπτυγμα κανονικών διαταραχών της μορφής:

$$w(\tau) = w_0(\tau) + w_1(\tau)\varepsilon + \cdots.$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση αυτή στην εξίσωση, παίρνουμε:

$$i\varepsilon\left[w_0'(\tau) + w_1'(\tau)\varepsilon + \cdots\right] - \left[w_0(\tau) + w_1(\tau)\varepsilon + \cdots\right]^2 + q^2(\tau) = 0 \Rightarrow$$

$$w_0'(\tau)i\varepsilon + w_1'(\tau)i\varepsilon^2 - w_0^2(\tau) - 2w_0(\tau)w_1(\tau)\varepsilon - w_1(\tau)^2\varepsilon^2 + q^2(\tau) + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\left[-w_0^2(\tau)+q^2(\tau)\right]+\left[w_0'(\tau)i-2w_0(\tau)w_1(\tau)\right]\varepsilon+\left[w_1'(\tau)i-w_1^2(\tau)\right]\varepsilon^2+\cdots=0\Rightarrow$$

$$\left[-w_0^2(\tau)+q^2(\tau)\right]+\left[w_0'(\tau)i-2w_0(\tau)w_1(\tau)\right]\varepsilon+\cdots=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-w_0^2(\tau)+q^2(\tau)=0\\ w_0'(\tau)i-2w_0(\tau)w_1(\tau)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_0(\tau)=\pm q(\tau)\\ w_1(\tau)=\frac{q'(\tau)i}{2q(\tau)}\end{cases}\Rightarrow w(\tau)=\pm q(\tau)+\frac{q'(\tau)i\varepsilon}{2q(\tau)}+\cdots.$$

Συνεπώς, το $u(\tau)$ δίνεται από τη σχέση:

$$u(\tau)=\pm\int_a^\tau q(\xi)d\xi+\frac{i\varepsilon\ln q(\tau)}{2}+\cdots,$$

όπου το a είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα το ανάπτυγμα για την $y(\tau)$ είναι:

$$y(\tau)=\frac{1}{\sqrt{q(\tau)}}\exp\left\{\pm\frac{i}{\varepsilon}\int_a^\tau q(\xi)d\xi\right\}.$$

Η εξίσωση αυτή ορίζει δύο γραμμικά ανεξάρτητες προσεγγίσεις της διαφορικής εξίσωσης. Ο γραμμικός συνδυασμός των προσεγγίσεων αυτών μας δίνει την προσέγγιση WKB:

$$y_{\text{WKB}}(\tau)=\frac{k_1}{\sqrt{q(\tau)}}\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_a^\tau q(\xi)d\xi\right\}+\frac{k_2}{\sqrt{q(\tau)}}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_a^\tau q(\xi)d\xi\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, μπορούμε να γράψουμε την προσέγγιση ως:

$$y_{\text{WKB}}(\tau)=\frac{c_1}{\sqrt{q(\tau)}}\cos\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^\tau q(\xi)d\xi\right]+\frac{c_2}{\sqrt{q(\tau)}}\sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^\tau q(\xi)d\xi\right]\Rightarrow$$

$$y_{\text{WKB}}(x)=\frac{c_1}{\sqrt{q(\varepsilon x)}}\cos\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\varepsilon x} q(\xi)d\xi\right]+\frac{c_2}{\sqrt{q(\varepsilon x)}}\sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\varepsilon x} q(\xi)d\xi\right],$$

όπου $c_1=k_1+k_2$ και $c_1=(k_2-k_1)i$.

Άσκηση 3. Θέτουμε $\varepsilon=\lambda^{-\frac{1}{2}}$ και $q(x)=e^{2x}>0$, οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$\varepsilon^2y''+e^{4x}y=0,\quad 0<x<1,$$

για την οποία εφαρμόζεται η μέθοδος WKB, δεδομένου ότι το ε είναι μικρό ή ισοδύναμα ότι το λ είναι μεγάλο. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η προσέγγιση WKB δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}y_{\text{WKB}}(x)&=\frac{c_1}{e^x}\cos\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{2\xi}d\xi\right]+\frac{c_2}{e^x}\sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{2\xi}d\xi\right]\\&=c_1e^{-x}\cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}\left(e^{2x}-1\right)}{2}\right]+c_2e^{-x}\sin\left[\frac{\sqrt{\lambda}\left(e^{2x}-1\right)}{2}\right].\end{aligned}$$

Η συνοριακή συνθήκη $y(0)=0$ μας δίνει ότι $c_1=0$. Η συνοριακή συνθήκη $y(1)=0$ μας δίνει ότι:

$$c_2 \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda} \left(e^2 - 1\right)}{2} \right] = 0.$$

Αν $c_2 = 0$, τότε θα καταλήξουμε στην τετριμμένη λύση, την οποία προσπαθούμε να αποφύγουμε. Συνεπώς, πρέπει:

$$\sin \left[\frac{\sqrt{\lambda} \left(e^2 - 1\right)}{2} \right] = 0.$$

Η εξίσωση αυτή πληρούται αν επιλέξουμε λ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\sqrt{\lambda} \left(e^2 - 1\right)}{2} = n\pi,$$

όπου το n είναι μεγάλος ακέραιος. Επομένως, οι μεγάλες ιδιοτιμές του προβλήματος δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{\left(e^2 - 1\right)^2}.$$

Συνεπώς, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$y_{\mathrm{WKB}}(x) = c_2 e^{-x} \sin \left[\frac{n\pi \left(e^{2x} - 1\right)}{e^2 - 1} \right].$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

5^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και να εξεταστεί η ευστάθειά τους για καθεμιά από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις:

α) $-y' + y - y^2 = 0$,

β) $y' = ay + by^2, \quad a, b > 0$,

γ) $y' = e^y - 1$.

2) Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και να εξεταστεί η ευστάθειά τους

$y' = -(y - \frac{1}{2})(y-1)^3$

3) Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και να σχεδιαστεί διάγραμμα διακλάδωσης για τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις. Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης και οι διακλαδούμενες λύσεις. Να εξεταστεί η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας και να βρεθεί που συμβαίνει ανταλλαγή ευστάθειας:

α) $y' = (y - \mu)(y^2 - \mu)$,

β) $y' = y(9 - \mu y)(\mu + 2y - y^2)$.

5 Ευστάθεια και Διακλάδωση Μονοδιάστατων Προβλημάτων

Άσκηση 1. α) Οι λύσεις ισορροπίας βρίσκονται από τη σχέση $f(y) = y - y^2 = 0$ και είναι οι $y = 0$ και $y = 1$. Στην παρούσα περίπτωση $f'(y) = 1 - 2y$. Για τη λύση ισορροπίας $y = 0$ έχουμε $f'(0) = 1 > 0$, οπότε η $y = 0$ είναι ασταθής. Για τη λύση ισορροπίας $y = 1$ έχουμε $f'(1) = -1 < 0$, οπότε η $y = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

β) Οι λύσεις ισορροπίας βρίσκονται από τη σχέση $f(y) = ay + by^2 = 0$ και είναι οι $y = 0$ και $y = -\frac{a}{b}$. Στην παρούσα περίπτωση $f'(y) = a + 2by$. Για τη λύση ισορροπίας $y = 0$ έχουμε $f'(0) = a > 0$, οπότε η $y = 0$ είναι ασταθής. Για τη λύση ισορροπίας $y = -\frac{a}{b}$ έχουμε $f'\left(-\frac{a}{b}\right) = -a < 0$, οπότε η $y = -\frac{a}{b}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

γ) Η λύση ισορροπίας βρίσκεται από τη σχέση $f(y) = e^y - 1 = 0$ και είναι η $y = 0$. Στην παρούσα περίπτωση $f'(y) = e^y$. Έχουμε $f'(0) = 1 > 0$, οπότε η $y = 0$ είναι ασταθής.

Άσκηση 2. Οι λύσεις ισορροπίας βρίσκονται από τη σχέση $f(y) = -\left(y - \frac{1}{2}\right)(y-1)^3 = 0$ και είναι οι $y = \frac{1}{2}$ και $y = 1$. Στην παρούσα περίπτωση:

$$f'(y) = -(y-1)^3 - 3\left(y - \frac{1}{2}\right)(y-1)^2 = -(y-1)^2\left(y - 1 + 3y - \frac{3}{2}\right) = -(y-1)^2\left(4y - \frac{5}{2}\right).$$

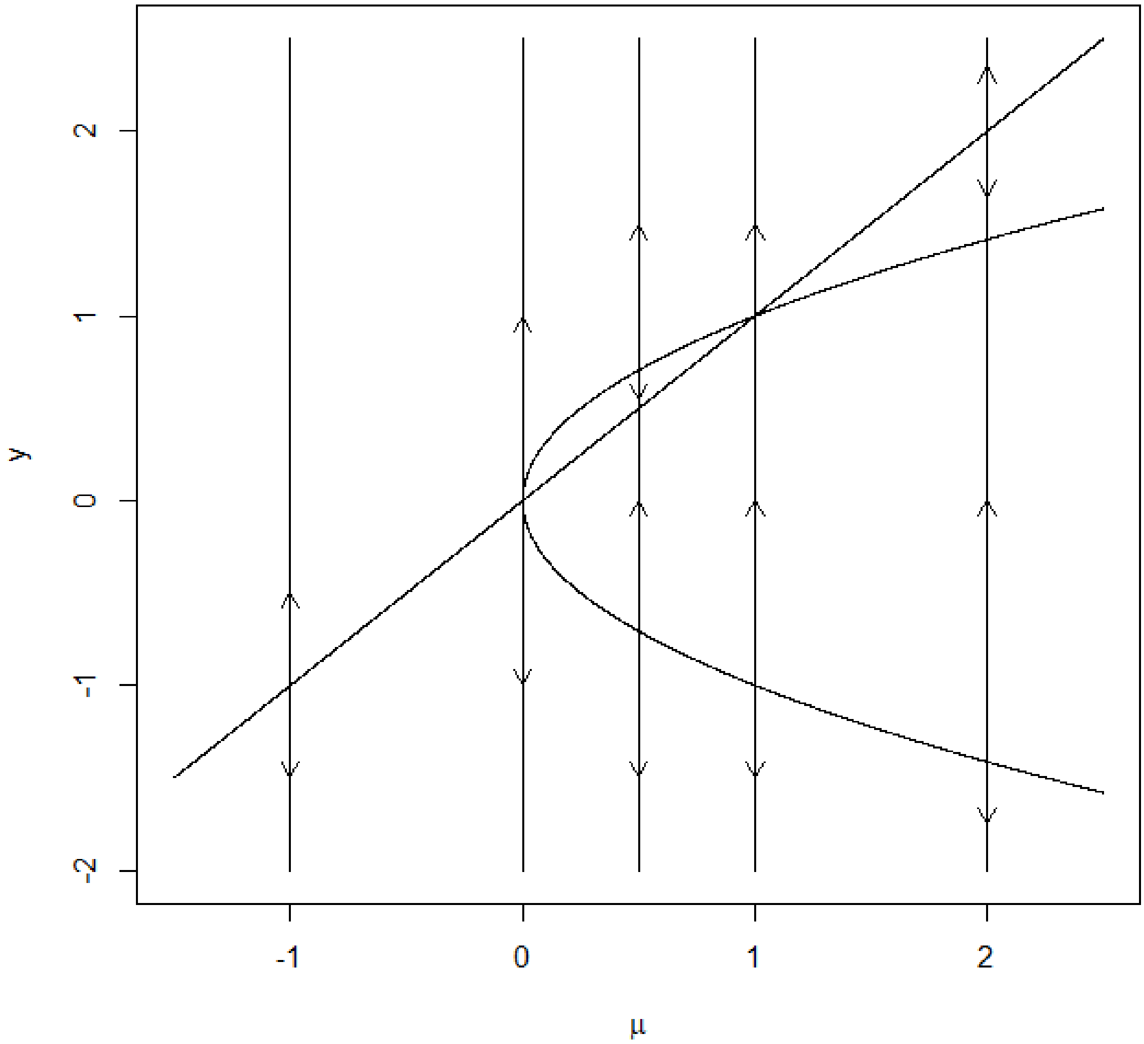
Έχουμε $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$, οπότε η $y = \frac{1}{2}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in (1, \infty)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Άσκηση 3. α) Οι λύσεις ισορροπίας βρίσκονται από τη σχέση $f(y) = (y - \mu)\left(y^2 - \mu\right) = 0$. Εδώ έχουμε:

