

Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2017

Περιεχόμενα

1	Εύδοξος και Αρχιμήδης	1
1.1	Εύδοξος και γεωμετρικοί λόγοι	1
1.2	Υπολογισμός εμβαδών: η μέθοδος της εξάντλησης	3
1.3	Αρχιμήδης	6
1.3α'	Μέτρηση του κύκλου	6
1.3β'	Υπολογισμός του π	7
1.3γ'	Τετραγωνισμός της παραβολής	10
1.3δ'	Εμβαδόν της έλλειψης	13
1.3ε'	Επιφάνεια της σφαίρας	16
1.3ζ'	Η μέθοδος της συμπίεσης	22
1.3ζ'	Εμβαδόν της σπείρας	23
1.3η'	Η μηχανική μέθοδος	26
1.3θ'	Ο Αρχιμήδης και ο απειροστικός λογισμός	30
1.4	Ασκήσεις	31
2	Άπειρες διαδικασίες στο Μεσαίωνα	35
2.1	Το επιχείρημα του Al-Haitham	35
2.2	Η σχολή μαθηματικών της Kerala	37
2.3	Ο κανόνας του Merton	42
2.4	Γεωμετρικοί υπολογισμοί αθροισμάτων σειρών	45
2.5	Η αναλυτική τέχνη του Viète	47
2.6	Η αναλυτική γεωμετρία των Descartes και Fermat	48
2.7	Ασκήσεις	50
3	Απαρχές του Απειροστικού Λογισμού	51
3.1	Ο δεύτερος νόμος του Kepler	51
3.2	Η αρχή του Cavalieri	55
3.3	Αριθμητικός τετραγωνισμός	61
3.4	Η ολοκλήρωση κλασματικών δυνάμεων	64
3.5	Η πρώτη ευθειοποίηση καμπύλης	67
3.6	Ασκήσεις	70

4	Οι πρώτες κατασκευές εφαπτομένης	73
4.1	Η μέθοδος των ψευδο-ισοτήτων του Fermat	73
4.2	Η μέθοδος του κύκλου του Descartes	76
4.3	Ο κανόνας του Hudde και ο κανόνας του Sluse	77
4.4	Απειροστικές μέθοδοι για την χάραξη εφαπτόμενης	82
4.5	Σύνθεση στιγμιαίων κινήσεων	84
4.6	Η σχέση μεταξύ ολοκλήρωσης και εφαπτόμενης	87
4.7	Ασκήσεις	90
5	Η ανακάλυψη της διωνυμικής σειράς	93
5.1	Εισαγωγή	93
5.2	Η μέθοδος παρεμβολής και το απειρογινόμενο του Wallis	96
5.3	Ο Newton και η διωνυμική σειρά	101
5.4	Λογάριθμοι και υπερβολικά εμβαδά	109
5.5	Υπολογισμοί λογαρίθμων από τον Newton	112
5.6	Η σειρά του Mercator για το λογάριθμο	114
5.7	Ασκήσεις	116
6	Ο Απειροστικός Λογισμός του Newton	121
6.1	Εισαγωγή των «ροών»	122
6.2	Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού	124
6.3	Κανόνας της αλυσίδας και ολοκλήρωση με αντικατάσταση	126
6.4	Η μέθοδος του Newton	128
6.5	Η αντιστροφή των σειρών	131
6.6	Η ανακάλυψη των σειρών του ημιτόνου και του συνημιτόνου	133
6.7	Μέθοδοι των σειρών και των ροών	136
6.7α'	Εφαρμογές της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση	137
6.7β'	Οι πίνακες ολοκληρωμάτων του Newton	139
6.7γ'	Υπολογισμοί μήκους καμπύλης	143
6.8	Η αλληλογραφία των Newton και Leibniz	146
6.9	Ο απειροστικός λογισμός στο Principia Mathematica	147
6.10	De Quadratura Curvarum	148
6.11	Ασκήσεις	150
7	Ο Απειροστικός Λογισμός του Leibniz	153
7.1	Εισαγωγή	153
7.2	Το ξεκίνημα: αθροίσματα και διαφορές	155
7.3	Το χαρακτηριστικό τρίγωνο	158
7.4	«Μετατροπή» και ο αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου	163
7.5	Αναλυτικός λογισμός	167
7.6	Acta Eruditorum	173
7.7	Διαφορικά ανώτερης τάξης	174
7.8	Τα απειροστά του Leibniz	177
7.9	Leibniz και Newton	178

7.10 Ασκήσεις	179
8 Η εποχή του Euler	183
8.1 Ο 18ος αιώνας	183
8.2 Η έννοια της συνάρτησης	185
8.3 Euler: εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση	186
8.4 Euler: τριγωνομετρικές συναρτήσεις	188
8.5 Ασκήσεις	190

Κεφάλαιο 1

Εύδοξος και Αρχιμήδης

1.1 Εύδοξος και γεωμετρικοί λόγοι

Μπορούμε να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ώστε να αποφασίσουμε ποιο από τα δύο έχει μεγαλύτερο μήκος, και μπορούμε να προσθέσουμε δύο μήκη τοποθετώντας δυο ευθύγραμμα τμήματα που έχουν αυτά τα μήκη με τέτοιο ρόπο ώστε να έχουν κοινό άκρο και να σχηματίζουν ένα τρίτο ευθύγραμμο τμήμα. Με δεδομένο ότι κάθε επίπεδο χωρίο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ορθογώνιο που είχε το ίδιο εμβαδόν και προκαθορισμένο ύψος, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει την ίδια τεχνική για να συγκρίνει ή να προσθέσει εμβαδά. Θα συνέκρινε τα εμβαδά δύο ορθογώνιων που έχουν το ίδιο ύψος συγκρίνοντας τα μήκη των βάσεων τους, και θα μπορούσε να τα προσθέσει τοποθετώντας τα δύο ορθογώνια το ένα δίπλα στο άλλο ώστε να σχηματίζουν ένα τρίτο ορθογώνιο. Επίσης, θα μπορούσε κανείς να πολλαπλασιάσει οποιοδήποτε γεωμετρικό μέγεθος (μήκος, εμβαδόν, όγκο) με επαναλαμβανόμενες προσθέσεις.

Η ανακάλυψη όμως των αρρήτων αχρήστεψε τις υπάρχουσες τεχνικές για τη σύγκριση των λόγων γεωμετρικών μεγεθών, και έθεσε σε αμφισβήτηση εκείνες τις γεωμετρικές αποδείξεις που είχαν χρησιμοποιήσει την έννοια της αναλογίας. Η κρίση που προέκυψε στα θεμέλια της γεωμετρίας αντιμετωπίστηκε από τον Εύδοξο, ο οποίος εξελίχθηκε στον μεγαλύτερο μαθηματικό του 4ου αιώνα π.Χ.

Το κρίσιμο σημείο για το επίτευγμα του Ευδόξου ήταν, όπως συχνά συμβαίνει στα μαθηματικά, η διατύπωση του κατάλληλου ορισμού – σε αυτή την περίπτωση, του ορισμού της ισότητας των λόγων δύο γεωμετρικών μεγεθών. Έστω a και b δύο γεωμετρικά μεγέθη του ίδιου τύπου (και τα δύο μήκη ή εμβαδά ή όγκοι). Έστω c και d ένα δεύτερο ζεύγος γεωμετρικών μεγεθών, πάλι ομοειδών αλλά όχι απαραίτητα ομοειδή με τα προηγούμενα. Ο Εύδοξος ορίζει ότι οι λόγοι $a : b$ και $c : d$ είναι ίσοι, $a : b = c : d$, αν για οποιουδήποτε φυσικούς αριθμούς m και n ισχύει

$$(1.1.1) \quad na > mb \quad \text{και} \quad nc > md,$$

ή

$$(1.1.2) \quad na = mb \quad \text{και} \quad nc = md,$$

ή

$$(1.1.3) \quad na < mb \quad \text{και} \quad nc < md.$$

Ο ορισμός αυτός γενικεύει την έννοια της ισότητας των λόγων φυσικών αριθμών. Με λίγα λόγια, ο ορισμός του Ευδόξου λέει για γεωμετρικά μεγέθη αυτό που ουσιαστικά είναι προφανές για τους φυσικούς αριθμούς. Παρατηρήστε όμως ότι αν δοθούν δύο ασύμμετρα γεωμετρικά μεγέθη a και b , τότε αυτός ο ορισμός χωρίζει αποτελεσματικά το σώμα των ρητών αριθμών m/n σε δύο ξένα σύνολα: το σύνολο L των ρητών για τους οποίους ισχύει η (1.1.1), δηλαδή η $m : n < a : b$, και το σύνολο U των ρητών για τους οποίους ισχύει η (1.1.3), δηλαδή η $m : n > a : b$. Αυτή η διαίρεση των ρητών αριθμών σε δύο ξένα υποσύνολα L και U , τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του L να είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του U , ονομάζεται σήμερα «τομή Dedekind» προς τιμήν του Richard Dedekind, ο οποίος στον 19ο αιώνα όρισε τους πραγματικούς αριθμούς ως τέτοιες ακριβώς «τομές» των ρητών αριθμών. Έτσι, ο Dedekind θεμελίωσε αυστηρά το σύστημα των πραγματικών αριθμών ακολουθώντας κάποια από τα βήματα που ο Ευδόξος είχε κάνει δύο χιλιάδες χρόνια πριν.

Η γενική θεωρία των λόγων, που ο Ευδόξος ανέπτυξε ξεκινώντας από αυτό τον ορισμό, παρουσιάζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Μια κρίσιμη υπόθεση που εμφανίζεται με τη μορφή ορισμού λέει ότι «δύο γεωμετρικά μεγέθη a και b έχουν πάντα λόγο τέτοιοι ώστε κατάλληλο πολλαπλάσιο του ενός να υπερβαίνει το άλλο». Δηλαδή, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $na > b$. Η υπόθεση αυτή διατυπώθηκε για πρώτη φορά ως αξίωμα από τον Αρχιμήδη και γι' αυτό το λόγο είναι γνωστή ως αξίωμα του Αρχιμήδη. Είναι όμως προτιμότερο να την αποκαλούμε «αρχή του Ευδόξου».

Ο κρίσιμος ρόλος αυτής της αρχής στη θεωρία του Ευδόξου φαίνεται αν δούμε την απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος:

$$(1.1.4) \quad \text{αν } a : c = b : c \text{ τότε } a = b.$$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $a > b$. Τότε, υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε

$$(1.1.5) \quad n(a - b) > c.$$

Έστω mc το μικρότερο πολλαπλάσιο του c που υπερβαίνει τον nb . Τότε,

$$(1.1.6) \quad mc > nb \geq (m - 1)c.$$

Προσθέτοντας τις (1.1.5) και (1.1.6) παίρνουμε

$$na > mc$$

ενώ

$$nb < mc.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την $a : c = b : c$. Συνεπώς, $a = b$.

Ένα δεύτερο παράδειγμα που δείχνει την εξαιρετική φροντίδα με την οποία ο Ευδόξος οικοδόμησε τη θεωρία του είναι το εξής. Θα εφαρμόσουμε την (1.1.4) για να δείξουμε ότι αν $a : b = c : d$ τότε $ad = bc$. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$a : b = ad : bd,$$

διότι η $na > mb$ δίνει την $nad > mbd$ κλπ. Όμοια,

$$c : d = bc : bd,$$

άρα

$$ad : bd = bc : bd.$$

Από την (1.1.4) έπεται ότι $ad = bc$, όπως θέλαμε.

1.2 Υπολογισμός εμβαδών: η μέθοδος της εξάντλησης

Οι Έλληνες γεωμέτρεις δέχονταν διαισθητικά ότι τα καμπυλόγραμμα χωρία (για παράδειγμα, οι κύκλοι και οι ελλείψεις) έχουν εμβαδά που είναι γεωμετρικά μεγέθη ομοειδή με τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων. Δέχονταν επίσης ότι τα εμβαδά έχουν τις ακόλουθες δύο φυσολογικές ιδιότητες:

- (i) (Μονοτονία) Αν S, T είναι δύο χωρία και $S \subseteq T$ τότε $\alpha(S) \leq \alpha(T)$.
- (ii) (Προσθετικότητα) Αν τα S και T είναι μη επικαλυπτόμενα και $R = S \cup T$ τότε $\alpha(R) = \alpha(S) + \alpha(T)$.

Για δεδομένο καμπυλόγραμμο χωρίο S , ο τρόπος με τον οποίο προσπαθούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν $\alpha(S)$ ήταν να ορίσουν μια αύξουσα ακολουθία πολυγώνων $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq P_{n+1} \subseteq \dots$ η οποία να «εξαντλεί» το S , κατ' αναλογία προς την κατασκευή ακολουθίας εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων που εξαντλούν έναν κύκλο. Δεδομένου ότι δεν είχαν στη διάθεσή τους (και απέφευγαν) την έννοια του ορίου της ακολουθίας $\alpha(P_n)$, χρησιμοποιούσαν την ακόλουθη «αρχή της εξάντλησης».

Πρόταση 1.2.1 (αρχή του Ευδόξου). Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε μέγεθος μεγαλύτερο του μισού του και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία συνεχώς, τελικά θα μείνει κάποιο μέγεθος που θα είναι μικρότερο από το μικρότερο εκ των δύο δοθέντων μεγεθών.

Απόδειξη. Σε σύγχρονη γλώσσα θέλουμε να δείξουμε ότι αν M_0 και ϵ είναι δύο θετικές ποσότητες και αν M_1, M_2, M_3, \dots είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε

$$M_1 < \frac{1}{2}M_0, \quad M_2 < \frac{1}{2}M_1, \quad M_3 < \frac{1}{2}M_2, \quad \dots$$

τότε υπάρχει n τέτοιος ώστε

$$M_n < \epsilon.$$

Αυτό αιτιολογείται ως εξής: επιλέγουμε φυσικό N τέτοιο ώστε

$$(N + 1)\epsilon > M_0.$$

Παρατηρούμε ότι $2\epsilon \leq (N + 1)\epsilon$, άρα

$$N\epsilon = (N + 1)\epsilon - \epsilon \geq \frac{1}{2}(N + 1)\epsilon > \frac{1}{2}M_0 > M_1.$$

Αν $N = 1$ τότε η διαδικασία σταματάει εδώ: έχουμε $M_1 < \epsilon$. Αν $N \geq 2$ τότε $2\epsilon \leq N\epsilon$, άρα

$$(N - 1)\epsilon = N\epsilon - \epsilon \geq \frac{1}{2}N\epsilon > \frac{1}{2}M_1 > M_2.$$

Συνεχίζοντας έτσι, μετά από N βήματα καταλήγουμε στην ανισότητα $\epsilon > M_N$. \square

Εφαρμόζοντας την αρχή του Ευδόξου θα αποδείξουμε ότι το εμβαδόν ενός κύκλου «εξαντλείται» μέσω κανονικών πολυγώνων που εγγράφονται σε αυτόν.

Λήμμα 1.2.2. Αν δοθούν κύκλος C και $\epsilon > 0$, υπάρχει πολύγωνο P που εγγράφεται στον C τέτοιο ώστε

$$(1.2.1) \quad \alpha(C) - \alpha(P) < \epsilon.$$

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε τετράγωνο $P_0 = EFGH$ το οποίο εγγράφεται στον C , και θέτουμε $M_0 = \alpha(C) - \alpha(P_0)$. Διπλασιάζοντας το πλήθος των πλευρών, παίρνουμε ένα κανονικό οκτάγωνο το οποίο εγγράφεται στον C (βλέπε Σχήμα 1.1).

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ πολυγώνων, με το P_n να έχει 2^{n+2} πλευρές. Ορίζουμε

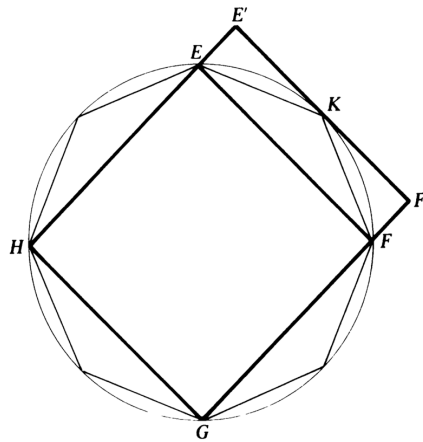
$$M_n = \alpha(C) - \alpha(P_n)$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$(1.2.2) \quad M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n.$$

Από την αρχή του Ευδόξου έπεται ότι υπάρχει n τέτοιος ώστε $M_n < \epsilon$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Η απόδειξη της (1.2.2) γίνεται με τον ίδιο τρόπο για κάθε n , οπότε θα την περιγράψουμε στην περίπτωση $n = 0$. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $EFF'E'$ του Σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1:

Έχουμε

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= \alpha(P_1) - \alpha(P_0) = 4\alpha(EFK) = 2\alpha(EFF'E') \\ &> 2\alpha(\overline{EKF}) = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha(\overline{EKF}) = \frac{1}{2}(\alpha(C) - \alpha(P_0)) \\ &= \frac{1}{2}M_0, \end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε με \overline{EKF} το κυκλικό τμήμα που αποκόπτεται από την ακμή EF του τετραγώνου P_0 . Στη γενική περίπτωση, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$M_n - M_{n+1} = \alpha(P_{n+1}) - \alpha(P_n) > \frac{1}{2}(\alpha(C) - \alpha(P_n)) = \frac{1}{2}M_n,$$

όπου $\alpha(C) - \alpha(P_n)$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των 2^{n+2} κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις ακμές του P_n . \square

Το Λήμμα 1.2.2 είναι πολύ χρήσιμο: ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο εφαρμόζεται μας δίνει η αυστηρή απόδειξη του επόμενου θεωρήματος για τα εμβαδά κύκλων (Ευκλείδης XII.2).

Θεώρημα 1.2.3. *Αν C_1 και C_2 είναι δύο κύκλοι με ακτίνες r_1 και r_2 αντίστοιχα, τότε*

$$(1.2.3) \quad \frac{\alpha(C_1)}{\alpha(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Απόδειξη. Αν $A_1 = \alpha(C_1)$ και $A_2 = \alpha(C_2)$, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Η απόδειξη θα γίνει με ένα επιχείρημα διπλής απαγωγής σε άτοπο, χαρακτηριστικό για τους Έλληνες γεωμέτρους, με το οποίο αποδεικνύουμε ότι αν ισχύει οποιαδήποτε από τις δύο ανισότητες τότε οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$, δηλαδή

$$A_2 > \frac{A_1 r_2^2}{r_1^2} = S.$$

Θέτουμε $\epsilon = A_2 - S > 0$. Τότε, από το Λήμμα 1.2.2, υπάρχει πολύγωνο P_2 εγγεγραμμένο στον C_2 , τέτοιο ώστε

$$A_2 - \alpha(P_2) < \epsilon = A_2 - S,$$

άρα $\alpha(P_2) > S$. Όμως,

$$\frac{\alpha(P_1)}{\alpha(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{S},$$

όπου P_1 είναι το όμοιο κανονικό πολύγωνο που εγγράφεται στον C_1 . Έπεται ότι

$$\frac{S}{\alpha(P_2)} = \frac{A_1}{\alpha(P_1)} = \frac{\alpha(C_1)}{\alpha(P_1)} > 1,$$

άρα $S > \alpha(P_2)$, το οποίο είναι άτοπο. Δηλαδή, η υπόθεση $A_1/A_2 < r_1^2/r_2^2$ ήταν εσφαλμένη.

Αλλάζοντας τους ρόλους των δύο κύκλων, βλέπουμε με τον ίδιο τρόπο ότι η υπόθεση $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ είναι επίσης εσφαλμένη. Άρα, ισχύει η (1.2.3), όπως θέλαμε. \square

Αν ξαναγράψουμε την (1.2.3) στη μορφή

$$(1.2.4) \quad \frac{\alpha(C_1)}{r_1^2} = \frac{\alpha(C_2)}{r_2^2},$$

και συμβολίσουμε με π την κοινή τιμή αυτών των δύο λόγων, παίρνουμε το γνωστό τύπο

$$A = \pi r^2$$

για το εμβαδόν του κύκλου. Όμως, οι Έλληνες δεν μπορούσαν να κάνουν κάτι τέτοιο, αφού γι' αυτούς η (1.2.4) ήταν μια αναλογία μεταξύ λόγων εμβαδών και όχι κάποια αριθμητική ισότητα. Έτσι, ο αριθμός π δεν κάνει την εμφάνισή του εκείνη την εποχή.

1.3 Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας: το εύρος και η σημασία του έργου του είναι προφανή. Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε μερικά από τα αποτελέσματά του, τα οποία έχουν άμεση σχέση με το θέμα αυτού του μαθήματος, την εξέλιξη του απειροστικού λογισμού.

1.3α' Μέτρηση του κύκλου

Όπως είδαμε, ήταν γνωστό ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ανάλογο με το τετράγωνο της ακτίνας του, δηλαδή

$$\alpha(C) = \pi_1 r^2$$

για κάποια σταθερά π_1 . Ήταν επίσης γνωστό ότι η περίμετρος ενός κύκλου είναι ανάλογη με τη διάμετρό του, δηλαδή

$$S(C) = \pi_2 r.$$

Ο Αρχιμήδης έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη της ισότητας $\pi = \pi_1 = \pi_2$ των δύο σταθερών. Αυτή προκύπτει άμεσα από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.1. *Αν C είναι ένας κύκλος ακτίνας r τότε το εμβαδόν $\alpha(C)$ και η περίμετρος $S(C)$ του C ικανοποιούν την*

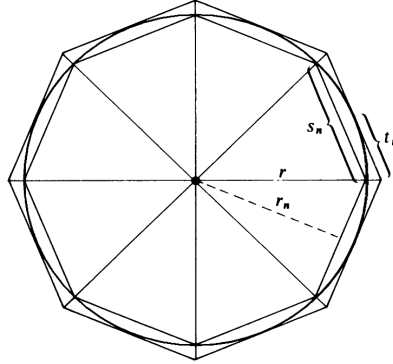
$$(1.3.1) \quad \alpha(C) = \frac{1}{2} r S(C).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha(C) > \frac{1}{2} r S(C)$. Θέτουμε $\epsilon = \alpha(C) - \frac{1}{2} r S(C)$ και επιλέγουμε κανονικό n -γωνο P_n το οποίο εγγράφεται στον κύκλο και έχει εμβαδόν

$$\alpha(P_n) > \alpha(C) - \epsilon = \frac{1}{2} r S(C).$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.2.2 της προηγούμενης παραγράφου.