$$f'(y) = y^2 - \mu + 2y(y - \mu) = 3y^2 - 2\mu y - \mu.$$

- Αν $\mu \in (-\infty, 0)$, τότε η λύση ισορροπίας είναι $y = \mu$ και έχουμε $f'(\mu) = \mu(\mu - 1) > 0$, οπότε η λύση $y = \mu$ είναι ασταθής.
- Αν $\mu = 0$, τότε η λύση ισορροπίας είναι $y = 0$. Έχουμε $f(y) = y^3 < 0$ για $y \in (-\infty, 0)$ και $f(y) = y^3 > 0$ για $y \in (0, \infty)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 0$ είναι ασταθής.
- Αν $\mu \in (0, 1)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = \mu$, $y = -\sqrt{\mu}$ και $y = \sqrt{\mu}$. Έχουμε $f'(\mu) = \mu(\mu - 1) < 0$, οπότε η λύση $y = \mu$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f'\left(-\sqrt{\mu}\right) = 2\mu\left(1 + \sqrt{\mu}\right) > 0$, οπότε η λύση $y = -\sqrt{\mu}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f'\left(\sqrt{\mu}\right) = 2\mu\left(1 - \sqrt{\mu}\right) > 0$, οπότε η λύση $y = \sqrt{\mu}$ είναι ασταθής.
- Αν $\mu = 1$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 1$ και $y = -1$. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in (-1, 1)$ και $f(y) > 0$ για $y \in (1, \infty)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 1$ είναι ασταθής. Έχουμε $f'(-1) = 4 > 0$, οπότε η λύση $y = -1$ είναι ασταθής.
- Αν $\mu \in (1, \infty)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = \mu$, $y = -\sqrt{\mu}$ και $y = \sqrt{\mu}$. Έχουμε $f'(\mu) = \mu(\mu - 1) > 0$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = \mu$ είναι ασταθής. Έχουμε $f'\left(-\sqrt{\mu}\right) = 2\mu\left(1 + \sqrt{\mu}\right) > 0$, οπότε η λύση $y = -\sqrt{\mu}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f'\left(\sqrt{\mu}\right) = 2\mu\left(1 - \sqrt{\mu}\right) < 0$, οπότε η λύση $y = \sqrt{\mu}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Στο σημείο διακλάδωσης $(0,0)$ εμφανίζονται οι λύσεις $y=-\sqrt{\mu}$ και $y=\sqrt{\mu}$ και γίνεται ανταλλαγή ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $y=\mu$. Στο σημείο διακλάδωσης $(1,1)$ τέμνονται οι διακλαδούμενες λύσεις $y=\mu$ και $y=\sqrt{\mu}$ και γίνεται ανταλλαγή ευστάθειάς τους. Το διάγραμμα διακλάδωσης φαίνεται παρακάτω.



β) Οι λύσεις ισορροπίας βρίσκονται από τη σχέση $f(y)=y(9-\mu y)\left(\mu+2y-y^2\right)=0$. Εδώ έχουμε:

$$f'(y)=4\mu y^3-3(2\mu+9)y^2-2\left(\mu^2-18\right)y+9\mu.$$

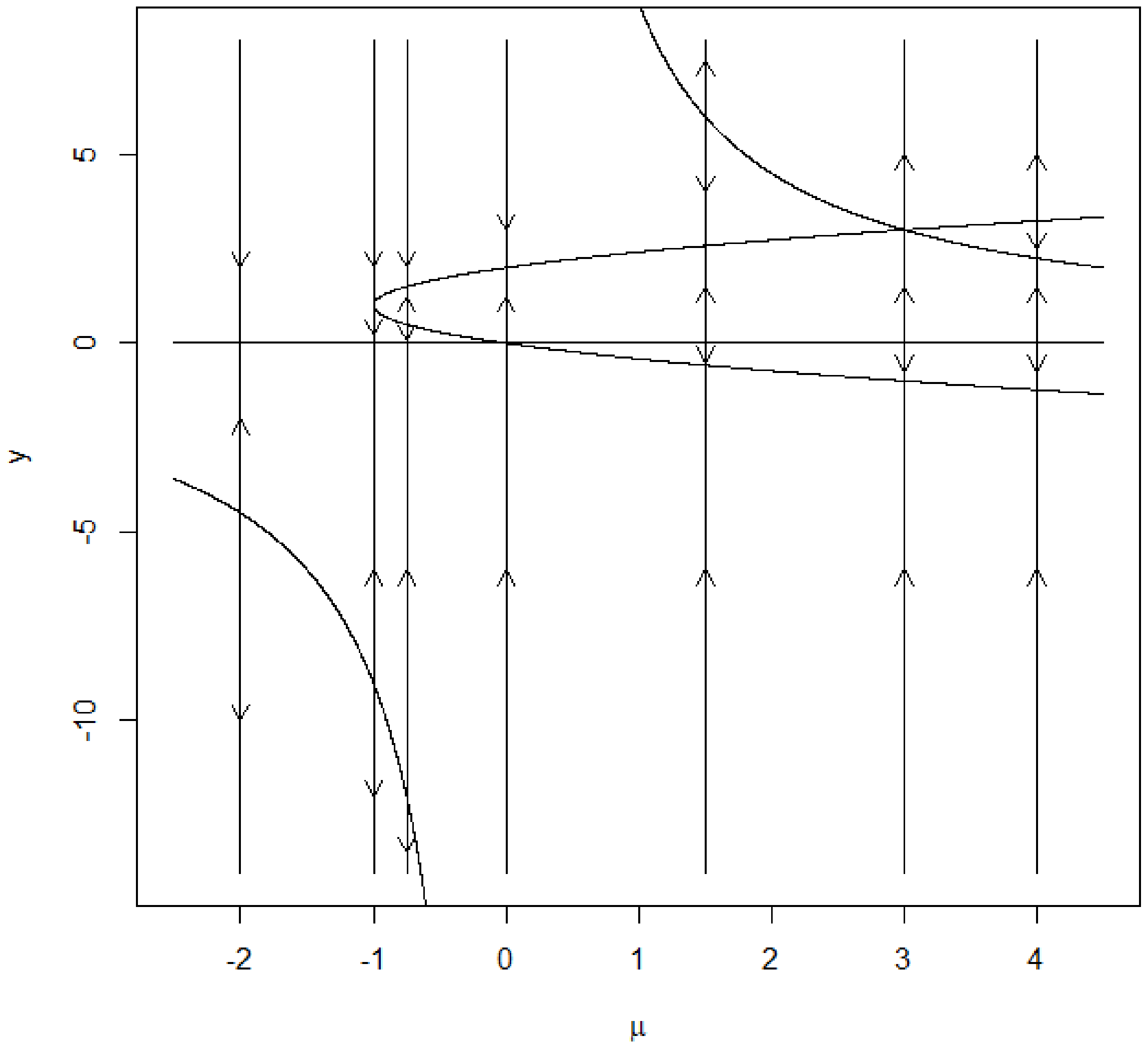
- Αν $\mu\in(-\infty,-1)$, τότε έχουμε τις λύσεις ισορροπίας $y=0$ και $y=\frac{9}{\mu}$. Έχουμε $f'(0)=9\mu<0$, οπότε η λύση ισορροπίας $y=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y)<0$ για $y\in\left(-\infty,\frac{9}{\mu}\right)$ και $f(y)>0$ για $y\in\left(\frac{9}{\mu},0\right)$, οπότε η λύση $y=\frac{9}{\mu}$ είναι ασταθής.

- Αν $\mu=-1$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι οι $y=0$, $y=-9$ και $y=1$. Έχουμε

$f'(0) = -9 < 0$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in (-\infty, -9)$ και $f(y) > 0$ για $y \in (-9, 0)$, οπότε η λύση $y = -9$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in (0, 1)$ και $f(y) < 0$ για $y \in (1, \infty)$, οπότε η λύση $y = 1$ είναι ασταθής.

- Αν $\mu \in (-1, 0)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 0$, $y = \frac{9}{\mu}$, $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ και $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Έχουμε $f'(0) = 9\mu < 0$, οπότε η λύση $y = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in \left(-\infty, \frac{9}{\mu}\right)$ και $f(y) > 0$ για $y \in \left(\frac{9}{\mu}, 0\right)$, οπότε η λύση $y = \frac{9}{\mu}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in \left(0, 1 - \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) > 0$ για $y \in \left(1 - \sqrt{\mu + 1}, 1 + \sqrt{\mu + 1}\right)$, οπότε η λύση $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(1 - \sqrt{\mu + 1}, 1 + \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in \left(1 + \sqrt{\mu + 1}, \infty\right)$, οπότε η λύση $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Αν $\mu = 0$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 0$ και $y = 2$. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in (-\infty, 0)$ και $f(y) > 0$ για $y \in (0, 2)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 0$ είναι ασταθής. Έχουμε $f'(2) = -36 < 0$, οπότε η λύση $y = 2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Αν $\mu \in (0, 3)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 0$, $y = \frac{9}{\mu}$, $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ και $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Έχουμε $f'(0) = 9\mu > 0$, οπότε η λύση $y = 0$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in \left(1 + \sqrt{\mu + 1}, \frac{9}{\mu}\right)$ και $f(y) > 0$ για $y \in \left(\frac{9}{\mu}, \infty\right)$, οπότε η λύση $y = \frac{9}{\mu}$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in \left(1 - \sqrt{\mu + 1}, 0\right)$, οπότε η λύση $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(0, 1 + \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in \left(1 + \sqrt{\mu + 1}, \frac{9}{\mu}\right)$, οπότε η λύση $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Αν $\mu = 3$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 0$, $y = 3$ και $y = -1$. Έχουμε $f'(0) = 27 > 0$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 0$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in (0, 3)$ και $f(y) > 0$ για $y \in (3, \infty)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = 3$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in (\infty, -1)$ και $f(y) < 0$ για $y \in (-1, 0)$, οπότε η λύση ισορροπίας $y = -1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Αν $\mu \in (3, \infty)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας είναι $y = 0$, $y = \frac{9}{\mu}$, $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ και $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Έχουμε $f'(0) = 9\mu > 0$, οπότε η λύση $y = 0$ είναι ασταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(0, \frac{9}{\mu}\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in \left(\frac{9}{\mu}, 1 + \sqrt{\mu + 1}\right)$, οπότε η λύση $y = \frac{9}{\mu}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y) > 0$ για $y \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) < 0$ για $y \in \left(1 - \sqrt{\mu + 1}, 0\right)$, οπότε η λύση $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έχουμε $f(y) < 0$ για $y \in \left(\frac{9}{\mu}, 1 + \sqrt{\mu + 1}\right)$ και $f(y) > 0$ για $y \in \left(1 + \sqrt{\mu + 1}, \infty\right)$, οπότε η λύση $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ είναι ασταθής.

Στο σημείο διακλάδωσης $(-1, 1)$ εμφανίζονται οι λύσεις ισορροπίας $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ και $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Στο σημείο διακλάδωσης $(0, 0)$ τέμνονται οι διακλαδούμενες λύσεις ισορροπίας $y = 0$ και $y = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ και γίνεται ανταλλαγή ευστάθειάς τους. Στο σημείο διακλάδωσης $(3, 3)$ τέμνονται οι διακλαδούμενες λύσεις $y = \frac{9}{\mu}$ και $y = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ και γίνεται ανταλλαγή ευστάθειάς τους. Το διάγραμμα διακλάδωσης φαίνεται παρακάτω.



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

6^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να δειχθεί ότι κάθε μη τετριμμένη λύση της $x' = x$ είναι μη φραγμένη και ασταθής, ενώ κάθε λύση της $x' = 1$ είναι μη φραγμένη και ευσταθής.

2) Να εξετασθεί ως προς την ευστάθεια οι λύσεις των

i)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t+1 \\ e^t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

ii) $x'' - x' + 2x = cost,\ t > 0.$

3) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ προσδιορίστε την ευστάθεια των λύσεων

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + \mu y \\ y' &= x + \lambda y. \end{aligned}$$

4) Να βρεθεί η κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών που να μετατρέπει κάθε ένα από τα επόμενα συστήματα σε ομογενή

i)

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 1 \\ y' &= x - y - 1. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2 \\ y' &= x + 2y + 3. \end{aligned}$$

6 Ευστάθεια Μονοδιάστατων Προβλημάτων και Γραμμικών Συστημάτων

Άσκηση 1. Η διαφορική εξίσωση $x' = x$ έχει γενική λύση $x(t) = ce^t$, η οποία είναι μη-φραγμένη για $c \neq 0$. Αν $x(0) = x_0 \neq 0$, τότε παίρνουμε τη λύση $x_1(t) = x_0 e^t$. Αν $x(0) = x_0 + \tilde{x}$, τότε παίρνουμε τη λύση $x_2(t) = (x_0 + \tilde{x})e^t$. Για κάθε $\delta > 0$ με $|\tilde{x}| < \delta$ ισχύει ότι:

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left|\tilde{x}e^t\right| = |\tilde{x}|\, e^t \to \infty,$$

καθώς $t \to \infty$. Επομένως, κάθε μη-τετριμμένη λύση $x_1(t) = x_0 e^t$ της εξίσωσης είναι ασταθής.

Η διαφορική εξίσωση $x' = 1$ έχει γενική λύση $x(t) = t + c$, η οποία είναι μη-φραγμένη. Αν $x(0) = x_0$, τότε παίρνουμε τη λύση $x_1(t) = t + x_0$. Αν $x(0) = x_0 + \tilde{x}$, τότε παίρνουμε τη λύση $x_2(t) = t + x_0 + \tilde{x}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ με $|\tilde{x}| < \varepsilon$ ισχύει ότι $|x_1(t) - x_2(t)| = |\tilde{x}| < \varepsilon$ για κάθε $t \geqslant 0$. Επομένως, κάθε λύση $x_1(t) = t + x_0$ της εξίσωσης είναι ευσταθής.

Άσκηση 2. i) Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις του μη-ομογενούς γραμμικού συστήματος έχουν την ίδια ιδιότητα ευστάθειας με εκείνη της μηδενικής λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι άνω τριγωνικός, οπότε οι ιδιοτιμές του ταυτίζονται με τα διαγώνια στοιχεία του. Αφού ο πίνακας έχει μία θετική ιδιοτιμή, η μηδενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι ασταθής. Επομένως, όλες οι λύσεις του μη-ομογενούς συστήματος είναι ασταθείς.

ii) Έστω $y = x'$. Τότε, $y' = x'' = x' - 2x + \cos t = y - 2x + \cos t$. Επομένως, παίρνουμε το ισοδύναμο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = -\lambda(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda + 2.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Αφού οι ιδιοτιμές του πίνακα έχουν θετικό πραγματικό μέρος, η μηδενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι ασταθής. Επομένως, όλες οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι ασταθείς.

Άσκηση 3. Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(z) = \det(A - zI_2) = (\lambda - z)^2 - \mu = z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 - \mu,$$

το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4\mu$.

- Αν $\mu < 0$, τότε ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $z_{1,2} = \lambda \pm i\sqrt{-\mu}$. Αν $\lambda < 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Αν $\lambda = 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ευσταθείς. Αν $\lambda > 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασταθείς.

- Αν $\mu = 0$, τότε ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $z = \lambda$. Αν $\lambda < 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Αν $\lambda = 0$, τότε η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 0 είναι 1, οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασταθείς. Αν $\lambda > 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασταθείς.
- Αν $\mu > 0$, τότε ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $z_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\mu}$. Αν $\lambda + \sqrt{\mu} \leqslant 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Αν $\lambda + \sqrt{\mu} > 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι ασταθείς.

Άσκηση 4. i) Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας το $(0, -1)$. Επομένως, με την αλλαγή μεταβλητών $\tilde{x} = x$ και $\tilde{y} = y+1$, το αρχικό σύστημα μετατρέπεται στο ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{x} + \tilde{y} \\ \tilde{y}' = \tilde{x} - \tilde{y} \end{cases} .$$

ii) Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας το $(-1, -1)$. Επομένως, με την αλλαγή μεταβλητών $\tilde{x} = x + 1$ και $\tilde{y} = y + 1$, το αρχικό σύστημα μετατρέπεται στο ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{x} + \tilde{y} \\ \tilde{y}' = \tilde{x} + 2\tilde{y} \end{cases} .$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

7^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να βρεθούν οι λύσεις και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσεων των ακόλουθων συστημάτων

$$\begin{array}{rlrl}
i) & x' = x - 3y & iv) & x' = -3x + y \\
 & y' = -3x + y & & y' = -x - y \\
ii) & x' = -2x + y & v) & x' = x + y \\
 & y' = -x + 2y & & y' = 4x - 2y \\
iii) & x' = 4y & vi) & x' = 3x - 4y \\
 & y' = -9x & & y' = x - y
\end{array}$$

2) Να αποδειχθεί ότι το κρίσιμο σημείο (0,0) του γραμμικού συστήματος

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν $p > 0$ και $q > 0$, όπου $p = -(a + d)$ και $q = ad - bc$.

3) Η εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση είναι

$$mx'' + ax' + kx = 0, \quad m, a, k > 0.$$

Να περιγραφεί ο τύπος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου στις ακόλουθες περιπτώσεις

$$\begin{array}{rlrl}
i) & a = 0 & iii) & a^2 - 4mk < 0 \\
ii) & a^2 - 4mk = 0 & iv) & a^2 - 4mk > 0
\end{array}$$

7 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων

Άσκηση 1. i) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A - \lambda_1 I_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 I_2)\, v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = -a_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \\ c_1 e^{-2t} - c_2 e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές. Οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 αποτελούν τις διαχωρίζουσες. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = x$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ενώ οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = -x$ απομακρύνονται από αυτή. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ασυμπτωτικές στις ημιευθείες που ορίζονται από τις $y = x$ και $y = -x$ καθώς $t \to \pm\infty$, οπότε δεν μπορούν να εισχωρήσουν στην αρχή των αξόνων.

ii) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 3.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -\sqrt{3}$ και $\lambda_2 = \sqrt{3}$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A-\lambda_1 I_2)\,v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \left(2+\sqrt{3}\right) b_1 \Rightarrow$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-t\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(A-\lambda_2 I_2)\,v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = \left(2-\sqrt{3}\right) b_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{t\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1\left(2+\sqrt{3}\right)e^{-t\sqrt{3}} + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)e^{t\sqrt{3}} \\ c_1 e^{-t\sqrt{3}} - c_2 e^{t\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές. Οι ευθείες $y = \frac{x}{2+\sqrt{3}}$ και $y = \frac{x}{2-\sqrt{3}}$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 αποτελούν τις διαχωρίζουσες. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = \frac{x}{2+\sqrt{3}}$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ενώ οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = \frac{x}{2-\sqrt{3}}$ απομακρύνονται από αυτή. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ασυμπτωτικές στις ημιευθείες που ορίζονται από τις $y = \frac{x}{2+\sqrt{3}}$ και $y = \frac{x}{2-\sqrt{3}}$ καθώς $t \to \pm\infty$, οπότε δεν μπορούν να εισχωρήσουν στην αρχή των αξόνων.

iii) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_2\right) = \lambda^2 + 36.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm 6i$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα:

$$(A-\lambda_1 I_2)\,v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -6i & 4 \\ -9 & -6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2b_1 = 3ia_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\phi_1(t) = \cos(6t)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(6t)\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(6t) \\ -3\sin(6t) \end{bmatrix},$$

$$\phi_2(t) = \cos(6t)\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + \sin(6t)\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\sin(6t)\\3\cos(6t)\end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix}2c_1\cos(6t) + 2c_2\sin(6t)\\-3c_1\sin(6t) + 3c_2\cos(6t)\end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) = 0$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι κέντρο, οπότε ευσταθές. Όλες οι τροχιές είναι ελλείψεις με κέντρο την αρχή των αξόνων. Οι ευθείες $y = 0$ και $x = 0$ που ορίζονται από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ιδιοδιανύσματος v_1 αποτελούν τον μικρό και τον μεγάλο άξονα των ελλείψεων αντίστοιχα.

iv) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (-3-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda = -2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα:

$$(A - \lambda I_2)\,v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Αφού η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = -2$ είναι 1, αναζητούμε ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2:

$$(A - \lambda I_2)\,v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = a_2 + 1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\phi_2(t) = e^{\lambda t}\,(v_2 + v_1 t) = e^{-2t}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = e^{-2t}\begin{bmatrix}t\\t+1\end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix}c_1 + c_2 t\\c_1 + c_2 + c_2 t\end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda = -2 < 0$ διπλή ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα 1, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος. Η ευθεία $y = x$ που ορίζεται από το ιδιοδιάνυσμα v_1 ορίζει δύο τροχιές του συστήματος που κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές εισχωρούν στην αρχή των αξόνων καθώς

$t \to \infty$ με κατεύθυνση v_1.

v) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A - \lambda_1 I_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = -4a_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 I_2)\, v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = a_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές. Οι ευθείες $y = -4x$ και $y = x$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 αποτελούν τις διαχωρίζουσες. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = -4x$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ενώ οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = x$ απομακρύνονται από αυτή. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ασυμπτωτικές στις ημιευθείες που ορίζονται από τις $y = -4x$ και $y = x$ καθώς $t \to \pm\infty$, οπότε δεν μπορούν να εισχωρήσουν στην αρχή των αξόνων.

vi) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα:

$$(A - \lambda I_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 2b_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αφού η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$ είναι 1, αναζητούμε ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2:

$$(A - \lambda I_2)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = 2b_2 + 1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\phi_2(t) = e^{\lambda t}\,(v_2 + v_1 t) = e^t \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ t \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) = e^t \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 + 2c_2 t \\ c_1 + c_2 t \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda = 1 > 0$ διπλή ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα 1, το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι ασταθής εκφυλισμένος κόμβος. Η ευθεία $y = \frac{x}{2}$ που ορίζεται από το ιδιοδιάνυσμα v_1 ορίζει δύο τροχιές του συστήματος που απομακρύνονται την αρχή των αξόνων. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές απομακρύνονται με αρχική κατεύθυνση v_1 από την αρχή των αξόνων καθώς $t \to \infty$.

***Άσκηση* 2.** Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc,$$

το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = p^2 - 4q$.

- Αν $p^2 < 4q$, τότε ο πίνακας έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

  Επομένως, το σημείο $(0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $p > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι $q > \frac{p^2}{4} > 0$.

- Αν $p^2 = 4q$, τότε ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda = \frac{a+d}{2} = -\frac{p}{2}$. Επομένως, το σημείο $(0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $p > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι $q = \frac{p^2}{4} > 0$.

- Αν $p^2 > 4q$, τότε ο πίνακας έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Επομένως, το σημείο $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν:

$$-p+\sqrt{p^2-4q}<0 \Leftrightarrow \sqrt{p^2-4q}<p \Leftrightarrow p^2-4q<p^2 \Leftrightarrow q>0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι $p>\sqrt{p^2-4q}>0$.

Επομένως, το σημείο $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $p>0$ και $q>0$.

***Άσκηση* 3.** Έστω $y=x'$. Τότε,

$$y'=x''=-\frac{ax'+kx}{m}=-\frac{k}{m}\cdot x-\frac{a}{m}\cdot y.$$

Επομένως, παίρνουμε το ισοδύναμο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{a}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda)=\det\left(A-\lambda I_2\right)=-\lambda\left(-\frac{a}{m}-\lambda\right)+\frac{k}{m}=\lambda^2+\frac{a}{m}\cdot\lambda+\frac{k}{m},$$

το οποίο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\frac{a^2}{m^2}-\frac{4k}{m}=\frac{a^2-4km}{m^2}.$$

i) Αν $a=0$, τότε $\Delta=-\frac{4k}{m}<0$, οπότε ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Επομένως, το κρίσιμο σημείο της εξίσωσης είναι κέντρο, δηλαδή ευσταθές.

ii) Αν $a^2-4km=0$, τότε $\Delta=0$, οπότε ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda=-\frac{a}{2m}<0$ με γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Επομένως, το κρίσιμο σημείο της εξίσωσης είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος.

iii) Αν $a^2-4km<0$, τότε $\Delta<0$, οπότε ο πίνακας έχει μιγαδικές ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2m}\pm\frac{i}{2}\sqrt{4km-a^2}.$$

Αφού $\operatorname{Re}\left(\lambda_{1,2}\right)=-\frac{a}{2m}<0$, το κρίσιμο σημείο της εξίσωσης είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία.

iv) Αν $a^2-4km>0$, τότε $\Delta>0$, οπότε ο πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4km}.$$

- Αν $\sqrt{a^2-4km}<\frac{a}{m}$, τότε το κρίσιμο της εξίσωσης είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος.
- Αν $\sqrt{a^2-4km}=\frac{a}{m}$, τότε κάθε σημείο στην κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 είναι ευσταθές κρίσιμο σημείο.

- Αν $\sqrt{a^2 - 4km} > \frac{a}{m}$, τότε το κρίσιμο της εξίσωσης είναι σάγμα, δηλαδή ασταθές.

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

8^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να προσδιοριστούν το είδος και οι ιδιότητες ευστάθειας των κρίσιμων σημείων των ακόλουθων συστημάτων.