Συμβολίζουμε με s_n το μήκος των πλευρών του P_n και με r_n την απόσταση του κέντρου του C από τις πλευρές του P_n . Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται επίσης το κανονικό n -γωνο Q_n το οποίο περιγράφεται στον κύκλο C , και συμβολίζουμε με t_n το μισό του μήκους των πλευρών του.



Σχήμα 1.2:

Ο Αρχιμήδης θεωρούσε γνωστό ότι η περίμετρος του P_n είναι μικρότερη από αυτήν του C και η περίμετρος του Q_n είναι μεγαλύτερη από αυτήν του C . Με άλλα λόγια,

$$ns_n < S(C).$$

Επίσης, είναι φανερό ότι $r_n < r$. Παρατηρούμε ότι το P_n είναι η ένωση n ισοσκελών τριγώνων με βάση s_n και ύψος r_n . Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1}{2}rS(C) < \alpha(P_n) = n \cdot \frac{1}{2}r_n s_n = \frac{1}{2}r_n (ns_n) < \frac{1}{2}rS(C).$$

Οδηγηθήκαμε σε άτοπο, άρα δεν ισχύει η $\alpha(C) > \frac{1}{2}rS(C)$.

Τελείως ανάλογα, υποθέτουμε ότι $\alpha(C) < \frac{1}{2}rS(C)$, θέτουμε $\epsilon = \frac{1}{2}rS(C) - \alpha(C)$ και επιλέγουμε κανονικό n -γωνο Q , περιγεγραμμένο στον C , με την ιδιότητα

$$\alpha(Q) < \alpha(C) + \epsilon = \frac{1}{2}rS(C).$$

Αν t_n είναι το μισό του μήκους της πλευράς του Q , παρατηρούμε ότι

$$\alpha(Q) = n \cdot \frac{1}{2}r(2t_n) = \frac{1}{2}r(2nt_n) > \frac{1}{2}rS(C),$$

δεχόμενοι ότι η περίμετρος $2nt_n$ του Q είναι μεγαλύτερη από το μήκος $S(C)$ της περιφέρειας του C . Οδηγούμαστε έτσι πάλι σε άτοπο, και αυτό αποδεικνύει την (1.3.1). \square

1.3β' Υπολογισμός του π

Αν ορίσουμε τη σταθερά π από τη σχέση $\alpha(C_r) = \pi r^2$, όπου C είναι κύκλος ακτίνας r , το γεγονός ότι ο λόγος $\alpha(C_r)/r^2$ είναι σταθερός (Θεώρημα 1.2.3) μας εξασφαλίζει ότι η σταθερά

π είναι καλά ορισμένη. Συνδυάζοντας την $\alpha(C_r) = \pi r^2$ με το Θεώρημα 1.3.1 βλέπουμε επίσης ότι η ίδια σταθερά π ικανοποιεί την

$$(1.3.2) \quad S(C_r) = 2\pi r,$$

όπου $S(C_r)$ είναι το μήκος της περιφέρειας του C_r .

Ο Αρχιμήδης προσπάθησε να υπολογίσει τη σταθερά π και απέδειξε ότι

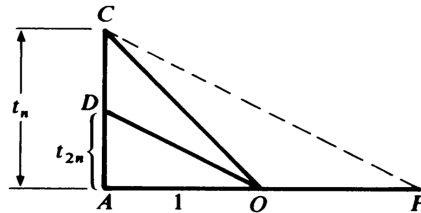
$$(1.3.3) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

φράσσοντας από πάνω και από κάτω το λόγο $S(C_r)/d$, όπου $d = 2r$ είναι η διάμετρος του C_r . Για το σκοπό αυτό ξεκίνησε με κανονικά εξάγωνα, εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα στον C_1 , και διπλασίαζε διαδοχικά το πλήθος των κορυφών, θεωρούσε δηλαδή κανονικά πολύγωνα με 12, 24, 48 και τελικά 96 πλευρές. Υπολόγισε τις περιμέτρους τους και χρησιμοποίησε την

$$\frac{1}{2}nr_n < \pi < nt_n$$

για να δώσει άνω και κάτω φράγμα για τον π .

Θεωρούμε πρώτα τα περιγεγραμμένα πολύγωνα. Η σχέση ανάμεσα στους t_n και t_{2n} προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, όπου O είναι το κέντρο του κύκλου C_1 και η OD διχοτομεί τη γωνία \widehat{AOC} . Αν φέρουμε την CP παράλληλη προς την OD , ελέγχουμε ότι $OP = CO$ (εξηγήστε γιατί).



Σχήμα 1.3:

Τα τρίγωνα ADO και ACP είναι όμοια, συνεπώς

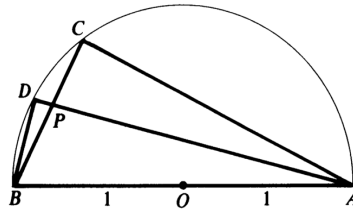
$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AO + OP} = \frac{AC}{AO + OC},$$

δηλαδή

$$(1.3.4) \quad t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}.$$

Η αναδρομική αυτή σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον t_{2n} αν γνωρίζουμε τον t_n .

Στη συνέχεια θεωρούμε τα εγγεγραμμένα πολύγωνα. Η σχέση ανάμεσα στους s_n και s_{2n} προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, όπου $s_n = BC$, $s_{2n} = BD$, και η AD διχοτομεί τη γωνία \widehat{BAC} (εξηγήστε γιατί).



Σχήμα 1.4:

Εύκολα ελέγχουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ABD , BPD και APC είναι όμοια. Συνεπώς,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD} \quad \text{και} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD}.$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε την

$$\frac{AB + AC}{AD} = \frac{BP + PC}{BD} = \frac{BC}{BD}.$$

Η ισότητα αυτή μας δίνει την

$$\frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί, υψώνοντας στο τετράγωνο και απλοποιώντας, καταλήγουμε στην

$$(1.3.5) \quad s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Η αναδρομική αυτή σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον s_{2n} αν γνωρίζουμε τον s_n .

Αν ξεκινήσουμε με τα κανονικά εξάγωνα έχουμε $s_6 = 1$ και $t_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Εφαρμόζοντας τις (1.3.4) και (1.3.5) (και χρησιμοποιώντας υπολογιστή χειρός) μπορούμε να υπολογίσουμε διαδοχικά τους $s_{12}, s_{24}, s_{48}, s_{96}$ και $t_{12}, t_{24}, t_{48}, t_{96}$. Βλέπουμε ότι

$$s_{96} \approx 0.065438 \quad \text{και} \quad t_{96} = 0.032737,$$

και από την $48s_{96} < \pi < 96t_{96}$ συμπεραίνουμε ότι

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Δηλαδή, $\pi = 3.14$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Το ερώτημα είναι πώς ο Αρχιμήδης, χωρίς υπολογιστή χειρός, κατέληξε σε αυτές τις εκτιμήσεις. Ξεκίνησε με την προσέγγιση

$$\frac{265}{163} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

για τον $\sqrt{3}$ (!) και, κάνοντας προσεγγιστικούς υπολογισμούς τετραγωνικών ριζών με «στρογγυλοποιήσεις», υπολόγιζε τους s_n και t_n , φτάνοντας τελικά στη διπλή ανισότητα

$$3\frac{10}{71} < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{10}{70}.$$

Υπάρχει η άποψη (βλέπε W. R. Knorr) ότι ο Αρχιμήδης ξεκίνησε τη διαδικασία με δεκάγωνα (και όχι εξάγωνα) και ότι ακολούθησε τη διαδικασία που περιγράψαμε φτάνοντας μέχρι τα κανονικά πολύγωνα με 640 πλευρές για να επιτύχει μεγαλύτερη ακρίβεια.

Υπάρχουν επίσης ενδιαφέρουσες εργασίες σχετικά με τη μέθοδο που χρησιμοποιούσε για να υπολογίζει (κατά προσέγγιση) τετραγωνικές ρίζες.

1.3γ' Τετραγωνισμός της παραβολής

Με τον όρο *τμήμα* μιας καμπύλης εννοούμε το χωρίο που ορίζεται από μια ευθεία και το κομμάτι της καμπύλης που αποκόπτεται. Στον «Τετραγωνισμό της Παραβολής» ο Αρχιμήδης ξεκινάει αναφέροντας ότι οι προηγούμενοι είχαν καταφέρει να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός τμήματος κύκλου ή υπερβολής αλλά το αντίστοιχο πρόβλημα για την παραβολή παρέμενε ανοικτό. Στη συνέχεια λύνει το πρόβλημα με τη μέθοδο της εξάντλησης.

Η παραβολή οριζόταν από τους Έλληνες γεωμέτρους ως κωνική τομή. Θεωρούσαν έναν διπλό κυκλικό κώνο με κατακόρυφο άξονα και όριζαν ως παραβολή την τομή του με ένα επίπεδο παράλληλο προς κάποια γενέτειρα του κώνου. Οι άλλες θέσεις του επιπέδου οδηγούσαν σε κύκλο ή έλλειψη. Κάθε παραβολή είναι συμμετρική ως προς κάποια ευθεία του επιπέδου στο οποίο περιέχεται. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε *άξονα* της παραβολής.

Αν θεωρήσουμε ένα παραβολικό τμήμα με βάση AB τότε το σημείο P του τμήματος που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση ονομάζεται *κορυφή* του τμήματος. Η απόσταση του P από το AB είναι το *ύψος* του τμήματος.

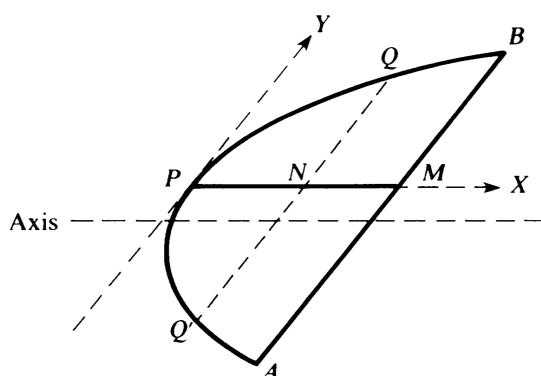
Θεώρημα 1.3.2 (Αρχιμήδης). *Το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος με βάση AB είναι ίσο με $\frac{4}{3}\alpha(APB)$.*

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε τα παρακάτω, γνωστά εκείνη την εποχή, αποτελέσματα για το τμήμα APB :

- (α) Η εφαπτόμενη της παραβολής στο P είναι παράλληλη στη βάση AB .
- (β) Η ευθεία που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής τέμνει τη βάση AB στο μέσο της M .
- (γ) Κάθε χορδή QQ' παράλληλη στη βάση AB διχοτομείται από τη διάμετρο PM .
- (δ) Με το συμβολισμό του παρακάτω σχήματος έχουμε

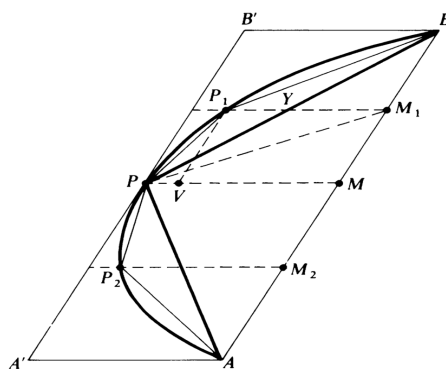
$$(1.3.6) \quad \frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2}.$$

Για τα (α)-(δ) παραπέμπει στον Ευκλείδη.



Σχήμα 1.5:

Εγγράφουμε το παραβολικό τμήμα APB στο παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ που έχει πλευρά το AB και τις πλευρές του BB' και AA' παράλληλες στη διάμετρο PM . Το εμβαδόν του τριγώνου APB είναι το μισό του εμβαδού αυτού του παραλληλογράμμου, άρα το εμβαδόν αυτού του τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του παραβολικού τμήματος APB .



Σχήμα 1.6:

Θεωρούμε τα δύο μικρότερα παραβολικά τμήματα με βάσεις PB και AP . Συμβολίζουμε τις κορυφές τους με P_1 και P_2 αντίστοιχα. Ακριβώς όπως πριν, βλέπουμε ότι τα εμβαδά των εγγεγραμμένων τριγώνων PP_1B και AP_2P ξεπερνούν το μισό των εμβαδών αυτών των δύο τμημάτων.

Αυτό ήδη υποδεικνύει μια διαδικασία εξάντλησης του εμβαδού του αρχικού παραβολικού τμήματος APB με εγγεγραμμένα πολύγωνα. Το τρίγωνο APB είναι το πρώτο εγγεγραμμένο πολύγωνο, και το AP_2PP_1B είναι το δεύτερο. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, προσθέτοντας σε κάθε βήμα τα τρίγωνα που εγγράφονται στα παραβολικά τμήματα που έχουν απομείνει από το προηγούμενο βήμα. Αφού το συνολικό εμβαδόν αυτών των εγγεγραμμένων τριγώνων είναι μεγαλύτερο από το μισό του συνολικού εμβαδού των τμημάτων, από την αρχή του Ευδόξου συμπεραίνουμε ότι:

Για κάθε $\epsilon > 0$, μετά από πεπερασμένα το πλήθος βήματα θα πάρουμε ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο που το εμβαδόν του διαφέρει από το εμβαδόν του τμήματος

APB λιγότερο από ϵ .

Το βασικό λήμμα είναι το εξής.

Λήμμα 1.3.3. *Ισχύει η ισότητα*

$$(1.3.7) \quad \alpha(AP_2B) + \alpha(PP_1B) = \frac{1}{4}\alpha(APB).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με M_1 το μέσο του BM , με Y το σημείο τομής των P_1M_1 και PB , με V το σημείο τομής του PM με την ευθεία που διέρχεται από το P_1 και είναι παράλληλη στο AB . Τότε,

$$BM^2 = 4M_1M^2$$

και από την (1.3.6) βλέπουμε ότι

$$PM = 4PV \quad \text{άρα και} \quad P_1M = 3PV.$$

Όμως, $YM_1 = \frac{1}{2}PM = 2PV$, συνεπώς

$$YM_1 = 2P_1Y.$$

Από τη σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας δύο φορές το γεγονός ότι ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων που έχουν την ίδια βάση ισούται με το λόγο των υψών τους, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha(PP_1B) = \frac{1}{2}\alpha(PM_1B) = \frac{1}{4}\alpha(PMB).$$

Όμοια, βλέπουμε ότι

$$\alpha(AP_2P) = \frac{1}{4}\alpha(APM),$$

και τελικά ότι

$$\begin{aligned} \alpha(PP_1B) + \alpha(AP_2P) &= \frac{1}{4}\alpha(PMB) + \frac{1}{4}\alpha(APM) \\ &= \frac{1}{4}\alpha(APB), \end{aligned}$$

που ήταν ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των εμβαδών των εγγεγραμμένων τριγώνων που προσθέτουμε σε κάθε βήμα είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του αθροίσματος των εμβαδών των τριγώνων που προσθέσαμε στο προηγούμενο βήμα. Αν γράψουμε

$$\alpha = \alpha(APB),$$

συμπεραίνουμε ότι το πολύγωνο \mathcal{P}_n που παίρνουμε μετά από n βήματα έχει εμβαδόν

$$(1.3.8) \quad \alpha(\mathcal{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots + \frac{\alpha}{4^n}.$$

Συνεπώς, για κάθε $\epsilon > 0$, το εμβαδόν β του παραβολικού τμήματος APB διαφέρει από το δεξιό μέλος της (1.3.8) κατά λιγότερο από ϵ αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Σε αυτό το σημείο ο Αρχιμήδης αποδεικνύει τη στοιχειώδη ταυτότητα

$$(1.3.9) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}.$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από την παρατήρηση ότι

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3 \cdot 4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}},$$

γιατί τότε

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) \\ &\dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Μπαίνει κανείς στον πειρασμό να αθροίσει τη γεωμετρική σειρά αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ στην (1.3.9) και να γράψει

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

Αυτό θα έδειχνε ότι

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\mathcal{P}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\beta = \frac{4}{3}\alpha = \frac{4}{3}\alpha(APB),$$

όπως θέλαμε. □

Χωρίς αμφιβολία, ο Αρχιμήδης κατέληξε στο αποτέλεσμα $\frac{4}{3}$ με παρόμοιο τρόπο, όμως αντί να πάρει το όριο ολοκλήρωσε την απόδειξη με ένα τυπικό επιχείρημα διπλής απαγωγής σε άτοπο, το οποίο μπορεί ο καθένας μας να συμπληρώσει.

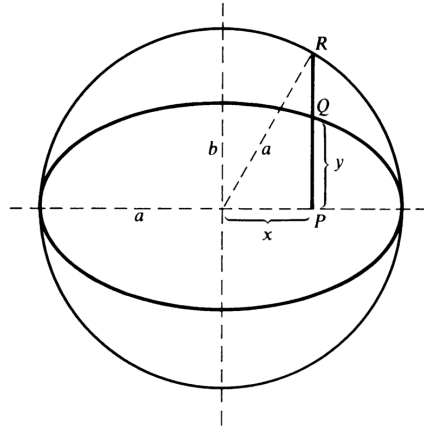
1.3δ' Εμβαδόν της έλλειψης

Ο Αρχιμήδης δεν ήταν σε θέση να υπολογίσει το εμβαδόν του τμήματος έλλειψης. Απέδειξε όμως ότι το εμβαδόν της πλήρους έλλειψης $E = E(a, b)$ με ημιάξονες a και b είναι ίσο με

$$(1.3.10) \quad \alpha(E) = \pi ab.$$

Παρατηρηστες ότι η (1.3.10) συμφωνεί με τον γνωστό τύπο $\alpha(C_a) = \pi a^2$: ο κύκλος C_a είναι έλλειψη με ημιάξονες $a = b$.

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε την απόδειξη της (1.3.10). Υποθέτουμε ότι $a > b$ και θεωρούμε τον βοηθητικό κύκλο C_a ακτίνας a στον οποίο εγγράφεται η έλλειψη E . Η χαρακτηριστική ιδιότητα της έλλειψης που θα χρειαστούμε περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.7:

Αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο P στον κύριο (εδώ τον οριζόντιο) άξονα της έλλειψης και αν Q είναι το σημείο της έλλειψης και R το σημείο του C_a πάνω από το P , τότε

$$(1.3.11) \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a}$$

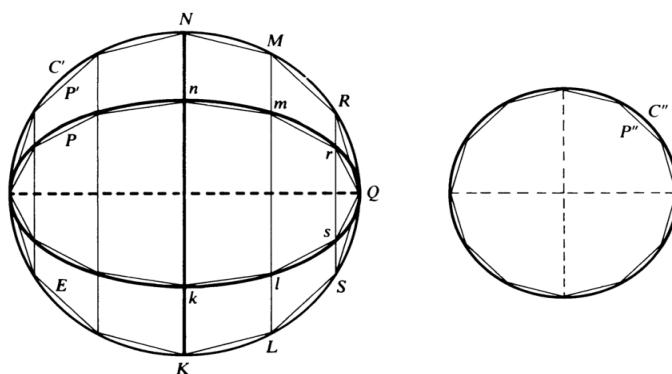
Σε σύγχρονη γλώσσα, αυτό προκύπτει εύκολα από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

της έλλειψης, η οποία μας δίνει

$$PQ = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} PR.$$

Για την απόδειξη της (1.3.10) ξεκινάμε με μια έλλειψη E που έχει άξονες $a > b$, και θεωρούμε τον βοηθητικό κύκλο C' . Θεωρούμε επίσης έναν κύκλο C'' ακτίνας $r = \sqrt{ab}$, οπότε $\alpha(C'') = \pi r^2 = \pi ab$. Η έλλειψη E και οι κύκλοι C' και C'' δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.8:

Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι

$$\alpha(E) = \alpha(C'').$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\alpha(E) < \alpha(C'')$. Τότε, μπορούμε να βρούμε κανονικό πολύγωνο P'' το οποίο έχει $4n$ πλευρές, εγγράφεται στον κύκλο C'' , έχει κορυφές τα δύο άκρα της οριζόντιας διαμέτρου του C'' , και εμβαδόν

$$(1.3.12) \quad \alpha(P'') > \alpha(E).$$

Θεωρούμε τώρα κανονικό πολύγωνο P' , όμοιο με το P'' , το οποίο εγγράφεται στον βοηθητικό κύκλο C' . Γνωρίζουμε ότι

$$(1.3.13) \quad \frac{\alpha(P'')}{\alpha(P')} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το πολύγωνο P που εγγράφεται στην έλλειψη E και έχει κορυφές τα σημεία τομής με την E των καθέτων από τις κορυφές του P' στον οριζόντιο άξονα της E . Παρατηρούμε ότι τα πολύγωνα P και P' είναι ενώσεις μη επικαλυπτόμενων τριγώνων και τραπέζιων (τα οποία έρχονται φυσιολογικά σε αντιστοιχία, όπως τα τρίγωνα Qrs και QRS ή τα τραπέζια $klmn$ και $KLMN$). Από την χαρακτηριστική ιδιότητα (1.3.11) της έλλειψης έχουμε

$$\frac{lm}{LM} = \frac{kn}{KN} = \frac{rs}{RS} = \frac{b}{a},$$

άρα

$$\frac{\alpha(klmn)}{\alpha(KLMN)} = \frac{\alpha(Qrs)}{\alpha(QRS)} = \frac{b}{a}.$$

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα και τα τραπέζια ένα προς ένα, και σχηματίζοντας από αυτά τα πολύγωνα P και P' , βλέπουμε ότι

$$(1.3.14) \quad \frac{\alpha(P)}{\alpha(P')} = \frac{b}{a}.$$

Από τις (1.3.13), (1.3.14) και (1.3.12) έπεται ότι

$$\alpha(P) = \alpha(P'') > \alpha(E),$$

το οποίο είναι άτοπο διότι το P είναι εγγεγραμμένο στην E . Έτσι έχουμε αποδείξει ότι το εμβαδόν $\alpha(C'')$ δεν είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν $\alpha(E)$.