α) $x' = y,\ y' = -x - x^3$
β) $x' = \sin(x+y),\ y' = y$

2) Δείξτε ότι η $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι ασθενής συνάρτηση Lyapounov στο $(0,0)$ για καθένα από τα συστήματα

α) $x' = -x + y^2,\ y' = -xy$
β) $x' = -x^3,\ y' = -x^2y + x^4y.$

3) Επιλέξτε κατάλληλη σταθερά a τέτοια ώστε η $V(x,y) = x^2 + y^2 + axy$ να είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapounov στο $(0,0)$ για το σύστημα

$x' = y,\ y' = -x - y - y^3.$

4) Να προσδιορισθεί εάν τα ακόλουθα συστήματα έχουν περιοδικές λύσεις στο κλειστό διάστημα $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/4\}$.

α) $x' = y - y^2,\ y' = x^2 + y^2 - 1$
β) $x' = y,\ y' = 2y - \frac{y^2}{2} - x - \sin y$

5) Να βρεθούν οι τιμές του μ όπου διακλαδώνονται οι λύσεις των ακόλουθων συστημάτων και να εξετασθεί η ευστάθεια της αρχής των αξόνων σε κάθε περίπτωση

α) $x' = 2y,\ y' = 2x - \mu y$
β) $x' = \mu y + xy,\ y' = -\mu x + \mu y + x^2 + y^2$

6) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x' = 4x + 4y - x(x^2 + y^2)$$
$$y' = -4x + 4y - y(x^2 + y^2).$$

έχει μία περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί. Τέλος σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες.

8 Ευστάθεια και Διακλάδωση Μη-Γραμμικών Συστημάτων

Άσκηση 1. α) Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Επομένως, το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $(0,0)$. Θέτοντας $F(x,y) = y$ και $G(x,y) = -x - x^3$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε η γραμμικοποίηση στο $(0,0)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm i$. Αφού $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) = 0$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι κέντρο. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία, ασταθής εστία ή ευσταθές κέντρο.

β) Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Επομένως, τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(n\pi, 0)$ για $n \in \mathbb{Z}$. Εισάγουμε τις τοπικές συντεταγμένες $\tilde{x} = x - 2n\pi$ και $\tilde{y} = y$. Θέτοντας $F(x,y) = \sin(x+y)$ και $G(x,y) = y$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(2n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε η γραμμικοποίηση στα σημεία $(2n\pi, 0)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = (1 - \lambda)^2.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Αφού $\lambda > 0$ με γεωμετρική πολλαπλότητα 1, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι ασταθής εκφυλισμένος κόμβος. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης τα σημεία ισορροπίας $(2n\pi, 0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι ασταθείς εκφυλισμένοι κόμβοι.

Εισάγουμε τις τοπικές συντεταγμένες $\tilde{x} = x - (2n+1)\pi$ και $\tilde{y} = y$. Για $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=((2n+1)\pi,0)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε η γραμμικοποίηση στα σημεία $((2n+1)\pi, 0)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 1$. Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι σάγμα. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης το σημείο ισορροπίας $((2n+1)\pi, 0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι σάγματα, δηλαδή ασταθή.

Άσκηση 2. Η συνάρτηση $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη σε μία περιοχή του $(0,0)$ και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $(0,0)$.

α) Υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2xx' + 2yy' = 2x\left(-x + y^2\right) + 2y\left(-xy\right) = -2x^2 \leqslant 0.$$

Η $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται για $x = 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, δηλαδή η $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι μία ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Συνεπώς, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ευσταθές.

β) Για $|x| < 1$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= 2xx' + 2yy' = 2x\left(-x^3\right) + 2y\left(-x^2y + x^4y\right) = -2x^4 - 2x^2y^2 + 2x^4y^2 \\ &= -2x^2\left(x^2 + y^2 - x^2y^2\right) \leqslant -2x^2\left(x^2 + y^2 - y^2\right) = -2x^4 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Η $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται για $x = 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ημιορισμένη στην περιοχή $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\right\}$ του $(0,0)$, δηλαδή η $V(x,y)$ είναι μία ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Επομένως, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ευσταθές.

Άσκηση 3. Η συνάρτηση $V(x,y) = x^2+y^2+axy$ και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $(0,0)$. Η $V(x,y)$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $|a| < 2$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= 2xx' + 2yy' + ax'y + axy' = 2x \cdot y + 2y\left(-x-y-y^3\right) + ay \cdot y + ax\left(-x-y-y^3\right)\\ &= -2y^4 - axy^3 + (a-2)y^2 - axy - ax^2.\end{aligned}$$

Για $a = 1$, παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -2y^4 - xy^3 - y^2 - xy - x^2 \leqslant -xy^3 - y^2 - xy - x^2 = -x^2 - y\left(y^2+1\right)x - y^2,$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = y^2\left(y^2+1\right)^2 - 4y^2 = y^2\left(y^4+2y^2-3\right) < 0 \Leftrightarrow y^4+2y^2-3 < 0, \quad y \neq 0.$$

Θέτουμε $z = y^2$. Τότε, θέλουμε $z^2+2z-3 < 0$. Το τριώνυμο έχει ρίζες $z_1 = -3$ και $z_2 = 1$, οπότε ισχύει ότι $z^2+2z-3 < 0$ αν και μόνο αν $z \in (-3,1)$ Όμως $z = y^2 > 0$, οπότε $z = y^2 \in (0,1)$, δηλαδή $0 < |y| < 1$. Επομένως, $-x^2 - y\left(y^2+1\right)x - y^2 < 0$ για κάθε $x \neq 0$ αν και μόνο αν $0 < |y| < 1$. Η $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται στην περιοχή $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\right\}$ του $(0,0)$ αν και μόνο αν $x = y = 0$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ορισμένη στην περιοχή $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\right\}$ του $(0,0)$, δηλαδή η $V(x,y) = x^2+y^2+xy$ είναι μία ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Επομένως, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Άσκηση 4. α) Σύμφωνα με το κριτήριο του Poincaré γνωρίζουμε ότι κάθε κλειστή τροχιά ενός συστήματος περικλείει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο του συστήματος. Τα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} y - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Επομένως, τα κρίσιμα σημεία του συστήματος είναι τα $(0,1)$, $(-1,0)$ και $(1,0)$. Αφού ο κλειστός δίσκος $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\}$ δεν περιέχει κανένα από τα κρίσιμα σημεία του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν έχει κλειστή τροχιά, δηλαδή περιοδική λύση, στο K.

β) Θέτουμε $F(x,y) = y$ και $G(x,y) = 2y - \frac{y^2}{2} - x - \sin y$. Σύμφωνα με το κριτήριο των Bendixson και Dulac γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ έχει σταθερό πρόσημο σε ένα χωρίο του επιπέδου φάσεων, τότε το σύστημα δεν μπορεί να έχει κλειστή τροχιά, δηλαδή περιοδική λύση, στο χωρίο αυτό. Για $(x,y) \in K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\}$, υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 2 - y - \cos y \geqslant 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0.$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει περιοδική λύση στο K.

Άσκηση 5. α) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -\mu \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = -\lambda(-\mu - \lambda) - 4 = \lambda^2 + \mu\lambda - 4.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \mu^2 + 16 > 0$. Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 16}}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. Επομένως, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σάγμα, δηλαδή ασταθές, για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Τα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} \mu y + xy = 0 \\ -\mu x + \mu y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Επομένως, τα κρίσιμα σημεία του συστήματος είναι τα $(0,0)$ και $(\mu,0)$. Θέτοντας $F(x,y) = \mu y + xy$ και $G(x,y) = -\mu x + \mu y + x^2 + y^2$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix},$$

οπότε η γραμμικοποίηση στο $(0,0)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = -\lambda(\mu - \lambda) + \mu^2 = \lambda^2 - \mu\lambda + \mu^2.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -3\mu^2 \leqslant 0$. Επομένως, ο πίνακας έχει μιγαδικές ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm i\mu\sqrt{3}}{2}.$$

- Αν $\mu < 0$, τότε $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) < 0$, οπότε το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία.

- Αν $\mu > 0$, τότε $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) > 0$, οπότε το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι ασταθής εστία. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι ασταθής εστία.

- Αν $\mu = 0$, τότε κάθε σημείο του επιπέδου φάσεων του γραμμικού συστήματος είναι ευσταθές κρίσιμο σημείο. Επομένως, δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος.

Συνεπώς, στην τιμή διακλάδωσης $\mu = 0$ γίνεται ανταλλαγή ευστάθειας του κρίσιμου σημείου $(0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος.

Εισάγοντας τις τοπικές συντεταγμένες $\tilde{x} = x - \mu$ και $\tilde{y} = y$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(\mu,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2\mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix},$$

οπότε η γραμμικοποίηση στο σημείο $(\mu, 0)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = -\lambda(\mu - \lambda) - 2\mu^2 = \lambda^2 - \mu\lambda - 2\mu^2.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 9\mu^2 \geqslant 0$. Επομένως, ο πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = -\mu$ και $\lambda_2 = 2\mu$.

- Αν $\mu \neq 0$, τότε $\lambda_1\lambda_2 < 0$, οπότε το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του γραμμικού συστήματος είναι σάγμα. Σύμφωνα με το θεώρημα γραμμικοποίησης το κρίσιμο σημείο $(\mu, 0)$ του μη-γραμμικού συστήματος είναι σάγμα, δηλαδή ασταθές.

- Αν $\mu = 0$, τότε κάθε σημείο του επιπέδου φάσεων του γραμμικού συστήματος είναι ευσταθές κρίσιμο σημείο. Επομένως, δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το κρίσιμο σημείο $(\mu, 0)$ του μη-γραμμικού συστήματος.

Άσκηση 6. Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\vartheta$ και $y = r\sin\vartheta$, οπότε:

$$\begin{cases} x' = r'\cos\vartheta - r\vartheta'\sin\vartheta \\ y' = r'\sin\vartheta + r\vartheta'\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'x = r'r\cos^2\vartheta - r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ y'y = r'r\sin^2\vartheta + r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ x'y = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta - r^2\vartheta'\sin^2\vartheta \\ y'x = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta + r^2\vartheta'\cos^2\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'x + y'y = r'r \\ y'x - x'y = r^2\vartheta' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r'r = 4x^2 + \cancel{4xy} - x^2\left(x^2+y^2\right) - \cancel{4xy} + 4y^2 - y^2\left(x^2+y^2\right) \\ r^2\vartheta' = -4x^2 + \cancel{4xy} - \cancel{xy\left(x^2+y^2\right)} - \cancel{4xy} - 4y^2 + \cancel{xy\left(x^2+y^2\right)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r'r = \left(x^2+y^2\right)\left(4-x^2-y^2\right) \\ r^2\vartheta' = -4\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = -r\left(r^2-4\right) \\ \vartheta' = -4 \end{cases}.$$

Προφανώς, $\vartheta = -4t + \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{r\left(r^2-4\right)} = -\frac{1}{4r} + \frac{1}{8(r-2)} + \frac{1}{8(r+2)},$$

παίρνουμε:

$$-\frac{\ln r}{4} + \frac{\ln|r-2|}{8} + \frac{\ln(r+2)}{8} = -t + c_0 \Rightarrow \ln\left|r^2-4\right| - 2\ln r = -8t + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left|r^2-4\right| - \ln r^2 = -8t + c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{r^2-4}{r^2}\right| = -8t + c_1 \Rightarrow \left|\frac{r^2-4}{r^2}\right| = c_2 e^{-8t} \Rightarrow$$

$$\frac{r^2-4}{r^2} = ce^{-8t} \Rightarrow \frac{4}{r^2} = 1 - ce^{-8t} \Rightarrow r^2 = \frac{4}{1-ce^{-8t}} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{1-ce^{-8t}}}.$$

Αν $c = 0$, βρίσκουμε τη λύση $r = 2$ και $\vartheta = -4t + \vartheta_0$, η οποία είναι περιοδική λύση της οποίας η τροχιά παριστάνεται από τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $r = 2$ στο επίπεδο φάσεων. Με άλλα λόγια, $x(t) = 2\cos\left(-4t+\vartheta_0\right)$ και $y(t) = 2\sin\left(-4t+\vartheta_0\right)$ για κάθε $t \geqslant 0$.

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

9^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \ln(t+1)e^{-\lambda t}dt \sim \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + O(\frac{1}{\lambda^4}), \quad \lambda >> 1.$$

2) Δείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \tan(\theta)}d\theta \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + O(\frac{1}{\lambda^5}), \quad \lambda >> 1.$$

3) Δείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \tan^2(\theta)}d\theta \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2\lambda^{\frac{3}{2}}}\right) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}), \quad \lambda >> 1,$$

όπου $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, για $x > 0$.

4) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \sqrt{1+t}e^{\lambda(2t-t^2)}dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}e^{\lambda}, \quad \lambda >> 1$$

και

$$\int_1^2 \sqrt{3+t}e^{\frac{\lambda}{t+1}}dt \sim \frac{8}{\lambda}e^{\frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda >> 1.$$

5) Θεωρήστε την πραγματική εκθετική συνάρτηση

$$Ei(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt,$$

για μεγάλες τιμές του λ.

α) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι

$$Ei(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\lambda^k} + r_n(\lambda),$$

όπου

$$r_n(\lambda) = (-1)^n n! \int_\lambda^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt.$$

β) Δείξτε ότι

$$|r_n(\lambda)| \leq n!\lambda^{-n-1}e^{-\lambda}.$$

9 Ασυμπτωτικά Αναπτύγματα Ολοκληρωμάτων

Άσκηση 1. Έστω $T > 0$. Παρατηρούμε ότι $\ln(t+1) \leqslant t$ για κάθε $t \geqslant T > 0$. Επομένως,

$$|\mathrm{EMO}| = \int_T^\infty \ln(t+1)e^{-\lambda t}dt \leqslant \int_T^\infty te^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T+1)}{\lambda^2},$$

το οποίο είναι εκθετικά μικρό για $\lambda \gg 1$. Δηλαδή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\ln(t+1)$ από το ανάπτυγμά του σε σειρά Taylor γύρω από το $t = 0$:

$$\int_0^T \ln(t+1)e^{-\lambda t}dt = \int_0^T \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots\right)e^{-\lambda t}dt \overset{u=\lambda t}{=} \int_0^{\lambda T} \left(\frac{u}{\lambda} - \frac{u^2}{2\lambda^2} + \frac{u^3}{3\lambda^3} - \cdots\right)\frac{e^{-u}}{\lambda}du.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \ln(t+1)e^{-\lambda t}dt &\sim \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty ue^{-u}du - \frac{1}{2\lambda^3}\int_0^\infty u^2e^{-u}du + \frac{1}{3\lambda^4}\int_0^\infty u^3e^{-u}du - \cdots \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} - \frac{\Gamma(3)}{2\lambda^3} + \frac{\Gamma(4)}{3\lambda^4} - \cdots = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^4} - \cdots \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \ln(t+1)e^{-\lambda t}dt \sim \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \quad \lambda \gg 1.$$

Άσκηση 2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \tan\theta$, παίρνουμε $dt = \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta \Rightarrow dt = \left(1+t^2\right)d\theta$, οπότε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan\theta}d\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}dt.$$

Έστω $T > 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ για κάθε $t \geqslant T > 0$. Επομένως,

$$|\mathrm{EMO}| = \int_T^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}dt \leqslant \int_T^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda},$$

το οποίο είναι εκθετικά μικρό για $\lambda \gg 1$. Δηλαδή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\frac{1}{1+t^2}$ από το ανάπτυγμά του σε σειρά Taylor γύρω από το $t = 0$:

$$\int_0^T \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}dt = \int_0^T \left(1 - t^2 + t^4 - \cdots\right)e^{-\lambda t}dt \overset{u=\lambda t}{=} \int_0^{\lambda T}\left(1 - \frac{u^2}{\lambda^2} + \frac{u^4}{\lambda^4} - \cdots\right)\frac{e^{-u}}{\lambda}du.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan\theta}d\theta &\sim \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-u}du - \frac{1}{\lambda^3}\int_0^\infty u^2e^{-u}du + \frac{1}{\lambda^5}\int_0^\infty u^4e^{-u}du - \cdots \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\lambda} - \frac{\Gamma(3)}{\lambda^3} + \frac{\Gamma(5)}{\lambda^5} - \cdots = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{24}{\lambda^5} - \cdots \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan\theta}d\theta \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right), \quad \lambda \gg 1.$$

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \tan^2\theta$, παίρνουμε:

$$dt = 2\tan\theta\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta \Rightarrow dt = 2\sqrt{t}\,(1+t)\,d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan^2\theta}d\theta = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{2\sqrt{t}(1+t)}dt.$$

Έστω $T>0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{T}}$ για κάθε $t \geqslant T > 0$. Επομένως,

$$|\mathrm{EMO}| = \int_T^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{T}}\int_T^{\infty}e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda\sqrt{T}},$$

το οποίο είναι εκθετικά μικρό για $\lambda \gg 1$. Δηλαδή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\frac{1}{1+t}$ από το ανάπτυγμά του σε σειρά Taylor γύρω από το $t=0$:

$$\int_0^T \frac{e^{-\lambda t}}{2\sqrt{t}(1+t)}dt = \int_0^T\left(1-t+t^2-\cdots\right)\frac{e^{-\lambda t}}{2\sqrt{t}}dt \overset{u=\lambda t}{=} \int_0^{\lambda T}\left(1-\frac{u}{\lambda}+\frac{u^2}{\lambda^2}-\cdots\right)\frac{e^{-u}}{2\sqrt{\lambda u}}du.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan^2\theta}d\theta &\sim \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du - \frac{1}{2\lambda^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du + \frac{1}{2\lambda^{\frac{5}{2}}}\int_0^{\infty}u^{\frac{3}{2}}e^{-u}du - \cdots\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{5}{2}}} - \cdots .\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ και $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\tan^2\theta}d\theta \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right), \quad \lambda \gg 1.$$

Άσκηση 4. Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{1+t}$ είναι συνεχής και η $g(t) = 2t - t^2$ παρουσιάζει ένα μοναδικό μέγιστο στο σημείο $t=1$, όπου $g'(1) = 0$ και $g''(1) = -2$. Αφού η g παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο δεξί άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης, παίρνουμε:

$$\int_0^1 \sqrt{t+1}e^{\lambda\left(2t-t^2\right)}dt \sim \frac{1}{2}f(1)e^{\lambda g(1)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda g''(1)}} = e^{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \quad \lambda \gg 1.$$

Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{3+t}$ είναι συνεχής και η $g(t) = \frac{1}{t+1}$ παρουσιάζει ένα μοναδικό μέγιστο στο σημείο $t=1$, όπου $g'(1) = -\frac{1}{4} < 0$. Αναπτύσσουμε την g ως:

$$g(t) = g(1) + g'(1)(t-1) + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{t-1}{4} + \cdots .$$

Τότε, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^2 \sqrt{3+t}e^{\frac{\lambda}{t+1}}dt = \int_1^2 \sqrt{3+t}\exp\left\{\lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{t-1}{4} + \cdots\right)\right\}dt.$$

Είναι αναμενόμενο ότι η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από την περιοχή του σημείου $t = 1$. Για να πάρουμε μία προσέγγιση αντικαθιστούμε την $f(t)$ από την $f(1) = 2$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{3+t}e^{\frac{\lambda}{t+1}}dt \sim 2e^{\frac{\lambda}{2}}\int_1^2 e^{-\frac{\lambda(t-1)}{4}}dt \overset{u=\frac{\lambda(t-1)}{4}}{=} \frac{8}{\lambda}e^{\frac{\lambda}{2}}\int_1^{\frac{\lambda}{4}} e^{-u}du \\ \sim \frac{8}{\lambda}e^{\frac{\lambda}{2}}\int_1^{\infty} e^{-u}du = \frac{8}{\lambda}e^{\frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda \gg 1.\end{aligned}$$

Άσκηση 5. α) Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{Ei}(\lambda) = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_{t=\lambda}^{\infty} - \int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + r_1(\lambda).$$

Έστω ότι ισχύει:

$$\mathrm{Ei}(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\lambda^k} + (-1)^{n-1}(n-1)!\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^n}dt, \quad n \geqslant 2.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ei}(\lambda) &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\lambda^k} + (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\left[-\frac{e^{-t}}{t^n}\right]_{t=\lambda}^{\infty} - n\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt\right) \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\lambda^k} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\lambda^n} + (-1)^n n!\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\lambda^k} + r_n(\lambda).\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \geqslant 1$.

β) Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{t^{n+1}} \leqslant \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ για κάθε $t \geqslant \lambda$. Επομένως,

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt \leqslant \frac{1}{\lambda^{n+1}}\int_{\lambda}^{\infty}e^{-t}dt = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{n+1}} \Rightarrow |r_n(\lambda)| = n!\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt \leqslant n!\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{n+1}}.$$

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα Εξεταστικής Φεβρουαρίου 2019

Θέμα 1ο
(1.5 μονάδες)

Θέλουμε να υπολογίσουμε την δύναμη F που ασκείται από την περιστροφή μίας έλικας, η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα ρευστό. Υποθέτουμε ότι η δύναμη αυτή εξαρτάται από την διάμετρο D της έλικας, την ταχύτητα περιστροφής w, την πυκνότητα του ρευστού p και την παροχή Q.

α) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο αδιάστατες ποσότητες $\pi_1 = \frac{F}{w^2 D^4 p}$ και $\pi_2 = \frac{Q}{D^3 w}$.

β) Εάν υπάρχει ένας ελεύθερος μονάδων φυσικός νόμος $f(F, p, w, D, Q) = 0$, γράψτε την F συναρτήσει των άλλων ποσοτήτων.

Δίδεται ότι το F έχει διαστάσεις της μορφής *μάζα* $\cdot$ *μήκος* $\cdot$ *(χρόνος)*$^{-2}$, το Q της μορφής (*μήκος*)$^3 \cdot$ *(χρόνος)*$^{-1}$, το D της μορφής *μήκος*, το p της μορφής *μάζα* $\cdot$ *(μήκος)*$^{-3}$ και το w της μορφής *(χρόνος)*$^{-1}$.

Θέμα 2ο
(1.5 μονάδες)

Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών με δύο όρους για το ακόλουθο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Poincaré-Lindstedt

$$y''(t) + (1+\varepsilon)y(t) = 0, \;\; \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1, \;\; t > 0, \;\; y(0) = 0 \;\text{ και }\; y'(0) = 1.$$

Θέμα 3ο
(2 μονάδες)

Βρείτε μία ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση για το ακόλουθο προβλήμα

$$\sqrt{\varepsilon} y''(t) + (1+t^2)y'(t) + t y(t) = 0, \;\; \text{όπου } \; 0 < \varepsilon << 1, \;\; 0 < t < 1, \;\; y(0) = 0 \;\text{ και }\; y(1) = 1.$$

Θέμα 4ο
(2 μονάδες)

Να βρεθεί ο τύπος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου του προβλήματος

$$x' = -2x - 5y, \; y' = x + 4y$$

και να σχεδιασθεί το διάγραμμα φάσεων.

Θέμα 5ο
(3 μονάδες)

α) Δείξτε ότι η $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapounov στο $(0,0)$ για το σύστημα

$$x' = x + y + x(x^2 + y^2 - 5), \quad y' = -x + y + y(x^2 + y^2 - 5).$$

β) Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα έχει μία περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί. Τέλος σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων.

Καλή Επιτυχία!

10 Θέματα Εξετάσεων

Φεβρουάριος 2019

Θέμα 1. α) Το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε ανεξάρτητα θεμελιώδη μεγέθη ως προς τα οποία να μπορούν να εκφρασθούν όλες οι παραπάνω διαστατικές ποσότητες. Μία κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών εδώ είναι οι ποσότητες M (μάζα), T (χρόνος) και L (μήκος). Έχουμε:

$$[F] = MT^{-2}L, \quad [p] = ML^{-3}, \quad [w] = T^{-1}, \quad [D] = L, \quad [Q] = L^3T^{-1}.$$

Ο πίνακας διαστάσεων είναι ο εξής:

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ T \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} F & p & w & D & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Εδώ έχουμε $m = 5$, $n = 3$ και η τάξη του πίνακα A είναι 3. Συνεπώς, υπάρχουν $5-3 = 2$ αδιάστατες ποσότητες, οι οποίες είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα μεγέθη F, p, w, D και Q. Αν το π είναι μία τέτοια αδιάστατη ποσότητα, τότε για κάποια επιλογή εκθετών a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 = [\pi] &= [F^{a_1} p^{a_2} w^{a_3} D^{a_4} Q^{a_5}] \\ &= M^{a_1} T^{-2a_1} L^{a_1} M^{a_2} L^{-3a_2} T^{-a_3} L^{a_4} T^{-a_5} L^{3a_5} \\ &= M^{a_1+a_2} T^{-2a_1-a_3-a_5} L^{a_1-3a_2+a_4+3a_5}. \end{aligned}$$

Άρα, οι εκθέτες των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι, παίρνουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 - a_3 - a_5 = 0 \\ a_1 - 3a_2 + a_4 + 3a_5 = 0 \end{cases}.$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του είναι οι εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = -4, \quad a_5 = 0,$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = -1.$$