Τελείως ανάλογα, υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha(E) > \alpha(C'')$. Τότε, μπορούμε να βρούμε κανονικό πολύγωνο P εγγεγραμμένο στην έλλειψη E , όμοιο με αυτό που θεωρήσαμε στο προηγούμενο βήμα, τέτοιο ώστε

$$(1.3.15) \quad \alpha(P) > \alpha(C'').$$

Θεωρούμε το κανονικό πολύγωνο P' που εγγράφεται στον βοηθητικό κύκλο C' και έχει κορυφές τα σημεία τομής με τον C' των κατακόρυφων ευθειών που περνούν από ζεύγη κορυφών του P . Θεωρούμε επίσης το όμοιο κανονικό πολύγωνο P'' που εγγράφεται στον κύκλο C'' . Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς του προηγούμενου βήματος βλέπουμε ότι

$$(1.3.16) \quad \frac{\alpha(P)}{\alpha(P')} = \frac{b}{a} = \frac{\alpha(P'')}{\alpha(P')}.$$

Όμως τότε

$$\alpha(P'') = \alpha(P) > \alpha(C''),$$

το οποίο είναι άτοπο διότι το P'' είναι εγγεγραμμένο στον C'' . Έτσι έχουμε αποδείξει ότι το εμβαδόν $\alpha(C'')$ δεν είναι μικρότερο από το εμβαδόν $\alpha(E)$.

Έχουμε λοιπόν $\alpha(E) = \alpha(C'') = \pi ab$.

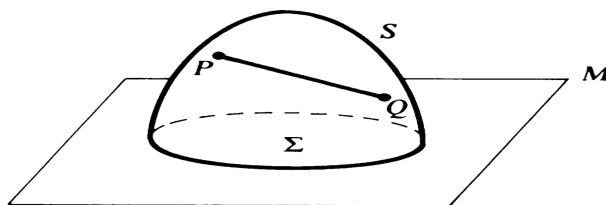
Ουσιαστικά, το επιχείρημα του Αρχιμήδη δίνει μια αυστηρή απόδειξη, με τη μέθοδο της εξάντλησης, του ισχυρισμού ότι το εμβαδόν της έλλειψης E προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν πa^2 του βοηθητικού κύκλου C' επί b/a . Διαισθητικά, αυτό εξηγείται αν παρατηρήσουμε ότι ο κύκλος C' μετασχηματίζεται στην έλλειψη E αν τον συρρικνώσουμε στην κατακόρυφη (μόνο) διεύθυνση κατά έναν παράγοντα b/a .

1.3ε' Επιφάνεια της σφαίρας

Η έννοια του εμβαδού είναι πολύ πιο πολύπλοκη για καμπυλόγραμμες επιφάνειες απ' ό,τι για επίπεδα χωρία. Για να προχωρήσει στον υπολογισμό του εμβαδού επιφανειών ο Αρχιμήδης έπρεπε προηγουμένως να περιορίσει την κλάση των επιφανειών τις οποίες θα εξέταζε, και κατόπιν να βάλει αξιώματα τα οποία να έπαιζαν (με τη σύγχρονη ορολογία) το ρόλο του ορισμού του εμβαδού επιφάνειας. Ο Αρχιμήδης διατύπωσε, με εντυπωσιακή σαφήνεια, τους ακόλουθους ορισμούς και αξιώματα.

Έστω C μια φραγμένη επίπεδη καμπύλη (που έχει δύο άκρα) που βρίσκεται στη μία πλευρά της ευθείας L και τα άκρα της ανήκουν σε αυτήν. Τότε η καμπύλη C λέγεται *κυρτή* αν, για κάθε ζεύγος σημείων P και Q της C , το ευθύγραμμο τμήμα από το P στο Q περιέχεται ολόκληρο στο χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη C και το τμήμα της L που συνδέει τα άκρα της C .

Όμοια, έστω S μια επιφάνεια που φράσσεται από μια απλή κλειστή καμπύλη J στο επίπεδο M , τέτοια ώστε η S να βρίσκεται στη μία πλευρά του M , και έστω Σ το επίπεδο χωρίο στο M το οποίο φράσσεται από την J . Τότε η επιφάνεια S λέγεται *κυρτή* αν, για κάθε δύο σημεία P και Q της S , το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα P και Q περιέχεται ολόκληρο στο χωρίο (του χώρου) το οποίο φράσσεται από το $S \cup \Sigma$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 1.9:

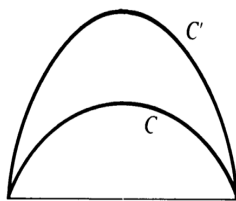
Για απλές (μη φραγμένες) κλειστές καμπύλες ή επιφάνειες ο ορισμός της κυρτότητας μπορεί να δοθεί με απλούστερο τρόπο. Μια απλή κλειστή καμπύλη (στο επίπεδο) ή μια επιφάνεια (στο χώρο) λέγεται κυρτή αν το χωρίο που φράσσεται από αυτήν περιέχει ολόκληρο κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία της.

Ο Αρχιμήδης μελετάει το μήκος καμπύλης και το εμβαδόν επιφάνειας για κυρτές καμπύλες και επιφάνειες. Αντιλαμβανόμενος ότι αυτά είναι νέα γεωμετρικά μεγέθη που διαφέρουν από αυτά που είχαν μελετήσει οι προηγούμενοι, εισάγει τα ακόλουθα αξιώματα κυρτότητας για να τα ορίσει και να τα υπολογίσει.

(α) Για τις καμπύλες: Αν C και C' είναι κυρτές καμπύλες με τα ίδια άκρα και αν η C περιέχεται στο χωρίο που φράσσεται από την C' και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα άκρα της, τότε το μήκος $\ell(C)$ της C είναι μικρότερο από το μήκος της C' :

$$\ell(C) < \ell(C').$$

Δηλαδή, αν μια κυρτή καμπύλη «περιέχεται» στο χωρίο που ορίζει μια άλλη (βλέπε σχήμα) τότε αυτή έχει μικρότερο μήκος. Επίσης, ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι η μικρότερη καμπύλη που συνδέει δύο δεδομένα σημεία.

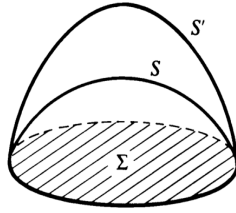


Σχήμα 1.10:

(β) Για τις επιφάνειες: Αν S και S' είναι δύο κυρτές επιφάνειες με την ίδια συνοριακή καμπύλη που ορίζει ένα χωρίο Σ στο επίπεδο, και αν η S περιέχεται στο χωρίο που φράσσεται από το $S' \cup \Sigma$, τότε

$$a(S) < a(S').$$

Δηλαδή, αν μια κυρτή επιφάνεια «περιέχεται» στο χωρίο που ορίζει μια άλλη (βλέπε σχήμα) τότε αυτή έχει μικρότερο εμβαδόν. Επίσης, ένα επίπεδο χωρίο που ορίζεται από μια επίπεδη καμπύλη έχει το μικρότερο εμβαδόν από όλες τις επιφάνειες που φράσσονται από αυτή την καμπύλη.



Σχήμα 1.11:

Εφαρμόζοντας αυτά τα αξιώματα μπορεί κανείς να αποδείξει πολλά αποτελέσματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου της συμπίεσης:

- (α) Αν C είναι μια κυρτή κλειστή καμπύλη και P, Q είναι ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο πολύγωνο σε αυτήν, τότε

$$\ell(P) < \ell(C) < \ell(Q).$$

Αν λοιπόν μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία τέτοιων ζευγών P_n, Q_n που έχουν επίπλεον την ιδιότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P_n) = \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(Q_n),$$

τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\ell(C) = \ell.$$

- (β) Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα r και ύψος h δίνεται από την

$$A = 2\pi r h$$

και το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κώνου με ακτίνα βάσης r και «πλάγιο ύψος» $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, όπου h είναι το ύψος του, δίνεται από την

$$A = \pi r s.$$

Για την απόδειξη προσεγγίζουμε τη βάση με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα P_n, Q_n , υπολογίζουμε την αντίστοιχη επιφάνεια των στερεών U_n, V_n που έχουν αυτές τις πολυγωνικές βάσεις (με μεθόδους που υπήρχαν εκείνη την εποχή), εφαρμόζουμε το αξίωμα της κυρτότητας για να αιτιολογήσουμε ότι η επιφάνεια του κυλίνδρου και του κώνου βρίσκεται ανάμεσα στις επιφάνειες των U_n, V_n , και δεδομένου ότι

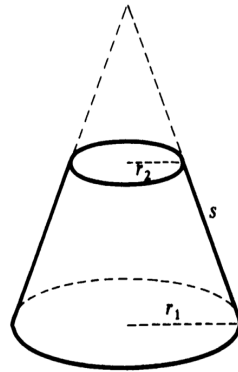
$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(U_n) = v = \lim_{n \rightarrow \infty} v(V_n)$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η επιφάνεια του κυλίνδρου ή του κώνου ισούται με v .

Από το (β) έπεται εύκολα ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου δίνεται από την

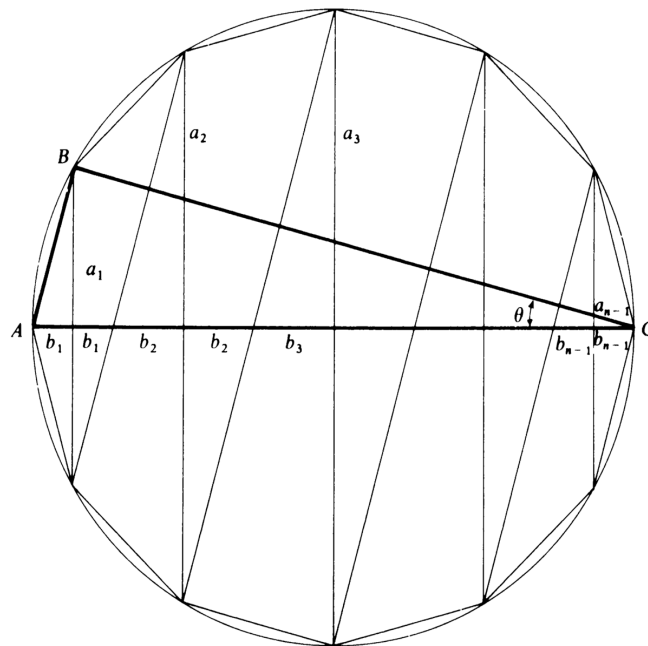
$$(1.3.17) \quad A = \pi(r_1 + r_2)h,$$

όπου r_1 και r_2 είναι οι ακτίνες των βάσεων και s είναι το πλάγιο ύψος του.



Σχήμα 1.12:

Για να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας S διαμέτρου $d = 2r$, ο Αρχιμήδης εγγράφει κανονικό πολύγωνο P με $2n$ πλευρές σε ένα κύκλο της ίδιας διαμέτρου και το περιστρέφει γύρω από μια διάμετρο με άκρα δύο αντίθετες κορυφές του P . Η επιφάνεια Σ' του στερεού V' που θα προκύψει από την περιστροφή αποτελείται από δύο κώνους και $n - 2$ κόλινους κώνους, καθένας από τους οποίους έχει πλάγιο ύψος s' ίσο με το μήκος της πλευράς του P . Οι ακτίνες a_1, a_2, \dots, a_{n-1} των βάσεων τους είναι τα μισά χορδών του κύκλου, οι οποίες διέρχονται από ζεύγη κορυφών του P και είναι κάθετες στον άξονα AC της περιστροφής (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 1.13:

Εφαρμόζοντας τους τύπους (1.3.17) για την επιφάνεια κώνου και κώλου κώνου για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της περιγεγραμμένης επιφάνειας Σ' , παίρνουμε

$$(1.3.18) \quad \begin{aligned} \alpha(\Sigma') &= \pi a_1 s' + \pi(a_1 + a_2)s' + \cdots + \pi(a_{n-2} + a_{n-1})s' + \pi a_{n-1} s' \\ &= 2\pi s' \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τη διάμετρο AC σε διαστήματα με μήκη $b_1, b_1, b_2, b_2, \dots, b_{n-1}, b_{n-1}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ομοιότητα τριγώνων προκύπτει ότι

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{BC}{s'}.$$

Αφού $2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = 2r = d$, προσθέτοντας τους λόγους συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{d} = \frac{BC}{s'},$$

άρα

$$2s' \sum_{i=1}^{n-1} a_i = d \cdot BC = 4r^2 \cos \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία \widehat{ACB} . Ο Αρχιμήδης βέβαια, αντί για το $\cos \theta$ χρησιμοποιούσε το λόγο BC/AC . Συνεπώς, η (1.3.18) γίνεται

$$(1.3.19) \quad \alpha(\Sigma') = 4\pi r^2 \cos \theta.$$

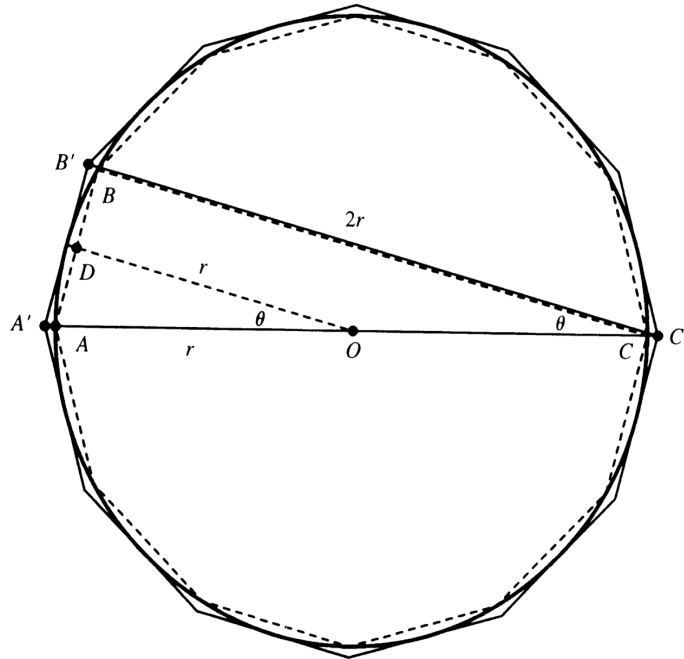
Ειδικότερα, βλέπουμε ότι

$$\alpha(\Sigma') < 4\pi r^2.$$

Ταυτόχρονα, από το αξίωμα της κυρτότητας έχουμε

$$\alpha(\Sigma') < \alpha(S).$$

Στη συνέχεια, θέλουμε να δείξουμε ότι το εμβαδόν μιας όμοιας αλλά περιγεγραμμένης επιφάνειας είναι μεγαλύτερος από $4\pi r^2$. Θεωρούμε ένα πολύγωνο Q με πλευρές s'' , όμοιο με το P , αλλά περιγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου $d = 2r$. Περιστρέφοντάς το (βλέπε το παρακάτω σχήμα) παίρνουμε ένα στερεό εκ περιστροφής V'' με επιφάνεια Σ'' .



Σχήμα 1.14:

Αφού η Σ'' είναι όμοια με την Σ' , αλλά εγγεγραμμένη σε μια λίγο μεγαλύτερη σφαίρα διαμέτρου

$$d' = A'C' = 2r \sec \theta,$$

ο προηγούμενος υπολογισμός δίνει αμέσως ότι

$$(1.3.20) \quad \alpha(\Sigma'') = \pi d' \cdot B'C' = 4\pi r^2 \sec \theta,$$

διότι $B'C' = 2r$ από ομοιότητα τριγώνων. Αφού $\sec \theta = AC/BC > 1$, βλέπουμε ότι

$$4\pi r^2 < \alpha(\Sigma'').$$

Επίσης,

$$\alpha(S) < \alpha(\Sigma'')$$

από το αξίωμα της κυρτότητας.

Συνδυάζοντας τις (1.3.19) και (1.3.20) παίρνουμε

$$4\pi r^2 \cos \theta < \alpha(S) < 4\pi r^2 \sec \theta.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \rightarrow \infty$, οπότε $\theta \rightarrow 0$, καταλήγουμε αμέσως στην $\alpha(S) = 4\pi r^2$. Φυσικά, ο Αρχιμήδης ολοκληρώνει την απόδειξη με ένα επιχείρημα διπλής απαγωγής σε άτοπο.

Από τα τρίγωνα ADO και $A'B'C'$ στο σχήμα, βλέπουμε ότι

$$\sin \theta = \frac{s'/2}{r} = \frac{s'}{d} \quad \text{και} \quad \tan \theta = \frac{s''}{d}.$$

Συνεπώς,

$$\sec \theta = \frac{\tan \theta}{\sin \theta} = \frac{s''}{s'}.$$

Άρα, οι (1.3.19) και (1.3.20) μας δίνουν

$$(1.3.21) \quad \frac{\alpha(\Sigma'')}{\alpha(\Sigma')} = \sec^2 \theta = \left(\frac{s''}{s'} \right)^2,$$

που είναι το τετράγωνο του λόγου των πλευρών των πολυγώνων.

Υποθέτουμε ότι $\alpha(S) > 4\pi r^2$ και επιλέγουμε το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο πολύγωνο, P και Q , έτσι ώστε

$$\frac{s''}{s'} < \sqrt{\frac{\alpha(S)}{4\pi r^2}}.$$

Τότε, η (1.3.21) μας δίνει

$$\frac{\alpha(\Sigma'')}{\alpha(\Sigma')} = \sec^2 \theta = \left(\frac{s''}{s'} \right)^2 < \frac{\alpha(S)}{4\pi r^2},$$

το οποίο είναι άτοπο διότι $\alpha(S) < \alpha(\Sigma'')$ ενώ $\alpha(\Sigma') < 4\pi r^2$.

Υποθέτουμε ότι $\alpha(S) < 4\pi r^2$ και επιλέγουμε τα P και Q , έτσι ώστε

$$\frac{s''}{s'} < \sqrt{\frac{4\pi r^2}{\alpha(S)}}.$$

Τότε, η (1.3.21) μας δίνει

$$\frac{\alpha(\Sigma'')}{\alpha(\Sigma')} = \sec^2 \theta = \left(\frac{s''}{s'} \right)^2 < \frac{4\pi r^2}{\alpha(S)},$$

το οποίο είναι άτοπο διότι $4\pi r^2 < \alpha(\Sigma'')$ ενώ $\alpha(\Sigma') < \alpha(S)$.

Έπεται λοιπόν ότι $\alpha(S) = 4\pi r^2$, όπως θέλαμε.

1.3ε' Η μέθοδος της συμπίεσης

Η μέθοδος της συμπίεσης που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για να αποδείξει ότι ένα γεωμετρικό μέγεθος (μήκος, εμβαδόν ή όγκος) είναι ίσο με δοθέν μέγεθος C , περιγράφεται σε αδρές γραμμές ως εξής. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία του σχήματος του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος, το εμβαδόν ή τον όγκο, κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες $\{L_n\}$ και $\{P_n\}$ τέτοιες ώστε

$$(1.3.22) \quad L_n < S < U_n \quad \text{και} \quad L_n < C < U_n$$

για κάθε n . Όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο κοιτάζοντας διαφορές, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$

$$(1.3.23) \quad U_n - L_n < \epsilon$$

όταν το n είναι αρκετά μεγάλο. Όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο κοιτάζοντας λόγους, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $\alpha > 1$

$$(1.3.24) \quad \frac{U_n}{L_n} < \alpha$$

όταν το n είναι αρκετά μεγάλο. Καθεμία από τις δύο τεχνικές, σε συνδυασμό με ένα επιχείρημα διπλής απαγωγής σε άτοπο, εξασφαλίζει ότι $S = C$.

1.3ζ' Εμβαδόν της σπείρας

Οι Έλληνες γεωμέτρους μελετούσαν μόνο περιπτώσεις ομοιόμορφης κίνησης. Οποιαδήποτε άλλη κίνηση περιγραφόταν μόνο μέσω ομοιόμορφης γραμμικής και κυκλικής κίνησης. Κινούμενος σε αυτό το πλαίσιο ο Αρχιμήδης όρισε την περίφημη σπείρα του ως σύνθεση μιας ομοιόμορφης γραμμικής και μιας ομοιόμορφης κυκλικής κίνησης:

«Αν σχεδιάσουμε μια ευθεία που περιστρέφεται με ομοιόμορφη ταχύτητα γύρω από ένα σταθερό σημείο και επιστρέφει στη θέση από την οποία ξεκίνησε, και αν, την ίδια στιγμή που η ευθεία περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με ομοιόμορφο ρυθμό κατά μήκος της ευθείας ξεκινώντας από το σταθερό σημείο, τότε το σημείο θα διαγράψει μια σπείρα στο επίπεδο.»

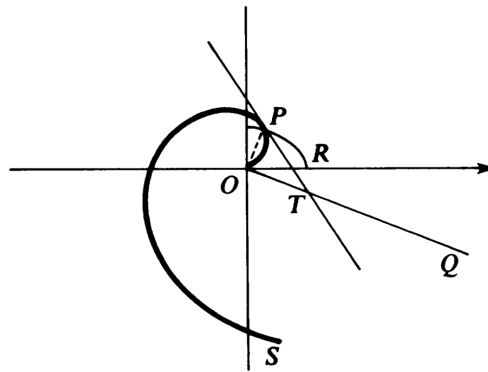
Για να περιγράψουμε αυτή την καμπύλη σε σύγχρονες πολικές συντεταγμένες, συμβολίζουμε με ω τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται η ευθεία και με v τη σταθερή ταχύτητα με την οποία το σημείο κινείται κατά μήκος της ευθείας ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων. Τότε, οι πολικές συντεταγμένες του κινούμενου σημείου τη χρονική στιγμή t είναι $r = vt$ και $\theta = \omega t$, άρα η εξίσωση της σπείρας σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$(1.3.25) \quad r = \kappa\theta,$$

όπου $\kappa := v/\omega$.

Οι πρώτες είκοσι προτάσεις της μελέτης του Αρχιμήδη για τη σπείρα αφορούν τον προσδιορισμό της εφαπτομένης της σπείρας σε δοθέν σημείο της. Η εφαπτόμενη για τους Έλληνες γεωμέτρους ήταν μια ευθεία που «αγγίζει» την καμπύλη σε δεδομένο σημείο της χωρίς να την διασχίζει. Εικάζεται ότι, παρόλο που κάτι τέτοιο δεν εμφανίζεται στο κείμενο, ο Αρχιμήδης βρήκε την εφαπτόμενη της σπείρας θεωρώντας το παραλληλόγραμμο ταχυτήτων που προσδιορίζεται από τις δύο συνιστώσες κινήσεις που γεννούν τη σπείρα. Αν αυτή η εικασία αληθεύει τότε μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί για πρώτη ίσως φορά στην ιστορία επιχειρήματα διαφορικού λογισμού.

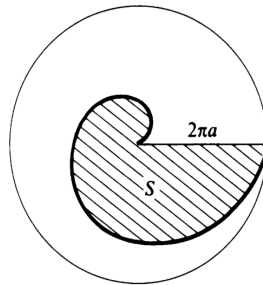
Το βέβαιο είναι ότι ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι η εφαπτόμενη στο σημείο P της σπείρας OPS τέμνει την κάθετη OQ της OP σε ένα σημείο T το οποίο έχει την ιδιότητα ότι το ευθύγραμμο τμήμα OT έχει το ίδιο μήκος με το κυκλικό τόξο PR που ορίζεται από τον x -άξονα και το διάνυσμα OR (βλέπε σχήμα). Η απόδειξη γίνεται με διπλή απαγωγή σε άτοπο: οι υποθέσεις $OT > PR$ και $OT < PR$ οδηγούν σε άτοπο.



Σχήμα 1.15:

Οι τελευταίες οκτώ προτάσεις της μελέτης αφορούν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών. Για παράδειγμα, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι το εμβαδόν του χωρίου S το οποίο ορίζεται από μία πλήρη περιστροφή της σπείρας και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχική με την τελική του θέση ισούται με το ένα τρίτο του εμβαδού του κύκλου C που έχει κέντρο το αρχικό σημείο και περνάει από το τελικό σημείο. Δηλαδή,

$$(1.3.26) \quad \alpha(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi\kappa)^2.$$



Σχήμα 1.16:

Η απόδειξη της (1.3.26) χρησιμοποιεί τους γνωστούς σήμερα τύπους για το άθροισμα των όρων μιας αριθμητικής προόδου και των τετραγώνων τους:

$$(1.3.27) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

και

$$(1.3.28) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1).$$

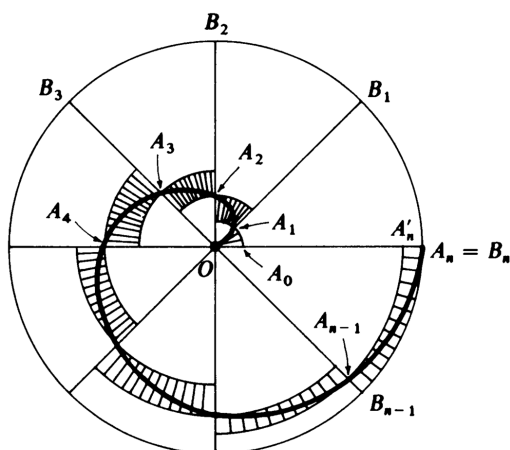
Γράφοντας την (1.3.28) στη μορφή

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

βλέπουμε ότι

$$(1.3.29) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

και αυτή η διπλή ανισότητα είναι ακριβώς η ανισότητα που χρειαζόταν ο Αρχιμήδης.



Σχήμα 1.17:

Η γεωμετρική κατασκευή του Αρχιμήδη για την απόδειξη της (1.3.26) μοιάζει πολύ με αυτό που θα κάναμε σήμερα για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του S με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Χωρίζουμε τον κύκλο σε n ίσα τόξα με τα σημεία B_i και συμβολίζουμε με A_i το σημείο στο οποίο η OB_i τέμνει τη σπείρα. Αν θέσουμε $b = OA_1$ τότε

$$OA_1 = b, \quad OA_2 = 2b, \quad \dots, \quad OA_n = nb.$$

Συνεπώς, το χωρίο S περιέχει ένα χωρίο P που αποτελείται από κυκλικούς τομείς με ακτίνες

$$0, b, \dots, (n-1)b$$

και περιέχεται σε ένα χωρίο που αποτελείται από κυκλικούς τομείς με ακτίνες

$$b, 2b, \dots, nb.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαφορά εμβαδών $\alpha(Q) - \alpha(P)$ ισούται με το εμβαδόν ενός μόνο κυκλικού τομέα του κύκλου C , και αυτή η ποσότητα μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή αν επιλέξουμε το n αρκετά μεγάλο.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε διπλή απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτοντας ότι $\alpha(S) < \frac{1}{3}\alpha(C)$, επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε

$$\alpha(Q) - \alpha(P) < \frac{1}{3}\alpha(C) - \alpha(S).$$

Αυτό μας δίνει

$$\alpha(Q) < \frac{1}{3}\alpha(C).$$

Όμως, αφού ο λόγος των εμβαδών όμοιων κυκλικών τομέων ισούται με το λόγο των τετρώδων των ακτίνων τους, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(Q)}{\alpha(C)} &= \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + (nb)^2}{n(nb)^2} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3},\end{aligned}$$

από την (1.3.29). Αυτό είναι άτοπο, άρα

$$\alpha(S) \geq \frac{1}{3}\alpha(C).$$

Υποθέτοντας τώρα ότι $\alpha(S) > \frac{1}{3}\alpha(C)$, επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε

$$\alpha(Q) - \alpha(P) < \alpha(S) - \frac{1}{3}\alpha(C).$$

Αυτό μας δίνει

$$\alpha(P) > \frac{1}{3}\alpha(C).$$

Όμως, όπως πριν βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(P)}{\alpha(C)} &= \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + ((n-1)b)^2}{n(nb)^2} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3},\end{aligned}$$

από την (1.3.29). Αυτό είναι άτοπο, άρα

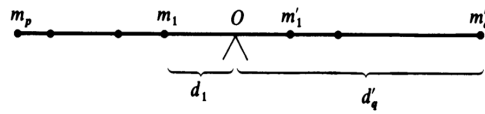
$$\alpha(S) \leq \frac{1}{3}\alpha(C).$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη.

1.3η' Η μηχανική μέθοδος

Όλες σχεδόν οι σύγχρονες μεταφράσεις των έργων του Αρχιμήδη προέρχονται από ένα Ελληνικό χειρόγραφο το οποίο αντιγράφηκε από ένα γνήσιο παλιότερο στην Κωνσταντινούπολη, στον 9ο ή τον 10ο αιώνα, στη συνέχεια μεταφράστηκε στα Λατινικά στον 13ο αιώνα, και τελικά εξαφανίστηκε στον 16ο αιώνα. Η μόνη εξαίρεση είναι το έργο του *Μέθοδος*, το οποίο ανακαλύφτηκε τυχαία σε ένα παλίμψηστο στην Κωνσταντινούπολη το 1906 ενώ είχε χαθεί. Σε αυτό το έργο ο Αρχιμήδης είχε περιγράψει τη μέθοδο με την οποία είχε ανακαλύψει τα αποτελέσματά του.

Στον πρόλογο, πρώτα διατυπώνει μερικά νέα θεωρήματα, και κατόπιν προσθέτει την πρόθεσή του να «εξηγήσει λεπτομερώς στο ίδιο βιβλίο την ιδιαιτερότητα κάποιας μεθόδου» στην οποία αποδίδει πολλά την ανακάλυψη πολλών από τα αποτελέσματά του που προηγήθηκε από τις αυστηρές τους αποδείξεις με τη μέθοδο της εξάντλησης ή της συμπίεσης.



Σχήμα 1.18:

Η «μηχανική μέθοδος» του Αρχιμήδη, όπως ο ίδιος την αποκαλεί, βασίζεται στο νόμο του μοχλού, σύμφωνα με τον οποίο ένα πεπερασμένο σύστημα σημειακών μαζών m_1, \dots, m_p που είναι τοποθετημένες σε αποστάσεις d_1, \dots, d_p από το υπομόχλιο, στη μία πλευρά αβαρούς μοχλού, ισορροπεί με ένα άλλο σημειακών μαζών m'_1, \dots, m'_q που είναι τοποθετημένες στην άλλη πλευρά σε αποστάσεις d'_1, \dots, d'_q (βλέπε σχήμα) αν ικανοποιείται η

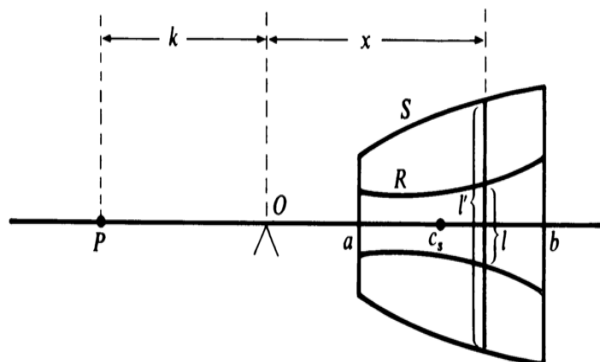
$$(1.3.30) \quad \sum_{i=1}^p m_i d_i = \sum_{j=1}^q m'_j d'_j.$$

Ο Αρχιμήδης είχε γράψει ένα παλιότερο έργο το οποίο ήταν αφιερωμένο σε γεωμετρικές εφαρμογές και γενικεύσεις του νόμου του μοχλού. Σε αυτό το έργο είχε αποδείξει ότι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου (το σημείο γύρω από το οποίο ισορροπεί) είναι το σημείο τομής των διαμέσων του. Είναι επίσης πολύ γνωστό από τη στοιχειώδη γεωμετρία ότι αυτό το σημείο χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο μέρη που τα μήκη τους έχουν λόγο 2 : 1.

Η μηχανική μέθοδος για τον υπολογισμό εμβαδών ή όγκων μπορεί να περιγραφεί με απλά λόγια ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι R και S είναι δύο κυρτά χωρία τα οποία έχουν την ίδια προβολή στον οριζόντιο άξονα L (βλέπε σχήμα). Γνωρίζουμε το εμβαδόν $\alpha(S)$ και το κέντρο βάρους c_S του S και θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν $\alpha(R)$ του R .

Βλέπουμε τα δύο χωρία σαν δύο επίπεδες πλάκες μοναδιαίας πυκνότητας, καθεμία από τις οποίες αποτελείται από πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων - ευθυγράμμων τμημάτων ή λωρίδων πολύ μικρού πλάτους - κάθετων στην L , και σκεφτόμαστε την L σαν μοχλό με υπομόχλιο το O . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια σταθερά κ τέτοια ώστε, για κάθε κατακόρυφη ευθεία σε απόσταση x από το O , η οποία τέμνει τα χωρία R και S σε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη l και l' αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(1.3.31) \quad \kappa \cdot l = x \cdot l'.$$



Σχήμα 1.19:

Τότε, ο νόμος του μοχλού συνεπάγεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα l , τοποθετημένο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση κ από το O , ισορροπεί το ευθύγραμμο τμήμα l' εκεί που βρίσκεται. Συνέπεια αυτού φαίνεται να είναι ότι, αν το χωρίο R τοποθετηθεί έτσι ώστε να έχει κέντρο βάρους το P , τότε θα ισορροπήσει το χωρίο S στη θέση που βρίσκεται, δηλαδή

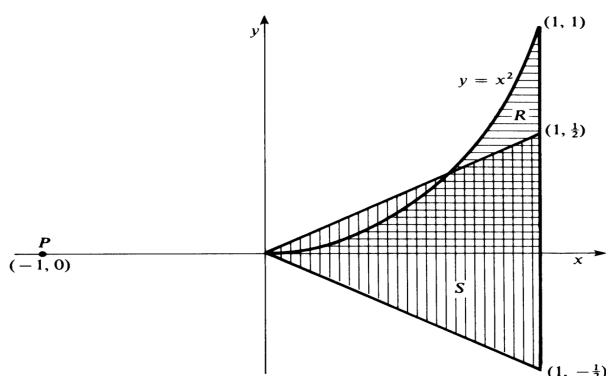
$$(1.3.32) \quad \alpha(R) \cdot \kappa = \alpha(S) \cdot \bar{x}_S,$$

όπου \bar{x}_S είναι η απόσταση από το O προς το κέντρο βάρους του S (κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε χωρίο δρα σαν μια σημειακή μάζα τοποθετημένη στο κέντρο βάρους του). Αφού τα κ , $\alpha(S)$ και \bar{x}_S υποτίθενται γνωστά, μπορούμε να λύσουμε την (1.3.32) ως προς $\alpha(R)$. Αντίστροφα, αν γνωρίζαμε τα $\alpha(R)$, $\alpha(S)$ και κ εκ των προτέρων, τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε την (1.3.32) για να βρούμε το κέντρο βάρους του S .

Σαν πρώτο παράδειγμα, ας πάρουμε σαν R ο χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$, τον x -άξονα, και την κατακόρυφη ευθεία $x = 1$ (βλέπε σχήμα). Έστω S το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$ και $(1, -\frac{1}{2})$, το οποίο έχει εμβαδόν $\alpha(S) = \frac{1}{2}$ και κέντρο βάρους το σημείο $(\frac{2}{3}, 0)$. Τότε, $l = x^2$ και $l' = x$, οπότε μπορούμε να πάρουμε $\kappa = 1$ στην (1.3.31), διότι $1 \cdot x^2 = x \cdot x$. Τότε, η (1.3.32) δίνει

$$\alpha(R) = \alpha(S) \cdot \bar{x}_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Αυτός ο υπολογισμός είναι παρόμοιος (αν και όχι ακριβώς ο ίδιος) με αυτόν που έκανε ο Αρχιμήδης για να διερευνήσει «μηχανικά» το πρόβλημα του εμβαδού ενός τμήματος παραβολής.



Σχήμα 1.20:

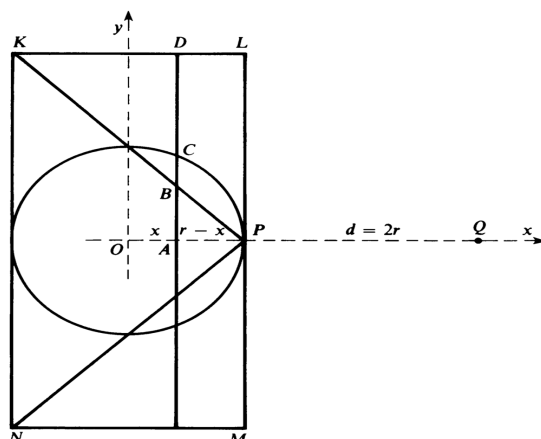
Ο Αρχιμήδης παρατηρεί ότι αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να υποκαταστήσει την απόδειξη αλλά δίνει πολύ ισχυρές ενδείξεις για το γεγονός ότι το συμπέρασμα ισχύει. Ο λόγος για τον οποίο αυτό το επιχείρημα δεν είναι αυστηρό είναι ότι ένα επίπεδο χωρίο δεν συντίθεται από πεπερασμένα το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα αλλά εφαρμόζουμε το νόμο του μοχλού, ο οποίος διατυπώνεται για πεπερασμένες οικγένειες σημειακών μαζών. Όμως αυτό που λείπει, η απόδειξη του ότι η (1.3.32) είναι συνέπεια της (1.3.31), επαληθεύεται εύκολα αν έχουμε στη διάθεσή μας το ολοκλήρωμα. Αν γράψουμε $l = w_R(x)$ και $l' = w_S(x)$ για το «πλάτος» των R και S αντίστοιχα πάνω από το x , τότε

$$\alpha(R) = \int_a^b w_R(x) dx, \quad \alpha(S) = \int_a^b w_S(x) dx, \quad \bar{x}_S = \frac{1}{\alpha(S)} \int_a^b x w_S(x) dx,$$

άρα είναι φανερό ότι η (1.3.32) προκύπτει από την (1.3.31).

Αν τα R και S είναι στερεά, τότε τα πλάτη της προηγούμενης συζήτησης αντικαθίστανται από τα εμβαδά των τομών των R και S με το επίπεδο που είναι κάθετο στην L στο x . Σαν παράδειγμα, δίνουμε τη μηχανική απόδειξη του αγαπημένου αποτελέσματος του Αρχιμήδη, του τύπου για τον όγκο της σφαίρας.

Ξεκινώντας από τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ που τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $P = (r, 0)$, θεωρούμε το ορθογώνιο $KLMN$ που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O και έχει βάση $d = 2r$ και ύψος $2d$, καθώς και το τρίγωνο KNP (βλέπε σχήμα). Περιστρέφοντας αυτά τα τρία σχήματα γύρω από τον x -άξονα, παίρνουμε μια σφαίρα S , έναν κώνο C και έναν κύλινδρο Z . εωρούμε ότι αυτά τα τρία στερεά «αποτελούνται» από κυκλικούς δίσκους κάθετους στον x -άξονα. Για παράδειγμα, το επίπεδο που είναι κάθετο στον x -άξονα στο σημείο $A(x, 0)$ τέμνει τη σφαίρα S σε έναν κύκλο S_x ακτίνας $AC = y = \sqrt{r^2 - x^2}$, τον κώνο C σε έναν κύκλο C_x ακτίνας $AB = r - x$, και τον κύλινδρο Z σε έναν κύκλο Z_x ακτίνας $AD = d$.



Σχήμα 1.21:

Τώρα,

$$\begin{aligned} d[\alpha(S_x) + \alpha(C_x)] &= \pi d [y^2 + (r-x)^2] = \pi d [(r^2 - x^2) + (r^2 - 2rx + x^2)] \\ &= \pi d (2r^2 - 2rx) = \pi d^2 (r-x), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(1.3.33) \quad d [\alpha(S_x) + \alpha(C_x)] = (r-x)\alpha(Z_x).$$

Έπεται ότι, αν οι κύκλοι S_x και C_x τοποθετηθούν στο σημείο $Q(3r, 0)$, σε απόσταση d δεξιά από το P , τότε οι δύο μαζί θα ισορροπήσουν τον κύκλο Z_x εκεί όπου βρίσκεται, αν θεωρήσουμε τον x -άξονα σαν μοχλό με υπομόχλιο το P . Συνεπώς, αν η σφαίρα S και ο κώνος C τοποθετηθούν με τα κέντρα βάρους τους στο Q , θα ισορροπήσουν τον κύλινδρο Z εκεί που βρίσκεται. Λόγω συμμετρίας, το κέντρο βάρους του Z είναι στην αρχή των αξόνων O , άρα ο νόμος του μοχλού δίνει

$$(1.3.34) \quad 2r [v(S) + v(C)] = r v(Z).$$

Αντικαθιστώντας τους γνωστούς όγκους $v(X) = \frac{1}{3}\pi d^2$ και $v(Z) = \pi d^3$ στην (1.3.33), βλέπουμε ότι

$$v(S) = \frac{1}{6}\pi d^2 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ο Αρχιμήδης σημειώνει ότι αυτός ήταν ο τρόπος με τον οποίο αρχικά βρήκε τον όγκο της σφαίρας, και από αυτόν βρήκε, όπως περιγράψαμε, το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας.

1.3θ' Ο Αρχιμήδης και ο απειροστικός λογισμός

Είδαμε ότι ο Αρχιμήδης έλυσε πολλά από τα προβλήματα που σήμερα κοσμούν ένα μάθημα απειροστικού λογισμού. Ειδικότερα, οι λύσεις του μπορούν να θεωρηθούν υπολογισμοί ορισμένων ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_c^d (ax + bx^2) dx.$$

Με αυτή την οπτική, πολλοί θεωρούν ότι ο Αρχιμήδης ανακάλυψε τον ολοκληρωτικό λογισμό.

Παρόλο που το έργο του Αρχιμήδη οδήγησε τελικά (στον 17ο αιώνα) στη γέννηση του απειροστικού λογισμού, υπάρχουν τρία σημαντικά συστατικά του απειροστικού λογισμού τα οποία λείπουν από τις μεθόδους του:

- (α) Δεν χρησιμοποιεί όρια, τουλάχιστον στις αυστηρές αποδείξεις του. Λόγω του «φόβου του απείρου» και επιζητώντας την αυστηρότητα, χρησιμοποιεί τα πιο κοπιαστικά επιχειρήματα διπλής απαγωγής σε άτοπο.
- (β) Δεν έχει αναπτύξει έναν γενικό υπολογιστικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Ξεκινάει κάθε φορά ατο μηδέν και βασίζει τη λύση κάθε προβλήματος σε κάποια αυφυή κατασκευή που υπαγορεύεται από τα ειδικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου προβλήματος, χωρίς να εκμεταλλεύεται προηγούμενες λύσεις του για παρόμοια προβλήματα.
- (γ) Δεν έχει αναγνωρίσει την αντίστροφη σχέση μεταξύ προβλημάτων εμβαδών και εφαπτόμενων. Γενικότερα, για τους Έλληνες γεωμέτρους, η εφαπτόμενη είναι απλώς μια ευθεία που «αγγίζει» μια καμπύλη και δεν έχει γίνει αντιληπτή η σχέση της με το «ρυθμό μεταβολής».

Σε κάθε περίπτωση, το έργο του Αρχιμήδη είναι ένα μνημείο γνησιότητας και ακρίβειας. Τα αποτελέσματα που απέδειξε με τα μαθηματικά εργαλεία που είχε στη διάθεσή του είναι ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα στην ιστορία των Μαθηματικών.

1.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν $a : b = c : d$ τότε $a : c = b : d$. [Υπόδειξη. Πρώτα δείξτε ότι αν $a : b = c : d$ τότε $na : nb = mc : md$ για οποιουδήποτε φυσικούς m και n . Στη συνέχεια, δείξτε ότι αν $na > mc$ ή $na = mc$ ή $na < mc$ τότε $nb > md$ ή $nb = md$ ή $nb < md$ αντίστοιχα.]

2. Αποδείξτε ότι για κάθε κύκλο C και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κανονικό πολύγωνο Q περιγεγραμμένο στον C , τέτοιο ώστε $\alpha(Q) < \alpha(C) + \epsilon$.

3. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν A_n και η περίμετρος S_n ενός κανονικού n -γώνου που εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας r δίνονται από τις

$$A_n = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{και} \quad S_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}.$$

Παίρνοντας το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{S_n}$ αποδείξτε ότι $\alpha(C) = \frac{1}{2}rS(C)$.