Οι λύσεις αυτές δίνουν τις εξής αδιάστατες ποσότητες:

$$\pi_1 = \frac{F}{pw^2D^4}, \quad \pi_2 = \frac{Q}{wD^3}.$$

β) Το θεώρημα π εξασφαλίζει ότι ο αρχικός φυσικός νόμος είναι ισοδύναμος με έναν νόμο της μορφής $G(\pi_1, \pi_2) = 0$. Λύνοντας ως προς π_1, έχουμε:

$$\pi_1 = g(\pi_2) \Rightarrow F = pw^2 D^4 g\left(\frac{Q}{wD^3}\right).$$

Θέμα 2. Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots) \cdot \frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots) \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{dy}{dt}(0) = \frac{dy}{d\tau}(0) \cdot \frac{d\tau}{dt}(0) &= \left[y_0'(0) + y_1'(0)\varepsilon + \cdots\right](1 + w_1\varepsilon + \cdots) \\ &= y_0'(0) + w_1 y_0'(0)\varepsilon + y_1'(0)\varepsilon + w_1 y_1'(0)\varepsilon^2 + \cdots = y_0'(0) + \left[w_1 y_0'(0) + y_1'(0)\right]\varepsilon + \cdots \Rightarrow . \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_0'(0) = 1 \\ w_1 y_0'(0) + y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0'(0) = 1 \\ y_1'(0) = -w_1 \end{cases}$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$(1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon)y = 0, \quad \tau > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{1}{1 + w_1\varepsilon + \cdots}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$\left(1 + 2w_1\varepsilon + w_1^2\varepsilon^2 + \cdots\right)\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + \cdots\right) + (1 + \varepsilon)(y_0 + y_1\varepsilon + \cdots) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + 2w_1 y_0''\varepsilon + 2w_1 y_1''\varepsilon^2 + \cdots\right) + \left(y_0 + y_1\varepsilon + y_0\varepsilon + y_1\varepsilon^2 + \cdots\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1 y_0'' + y_1 + y_0\right)\varepsilon + \cdots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \\ y_1'' + y_1 = -y_0 - 2w_1 y_0'', \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -w_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0(\tau) = \sin\tau, \quad \tau > 0 \\ y_1'' + y_1 = (2w_1 - 1)\sin\tau, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -w_1 \end{cases}.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1'' + y_1 = 0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau + c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $(2w_1 - 1)\sin\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1 = \frac{1}{2}$ για να τον αποφύγουμε.

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0$ και $y_1'(0) = -\frac{1}{2}$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = -\frac{1}{3}$, οπότε $y_1(\tau) = -\frac{\sin\tau}{2}$. Επομένως,

$$y(\tau) = \sin\tau - \frac{\sin\tau}{2} \cdot \varepsilon + \cdots, \quad \tau = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots\right) t > 0.$$

Θέμα 3. Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $\left(1+t^2\right) y' + ty = 0$. Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε έχει γενική λύση:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{t}{1+t^2} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{2} + k \Rightarrow y(t) = \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}, \quad 0 < t < 1.$$

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός οριακού στρώματος στο $t = 0$. Αφού το $t = 1$ βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = 1$ στη γενική λύση του μη-διαταραγμένου προβλήματος, βρίσκουμε την εξωτερική προσέγγιση:

$$y_0(t) = \sqrt{\frac{2}{1+t^2}}, \quad t = O(1).$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2(\varepsilon)} Y'' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} Y' + \delta(\varepsilon)\tau^2 Y' + \delta(\varepsilon)\tau Y = 0.$$

Αν $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \delta(\varepsilon)$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{6}}\right)$ και ο δεύτερος όρος $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ θα είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right)$, οπότε δε θα είναι μικρός σε σχέση με τους κυρίαρχους όρους. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης. Τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ και ο όρος $\delta(\varepsilon)$ είναι μικρός σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2(\varepsilon)}$ και $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ που είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + Y' + \varepsilon\tau^2 Y' + \varepsilon\tau Y = 0.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την εξίσωση $Y'' + Y' = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = -c_1$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} - c_1.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\eta \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_i\left(\eta \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\frac{2}{1+\eta^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(c_1 e^{-\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}} - c_1\right) \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} = -c_1 \Rightarrow c_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_i(t) = -\sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} + \sqrt{2}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με $\sqrt{2}$. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \sqrt{\frac{2}{1+t^2}} - \sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Θέμα 4. Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A - \lambda_1 I_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = -5b_1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 I_2)\, v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = -a_2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} -5c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{-t} - c_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές. Οι ευθείες $y = -\frac{x}{5}$

και $y=-x$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 αποτελούν τις διαχωρίζουσες. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y=-\frac{x}{5}$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ενώ οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y=-x$ απομακρύνονται από αυτή. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ασυμπτωτικές στις ημιευθείες που ορίζονται από τις $y=-\frac{x}{5}$ και $y=-x$ καθώς $t\to\pm\infty$, οπότε δεν μπορούν να εισχωρήσουν στην αρχή των αξόνων.

Θέμα 5. α) Η συνάρτηση $V(x,y)=x^2+y^2$ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη σε μία περιοχή του $(0,0)$ και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $(0,0)$. Για $x^2+y^2<4$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}&=2xx'+2yy'=2x^2+\cancel{2xy}+2x^2\left(x^2+y^2-5\right)-\cancel{2xy}+2y^2+2y^2\left(x^2+y^2-5\right)\\&=2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Η $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται στην περιοχή $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<4\right\}$ του $(0,0)$ αν και μόνο αν $x=y=0$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή η $V(x,y)=x^2+y^2$ είναι μία ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Συνεπώς, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

β) Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\vartheta$ και $y=r\sin\vartheta$, οπότε:

$$\begin{cases}x'=r'\cos\vartheta-r\vartheta'\sin\vartheta\\y'=r'\sin\vartheta+r\vartheta'\cos\vartheta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'x=r'r\cos^2\vartheta-r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta\\y'y=r'r\sin^2\vartheta+r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta\\x'y=r'r\cos\vartheta\sin\vartheta-r^2\vartheta'\sin^2\vartheta\\y'x=r'r\cos\vartheta\sin\vartheta+r^2\vartheta'\cos^2\vartheta\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x'x+y'y=r'r\\y'x-x'y=r^2\vartheta'\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}r'r=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)\\r^2\vartheta'=-x^2+\cancel{xy}+\cancel{xy\left(x^2+y^2-5\right)}-\cancel{xy}-y^2-\cancel{xy\left(x^2+y^2-5\right)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}r'=r\left(r^2-4\right)\\r^2\vartheta'=-\left(x^2+y^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r'=r\left(r^2-4\right)\\\vartheta'=-1\end{cases}.$$

Προφανώς, $\vartheta=-t+\vartheta_0$, όπου $\vartheta_0\in\mathbb{R}$ σταθερά. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{r\left(r^2-4\right)}=-\frac{1}{4r}+\frac{1}{8(r-2)}+\frac{1}{8(r+2)},$$

παίρνουμε:

$$-\frac{\ln r}{4}+\frac{\ln|r-2|}{8}+\frac{\ln(r+2)}{8}=t+c_0\Rightarrow\ln\left|r^2-4\right|-2\ln r=8t+c_1\Rightarrow$$

$$\ln\left|r^2-4\right| - \ln r^2 = 8t + c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{r^2-4}{r^2}\right| = 8t + c_1 \Rightarrow \left|\frac{r^2-4}{r^2}\right| = c_2 e^{8t} \Rightarrow$$

$$\frac{r^2-4}{r^2} = ce^{8t} \Rightarrow \frac{4}{r^2} = 1 - ce^{8t} \Rightarrow r^2 = \frac{4}{1-ce^{8t}} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{1-ce^{8t}}}.$$

Αν $c = 0$, βρίσκουμε τη λύση $r = 2$ και $\vartheta = -t + \vartheta_0$, η οποία είναι περιοδική λύση της οποίας η τροχιά παριστάνεται από τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $r = 2$ στο επίπεδο φάσεων. Με άλλα λόγια, $x(t) = 2\cos\left(-t + \vartheta_0\right)$ και $y(t) = 2\sin\left(-t + \vartheta_0\right)$ για κάθε $t \geqslant 0$.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2019

Θέμα 1ο (1 μονάδα) Ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από έναν φυσικό νόμο ελεύθερων μονάδων, της μορφής $f(x, t, g) = 0$. Όπου τα μεγέθη x, t και g παριστάνουν, αντίστοιχα, μήκος, χρόνο και επιτάχυνση. Δείξτε ότι υπάρχει ένας ισοδύναμος νόμος της μορφής $x = cgt^2$, όπου $c > 0$ είναι μία θετική σταθερά. Δίδεται ότι το g έχει διαστάσεις της μορφής μήκος $\cdot$(χρόνος)$^{-2}$.

Θέμα 2ο (1 μονάδα) Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών με δύο όρους για το ακόλουθο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Poincaré-Lindstedt

$$y''(t) + (1+\varepsilon)y(t) = \varepsilon y^2, \;\; \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1, \;\; t > 0, \;\; y(0) = -1 \;\text{ και }\; y'(0) = 0.$$

Θέμα 3ο (2 μονάδες) Βρείτε μία ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση για το ακόλουθο πρόβλημα

$$\varepsilon(y''(t) + y'(t)) - (3-t)y(t) = -2, \;\; \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1, \; 0 < t < 1, \;\; y(0) = 0 \text{ και } y(1) = 1.$$

Θέμα 4ο (2 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t+1)}{t} e^{-\lambda t} dt \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \quad \lambda >> 1.$$

Θέμα 5ο (2 μονάδες) Να βρεθεί ο τύπος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου των ακόλουθων συστημάτων και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσεων.

(α) $x' = 2x + y, \; y' = 5x - 2y$
(β) $x' = x - 3y, \; y' = 2x - 4y.$

Θέμα 6ο (1 μονάδα) Δείξτε ότι η $V(x, y) = x^2 + y^2$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapounov στο $(0, 0)$ για το σύστημα

$x' = -x + 3xy, \; y' = -y + x^2 y.$

Θέμα 7ο (2 μονάδες) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x' = x - 2y - x\sqrt{x^2+y^2}, \quad y' = 2x + y - y\sqrt{x^2+y^2}.$$

έχει μία περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί. Τέλος σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων.

Καλή Επιτυχία!

Σεπτέμβριος 2019

Θέμα 1. Το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε ανεξάρτητα θεμελιώδη μεγέθη ως προς τα οποία να μπορούν να εκφρασθούν όλες οι παραπάνω διαστατικές ποσότητες. Μία κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών εδώ είναι οι ποσότητες T (χρόνος) και L (μήκος). Έχουμε:

$$[x] = L, \quad [t] = T, \quad [g] = T^{-2}L.$$

Ο πίνακας διαστάσεων είναι:

$$A = \begin{array}{c} \\ T \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & t & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Εδώ έχουμε $m = 3$, $n = 2$ και η τάξη του πίνακα A είναι 2. Συνεπώς, υπάρχει $3 - 2 = 1$ αδιάστατη ποσότητα, η οποία είναι δυνατόν να σχηματιστεί από τα μεγέθη x, t και g. Αν το π είναι μία τέτοια αδιάστατη ποσότητα, τότε για κάποια επιλογή εκθετών a_1, a_2, a_3 θα έχουμε:

$$1 = [\pi] = [x^{a_1} t^{a_2} g^{a_3}] = L^{a_1} T^{a_2} L^{-a_2} T^{-2a_3} L^{a_3} = T^{a_2 - 2a_3} L^{a_1 + a_3}.$$

Άρα, οι εκθέτες των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι, παίρνουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}.$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε ότι μία μη-μηδενική λύση του είναι η εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -1.$$