4. Για τα A_n και S_n της προηγούμενης άσκησης και τα r_n, s_n του Σχήματος 1.2, γράψτε

$$A_n = \frac{1}{2}nr_n s_n \quad \text{και} \quad S_n = ns_n.$$

Αποδείξτε ότι $\alpha(C) = \frac{1}{2}rS(C)$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, παίρνοντας το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{S_n}$. Χρειάζεται να θεωρήσετε κάτι «προφανές»;

5. Από τη στοιχειώδη γεωμετρία του κανονικού εξαγώνου γνωρίζουμε ότι $s_6 = 1$ και $t_6 = 1/\sqrt{3}$. Υπολογίστε τα $s_{12}, s_{24}, s_{48}, s_{96}$ και $t_{12}, t_{24}, t_{48}, t_{96}$ αναδρομικά (χρησιμοποιήστε υπολογιστή αν θέλετε) και ελέγξτε ότι

$$s_{96} = 0.065438 \quad \text{και} \quad t_{96} = 0.032737.$$

Από την $48s_{96} < \pi < 96t_{96}$ συμπεράνατε ότι

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\pi = 3.14$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

6. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι η πλευρά κανονικού δεκαγώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, υπολογίστε αναδρομικά τα s_{640} και t_{640} , και συμπεράνατε ότι $\pi = 3.1416$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

7. Έστω p_n και P_n οι περιμέτροι του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού n -γώνου στο μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}} \quad \text{και} \quad P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}.$$

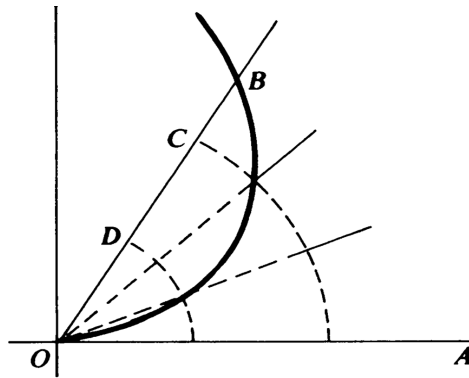
Ξεκινώντας από τις $p_4 = 4\sqrt{2}$ και $P_4 = 8$, και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις, υπολογίστε τα p_{64} και P_{64} . Ποιά είναι τα φράγματα που προκύπτουν για τον π ;

8. Έστω a_n και A_n τα εμβαδά του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού n -γώνου στο μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$a_{2n} = \sqrt{a_n A_n} \quad \text{και} \quad A_{2n} = \frac{2a_n A_n}{a_{2n} + A_n}.$$

9. Χρησιμοποιώντας παραλληλόγραμμο ταχυτήτων επαληθεύστε την κατασκευή του Αρχιμήδη για την εφαπτόμενη της σπείρας στην περίπτωση που το P είναι το σημείο $(0, \kappa\pi/2)$ στον y -άξονα. Σε αυτό το σημείο το P έχει κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ίση με v και οριζόντια συνιστώσα ίση με $\omega\kappa\pi/2$ (εξηγήστε γιατί).

10. Χρησιμοποιώντας τη σπείρα του Αρχιμήδη εξηγήστε πώς μπορούμε να τριχοτομήσουμε τυχούσα γωνία, δεδομένου ότι μπορούμε εύκολα να τριχοτομήσουμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα (βλέπε σχήμα).



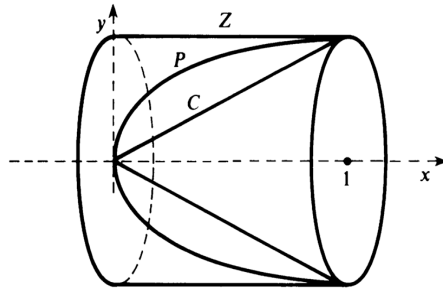
Σχήμα 1.22:

11. Χρησιμοποιώντας τη μηχανική μέθοδο αποδείξτε τον τύπο

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h \left(\frac{3r-h}{2r-h} \right)$$

για τον όγκο του μικρότερου σφαιρικού τμήματος που αποκόπτεται από το επίπεδο $x = a$ (όπου $0 < a < r$), έχει ακτίνα βάσης $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$ και ύψος $h = r - a$. Χρησιμοποιήστε τα τμήματα του κώνου και του κυλίνδρου που αποκόπτονται από το ίδιο επίπεδο.

12. Έστω P το τμήμα του παραβολοειδούς που προκύπτει αν περιστρέψουμε την παραβολή $y^2 = x$, $0 \leq x \leq 1$, ως προς τον x -άξονα. Χρησιμοποιώντας τη μηχανική μέθοδο, αποδείξτε ότι ο όγκος του P είναι ίσος με το μισό του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου Z (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 1.23:

Κεφάλαιο 2

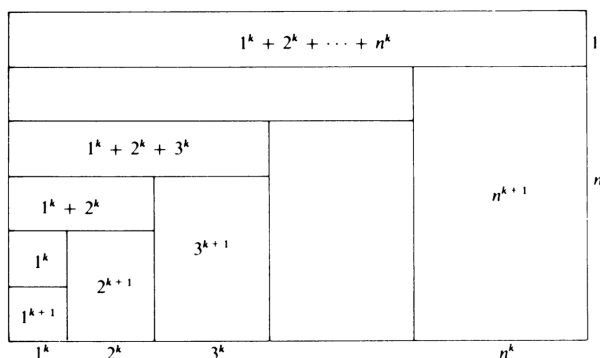
Άπειρες διαδικασίες στο Μεσαίωνα

Σε αυτό το σύντομο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε κάποια μεμονωμένα «μαθηματικά στιγμιότυπα» από τους μεσαιωνικούς χρόνους, τα οποία συνέβησαν σε διάφορους τόπους και διάφορες χρονικές περιόδους. Ασχολούμαστε με αυτά γιατί έχουν μεγάλη σημασία για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων, τα οποία συνιστούν το κύριο μέρος αυτού του μαθήματος.

2.1 Το επιχείρημα του Al-Haitham

Ο Al-Haitham (965-1039), γνωστός στη Δύση και ως Alhazen, έγραψε μια σημαντική μελέτη με θέμα τη γεωμετρική οπτική και επεξέτεινε κάποια αποτελέσματα του Αρχιμήδη σχετικά με υπολογισμούς όγκων. Για παράδειγμα, απέδειξε ότι αν ένα τμήμα παραβολής περιστραφεί γύρω από τη βάση του (και όχι γύρω από τον άξονά του - πρόβλημα που είχε μελετήσει ο Αρχιμήδης) τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει ισούται με τα $8/15$ του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου. Αυτός ο υπολογισμός απαιτούσε την εύρεση τύπου για το άθροισμα των πρώτων n κύβων και τετάρτων δυνάμεων, ενώ ο Αρχιμήδης γνώριζε και χρησιμοποιούσε μόνο τον τύπο για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών και τον αντίστοιχο τύπο για το άθροισμα των τετραγώνων τους.

Το παρακάτω σχήμα περιγράφει την ευφυή γεωμετρική απόδειξη αυτών των τύπων, οι οποίοι επρόκειτο να παίξουν σημαντικό και διαρκή ρόλο στην εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού.



Σχήμα 2.1:

Από το σχήμα, με λίγη σκέψη, βλέπουμε ότι ισχύει η σχέση

$$(2.1.1) \quad (n+1) \sum_{i=1}^n i^k = \sum_{i=1}^n i^{k+1} + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^k \right).$$

Θέτοντας $k=1$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

παίρνουμε από την (2.1.1) τον τύπο

$$(2.1.2) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Θέτοντας $k=2$ και χρησιμοποιώντας την (2.1.2), παίρνουμε από την (2.1.1) τον τύπο

$$(2.1.3) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Θέτοντας $k=3$ και χρησιμοποιώντας την (2.1.3), παίρνουμε από την (2.1.1) τον τύπο

$$(2.1.4) \quad 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ταυτότητες παίρνουμε

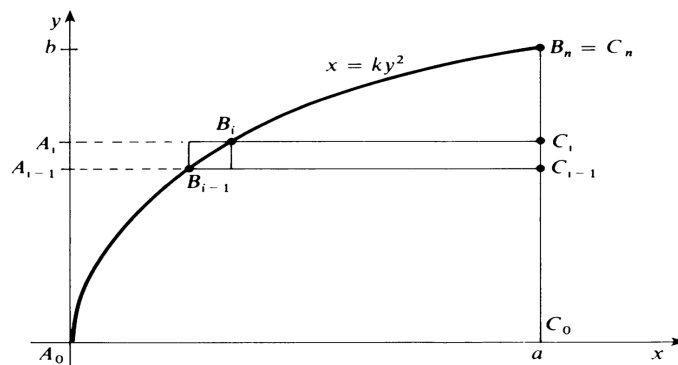
$$(2.1.5) \quad \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2)^2 = n^5 - 2n^2 \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{8}{15}n^5 - \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{30}n.$$

Προσθέτοντας n^4 στα δύο μέλη της (2.1.5) βλέπουμε ότι

$$(2.1.6) \quad \sum_{i=0}^{n-1} (n^2 - i^2)^2 = \frac{8}{15}n^5 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{30}n.$$

Η γεωμετρική εφαρμογή που είχε στο νού του ο Al-Haitham ήταν η ακόλουθη. Θεωρούμε το τμήμα $A_0C_0C_n$ της παραβολής $x = \kappa y^2$, πάνω από το διάστημα $[0, a]$ στον x -άξονα

(βλέπε σχήμα) και το περιστρέφουμε γύρω από την C_0C_n , οπότε προκύπτει ένα στερεό εκ περιστροφής S . Συμβολίζουμε με Z τον περιγεγραμμένο κύλινδρο ακτίνας a και ύψους b , όπου $a = \kappa b^2$.



Σχήμα 2.2:

Θεωρούμε τα σημεία A_1, \dots, A_{n-1} τα οποία χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα $[0, b]$ του y -άξονα σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = b/n$. Συμβολίζουμε με B_1, \dots, B_{n-1} και C_1, \dots, C_{n-1} τα αντίστοιχα σημεία στην παραβολή και στο C_0C_n αντίστοιχα. Τέλος, συμβολίζουμε με P την ένωση των κυλίνδρων με ακτίνα B_iC_i και ύψος $C_{i-1}C_i$, και με Q την ένωση των κυλίνδρων με ακτίνα $B_{i-1}C_{i-1}$ και ύψος $C_{i-1}C_i$, $i = 1, \dots, n$. Τότε,

$$P \subset S \subset Q.$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\text{Vol}(P) = \sum_{i=1}^n \pi \kappa^2 h^5 (n^2 - i^2)^2$$

και

$$\text{Vol}(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \kappa^2 h^5 (n^2 - i^2)^2.$$

Εφαρμόζοντας τις (2.1.5) και (2.1.6) βλέπουμε ότι

$$\text{Vol}(P) < \frac{8}{15} \text{Vol}(Z) < \text{Vol}(Q).$$

Τώρα, με διπλή απαγωγή σε άτοπο, μπορούμε χωρίς δυσκολία να δείξουμε ότι

$$\text{Vol}(S) = \frac{8}{15} \text{Vol}(Z).$$

2.2 Η σχολή μαθηματικών της Kerala

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε το ανάπτυγμα της $\frac{1}{1+x}$ σε δυναμοσειρά, το οποίο εμφανίζεται σε βιβλίο του Ινδού μαθηματικού Jyesthadeva της σχολής μαθηματικών της Kerala, γύρω στο 1500 (άλλοι υποστηρίζουν ότι οφείλεται στον Nilakantha, της ίδιας σχολής). Το ανάπτυγμα

αυτό χρησιμοποιήθηκε για να δοθούν προσεγγίσεις του π . Μάλιστα, όπως θα δούμε, οι προσεγγίσεις προκύπτουν από την αναπαράσταση του π μέσω της σειράς

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

η οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά σε αυτό το χρονικό σημείο.

Ο Jyesthadena ξεκινούσε από την ταυτότητα

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x \left(\frac{1}{1+x} \right).$$

Κατόπιν, επαναλάμβανε τον ίδιο συλλογισμό, γράφοντας

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x \left(1 - x \left(\frac{1}{1+x} \right) \right) = 1 - x + x^2 \left(\frac{1}{1+x} \right).$$

Μία ακόμα επανάληψη μας δίνει την

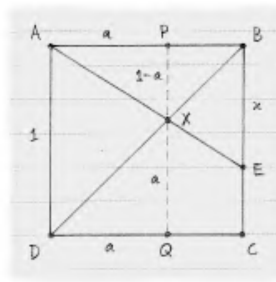
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \left(\frac{1}{1+x} \right),$$

και συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε στην

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

υποθέτοντας σιωπηρά ότι αν το x είναι μικρό και το n είναι μεγάλο τότε το υπόλοιπο $x^n \left(\frac{1}{1+x} \right)$ που θα προκύψει στο n -οστό βήμα γίνεται οσοδήποτε μικρό.

Το γεωμετρικό επιχείρημα που ακολουθεί υποστηρίζει την υπόθεση ότι ο παραπάνω υπολογισμός δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Ας υποθέσουμε ότι $0 < x < 1$. Στο παρακάτω σχήμα, το τετράγωνο $ABCD$ έχει πλευρές μήκους 1. Παίρνουμε το σημείο E στην BC έτσι ώστε $BE = x$. Συμβολίζουμε με X το σημείο τομής των BD και AE .



Σχήμα 2.3:

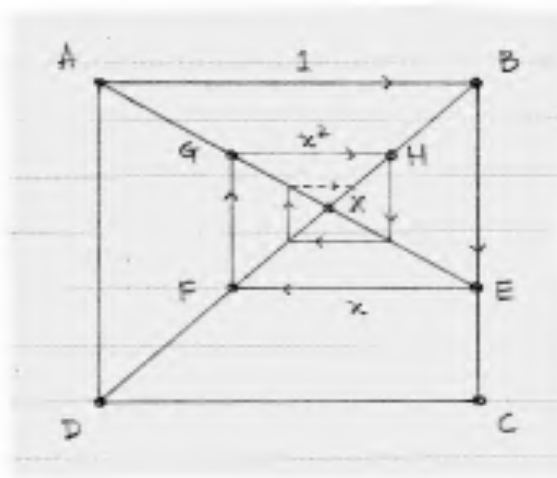
Για να δούμε καλύτερα τη θέση αυτού του σημείου, θεωρούμε την κατακόρυφη PQ που διέρχεται από το X και θέτουμε $a = DQ = QX = AP$. Από τα όμοια τρίγωνα APX και ABE παίρνουμε

$$\frac{AP}{PX} = \frac{AB}{BE} \implies \frac{a}{1-a} = \frac{1}{x},$$

άρα

$$a = \frac{1}{1+x}.$$

Έτσι, το σημείο X είναι αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο στο σχήμα, γιατί η θέση του δίνει το δεξιό μέλος της (2.2.1), που είναι η ισότητα που μελετάμε. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, φανταζόμαστε το σημείο X σαν το στόχο ενός ταξιδιού, όπου ξεκινάμε από το A , αρχικά πηγαίνουμε στο B , και μετά στο E , και μετά κάνουμε άλλη μια στροφή για να φτάσουμε στο σημείο F της BD . Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, στρίβοντας δεξιά κάθε φορά που συναντάμε τις AE και BD , θα πλησιάζουμε όλο και περισσότερο προς το X .



Σχήμα 2.4:

Η επόμενη στροφή μας φέρνει στο σημείο G . Τα τρίγωνα ABE και EFG είναι όμοια, άρα ο λόγος του GF προς το FE πρέπει να είναι ίσος με x . Αυτό σημαίνει ότι το FG έχει μήκος x^2 . Όμως, η BD είναι διαγώνιος του τετραγώνου, άρα η απόσταση του G από το H είναι κι αυτή ίση με x^2 .

Ας αγνοήσουμε προς στιγμήν την κατακόρυφη μετατόπισή μας και ας υπολογίσουμε την οριζόντια. Διανύσαμε απόσταση ίση με 1 προς τα δεξιά (πηγαίνοντας από το A στο B), κατόπιν απόσταση ίση με x προς τα αριστερά (πηγαίνοντας από το E στο F), και μετά απόσταση ίση με x^2 προς τα δεξιά (πηγαίνοντας από το G στο H). Η οριζόντια μετατόπισή μας είναι λοιπόν ίση με

$$1 - x + x^2$$

όταν φτάνουμε στο H . Μετά από n βήματα αυτή η μετατόπιση θα είναι

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n,$$

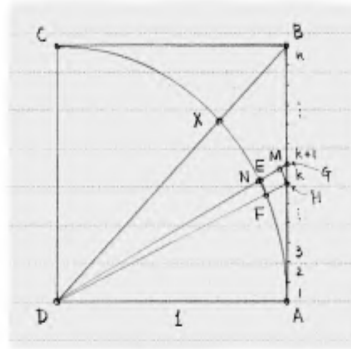
και καθώς προσεγγίζουμε το σημείο X (σε άπειρα βήματα) είναι λογικό να πιστέψουμε ότι

$$(2.2.2) \quad \frac{1}{1+x} = a = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Το ανάπτυγμα της $\frac{1}{1+x}$ σε δυναμοσειρά παίζει βασικό ρόλο σε ένα πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα του Jyesthadeva (ή του Nilakantha): την αναπαράσταση του π μέσω της σειράς

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Θεωρούμε το τεταρτοκύκλιο AC του παρακάτω σχήματος, το οποίο έχει ακτίνα 1. Αν θεωρήσουμε τη διχοτόμο DB , η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο X , τότε το μήκος του τόξου AX είναι ίσο με $\pi/4$.



Σχήμα 2.5:

Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε n ίσα ευθύγραμμα τμήματα, μήκους $h = 1/n$. Αρχικά κοιτάζουμε το k -οστό τμήμα, μετρώντας από το A . Φέρνοντας τις ευθείες από το A προς τα άκρα αυτού του τμήματος, παίρνουμε τα σημεία E, F στο τόξο AX και τα σημεία G, H στο AB . Έτσι, το τόξο AX έχει διαιρεθεί κι αυτό σε n τόξα, τα οποία δεν έχουν το ίδιο μήκος, αλλά το άθροισμα των μηκών τους είναι ίσο με $\pi/4$.

Στη συνέχεια φέρνουμε τις κάθετες HM και FN στην DG . Οι λεπτομέρειες φαίνονται πιο καθαρά στο παρακάτω σχήμα. Το HM θα χρειαστεί να το υπολογίσουμε, όμως το FN είναι σχεδόν ίσο με το τόξο EF , ειδικά αν θεωρήσουμε το n πολύ μεγάλο. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα DFN και GDA είναι όμοια (είναι ορθογώνια και έχουν μια κοινή γωνία, την G). Συνεπώς,

$$\frac{FN}{DF} = \frac{HM}{DH},$$

και αφού $DF = 1$ συμπεραίνουμε ότι

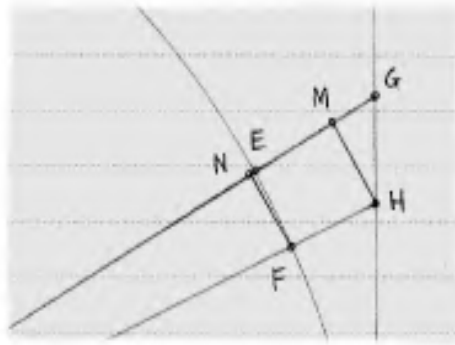
$$(2.2.3) \quad FN = \frac{HM}{DH}.$$

Επίσης,

$$\frac{HM}{HG} = \frac{AD}{DG},$$

και αφού $AD = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$(2.2.4) \quad HM = \frac{HG}{DG}.$$



Σχήμα 2.6:

Αντικαθιστώντας την (2.2.4) στην (2.2.3) παίρνουμε

$$FN = \frac{HG}{DG \cdot DH}.$$

Τα μήκη DG και DH διαφέρουν πολύ λίγο, και η διαφορά τους τείνει στο 0 όταν το n είναι πολύ μεγάλο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε προσεγγιστικά

$$FN \simeq \frac{HG}{(DG)^2} = \frac{HG}{1 + (AG)^2},$$

χρησιμοποιώντας και το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τελευταίο βήμα. Τέλος, αφού το AG αποτελείται από k διαστήματα μήκους $HG = h$, παίρνουμε

$$(2.2.5) \quad FN \simeq \frac{h}{1 + (kh)^2}.$$

Αυτή είναι η προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε για το EF .

Το μήκος του AX είναι $\pi/4$ και τώρα το έχουμε προσεγγίσει ως εξής:

$$(2.2.6) \quad \frac{\pi}{4} \simeq \sum_{k=1}^n \frac{h}{1 + (kh)^2}.$$

Η προσέγγιση δε αυτή γίνεται όλο και καλύτερη καθώς το n μεγαλώνει. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε την (2.2.2). Δεδομένου ότι το kh είναι το μήκος του AG και $AB = 1$, έχουμε

$0 < kh < 1$, άρα και $0 < (kh)^2 < 1$. Μπορούμε λοιπόν να ράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\simeq \sum_{k=1}^n h \frac{1}{1 + (kh)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n h(1 - (kh)^2 + (kh)^4 - (kh)^6 + (kh)^8 - \dots) \\ &= h \left[1 - 1^2 h^2 + 1^4 h^4 - 1^6 h^6 + 1^8 h^8 - \dots \right. \\ &\quad + 1 - 2^2 h^2 + 2^4 h^4 - 2^6 h^6 + 2^8 h^8 - \dots \\ &\quad + 1 - 3^2 h^2 + 3^4 h^4 - 3^6 h^6 + 3^8 h^8 - \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. + 1 - n^2 h^2 + n^4 h^4 - n^6 h^6 + n^8 h^8 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις στήλες παίρνουμε

$$\begin{aligned} (2.2.7) \quad &h \left[n - h^2 \sum_{k=1}^n k^2 + h^4 \sum_{k=1}^n k^4 - h^6 \sum_{k=1}^n k^6 + h^8 \sum_{k=1}^n k^8 - \dots \right] \\ &hn - h^3 \sum_{k=1}^n k^2 + h^5 \sum_{k=1}^n k^4 - h^7 \sum_{k=1}^n k^6 + h^9 \sum_{k=1}^n k^8 - \dots \\ &1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 - \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n k^6 + \frac{1}{n^9} \sum_{k=1}^n k^8 - \dots \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας τα αποτελέσματα του Al-Haitha, ο Jyesthadeva (ή ο Nilakantha) αντικατέστησε τα αθροίσματα με τις προσεγγίσεις τους. Αυτό μας δίνει αρχικά

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \\ &+ \frac{1}{n^5} \left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \right) \\ &- \frac{1}{n^7} \left(\frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^3}{6} - \frac{n}{42} \right) + \dots \end{aligned}$$

και, διαγράφοντας τους όρους χαμηλότερου βαθμού, την εντυπωσιακή σχέση

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

2.3 Ο κανόνας του Merton

Η έννοια της συνεχούς μεταβολής ποσοτήτων δεν είχε παίξει ρόλο στα μαθηματικά των Ελλήνων. Οι ποσότητες που μελετούσαν ήταν είτε αριθμητικές και διακριτές ή γεωμετρικές και στατικές. Η άλγεβρα που είχαν αναπτύξει αφορούσε σταθερές και όχι μεταβλητές, η δε γεωμετρία τους μελετούσε σταθερά και αμετάβλητα γεωμετρικά σχήματα. Μελετούσαν μόνο

ομοιόμορφες ευθύγραμμες ή κυκλικές κινήσεις και έννοιες όπως η επιτάχυνση ή η στιγμιαία ταχύτητα δεν είχαν κάποιο νόημα γι' αυτούς. Με λίγα λόγια, η Ελληνική επιστήμη δεν συζητούσε φαινόμενα μεταβολής με ποσοτικούς όρους.