Η λύση αυτή δίνει την εξής αδιάστατη ποσότητα:

$$\pi = \frac{x}{t^2 g}.$$

Άρα το θεώρημα π εξασφαλίζει ότι ο αρχικός φυσικός νόμος είναι ισοδύναμος με έναν νόμο της μορφής $F(\pi) = 0$. Λύνοντας ως προς π, έχουμε:

$$\pi = c \Rightarrow x = ct^2 g.$$

Θέμα 2. Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots) \cdot \frac{dy}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots) \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{dy}{dt}(0) \cdot \frac{dt}{d\tau}(0) = 0 \cdot \frac{1}{1 + w_1\varepsilon + \cdots} = 0.$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$(1 + w_1\varepsilon + \cdots)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon)y = \varepsilon y^2 \quad \tau > 0,$$

$$y(0) = -1, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$\left(1 + 2w_1\varepsilon + w_1^2\varepsilon^2 + \cdots\right)\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + \cdots\right) + (1 + \varepsilon)(y_0 + y_1\varepsilon + \cdots) = \varepsilon\,(y_0 + y_1\varepsilon + \cdots)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\left(y_0'' + y_1''\varepsilon + 2w_1y_0''\varepsilon + 2w_1y_1''\varepsilon^2 + \cdots\right) + \left(y_0 + y_1\varepsilon + y_0\varepsilon + y_1\varepsilon^2 \cdots\right)& \\ = y_0^2\varepsilon + 2y_0y_1\varepsilon^2 + y_1^2\varepsilon^3 + \cdots &\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1y_0'' + y_1 + y_0 - y_0^2\right)\varepsilon + \left(2w_1y_1'' + y_1\right)\varepsilon^2 + \cdots = 2y_0y_1\varepsilon^2 + y_1^2\varepsilon^3 + \cdots \Rightarrow$$

$$\left(y_0'' + y_0\right) + \left(y_1'' + 2w_1y_0'' + y_1 + y_0 - y_0^2\right)\varepsilon + \cdots = \cdots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = -1, \quad y_0'(0) = 0 \\ y_1'' + y_1 = y_0^2 - y_0 - 2w_1y_0'', \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_0(\tau) = -\cos\tau, \quad \tau > 0 \\ y_1'' + y_1 = \cos^2\tau + (1 - 2w_1)\cos\tau, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \end{cases}.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$y_1'' + y_1 = \frac{\cos(2\tau) + 1}{2} + (1 - 2w_1)\cos\tau.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1'' + y_1 = 0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau + c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $(1 - 2w_1)\cos\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1 = \frac{1}{2}$ για να τον αποφύγουμε. Η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $y_1'' + y_1 = \frac{\cos(2\tau)+1}{2}$ έχει μία ειδική λύση της μορφής $A\cos(2\tau) + B\sin(2\tau) + C$. Υπολογίζουμε ότι $A = -\frac{1}{6}$, $B = 0$ και $C = \frac{1}{2}$, οπότε $y_1(\tau) = c_1\cos\tau + c_2\sin\tau - \frac{\cos(2\tau)}{6} + \frac{1}{2}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0$ και $y_1'(0) = 0$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = -\frac{1}{3}$ και $c_2 = 0$. Επομένως,

$$y(\tau) = -\cos\tau + \left[-\frac{\cos\tau}{3} - \frac{\cos(2\tau)}{6} + \frac{1}{2}\right]\varepsilon + \cdots, \quad \tau = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots\right)t > 0.$$

Θέμα 3. Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $-(3-t)y = -2$, οπότε:

$$y_0(t) = \frac{2}{3-t}, \quad t = O(1).$$

Αυτή η εξωτερική προσέγγιση ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = 1$, η οποία αφορά το εξωτερικό χωρίο. Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}Y'' + \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}Y' - 3Y + \delta(\varepsilon)\tau Y = -2.$$

Αν $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \sim \delta(\varepsilon)$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ και οι όροι $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$, $\delta(\varepsilon)$ είναι μικροί σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}$ και 1. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + \sqrt{\varepsilon}Y' - 3Y + \sqrt{\varepsilon}\tau Y = -2.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την εξίσωση $Y'' - 3Y = -2$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau\sqrt{3}} + c_2 e^{\tau\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} + c_2 e^{t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} + \frac{2}{3}.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = -c_1 - \frac{2}{3}$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} - \left(c_1 + \frac{2}{3}\right) e^{t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} + \frac{2}{3}.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\eta\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_i\left(\eta\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2}{3 - \eta\varepsilon^{\frac{1}{4}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[c_1 e^{-\eta\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} - \left(c_1 + \frac{2}{3}\right) e^{\eta\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} + \frac{2}{3}\right] \Rightarrow$$

$$c_1 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_i(t) = -\frac{2}{3}e^{-t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}} + \frac{2}{3}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με $\frac{2}{3}$. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \frac{2}{3-t} - \frac{2}{3}e^{-t\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}}.$$

Θέμα 4. Έστω $T > 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\ln(t+1)}{t} \leqslant 1$ για κάθε $t \geqslant T > 0$. Επομένως,

$$|\text{EMO}| = \int_T^\infty \frac{\ln(t+1)}{t}e^{-\lambda t}dt \leqslant \int_T^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda},$$

το οποίο είναι εκθετικά μικρό για $\lambda \gg 1$. Δηλαδή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\ln(t+1)$ από το ανάπτυγμά του σε σειρά Taylor γύρω από το $t = 0$:

$$\int_0^T \frac{\ln(t+1)}{t}e^{-\lambda t}dt = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \cdots\right)e^{-\lambda t}dt \overset{u=\lambda t}{=} \int_0^{\lambda T}\left(1 - \frac{u}{2\lambda} + \frac{u^2}{3\lambda^2} - \cdots\right)\frac{e^{-u}}{\lambda}du.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln(t+1)}{t}e^{-\lambda t}dt &\sim \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-u}du - \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^\infty ue^{-u}du + \frac{1}{3\lambda^3}\int_0^\infty u^2e^{-u}du - \cdots \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\lambda} - \frac{\Gamma(2)}{2\lambda^2} + \frac{\Gamma(3)}{3\lambda^3} - \cdots = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{2}{3\lambda^3} - \cdots \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t+1)}{t}e^{-\lambda t}dt \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad \lambda \gg 1.$$

Θέμα 5. α) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 9.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A - \lambda_1 I_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = -5a_1 \Rightarrow$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$(A-\lambda_2 I_2)\,v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = a_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-3t} + c_2e^{3t} \\ -5c_1e^{-3t} + c_2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές. Οι ευθείες $y = -5x$ και $y = x$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 αποτελούν τις διαχωρίζουσες. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = -5x$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ενώ οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = x$ απομακρύνονται από αυτή. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ασυμπτωτικές στις ημιευθείες που ορίζονται από τις $y = -5x$ και $y = x$ καθώς $t \to \pm\infty$, οπότε δεν μπορούν να εισχωρήσουν στην αρχή των αξόνων.

β) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(-4-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(A-\lambda_1 I_2)\,v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = a_1 \Rightarrow$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(A-\lambda_2 I_2)\,v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2a_2 = 3b_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-2t} + 3c_2e^{-t} \\ c_1e^{-2t} + 2c_2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος. Οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = x$ και οι δύο τροχιές που ορίζονται από την ευθεία $y = \frac{2x}{3}$ κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές εισχωρούν στην αρχή των αξόνων εφαπτομενικά της ευθείας $y = \frac{2x}{3}$ καθώς $t \to \infty$, ενώ τείνουν στο άπειρο με κλίση ασυμπτωτική της ευθείας $y = x$ καθώς $t \to -\infty$.

Θέμα 6. Η συνάρτηση $V(x,y) = x^2+y^2$ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη σε μία περιοχή του $(0,0)$ και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $(0,0)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2xx' + 2yy' = -2x^2 + 6x^2y - 2y^2 + 2x^2y^2 = 2\left(x^2-1\right)y^2 + 6x^2y - 2x^2,$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36x^4 + 16x^2\left(x^2-1\right) = 52x^4 - 16x^2 = 4x^2\left(13x^2-4\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Για $0 < |x| < \frac{2}{\sqrt{13}}$, παρατηρούμε ότι $x^2 - 1 < 0$, οπότε $2\left(x^2-1\right)y^2 + 6x^2y - 2x^2 < 0$ για κάθε $y \neq 0$. Η συνάρτηση $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται στην περιοχή $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$ του $(0,0)$ αν και μόνο αν $x = y = 0$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή η $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι μία ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Συνεπώς, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θέμα 7. Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\vartheta$ και $y = r\sin\vartheta$, οπότε:

$$\begin{cases} x' = r'\cos\vartheta - r\vartheta'\sin\vartheta \\ y' = r'\sin\vartheta + r\vartheta'\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'x = r'r\cos^2\vartheta - r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ y'y = r'r\sin^2\vartheta + r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ x'y = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta - r^2\vartheta'\sin^2\vartheta \\ y'x = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta + r^2\vartheta'\cos^2\vartheta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x'x + y'y = r'r \\ y'x - x'y = r^2\vartheta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'r = x^2 - \cancel{2xy} - x^2\sqrt{x^2+y^2} + \cancel{2xy} + y^2 - y^2\sqrt{x^2+y^2} \\ r^2\vartheta' = 2x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy\sqrt{x^2+y^2}} - \cancel{xy} + 2y^2 + \cancel{xy\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r'r = \left(x^2+y^2\right)\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) \\ r^2\vartheta' = 2\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = -r\left(r-1\right) \\ \vartheta' = 2 \end{cases}.$$

Προφανώς, $\vartheta = 2t + \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{r\left(r-1\right)} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1},$$

παίρνουμε:

$$-\ln r + \ln|r-1| = -t + c_0 \Rightarrow \ln\left|\frac{r-1}{r}\right| = -t + c_0 \Rightarrow \left|\frac{r-1}{r}\right| = c_1e^{-t} \Rightarrow$$

$$\frac{r-1}{r} = ce^{-t} \Rightarrow \frac{1}{r} = 1 - ce^{-t} \Rightarrow r = \frac{1}{1-ce^{-t}}.$$

Αν $c = 0$, βρίσκουμε τη λύση $r = 1$ και $\vartheta = 2t + \vartheta_0$, η οποία είναι περιοδική λύση της οποίας η τροχιά παριστάνεται από τον κύκλο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα $r = 1$ στο επίπεδο φάσεων. Με άλλα λόγια, $x(t) = \cos(2t + \vartheta_0)$ και $y(t) = \sin(2t + \vartheta_0)$ για κάθε $t \geqslant 0$.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2020

Θέμα 1ο (1.75 μον.) Ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από έναν φυσικό νόμο ελεύθερων μονάδων, της μορφής $f(m,u,a,b,t)=0$. Όπου τα μεγέθη m, t και u παριστάνουν, αντίστοιχα, μάζα, χρόνο και ταχύτητα. Τα μεγέθη a, b έχουν διαστάσεις της μορφής *(μάζα)(χρόνος)*$^{-1}$ και *(μάζα)(ταχύτητα)*$^{-1}$*(χρόνος)*$^{-1}$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι υπάρχει ένας ισοδύναμος νόμος της μορφής $\pi_1 = g(\pi_2)$. Όπου $\pi_1 = \frac{at}{m}$, $\pi_2 = \frac{but}{m}$ και g μία κατάλληλη συνάρτηση.

Θέμα 2ο (1.75 μον.) Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών με δύο όρους για το ακόλουθο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Poincaré-Lindstedt

$$y''(t) + y(t) = \varepsilon(y^2 - 2y), \quad \text{όπου } 0 < \varepsilon << 1, \quad t > 0, \quad y(0) = 0 \ \text{ και } \ y'(0) = 1.$$

Θέμα 3ο (2 μον.) Βρείτε μία ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση για το ακόλουθο πρόβλημα

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} y''(t) + (\varepsilon^{\frac{1}{4}} + (1+t)^2) y'(t) + (1+t) y(t) = 0,$$
$$\text{όπου } \ 0 < \varepsilon << 1, \quad 0 < t < 1, \quad y(0) = 0 \ \text{ και } \ y(1) = 1.$$

Θέμα 4ο (2 μον.) Να βρεθεί ο τύπος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου των ακόλουθων συστημάτων.

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & x' = x + 3y, \ y' = 3x + y & (\beta) & x' = x - 3y, \ y' = 2x - y \\ (\gamma) & x' = -2x + 2y, \ y' = x - 3y & (\delta) & x' = -2x + y, \ y' = -3x - 2y. \end{array}$$

Θέμα 5ο (1.5 μον.) Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του παρακάτω συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

$$x' = 2y + xy^2(y-1) - x^3, \ y' = -2x + x^2 y(yx - \tfrac{1}{2}) - y^3.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την $V(x,y) = x^2 + y^2$.

Θέμα 6ο (2 μον.) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x' = x - \sqrt{\frac{2}{3}}y - x\left(\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}} - 1\right), \quad y' = \sqrt{\frac{3}{2}}x + y - y\left(\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}} - 1\right),$$

έχει μία μη σταθερή περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί.

Καλή Επιτυχία!

Ιανουάριος 2020

Θέμα 1. Έχουμε:

$$[a] = mt^{-1}, \quad [b] = mu^{-1}t^{-1}.$$

Ο πίνακας διαστάσεων είναι ο εξής:

$$A = \begin{array}{c} \\ m \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & u & a & b & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Εδώ έχουμε $m = 5$, $n = 3$ και η τάξη του πίνακα A είναι 3. Συνεπώς, υπάρχουν $5 - 3 = 2$ αδιάστατες ποσότητες, οι οποίες είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα μεγέθη m, u, a, b και t. Αν το π είναι μία τέτοια αδιάστατη ποσότητα, τότε για κάποια επιλογή εκθετών a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 = [\pi] &= [m^{a_1}u^{a_2}a^{a_3}b^{a_4}t^{a_5}] \\ &= m^{a_1}u^{a_2}m^{a_3}t^{-a_3}m^{a_4}t^{-a_4}u^{-a_4}t^{a_5} \\ &= m^{a_1+a_3+a_4}t^{-a_3-a_4+a_5}u^{a_2-a_4}. \end{aligned}$$

Άρα, οι εκθέτες των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι, παίρνουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ a_2 - a_4 = 0 \end{cases}.$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του είναι οι εξής:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 1,$$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1.$$

Οι λύσεις αυτές δίνουν τις εξής αδιάστατες ποσότητες:

$$\pi_1 = \frac{at}{m}, \quad \pi_2 = \frac{but}{m}.$$

Το θεώρημα π εξασφαλίζει ότι ο αρχικός φυσικός νόμος είναι ισοδύναμος με έναν νόμο της μορφής $G(\pi_1, \pi_2) = 0$. Λύνοντας ως προς π_1, έχουμε $\pi_1 = g(\pi_2)$.