Το πρόβλημα του να μελετηθούν με ποσοτικό τρόπο οι μεταβολές μελετήθηκε για πρώτη φορά συστηματικά λίγο πριν το μέσο του 14ου αιώνα από μια ομάδα ακαδημαϊκών στο κολέγιο Merton της Οξφόρδης. Ανάμεσά τους ήταν ο Thomas Bradwardine και ο Richard Swineshead. Σε σχέση με την κίνηση, όρισαν ότι μια κίνηση είναι ομοιόμορφη (ή ομαλή) αν ίσες αποστάσεις διανύονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Όρισαν την ομαλή επιτάχυνση ως αυτήν για την οποία παρατηρούνται ίσες μεταβολές της ταχύτητας σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ακόμα και γι' αυτήν την πολύ απλή μορφή κίνησης χρειάζονταν έναν ορισμό της *στιγματίας ταχύτητας*. Καθώς τους έλειπε κάποιος ορισμός του ορίου των λόγων, μπορούσαν να ορίσουν τη στιγμιαία ταχύτητα μόνο μέσω της απόστασης που θα διήνυε ένα σημείο αν κινούνταν ομοιόμορφα σε μια περίοδο χρόνου με την ίδια (αναζητούμενη) ταχύτητα που είχε τη δεδομένη στιγμή. Αν και κυκλική από τη φύση της, αυτή η διαισθητική αντίληψη για τη στιγμιαία ταχύτητα αρκούσε για να καταλήξουν σε ορθά αποτελέσματα στον 14ο αιώνα, όπως ακριβώς και στις πρώτες περιόδους ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού αλλά και στη σημερινή πρώτη σχολική επαφή με αυτά τα ζητήματα.

Το κεντρικό αποτέλεσμα το οποίο προέκυψε από τις αναζητήσεις τους ήταν ο νόμος του Merton για την ομαλή επιτάχυνση, το θεώρημα της μέσης ταχύτητας:

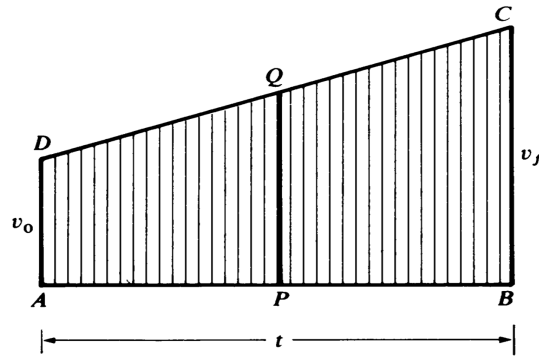
Αν ένα κινητό έχει ομαλή επιτάχυνση σε δοθέν χρονικό διάστημα τότε η συνολική απόσταση s που διανύει είναι ίση με αυτήν που θα διήνυε στο ίδιο χρονικό διάστημα ένα κινητό που θα εκτελούσε ομαλή κίνηση, στο ίδιο χρονικό διάστημα, με ταχύτητα ίση με τον αριθμητικό μέσο της αρχικής ταχύτητας v_0 και της τελικής ταχύτητας v_f (ισοδύναμα, τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσο του χρονικού διαστήματος).

Δηλαδή,

$$(2.3.1) \quad s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t.$$

όπου t είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος. Για τον ισχυρισμό αυτό έδωσαν διάφορες μακροσκελείς και ρητορικές, αλλά πραγματικά ευφυείς, αιτιολογήσεις.

Οι μελέτες του Merton διαδόθηκαν στη Γαλλία και την Ιταλία στα μέσα του 14ου αιώνα. Στο έργο του *Treatise on the Configurations of Qualities and Motions*, γραμμένο γύρω στο 1350, ο Γάλλος Nicole Oresme εισήγαγε τη σημαντική έννοια των γραμμικών παραστάσεων. Ο Oresme συζητάει κυρίως την περίπτωση μιας «γραμμικής» οντότητας, η «επέκταση» της οποίας μπορεί να μετρηθεί με ένα διάστημα (ευθύγραμμο τμήμα) στο χώρο (όπως στην περίπτωση μιας ράβδου μεταβλητής πυκνότητας) ή στο χρόνο (όπως στην περίπτωση ενός κινούμενου σημείου). Προτείνει να μετρηθεί η ένταση αυτής της οντότητας σε κάθε σημείο του διαστήματος αναφοράς με ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα σε εκείνο το σημείο, κατασκευάζοντας έτσι ένα γράφημα που έχει βάση το διάστημα αναφοράς. Ονομάζει το διάστημα αναφοράς *μήκος* και την ένταση *πλάτος*, και λέει ότι θα σχεφτόμαστε την *ποσότητα* της γραμμικής οντότητας μέσω του σχήματος που προκύπτει.



Σχήμα 2.7:

Για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος $[0, t]$ που αντιστοιχεί στο μήκος AB του παρακάτω σχήματος, το πλάτος κάθε σημείου P του AB είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα PQ που έχει μήκος την ταχύτητα στην αντίστοιχη στιγμή, άρα η άνω ακμή CD του σχήματος είναι απλώς ένα γράφημα ταχύτητα-χρόνου. Ο Oresme είδε ότι ο ορισμός της σταθερής επιτάχυνσης συνεπάγεται ότι το CD είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, συνεπώς το σχήμα που προκύπτει είναι ένα τραπέζιο με βάση $AB = t$ και ύψη $AD = v_0$ και $BC = v_f$. Υπέθεσε, χωρίς να δώσει κάποια απόδειξη, ότι το εμβαδόν s αυτού του τραπεζίου ισούται με τη συνολική απόσταση που έχει διανυθεί, ίσως θεωρώντας ότι αυτό το εμβαδόν σχηματίζεται από πολλά κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα ή αδιαίρετα, καθένα από τα οποία αναπαριστά ταχύτητα που διατηρείται σταθερή για ένα πολύ μικρό ή απειροστό χρονικό διάστημα. Όπως κι αν έχουν τα πράγματα, έπεται άμεσα από τον τύπο για το εμβαδόν τραπεζίου ότι

$$(2.3.2) \quad s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t,$$

δηλαδή ο Oresme επαλήθευσε γεωμετρικά τον κανόνα του Merton.

Στο *Treatise on Configurations* ο Oresme εισήγαγε, τουλάχιστον εμμέσως, τέσσερις καινοτόμες ιδέες:

- (α) τη μέτρηση διαφόρων τύπων φυσικών μεταβλητών (όπως η θερμοκρασία, η πυκνότητα, η ταχύτητα) μέσω ευθυγράμμων τμημάτων (και όχι πραγματικών αριθμών).
- (β) κάποια έννοια συναρτησιακής σχέσης μεταξύ μεταβλητών (για παράδειγμα, την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου).
- (γ) μια διαγραμματική ή γραφική αναπαράσταση τέτοιων συναρτησιακών σχέσεων - αυτό μπορεί να ιδωθεί ως ένα βήμα για την εισαγωγή συστήματος συντεταγμένων.
- (δ) μια εννοιολογική διαδικασία «ολοκλήρωσης» ή συνεχούς άθροισης για να υπολογίσει την απόσταση ως το εμβαδόν κάτω από ένα γράφημα ταχύτητα-χρόνου, αν και ο Oresme είχε τα τεχνικά εργαλεία για να ολοκληρώσει το εγχείρημα μόνο στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Όριμες εκδοχές αυτών των ιδεών έπαιζαν κρίσιμο ρόλο στην εξέλιξη του απειροστικού λογισμού κατά τον 17ο αιώνα. Η δουλειά του Oresme και των ακαδημαϊκών του Merton για την κίνηση διαδόθηκαν ευρέως στην Ευρώπη στους επόμενους δύο αιώνες και χωρίς αμφιβολία οδήγησαν στη δουλειά του Γαλιλαίου (που κάποτε θεωρούνταν αυθεντικά δική του) ο οποίος συναρμολόγησε την προηγούμενη γνώση και δημιούργησε μια νέα επιστήμη της Μηχανικής. Για παράδειγμα, στην «Τρίτη Ημέρα» του *Discourses of Two New Sciences* (1638) ο Γαλιλαίος ξεκινάει με μια απόδειξη και ένα συνοδευτικό διάγραμμα που μοιάζουν εντυπωσιακά με αυτά του Oresme, προχωράει στον τύπο $s = at^2/2$ για την απόσταση σε μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση που αρχίζει από την ηρεμία, και από αυτόν αποδεικνύει το νόμο των περιττών αριθμών (βλέπε ασκήσεις).

2.4 Γεωμετρικοί υπολογισμοί αθροισμάτων σειρών

Το θέμα των άπειρων σειρών απασχολούσε τους φιλοσόφους και τους μαθηματικούς στο Μεσαίωνα, αφού σχετιζόταν άμεσα με το ενδιαφέρον τους για το άπειρο αλλά οδηγούσε και σε παράδοξα που προσφέρονταν για ενδιαφέρουσες συζητήσεις. Οι μελέτες των ακαδημαϊκών του Merton οδήγησαν σε διάφορα προβλήματα που αφορούσαν άπειρες σειρές. Για παράδειγμα, ο Swineshead έλυσε ένα πρόβλημα το οποίο, με ορολογία κινηματικής, διατυπώνεται ως εξής:

Αν ένα κινητό κινείται στο πρώτο μισό ενός χρονικού διαστήματος με κάποια σταθερή ταχύτητα, στο επόμενο τέταρτο αυτού του χρονικού διαστήματος με τη διπλάσια ταχύτητα, στο επόμενο όγδοο με ταχύτητα τριπλάσια της αρχικής, και ούτω καθεξής, τότε η μέση ταχύτητά του σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα είναι διπλάσια της αρχικής του ταχύτητας.

Παίρνοντας τόσο το χρονικό διάστημα όσο και την αρχική ταχύτητα ίση με 1, ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την

$$(2.4.1) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = 2.$$

Ο Swineshead έδωσε μια μακροσκελή και περιγραφική απόδειξη της (2.4.1). Ουσιαστικά, επιχειρηματολόγησε λέγοντας ότι το αποτέλεσμα του διπλασιασμού της ταχύτητας στο τελευταίο μισό του χρονικού διαστήματος είναι ισοδύναμο με το να την διπλασιάσουμε στο πρώτο μισό του χρονικού διαστήματος. Το πρόσθετο αποτέλεσμα (έναντι του διπλασιασμού) του τριπλασιασμού της ταχύτητας στο τελευταίο τέταρτο είναι ισοδύναμο με το να διπλασιάζαμε την ταχύτητα στο δεύτερο υποδιάστημα (μηκούς ενός τετάρτου), το πρόσθετο αποτέλεσμα (έναντι του τριπλασιασμού) του τετραπλασιασμού της ταχύτητας στο τελευταίο όγδοο είναι ισοδύναμο με το να διπλασιάζαμε την ταχύτητα στο τρίτο υποδιάστημα (μηκούς ενός ογδούου) και ούτω καθεξής. Άρα, το συνολικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που θα είχαμε αν διπλασιάζαμε την ταχύτητα σε όλα τα χρονικά υποδιαστήματα.

Αυτό το επιχειρήμα λέγεται ότι είναι το πρώτο επιχειρήμα άθροισης άπειρης σειράς που να είναι διαφορετική από γεωμετρική, όπως για παράδειγμα η

$$(2.4.2) \quad 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{4}{3},$$

που είχε χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης για τον τετραγωνισμό της παραβολής.

Σε ένα κείμενο του 1350, ο Oresme υπολόγισε το πιο γενικό άθροισμα

$$(2.4.3) \quad \frac{a}{k} + \frac{a}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{a}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + \cdots = a$$

όπου k είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από 1. Διατύπωσε αυτό το αποτέλεσμα με λόγια, ως εξής:

Αν αφαιρέσουμε κάποιο μέρος (το $1/k$ αυτής) από κάποια ποσότητα (το a) και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε το ίδιο μέρος, και από το δεύτερο υπόλοιπο το ίδιο μέρος, και συνεχίσουμε έτσι επ' άπειρον, η ποσότητα θα καταναλωθεί ακριβώς - ούτε περισσότερο, ούτε λιγότερο - με αυτή τον τρόπο αφαίρεσης.

Η απόδειξη είναι ότι, αφού αφαιρεθεί το πρώτο μέρος, το υπόλοιπο είναι $a \left(1 - \frac{1}{k}\right)$. Όταν αφαιρέσουμε πάλι το $1/k$ αυτού, το δεύτερο υπόλοιπο θα είναι $a \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2$, και ούτω καθεξής. Σε κάθε βήμα το προηγούμενο υπόλοιπο πολλαπλασιάζεται με $1 - 1/k$, άρα το n -οστό υπόλοιπο είναι $a \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{a}{k} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1} \right] + a \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = a.$$

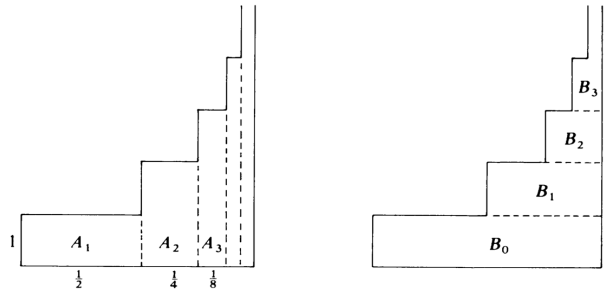
Αφού η ποσότητα $a \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$ τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο, παίρνουμε την (2.4.3).

Στο ίδιο έργο του, ο Oresme αποδεικνύει ότι η αρμονική σειρά

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

αποκλίνει, με την έννοια ότι αν προσθέτουμε τους όρους της έναν προς έναν τότε, όπως λέει, «το όλον θα γίνει άπειρο». Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρατηρεί ότι το άθροισμα των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$ είναι μεγαλύτερο από $\frac{1}{2}$, το ίδιο ισχύει για το άθροισμα των επόμενων τεσσάρων όρων από $\frac{1}{5}$ μέχρι και $\frac{1}{8}$, το ίδιο ισχύει για το άθροισμα των επόμενων οκτώ όρων από $\frac{1}{9}$ μέχρι και $\frac{1}{16}$, και ούτω καθεξής. Αυτό ήταν το πρώτο παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που θα «είχε τη δυνατότητα» να συγκλίνει γιατί οι όροι της τείνουν στο 0.

Στο έργο του *Treatise on Configurations*, ο Oresme έδωσε μια γεωμετρική μέθοδο για να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς (2.4.1). Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο διαφορετικοί τρόποι διαμέρισης του σχήματος που αντιστοιχεί στην κίνηση του Swineshead, με ταχύτητα 1 στο πρώτο μισό του μοναδιαίου χρονικού διαστήματος, ταχύτητα 2 στο επόμενο τέταρτο, ταχύτητα 3 στο επόμενο όγδοο κλπ.



Σχήμα 2.8:

Είναι φανερό ότι $\alpha(A_n) = \frac{n}{2^n}$ και $\alpha(B_n) = \frac{1}{2^n}$ για κάθε n , άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(B_n) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= 2, \end{aligned}$$

αφού η τελευταία σειρά είναι της μορφής (2.4.3) με $a = 1$ και $k = 2$.

Η μελέτη των άπειρων σειρών συνεχίστηκε στον 15ο και 16ο αιώνα στο στυλ των Swineshead και Oresme, χωρίς να γίνει κάποια υπέρβαση των περιφραστικών ή γεωμετρικών τεχνικές που χρησιμοποιούνταν. Η βασική συνεισφορά αυτών των πρώιμων μελετών των άπειρων σειρών δεν βρίσκεται τόσο στα αποτελέσματα που προέκυψαν όσο στο γεγονός ότι υπήρξε μια ενθάρρυνση για την αποδοχή των άπειρων διαδικασιών στα μαθηματικά. Έτσι, η περίοδος του Μεσαίωνα προετοίμασε το έδαφος για την πιο σημαντική δουλειά που έγινε στον 17ο αιώνα, όταν περισσότερες αριθμητικές και αλγεβρικές τεχνικές ήτα διαθέσιμες.

2.5 Η αναλυτική τέχνη του Viète

Η επιστημονική και πολιτιστική Αναγέννηση του 15ου και 16ου αιώνα συχνά συσχετίζεται με το γεγονός ότι η ανακάλυψη της τυπογραφίας επέτρεψε την επαφή με τα κλασικά έργα της αρχαιότητας. Στα Μαθηματικά όμως, η περίοδος της Αναγέννησης χαρακτηρίζεται από τη μεγάλη πρόοδο στην περιοχή της άλγεβρας, και αυτή η πρόοδος βασίστηκε λιγότερο στις κλασικές παραδόσεις και περισσότερο στην πρακτική αριθμητική και άλγεβρα των εμπορικών κύκλων των μεσαιωνικών χρόνων, η οποία χρησιμοποιούσε μεθόδους επίλυσης προβλημάτων που πήγαιναν πίσω στον al-Khowarizmi. Η έκδοση του Ars Magna του Cardan, το 1545, έδωσε στη δημοσιότητα τις λύσεις των del Ferro και Tartaglia για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις και του Ferrari για τις τεταρτοβάθμιες εξισώσεις. Αυτές οι σημαντικές ανακαλύψεις έδωσαν το κίνητρο για μια ταχεία ανάπτυξη των αλγεβρικών τεχνικών.

Η άλγεβρα εκείνη την εποχή ήταν περισσότερο περιφραστική παρά συμβολική, παρόλο που η χρήση συντμήσεων (όπως τα Ιταλικά p και m για το συν και το πλην) ή συμβόλων (όπως τα Γερμανικά $+$ και $-$) άρχιζε να κάνει την εμφάνισή της. Από τη φύση των προβλημάτων της, η άλγεβρα των αρχών του 16ου αιώνα αναζητούσε συνήθως τον άγνωστο σε μια εξίσωση με συγκεκριμένους αριθμητικούς συντελεστές. Κατά συνέπεια, η άλγεβρα ήταν ακόμα μια «συλλογή τεχνασμάτων» και όχι μια γενική μέθοδος, αφού κάθε ειδικό πρόβλημα απαιτούσε διαφορετικό τεχνασμα. Η ιδέα να μελετηθεί μια γενική εξίσωση που να αντιπροσωπεύει μια ευρεία κλάση εξισώσεων δεν είχε ακόμα κάνει την εμφάνισή της.

Για να μελετήσει, για παράδειγμα, κάποιος τη γενική τριτοβάθμια εξίσωση, πρέπει να διακρίνει το ρόλο της άγνωστης μεταβλητής που ζητάμε την τιμή της από αυτόν των συντελεστών που είναι παράμετροι του προβλήματος – οι τιμές τους δεν είναι καθορισμένες, παρόλο που υποτίθενται εκ των προτέρων γνωστές. Αυτή η κρίσιμη ιδέα, η σαφής διάκριση ανάμεσα στις (γνωστές) παραμέτρους και τις (άγνωστες) μεταβλητές, οφείλεται στον Γάλλο Francois Viète (1540-1603). Στο έργο του Introduction to the Analytic Art (1591) έγραφε:

Για να υποβοηθήσουμε την επίλυση των εξισώσεων με κάποια τέχνη, είναι αναγκαίο να διακρίνουμε τα δοσμένα (τις παραμέτρους) από τα άγνωστα (τις μεταβλητές) κάνοντας μια σταθερή σύμβαση, όπως να συμβολίζουμε τις μεταβλητές με το γράμμα A ή κάποιο άλλο φωνήεν E, I, O, U, V και τις παραμέτρους με τα γράμματα B, C, D ή άλλα σύμφωνα.

Ο Viète άρχισε λοιπόν να χρησιμοποιεί συστηματικά τα φωνήεντα για τις μεταβλητές και τα σύμφωνα για τις παραμέτρους. Για να εκφράσει τις αλγεβρικές πράξεις χρησιμοποιούσε μεικτό συμβολισμό, συνδυάζοντας λεκτικές συντημήσεις (για παράδειγμα, A quadratus και A cubus για τα A^2 και A^3) με σύμβολα (όπως τα $+$ και $-$). Για παράδειγμα, θα έγραφε

$$A \text{ cub} + B \text{ plano in } A \text{ aequatur } C \text{ in } A \text{ quad} + D \text{ solido}$$

εννοώντας

$$A^3 + BA = CA^2 + D.$$

Οι όροι plano και solid έμπαιναν για να διατηρείται ομογενής ο βαθμός της εξίσωσης. Το σύμβολο $=$ για την ισότητα δεν είχε ακόμα υιοθετηθεί ευρέως, παρόλο που είχε εισαχθεί το 1557 από τον Άγγλο Robert Recorde. Η μετάβαση στον πλήρη αλγεβρικό συμβολισμό συντελέστηκε στο διάστημα ανάμεσα στον Viète και τον Descartes.

Αν και ο συμβολισμός που περιγράφουμε ήταν ακόμα αρκετά πρωτόγονος με τα σημερινά δεδομένα, η συμβολή του Viète στο να γίνει η διάκριση των μεταβλητών από τις παραμέτρους ήταν πολύ σημαντική για την αλλαγή προσανατολισμού των μαθηματικών στον 17ο αιώνα, από τη μελέτη ειδικών προβλημάτων στην αναζήτηση γενικών μεθόδων. Η εξοικείωση με το ρόλο των παραμέτρων επέτρεψε να στραφεί η προσοχή προς τις διαδικασίες επίλυσης και όχι τις ίδιες τις λύσεις, και σε ζητήματα που αφορούσαν τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών προβλημάτων. Αυτή η μετατόπιση της έμφασης, από το ειδικό προς το γενικό, ήταν αναγκαία για την αλγοριθμική προσέγγιση που χαρακτηρίζει τον απειροστικό λογισμό.

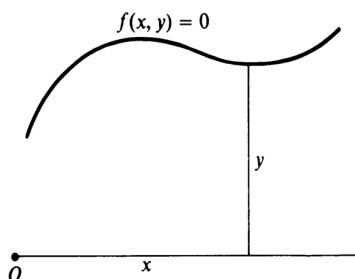
2.6 Η αναλυτική γεωμετρία των Descartes και Fermat

Το τελευταίο βήμα της προετοιμασίας για τον απειροστικό λογισμό, που ήταν και το πιο σημαντικό, ήταν η εμφάνιση της αναλυτικής γεωμετρίας με τα έργα των Rene Descartes (1596-1650) και Pierre de Fermat (1601-1665). Η *Γεωμετρία* του Descartes δημοσιεύτηκε το 1637 ως ένα από τα τρία παραρτήματα του *Discourse on the Method*. Την ίδια χρονιά, ο Fermat έστειλε στους γνωστούς του το *Introduction to Plane and Solid Loci*. Τα δύο αυτά δοκίμια έβαλαν τις βάσεις για την αναλυτική γεωμετρία. Αν και η δουλειά του Fermat ήταν πιο συστηματική από πολλές απόψεις, δεν δημοσιεύτηκε παρά μόνο το 1679, μετά από τον θάνατό του, και αυτός είναι ο λόγος που σήμερα μιλάμε για τη γεωμετρία του Descartes και όχι τη γεωμετρία του Fermat.

Η κεντρική ιδέα της αναλυτικής γεωμετρίας είναι η αντιστοιχία ανάμεσα σε μια εξίσωση $f(x, y) = 0$ και τον τόπο των σημείων που οι συντεταγμένες τους, ως προς κάποιους σταθερούς ορθογώνιους άξονες, ικανοποιούν την εξίσωση. Μάλιστα, ούτε ο Descartes ούτε ο Fermat χρησιμοποιούσαν δύο άξονες συντεταγμένων με το συνηθισμένο σήμερα τρόπο.

Για τον Fermat (αλλά και για τον Descartes) οι δύο άγνωστες ποσότητες σε μια εξίσωση ήταν ευθύγραμμα τμήματα και όχι αριθμοί. Ένα από αυτά μετριόταν προς τα δεξιά από ένα σημείο αναφοράς στον οριζόντιο άξονα, και το δεύτερο τοποθετούνταν κατακόρυφα με αρχή

το άκρο του πρώτου (βλέπε σχήμα). Ο Fermat έλεγε ότι το τελικό σημείο του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος προσδιόριζε την καμπύλη που αντιστοιχούσε στη δοθείσα εξίσωση. Η πρακτική του Descartes ήταν γενικά η ίδια.



Σχήμα 2.9:

Ο Fermat χρησιμοποιούσε τον αλγεβρικό συμβολισμό του Viète και συμβόλιζε τις μεταβλητές του με A και E αντί για x και y . Ο Descartes όμως χρησιμοποιούσε τον πλήρως αλγεβρικό συμβολισμό που συνηθίζεται και σήμερα (για την ακρίβεια, το συμβολισμό του Descartes). Καθιέρωσε το συμβολισμό με τους εκθέτες για τις δυνάμεις, και εγκαινίασε την πρακτική να χρησιμοποιούνται τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου για τις παραμέτρους και τα τελευταία για τις μεταβλητές.

Στόχος των Descartes και Fermat ήταν να εφαρμόσουν τις μεθόδους της άλγεβρας της Αναγέννησης για την επίλυση προβλημάτων της γεωμετρίας. Ο Descartes ξεκινούσε με ένα γεωμετρικό πρόβλημα, στο οποίο συνήθως εμφανιζόταν κάποια καμπύλη, η οποία οριζόταν είτε ως στατικός γεωμετρικός τόπος ή μέσω κάποιας ομοιόμορφης συνεχούς κίνησης (όπως η σπείρα του Αρχιμήδη). Η διαδικασία που ακολουθούσε ήταν να μεταφράσει το γεωμετρικό πρόβλημα στη γλώσσα μιας αλγεβρικής εξίσωσης και μετά να απλοποιήσει και τελικά να λύσει αυτή την εξίσωση.

Ενώ ο Descartes συνήθως ξεκινούσε με μια καμπύλη και έβρισκε την αλγεβρική της εξίσωση, ο Fermat συνήθως ξεκινούσε με μία αλγεβρική εξίσωση και από αυτήν έβρισκε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που αντιστοιχούσε σε αυτήν. Για παράδειγμα, ξεκινούσε με τη γενική δευτεροβάθμια εξίσωση δύο μεταβλητών

$$(2.6.1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

αποδείκνυε με τεχνικές μεταφορές και στροφής ότι αντιστοιχούσε σε κωνική τομή (με την εξαίρεση εκφυλισμένων περιπτώσεων) και ταξινομούσε τις διάφορες περιπτώσεις της (2.6.1) ανάλογα με το αν η κωνική τομή ήταν έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή.

Έτσι, τα έργα των Descartes και Fermat, αν τα συνδυάσουμε, καλύπτουν τις δύο συμπληρωματικές πτυχές της αναλυτικής γεωμετρίας – τη μελέτη εξισώσεων μέσω καμπυλών και τη μελέτη καμπυλών που ορίζονται από εξισώσεις. Σημαντικό κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι μελετούσαν εξισώσεις με παραμέτρους και συνεχείς μεταβλητές. Στο έργο του Viète, οι μεταβλητές θεωρούνταν σταθερές που έπρεπε να βρεθούν.

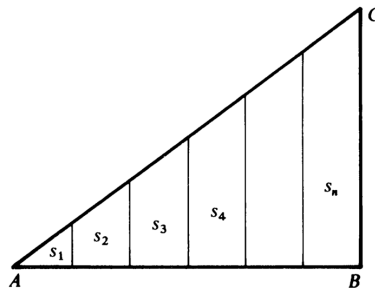
Η έννοια της μεταβλητής, που τονίστηκε για πρώτη φορά από τους Descartes και Fermat, ήταν πολύ σημαντική για την εξέλιξη του απειροστικού λογισμού – από τη φύση του, το θέμα

αυτό έχει να κάνει με συνεχείς μεταβλητές. Επιπλέον, η αναλυτική γεωμετρία άνοιξε την πόρτα για τη μελέτη τεράστιας ποικιλίας καμπυλών, μια μελέτη για την οποία απαιτούνταν η ανακάλυψη νέων αλγοριθμικών τεχνικών. Ενώ οι «παλιές καμπύλες» ήταν περιορισμένες στον αριθμό, τώρα οποιαδήποτε νέα εξίσωση γεννούσε μια νέα καμπύλη. Με αυτό τον τρόπο, η αναλυτική γεωμετρία έδωσε ένα πολύ ευρύτερο πεδίο εφαρμογής για τις τεχνικές του απειροστικού λογισμού του 17ου αιώνα, αλλά και τα τεχνικά εφόδια που χρειάζονταν για την αποσαφήνισή τους.

2.7 Ασκήσεις

1. Θεωρήστε την περίπτωση μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με $v_0 = 0$, οπότε το τραπέζιο του Oresme γίνεται τρίγων (βλέπε σχήμα). Διαιρέστε τη βάση AB σε n ίσα χρονικά υποδιαστήματα και συμβολίστε με $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ τις αποστάσεις που διανύει το κινούμενο σημείο σε αυτά τα διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Αποδείξτε ότι αυτές οι αποστάσεις είναι ανάλογες με τους περιττούς φυσικούς αριθμούς $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$. Δηλαδή,

$$\frac{s_1}{1} = \frac{s_2}{3} = \frac{s_3}{5} = \dots = \frac{s_n}{2n-1}.$$



Σχήμα 2.10:

Αυτός ο «νόμος των περιττών αριθμών» για τις αποστάσεις που διανύονται σε διαδοχικά ίσα χρονικά υποδιαστήματα με σταθερή επιτάχυνση, ήταν σημαντικός για τη μεταγενέστερη εμπειρική επιβεβαίωση, από τον Γαλιλαίο, του ότι σώματα που εκτελούν ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια της Γης έχουν σταθερή επιτάχυνση.

2. Εφαρμόζοντας την (2.4.3) αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots + \frac{3}{4^n} + \dots = 1.$$

3. Εφαρμόζοντας τη γεωμετρική μέθοδο του Oresme αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + \dots + n \cdot \frac{3}{4^n} + \dots = \frac{4}{3}.$$

Σκεφτείτε μια κίνηση με ταχύτητα 1 στα πρώτα $\frac{3}{4}$ ενός μοναδιαίου χρονικού διαστήματος, με ταχύτητα 2 στα επόμενα $\frac{3}{16}$ του διαστήματος, ταχύτητα 3 στα επόμενα $\frac{3}{64}$, και ούτω καθεξής.

Κεφάλαιο 3

Απαρχές του Απειροστικού Λογισμού

3.1 Ο δεύτερος νόμος του Kepler

Ο Johann Kepler (1571-1630) ανακάλυψε τους νόμους της κίνησης των πλανητών:

- (α) Κάθε πλανήτης διαγράφει ελλειπτική τροχιά με τον Ήλιο στη μία από τις δύο εστίες της έλλειψης.
- (β) Το εμβαδόν που σαρώνει το ακτινικό διάνυσμα από τον Ήλιο προς τον πλανήτη είναι ανάλογο του χρόνου.
- (γ) Τα τετράγωνα των περιόδων περιστροφής οποιωνδήποτε δύο πλανητών είναι ανάλογα προς τους κύβους των κυρίων ημιαξόνων των τροχιών τους.

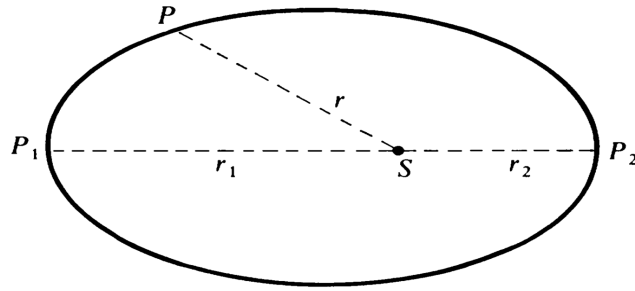
Ο Kepler κατέληξε σε αυτούς τους νόμους από δεδομένα παρατηρήσεων και η απόδειξή τους δόθηκε αργότερα από τον Newton.

Ο δεύτερος νόμος διατυπώθηκε από τον Kepler το 1609. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πρώτη «απόδειξη» που έδωσε ο Kepler ήταν ένα περίεργο μείγμα λαθών που αλληλοεξουδετερώνονταν. Το αρχικό του συμπέρασμα, το οποίο προέκυψε από αστρονομικές παρατηρήσεις, ήταν ότι όταν ο πλανήτης βρίσκεται στο αφήλιο ή το περιήλιο – δηλαδή στο πιο απομακρυσμένο από τον Ήλιο ή το πλησιέστερο προς τον Ήλιο σημείο της τροχιάς του – τότε η ταχύτητα v του πλανήτη είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την απόσταση r του πλανήτη από τον Ήλιο.

Δηλαδή, αν v_1 και v_2 είναι οι ταχύτητές του στο αφήλιο P_1 και το περιήλιο P_2 (βλέπε σχήμα) τότε

$$(3.1.1) \quad v_1 = \frac{\kappa}{r_1} \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{\kappa}{r_2}$$

όπου κ είναι μια θετική σταθερά.



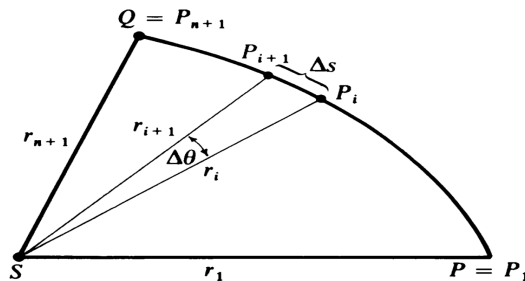
Σχήμα 3.1:

Στη συνέχεια επιχειρήσε να αποδείξει ότι το ίδιο ισχύει σε κάθε σημείο P της τροχιάς, δηλαδή ότι ισχύει η

$$(3.1.2) \quad v = \frac{\kappa}{r}.$$

Αυτό όμως δεν ισχύει. Στην πραγματικότητα, αυτό που ισχύει είναι ότι η ταχύτητα στο σημείο P είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την απόσταση του Ήλιου S από την εφαπτόμενη της έλλειψης στο σημείο P . Η απόσταση αυτή είναι ίση με r μόνο στα δύο σημεία P_1 και P_2 , στα οποία συμβαίνει το ακτινικό διάνυσμα να είναι όντως κάθετο στην εφαπτόμενη.

Παρόλα αυτά, ο Kepler συνέχισε δεχόμενος τη λανθασμένη σχέση (3.1.2). Για να υπολογίσει τον χρόνο t που απαιτείται για να διαγράψει ο πλανήτης ένα τόξο PQ της τροχιάς του, το χώρισε σε n το πλήθος υποτόξα του ίδιου μήκους Δs , για κάποιον πολύ μεγάλο φυσικό αριθμό n (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 3.2:

Αν r_i είναι η απόσταση SP_i από τον Ήλιο προς το αρχικό σημείο P_i του i -οστού υποτόξου P_iP_{i+1} , και αν v_i είναι η ταχύτητα στο σημείο P_i και t_i είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διατρέξει το υποτόξο ο πλανήτης, τότε η (3.1.2) μας δίνει

$$(3.1.3) \quad t = \sum_{i=1}^n t_i \simeq \sum_{i=1}^n \frac{\Delta s}{v_i} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^n r_i \Delta s.$$

Έτσι, η λανθασμένη αποδοχή της $v = \kappa/r$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος t είναι ανάλογος προς το άθροισμα $\sum_{i=1}^n r_i$ των ακτίνων.

Σε αυτό το σημείο ο Kepler κάνει και δεύτερο λάθος, υποθέτοντας ότι αυτό το άθροισμα είναι ανάλογο προς το εμβαδόν του ελλειπτικού τομέα SPQ . Γράφει:

«Από το γεγονός ότι υπάρχουν άπειρα σημεία στην τροχιά και άπειρες, αντίστοιχα, αποστάσεις αυτών των σημείων από τον Ήλιο, μου ήρθε η ιδέα ότι το άθροισμα αυτών των αποστάσεων περιέχεται στο εμβαδόν της τροχιάς. Γιατί θυμάμαι ότι, ακριβώς με αυτό τον τρόπο, ο Αρχιμήδης χώρισε τον κύκλο σε άπειρα το πλήθος τρίγωνα.»

Αυτό που περιγράφει σχετίζεται περισσότερο με τον τρόπο που κατέληξαν στον τύπο για το εμβαδόν του κύκλου οι προγενέστεροι του Αρχιμήδη γεωμέτρεις, τον 5ο αιώνα π.Χ. Αν το i -οστό «κομμάτι» εμβαδού ήταν ένα τρίγωνο με βάση r_i και ύψος Δs , τότε θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει ότι

$$(3.1.4) \quad \alpha(SPQ) \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i \Delta s,$$

και συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με την (3.1.3) να καταλήξει στην

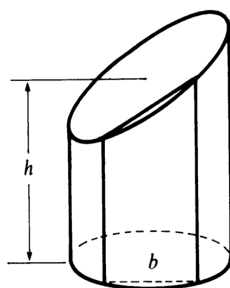
$$(3.1.5) \quad \alpha(SPQ) = \frac{\kappa}{2} t.$$

Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Kepler οδηγήθηκε στο δεύτερο νόμο του, ο οποίος είναι σωστός.

Ο Kepler ασχολήθηκε συστηματικά με τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, χρησιμοποιώντας απειροστικές μεθόδους, για λόγους πιο πεζούς από τη μελέτη της κίνησης των πλανητών. Με το βιβλίο του «Νέα στερεομετρία των βαρελιών του κρασιού», το οποίο εκδόθηκε το 1615, προσπάθησε να βοηθήσει τους εμπόρους κρασιού να υπολογίζουν με ακρίβεια τον όγκο των βαρελιών τους. Ασχολείται με τη μελέτη στερεών εκ περιστροφής και βρίσκει (ακριβώς ή κατά προσέγγιση) τον όγκο περισσότερων από ενενήντα τέτοιων στερεών.

Η μέθοδος που ακολουθούσε ήταν να διαιρεί το δοθέν στερεό σε πολύ μεγάλο (κατά τα φαινόμενα, άπειρο) αριθμό από απειροστά μέρη (στερεά αδιαίρετα) που είχαν μέγεθος και σχήμα κατάλληλο ώστε να λυθεί το συγκεκριμένο κάθε φορά πρόβλημα. Για παράδειγμα, θεωρεί ότι μια σφαίρα σχηματίζεται από άπειρες το πλήθος πυραμίδες, καθεμία από τις οποίες έχει την κορυφή της στο κέντρο της σφαίρας και τη βάση της στην επιφάνεια της σφαίρας, και έχει ύψος ίσο με την ακτίνα r της σφαίρας. Προσθέτοντας τους όγκους αυτών των πυραμίδων παίρνει αμέσως $V = Ar/3 = 4\pi r^3/3$, όπου $A = 4\pi r^2$ είναι επιφάνεια της σφαίρας.

Θεωρεί επίσης το κυλινδρικό στερεό με μη παράλληλες βάσεις που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αποδεικνύει ότι ο όγκος του είναι ίσος με $V = \pi r^2 h$ θεωρώντας το στερεό σαν το άθροισμα από άπειρες το πλήθος κατακόρυφες «φέτες». Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το εμβαδόν τραπέζιου υπολογίζει τον όγκο κάθε τέτοιας φέτας ως bht , όπου t είναι το πάχος της.

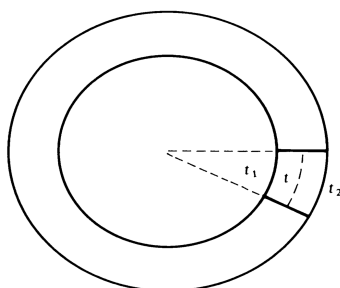


Σχήμα 3.3:

Ο Kepler έδειξε ότι ο όγκος ενός τόρου ο οποίος παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου ακτίνας a γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα σε απόσταση b από το κέντρο του είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού του κύκλου επί την απόσταση που διανύει το κέντρο του (θεώρημα του Πάππου). Δηλαδή,

$$(3.1.6) \quad V = (\pi a^2)(2\pi b) = 2\pi^2 a^2 b.$$

Πήρε την (3.1.6) διαιρώντας τον τόρο σε άπειρες το πλήθος λεπτές κατακόρυφες κυκλικές φέτες, τις τομές του με τα επίπεδα που περιείχαν τον άξονα περιστροφής. Κάθε τέτοια φέτα είναι πιο λεπτή εσωτερικά (πιο κοντά στον άξονα) και πιο παχιά εξωτερικά (βλέπε το παρακάτω σχήμα).

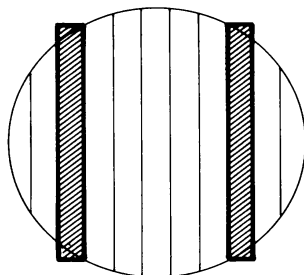


Σχήμα 3.4:

Ο Kepler υποθέτει ότι ο όγκος κάθε τέτοιας φέτας είναι ίσος με $\pi a^2 t$, όπου $t = (t_1 + t_2)/2$, ο αριθμητικός μέσος του ελάχιστου και μέγιστου πάχους. Συνεπώς, t είναι το πάχος της φέτας στο κέντρο της, και προκύπτει ότι ο όγκος του τόρου είναι

$$V = (\pi a^2) \cdot \sum t = (\pi a^2)(2\pi b).$$

Μια εναλλακτική ερμηνεία της (3.1.6) μπορεί να δοθεί ως εξής. Χωρίζουμε τον τόρο σε άπειρα το πλήθος λεπτά κατακόρυφα κυλινδρικά χωρία, που αντιστοιχούν στη διαίρεση του κύκλου που γεννάει τον τόρο σε λεπτές κατακόρυφες λωρίδες (βλέπε το παρακάτω σχήμα). Υπολογίζουμε τους όγκους αυτών των κυλινδρικών χωρίων που αντιστοιχούν σε ζεύγη λωρίδων που ισαπέχουν από την κατακόρυφη διάμετρο του κύκλου και προσθέτουμε.



Σχήμα 3.5:

Ο Kepler είχε την αυτοπεποίθηση ότι θα μπορούσε να αποδείξει αυστηρά όλα αυτά τα αποτελέσματα αν χρειαζόταν. Έπαιξε ελεύθερα με τα απειροστά και υπολόγιζε τον όγκο για πολλά και διαφορετικά στερεά εκ περιστροφής. Έλεγε μάλιστα ότι «θα μπορούσαμε να δώσουμε πλήρεις από κάθε άποψη αποδείξεις βασιζόμενοι στα βιβλία του Αρχιμήδη αν δεν μας απωθούσε η ξύλινη γλώσσα των χειμένων του».

3.2 Η αρχή του Cavalieri

Η συστηματική χρήση απειροστικών τεχνικών για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων έγινε ευρέως γνωστή από δύο βιβλία του Bonaventura Cavalieri (1598-1647), τη «Γεωμετρία των αδιαιρέτων» του 1635 και το «Έξι γεωμετρικές ασκήσεις» του 1647.

Οι μέθοδοι του Cavalieri παρουσίαζαν δύο σημαντικές διαφορές από εκείνες του Kepler. Ο Kepler φανταζόταν ότι ένα γεωμετρικό σχήμα μπορούσε να χωριστεί σε άπειρα στοιχειώδη σχήματα, των οποίων τα εμβαδά ή τους όγκους θα μπορούσε να αθροίσει με κάποιον (τον κατάλληλο κάθε φορά) τρόπο για να υπολογίσει το εμβαδόν ή τον όγκο που αναζητούσε. Ο Cavalieri ανέπτυξε μια τεχνική που βασιζόταν στην ένα προς ένα σύγκριση των «αδιαιρέτων» κομματιών δύο γεωμετρικών σχημάτων. Αν τα αντίστοιχα «αδιαίρετα» των δύο σχημάτων είχαν κάποιο (σταθερό) λόγο, έβγαζε το συμπέρασμα ότι τα εμβαδά ή οι όγκοι των δύο σχημάτων είχαν επίσης τον ίδιο λόγο. Στην τυπική εφαρμογή της μεθόδου, το εμβαδόν ή ο όγκος του ενός από τα δύο σχήματα ήταν γνωστό, οπότε υπολογιζόταν το αντίστοιχο εμβαδόν ή ο όγκος του άλλου.