Θέμα 2. Θέτουμε:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\varepsilon + \cdots,$$

$$\tau = (1 + w_1\varepsilon + \cdots)t.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=(1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{dy}{d\tau}\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}=(1+w_1\varepsilon+\cdots)\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt}=(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}1&=\frac{dy}{dt}(0)=\frac{dy}{d\tau}(0)\cdot\frac{d\tau}{dt}(0)=\left[y_0'(0)+y_1'(0)\varepsilon+\cdots\right](1+w_1\varepsilon+\cdots)\\&=y_0'(0)+w_1y_0'(0)\varepsilon+y_1'(0)\varepsilon+w_1y_1'(0)\varepsilon^2+\cdots=y_0'(0)+\left[w_1y_0'(0)+y_1'(0)\right]\varepsilon+\cdots\Rightarrow.\end{aligned}$$

$$\begin{cases}y_0'(0)=1\\ w_1y_0'(0)+y_1'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0'(0)=1\\ y_1'(0)=-w_1\end{cases}$$

Με χρήση αυτού του μετασχηματισμού γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή:

$$(1+w_1\varepsilon+\cdots)^2\cdot\frac{d^2y}{d\tau^2}+y=\varepsilon y\,(y-2)\,,\quad\tau>0,$$

$$y(0)=0,\quad\frac{dy}{d\tau}(0)=\frac{1}{1+w_1\varepsilon+\cdots}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\left(1+2w_1\varepsilon+w_1^2\varepsilon^2+\cdots\right)\left(y_0''+y_1''\varepsilon+\cdots\right)+(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\\&\qquad=\varepsilon\,(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\,(y_0+y_1\varepsilon+\cdots-2)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(y_0''+y_1''\varepsilon+2w_1y_0''\varepsilon+2w_1y_1''\varepsilon^2+w_1^2y_0''\varepsilon^2+\cdots\right)+(y_0+y_1\varepsilon+\cdots)\\&\qquad=\left(y_0^2\varepsilon-2y_0\varepsilon+2y_0y_1\varepsilon^2-2y_1\varepsilon^2+y_1^2\varepsilon^3+\cdots\right)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left(y_0''+y_0\right)+\left(y_1''+2w_1y_0''+y_1+2y_0-y_0^2\right)\varepsilon+\cdots=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y_0''+y_0=0,\quad y_0(0)=0,\quad y_0'(0)=1\\ y_1''+y_1=y_0^2-2y_0-2w_1y_0'',\quad y_1(0)=0,\quad y_1'(0)=-w_1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y_0(\tau)=\sin\tau,\quad\tau>0\\ y_1''+y_1=2\,(w_1-1)\sin\tau+\sin^2\tau,\quad y_1(0)=0,\quad y_1'(0)=-w_1\end{cases}.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$y_1''+y_1=2\,(w_1-1)\sin\tau+\frac{1-\cos(2\tau)}{2}.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y_1''+y_1=0$ έχει γενική λύση $c_1\cos\tau+c_2\sin\tau$. Άρα ο όρος $2\,(w_1-1)\sin\tau$ θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο, οπότε επιλέγουμε $w_1=1$ για να τον αποφύγουμε. Η εξίσωση $y_1''+y_1=\frac{1-\cos(2\tau)}{2}$ έχει ειδική λύση της μορφής $A\cos(2\tau)+B\sin(2\tau)+C$.

Υπολογίζουμε ότι $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$ και $C = \frac{1}{2}$, οπότε $y_1(\tau) = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau + \frac{\cos(2\tau)}{6} + \frac{1}{2}$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0$ και $y_1'(0) = -1$, υπολογίζουμε ότι $c_1 = -\frac{2}{3}$ και $c_2 = -1$, οπότε $y_1(\tau) = -\frac{2\cos\tau}{3} - \sin\tau + \frac{\cos(2\tau)}{6} + \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$y(\tau) = \sin\tau + \left[-\frac{2\cos\tau}{3} - \sin\tau + \frac{\cos(2\tau)}{6} + \frac{1}{2}\right] \cdot \varepsilon + \cdots, \quad \tau = (1 + \varepsilon + \cdots)\, t > 0.$$

Θέμα 3. Το μη-διαταραγμένο πρόβλημα είναι το $(1+t)^2\, y' + (1+t)y = 0$. Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε έχει γενική λύση:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+t} \Rightarrow \ln|y| = -\ln(1+t) + k \Rightarrow y(t) = \frac{c}{1+t}, \quad 0 < t < 1.$$

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός οριακού στρώματος στο $t = 0$. Αφού το $t = 1$ βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = 1$ στη γενική λύση του μη-διαταραγμένου προβλήματος, βρίσκουμε την εξωτερική προσέγγιση:

$$y_0(t) = \frac{2}{1+t}, \quad t = O(1).$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος, κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών:

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y = y.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\delta^2(\varepsilon)} \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\delta^2(\varepsilon)} Y'' + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\delta(\varepsilon)} Y' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} Y' + 2\tau Y' + \delta(\varepsilon)\tau^2 Y' + Y + \delta(\varepsilon)\tau Y = 0.$$

Αν $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\delta^2(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ είναι η κύρια συνθήκη εξισορρόπησης, τότε $\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)$ και οι όροι $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\delta^2(\varepsilon)}$, 1, $\delta(\varepsilon)$ είναι μικροί σε σύγκριση με τους όρους $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\delta^2(\varepsilon)}$, $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ που είναι της τάξης $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right)$. Συνεπώς, είναι απολύτως συμβιβαστό να επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές παίρνει τη μορφή:

$$Y'' + \varepsilon^{\frac{1}{4}} Y' + Y' + 2\varepsilon^{\frac{1}{4}} \tau Y' + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau^2 Y' + \varepsilon^{\frac{1}{4}} Y + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau Y = 0.$$

Ο πρώτος όρος της εσωτερικής προσέγγισης θα πληροί την εξίσωση $Y'' + Y' = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$Y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ στο οριακό στρώμα, παίρνουμε ότι $c_2 = -c_1$, οπότε η εσωτερική προσέγγιση είναι:

$$y_i(t) = c_1 e^{-t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}} - c_1.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, εισάγουμε ένα χωρίο επικάλυψης της τάξης του $\varepsilon^{\frac{1}{8}}$ και την ενδιάμεση μεταβλητή $\eta = t\varepsilon^{-\frac{1}{8}}$. Τότε η συνθήκη συναρμογής είναι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\eta\varepsilon^{\frac{1}{8}}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_i\left(\eta\varepsilon^{\frac{1}{8}}\right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2}{1+\eta\varepsilon^{\frac{1}{8}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(c_1 e^{-\eta\varepsilon^{-\frac{1}{8}}} - c_1\right) \Rightarrow$$

$$2 = -c_1 \Rightarrow y_i(t) = -2e^{-t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}} + 2.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία συνολική προσέγγιση που ισχύει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, αθροίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική προσέγγιση και αφαιρώντας το κοινό όριο στο χωρίο επικάλυψης, το οποίο ισούται με 2. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$y_u(t) = \frac{2}{1+t} - 2e^{-t\varepsilon^{-\frac{1}{4}}}.$$

Θέμα 4. α) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$. Αφού $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι σάγμα, οπότε ασταθές.

β) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$. Αφού $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι κέντρο, οπότε ευσταθές.

γ) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 4.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -4$ και $\lambda_2 = -1$. Αφού $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος.

δ) Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (-2-\lambda)^2 + 3 = \lambda^2 + 4\lambda + 7.$$

Επομένως, ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{3}$. Αφού $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -2 < 0$, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία.

Θέμα 5. Η συνάρτηση $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη σε μία περιοχή του $(0,0)$ και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $(0,0)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= 2xx' + 2yy' = \cancel{4xy} + 2x^2y^3 - 2x^2y^2 - 2x^4 - \cancel{4xy} + 2x^3y^3 - x^2y^2 - 2y^4 \\ &= -2y^4 + 2x^3y^3 + 2x^2y^3 - 3x^2y^2 - 3x^4 \leqslant 2x^3y^3 + 2x^2y^3 - 3x^2y^2 = x^2y^2(2yx + 2y - 3). \end{aligned}$$

Έστω ότι $x \in (-1,1)$ και $y < 0$. Τότε,

$$2y < 2yx < -2y \Leftrightarrow 4y - 3 < 2yx + 2y - 3 < -3 < 0.$$

Έστω ότι $x \in (-1,1)$ και $y > 0$. Τότε,

$$-2y < 2yx < 2y \Leftrightarrow -3 < 2yx + 2y - 3 < 4y - 3.$$

Επομένως, $2yx + 2y - 3 < 0$ αν και μόνο αν $|x| < 1$ και $y < \frac{3}{4}$. Η συνάρτηση $\frac{\partial V}{\partial t}$ μηδενίζεται στην περιοχή $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y < \frac{3}{4}\right\}$ του $(0,0)$ αν και μόνο αν $x = y = 0$. Επομένως, η $\frac{\partial V}{\partial t}$ είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή η $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι μία ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$. Συνεπώς, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θέμα 6. Αρχικά κάνουμε την αλλαγή συντεταγμένων $X = \frac{x}{\sqrt{2}}$ και $Y = \frac{y}{\sqrt{3}}$, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{cases} \sqrt{2}X' = \sqrt{2}X - \sqrt{2}Y - \sqrt{2}X\left(\sqrt{X^2+Y^2}-1\right) \\ \sqrt{3}Y' = \sqrt{3}X + \sqrt{3}Y - \sqrt{3}Y\left(\sqrt{X^2+Y^2}-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = X - Y - X\left(\sqrt{X^2+Y^2}-1\right) \\ Y' = X + Y - Y\left(\sqrt{X^2+Y^2}-1\right) \end{cases}.$$

Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες $X = r\cos\vartheta$ και $Y = r\sin\vartheta$, οπότε:

$$\begin{cases} X' = r'\cos\vartheta - r\vartheta'\sin\vartheta \\ Y' = r'\sin\vartheta + r\vartheta'\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'X = r'r\cos^2\vartheta - r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ Y'Y = r'r\sin^2\vartheta + r^2\vartheta'\cos\vartheta\sin\vartheta \\ X'Y = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta - r^2\vartheta'\sin^2\vartheta \\ Y'X = r'r\cos\vartheta\sin\vartheta + r^2\vartheta'\cos^2\vartheta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X'X + Y'Y = r'r \\ Y'X - X'Y = r^2\vartheta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'r = X^2 - \cancel{XY} - X^2(r-1) + \cancel{XY} + Y^2 - Y^2(r-1) \\ r^2\vartheta' = X^2 + \cancel{XY} - \cancel{XY(r-1)} - \cancel{XY} + Y^2 + \cancel{XY(r-1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r' = r^2 - (r-1)\left(X^2+Y^2\right) \\ r^2\vartheta' = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = -r^2\,(r-2) \\ \vartheta' = 1 \end{cases}.$$

Προφανώς, $\vartheta = t + \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{r^2\,(r-2)} = -\frac{1}{4r} - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{4(r-2)},$$

παίρνουμε:

$$-\frac{\ln r}{4} + \frac{1}{2r} + \frac{\ln|r-2|}{4} = -t + c_0 \Rightarrow \ln\left|\frac{r-2}{r}\right| + \frac{2}{r} = -4t + c_1 \Rightarrow \left|\frac{r-2}{r}\right| e^{\frac{2}{r}} = ce^{-4t}.$$

Αν $c = 0$, βρίσκουμε τη λύση $r = 2$ και $\vartheta = t + \vartheta_0$, η οποία είναι περιοδική λύση της οποίας η τροχιά παριστάνεται από τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $r = 2$ στο επίπεδο φάσεων. Με άλλα λόγια, $x(t) = \sqrt{2}X(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(t+\vartheta_0\right)$ και $y(t) = \sqrt{3}Y(t) = 2\sqrt{3}\sin\left(t+\vartheta_0\right)$ για κάθε $t \geqslant 0$.