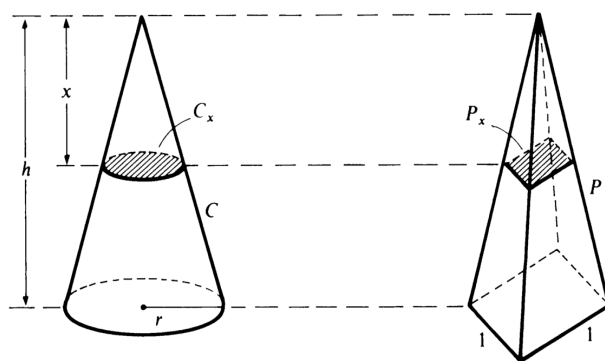
Η δεύτερη διαφορά ήταν ότι ο Cavalieri σκεφτόταν ότι ένα σχήμα συντίθεται από αδιαίρετα της ίδιας διάστασης (δηλαδή, απειροστά εμβαδά ή όγκους), κάτι το οποίο αντιλαμβανόταν ως το (τελικό) αποτέλεσμα μιας διαδικασίας διαδοχικών υποδιαιρέσεων που (τελικά) οδηγούσε σε απειροστά κομμάτια. Αντίθετα, ο Cavalieri θεωρούσε γενικά ότι ένα γεωμετρικό σχήμα συντίθεται από άπειρα το πλήθος αδιαίρετα χαμηλότερης διάστασης. Θεωρούσε ότι το εμβαδόν σχηματίζεται από παράλληλα ισαπέχοντα ευθύγραμμα τμήματα και ο όγκος από παράλληλες ισαπέχουσες επίπεδες τομές, χωρίς να αποσαφηνίζει αν αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα ή αυτές οι επίπεδες τομές έχουν πάχος ή όχι. Συνήθως φαινόταν ότι δεν έχουν, υπάρχει όμως τουλάχιστον μία περίπτωση στην οποία λέει ότι θα μπορούσαν και να έχουν. Πάντως, δεν τον απασχολούσε η ακριβής φύση αυτών των αδιαιρέτων - αυτό που τον ενδιέφερε ήταν η χρησιμότητά τους για να κάνει υπολογισμούς. Στο δεύτερο βιβλίο του γράφει ότι «η αυστηρότητα αφορά τους φιλοσόφους και όχι τους μαθηματικούς».

Η μέθοδος του Cavalieri για να συγκρίνει δύο γεωμετρικά σχήματα βασίζεται στη σύγκριση των «αδιαιρέτων» του ενός με τα «αδιαίρετα» του άλλου. Η αρχή που διατύπωσε είναι γνωστή και σήμερα ως «αρχή του Cavalieri»

Αν δύο στερεά έχουν το ίδιο ύψος και αν οι τομές τους με επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις τους και σε ίσες αποστάσεις από αυτές έχουν σταθερό λόγο, τότε οι όγκοι των δύο στερεών έχουν επίσης τον ίδιο λόγο.

Προσπάθησε να αποδείξεις αυτό το θεώρημα με ένα επιχειρήμα στο οποίο μετακινούσε τα κομμάτια του ενός από τα στερεά ένα προς ένα ώστε να τα φέρει πάνω στα κομμάτια του άλλου.

Πρακτικά, ο Cavalieri προσπαθούσε να «αποκρύψει» το ρόλο των οριακών διαδικασιών στον υπολογισμό όγκων. Για παράδειγμα, αν δύο τριγωνικές πυραμίδες έχουν το ίδιο ύψος h και το ίδιο εμβαδόν βάσης A , τότε ένα απλό επιχειρήμα ομοιότητας δείχνει ότι οι τομές τους στο ίδιο ύψος έχουν ίσα εμβαδά, συνεπώς η αρχή του Cavalieri δίνει ότι οι δύο πυραμίδες έχουν ίσους όγκους. Το αποτέλεσμα αυτό παίζει βασικό ρόλο στην απόδειξη του τύπου $V = Ah/3$ για τον όγκο της πυραμίδας.



Σχήμα 3.6:

Για να αποδείξουμε τον τύπο για τον όγκο κυκλικού κώνου C με ακτίνα βάσης r και ύψος h , τον συγκρίνουμε με μια πυραμίδα P που έχει το ίδιο ύψος και βάση ένα τετράγωνο ακμής ίσης με 1. Αν C_x και P_x είναι οι τομές στο παραπάνω σχήμα, από ομοιότητα έχουμε

$$\alpha(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} \quad \text{και} \quad \alpha(P_x) = \frac{x^2}{h^2}.$$

Άρα,

$$\alpha(C_x) = \pi r^2 \alpha(P_x)$$

για κάθε x , και από την αρχή του Cavalieri συμπεραίνουμε ότι

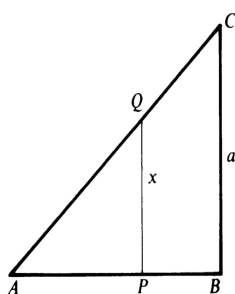
$$V(C) = \pi r^2 V(P) = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

αφού $V(P) = h/3$.

Πέρα από την τεχνική της σύγκρισης δύο στερεών μέσω της σύγκρισης των αντίστοιχων τομών τους, ο Cavalieri ανέπτυξε μια μέθοδο υπολογισμού του όγκου ενός στερεού από τα εμβαδά των τομών του. Η μέθοδος αυτή βασιζόταν σε μια φορμαλιστική υπολογιστική διαδικασία την οποία θα μπορούσε κανείς να αποκαλέσει «άθροιση δυνάμεων ευθειών». Αυτή η διαδικασία, αν και απείχε πολύ από το να είναι αυστηρή, οδήγησε τον Cavalieri σε σωστά αποτελέσματα, ισοδύναμα με το βασικό ολοκλήρωμα

$$(3.2.1) \quad \int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το τρίγωνο ABC με βάση και ύψος a , και μια τυπική κατακόρυφη τομή PQ μήκους x (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 3.7:

Τότε, όπως αντιλαμβανόταν ο Cavalieri τα αδιαίρετα, το τρίγωνο είναι το άθροισμα όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

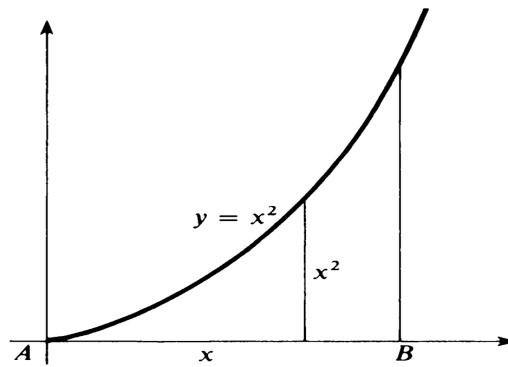
$$\alpha(ABC) = \sum_A^B x.$$

Ο συμβολισμός αυτός αποδίδει αυτό που ο Cavalieri έλεγε με παραφορτωμένη γεωμετρική ορολογία. Αν P είναι μια πυραμίδα με κορυφή A και βάση ένα τετράγωνο ακμής BC , τότε η τομή της σε απόσταση x από την κορυφή έχει εμβαδόν x^2 , άρα μπορούμε όμοια να γράψουμε

$$V(P) = \sum_A^B x^2,$$

αν σκεφτούμε την πυραμίδα ως άθροισμα των τομών της. Το ίδιο άθροισμα, των τετραγώνων των ευθειών στο τρίγωνο, δίνει το εμβαδόν κάτω από την παραβολή $y = x^2$ (βλέπε το παρακάτω σχήμα) αφού η τυπική κατακόρυφη τομή της έχει μήκος x^2 . Αν Q είναι το στερεό που προκύπτει αν περιστρέψουμε την παραβολή γύρω από τη βάση της AB , τότε η τομή αυτού του στερεού σε απόσταση x από την κορυφή A έχει εμβαδόν πx^4 , άρα μπορούμε να γράψουμε

$$V(Q) = \sum_A^B \pi x^4 = \pi \sum_A^B x^4.$$



Σχήμα 3.8:

Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο πλήθος προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών και όγκων μπορούσαν να διατυπωθούν ως προβλήματα υπολογισμού φορμαλιστικών αθροισμάτων δυνάμεων ευθειών σε ένα τρίγωνο.

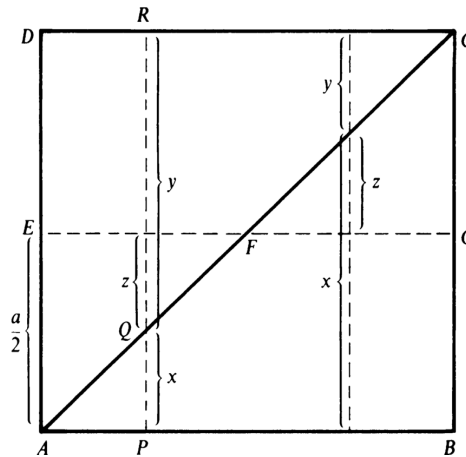
Για να περιγράψουμε τη μέθοδο του Cavalieri για τον υπολογισμό των τυπικών αυτών αθροισμάτων, θεωρούμε ένα τετράγωνο $ABCD$ πλευράς a , το οποίο χωρίζουμε σε δύο τρίγωνα με τη διαγώνιο AC (βλέπε σχήμα). Θεωρούμε μια τυπική κατακόρυφη τομή PR και συμβολίζουμε με x και y τα μήκη των τομών PQ και QR . Τότε, $x + y = a$, άρα

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2 \sum_A^B x,$$

διότι $\sum_A^B x = \sum_A^B y$ λόγω συμμετρίας. Έπεται ότι

$$(3.2.2) \quad \sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a = \frac{1}{2} a^2,$$

διότι το άθροισμα $\sum_A^B a$ δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου.



Σχήμα 3.9:

Για να υπολογίσουμε το $\sum_A^B x^2$ ξεκινάμε γράφοντας

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^2 &= \sum_A^B (x + y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 \\ &= 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy \\ &= 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right), \end{aligned}$$

διότι $x = \frac{a}{2} - z$ και $y = \frac{a}{2} + z$ (βλέπε σχήμα). Άρα,

$$(3.2.3) \quad \sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum z^2.$$

Εδώ, το $\sum z^2$ είναι το άθροισμα των τετραγώνων των ευθυγράμμων τμημάτων στα δύο τρίγωνα AEF και CFG . Όμως, το άθροισμα των z^2 πάνω από ένα από αυτά τα τρίγωνα παριστάνει τον όγκο μιας πυραμίδας που έχει διαστάσεις τα μισά των διαστάσεων της πυραμίδας όγκου $\sum_A^B x^2$. Συνεπώς,

$$\sum z^2 = 2 \cdot \frac{1}{8} \sum_A^B x^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B x^2.$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.3) παίρνουμε

$$(3.2.4) \quad \sum_A^B x^2 = \frac{1}{3} \sum_A^B a^2 = \frac{1}{3} a^3.$$

Για τον υπολογισμό των αθροισμάτων των κύβων ευθυγράμμων τμημάτων, γράφουμε

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \sum_A^B a^3 &= \sum_A^B (x+y)^3 = \sum_A^B x^3 + 3 \sum_A^B x^2y + 3 \sum_A^B xy^2 + \sum_A^B y^3 \\ &= 2 \sum_A^B x^3 + 6 \sum_A^B x^2y, \end{aligned}$$

λόγω συμμετρίας. Για να υπολογίσουμε το $\sum_A^B x^2y$ χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα: έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^3 &= a \sum_A^B a^2 = a \left(2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy \right) \\ &= a \left(\frac{2}{3} \sum_A^B a^2 + 2 \sum_A^B xy \right) \\ &= \frac{2}{3} \sum_A^B a^3 + 2 \sum_A^B (x+y)xy \\ &= \frac{2}{3} \sum_A^B a^3 + 4 \sum_A^B x^2y, \end{aligned}$$

λόγω συμμετρίας. Αυτό μας δίνει $\sum_A^B x^2y = \frac{1}{12} \sum_A^B a^3$, και αντικαθιστώντας στην (3.2.5) παίρνουμε

$$(3.2.6) \quad \sum_A^B x^3 = \frac{1}{4} \sum_A^B a^3 = \frac{1}{4} a^4.$$

Οι σχέσεις (3.2.2), (3.2.4) και (3.2.6) υποδεικνύουν ότι ισχύει ο γενικός τύπος

$$(3.2.7) \quad \sum_A^B x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Ο Cavalieri τον επαλήθευσε για $n = 1, 2, \dots, 9$ και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^n$, $x \in [0, 1]$, ισούται με

$$\alpha_n = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1},$$

και ο όγκος του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε αυτό το χωρίο γύρω από τον x -άξονα ισούται με

$$V_n = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}.$$

3.3 Αριθμητικός τετραγωνισμός

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε τους τύπους για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών

$$(3.3.1) \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

και το άθροισμα των τετραγώνων τους

$$(3.3.2) \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

για να αποδείξει αποτελέσματα τετραγωνισμού που ισοδυναμούσαν με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

$$\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2} \quad \text{και} \quad \int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}.$$

Στην πραγματικότητα, με τα σημερινά δεδομένα, το μόνο που χρειάζεται για τους δύο αυτούς τετραγωνισμούς είναι οι άμεσες συνέπειες

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{6}$$

των (3.3.1) και (3.3.2).

Στην εικοσαετία που ακολούθησε τη δημοσίευση του πρώτου βιβλίου του Cavalieri (1635), οι Γάλλοι μαθηματικοί Fermat, Pascal και Roberval έδωσαν (ουσιαστικά) αυστηρές αποδείξεις για το γενικό τύπο

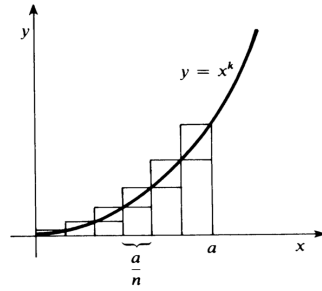
$$(3.3.3) \quad \int_0^a x^k \, dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

τον οποίο είχε εικάσει ο Cavalieri για το εμβαδόν του χωρίου κάτω από τη γενικευμένη παραβολή $y = x^k$ (όπου τώρα k είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός). Οι αποδείξεις όλων τους χρησιμοποιούσαν το όριο

$$(3.3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

για το άθροισμα των k -οστών δυνάμεων των πρώτων n φυσικών, το οποίο αντικαθιστούσε τα διαισθητικά επιχειρήματα του Cavalieri με ακριβείς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Η απόδειξη της (3.3.3) με τη βοήθεια της (3.3.4) γίνεται ως εξής. Χωρίζουμε το διάστημα $[0, a]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους a/n , και θεωρούμε τα συνήθη εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα P_n και Q_n του παρακάτω σχήματος. Το P_n αποτελείται από ορθογώνια που έχουν βάση a/n και ύψη $(a/n)^k, (2a/n)^k, \dots, ((n-1)a/n)^k$, ενώ το Q_n αποτελείται από ορθογώνια που έχουν βάση a/n και ύψη $(a/n)^k, (2a/n)^k, \dots, (na/n)^k$.



Σχήμα 3.10:

Προσθέτοντας τα εμβαδά αυτών των ορθογωνίων βλέπουμε ότι

$$\alpha(P_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

και

$$\alpha(Q_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k).$$

Αν συμβολίσουμε με S το χωρίο κάτω από την καμπύλη $y = x^k$, $x \in [0, a]$, βλέπουμε ότι

$$a^{k+1} \frac{1^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n} < \alpha(S) < a^{k+1} \frac{1^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \rightarrow \infty$, και χρησιμοποιώντας την (3.3.4), συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha(S) = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Στην πραγματικότητα, για να εφαρμόσουν τα τότε επιχειρήματα (τη διπλή απαγωγή σε άτοπο, όπως ο Αρχιμήδης), δεν υπολόγιζαν το όριο και χρειάζονταν μια διπλή ανισότητα, για παράδειγμα την

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

Ο Fermat έδωσε τύπο για το άθροισμα $\sum_{i=1}^n i^k$ θεωρώντας τους αριθμούς τύπου k . Οι αριθμοί τύπου 1 είναι οι *τριγωνικοί αριθμοί*

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Ο n -οστός αριθμός τύπου 2 είναι το άθροισμα των πρώτων n αριθμών τύπου 1, και γενικότερα, ο n -οστός αριθμός τύπου k είναι το άθροισμα των πρώτων n αριθμών τύπου $k-1$. Σε μια επιστολή του 1636, ο Fermat διατύπωσε χωρίς απόδειξη την πρόταση ότι ο n -οστός αριθμός τύπου k δίνεται από την

$$(3.3.5) \quad \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(k+1)!}.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p_k(x) = x(x+1) \cdots (x+k-1)$$

το οποίο έχει τη μορφή

$$p_k(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x$$

για κάποιους συντελεστές a_1, \dots, a_{k-1} , οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από το k . Θέτοντας $x = i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(3.3.6) \quad i(i+1) \cdots (i+k-1) = i^k + a_{k-1}i^{k-1} + \cdots + a_1i.$$

Τότε, η (3.3.5) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^n i^k + a_{k-1} \sum_{i=1}^n i^{k-1} + \cdots + a_1 \sum_{i=1}^n i \right] = \frac{n(n+1) \cdots (n+k)}{(k+1)!},$$

απ' όπου παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$(3.3.7) \quad \sum_{i=1}^n i^k = \frac{n(n+1) \cdots (n+k)}{(k+1)!} - \left[a_{k-1} \sum_{i=1}^n i^{k-1} + \cdots + a_1 \sum_{i=1}^n i \right].$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{i=1}^n i^k$ αν γνωρίζουμε τα προηγούμενα αθροίσματα αυτής της μορφής.

Από την (3.3.7) μπορούμε, χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς k , να συμπεράνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{χαμηλότερες δυνάμεις του } n.$$

Το 1654 ο Pascal ανακάλυψε έναν πολύ πιο άμεσο αναδρομικό τύπο για τα αθροίσματα των k -οστών δυνάμεων:

$$(3.3.8) \quad \binom{k+1}{k} \sum_{i=1}^n i^k + \binom{k+1}{k-1} \sum_{i=1}^n i^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1} \sum_{i=1}^n i = (n+1)^{k+1} - n - 1,$$

όπου

$$\binom{s}{t} = \frac{s!}{t!(s-t)!}$$

είναι οι συνήθεις διωνυμικοί συντελεστές. Ο Pascal ανακάλυψε αυτόν τον τύπο χρησιμοποιώντας επαγωγή και τις αριθμητικές σχέσεις στο γνωστό σήμερα «τρίγωνο του Pascal». Στη σημερινή γλώσσα, η (3.3.8) προκύπτει από το διωνυμικό ανάπτυγμα αν γράψουμε

$$(3.3.9) \quad (n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^n \left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} i^p \right].$$

Ο Pascal γράφει ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε οι χαμηλότερες δυνάμεις του n είναι αμελητέες συγκρινόμενες με τον πρώτο όρο $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ στον τύπο που δίνει το $\sum_{i=1}^n i^k$. Συνεπώς,

όταν διαιρέσουμε το χωρίο κάτω από την καμπύλη $y = x^k$, $x \in [0, a]$, σε πολύ μεγάλο αριθμό n σχεδόν ορθογώνιων λωρίδων πλάτους $w = \frac{a}{n}$, είναι μάλλον φανερό ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ισούται με

$$\left[w^k + (2w)^k + \dots + (nw)^k \right] w = w^{k+1} \sum_{i=1}^n i^k \simeq \frac{(nw)^{k+1}}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Αυτός είναι ένας σύντομος τρόπος να περιγραφεί η αυστηρή απόδειξη που θα μπορούσε να δώσει κανείς βασιζόμενος στην ανισότητα

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

και εφαρμόζοντας διπλή απαγωγή σε άτοπο.

3.4 Η ολοκλήρωση κλασματικών δυνάμεων

Ο Wallis γνώριζε ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^k$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος, πάνω από το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ ισούται με

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^k + 1^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + \dots + n^k}.$$

Η προσέγγισή του για τον υπολογισμό αυτού του ορίου ήταν εμπειρική. Για παράδειγμα, στην περίπτωση $k = 3$ παρατήρησε ότι

$$\begin{aligned} \frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} &= \frac{9}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ \frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3}{3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3} &= \frac{36}{108} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3} &= \frac{100}{320} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ \frac{0^3 + 1^3 + \dots + 5^3}{5^3 + 5^3 + \dots + 5^3} &= \frac{225}{750} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \\ \frac{0^3 + 1^3 + \dots + 6^3}{6^3 + 6^3 + \dots + 6^3} &= \frac{441}{1512} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Με βάση αυτά τα αριθμητικά δεδομένα κατέληξε στο συμπέρασμα ότι

$$\frac{0^3 + 1^3 + \dots + n^3}{n^3 + n^3 + \dots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n},$$

άρα το όριο καθώς το $n \rightarrow \infty$ είναι ίσο με $\frac{1}{4}$. Κάνοντας παρόμοιους υπολογισμούς για διάφορες μικρές τιμές του k ισχυρίστηκε (χωρίς απόδειξη) ότι

$$(3.4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^k + 1^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

για κάθε φυσικό αριθμό k .

Για να περιγράψουμε το επόμενο βήμα του, ορίζουμε το δείκτη $I[\phi]$ μιας συνάρτησης ϕ μέσω της εξίσωσης

$$(3.4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(0) + \phi(1) + \dots + \phi(n)}{\phi(n) + \phi(n) + \dots + \phi(n)} = \frac{1}{I[\phi] + 1},$$

αν βέβαια υποθέσουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει. Τότε, η (3.4.1) μας λέει ότι δείκτης της $\phi(x) = x^k$ είναι $I[x^k] = k$. Ο Wallis παρατήρησε ότι αν πάρουμε μια γεωμετρική πρόοδο θετικών ακέραιων δυνάμεων του x (για παράδειγμα, την $1, x, x^2, x^4, x^6$) τότε η αντίστοιχη ακολουθία των δεικτών είναι αριθμητική πρόοδος (στο παράδειγμα, $0, 2, 4, 6$). Από αυτή την τετριμμένη παρατήρηση, κάνοντας μια σοβαρή αυθαιρεσία, υπέθεσε ότι το ίδιο θα ισχύει για μια γεωμετρική πρόοδο της μορφής

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \dots, (\sqrt[q]{x})^p, \dots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x.$$

Δηλαδή, ότι η ακολουθία των δεικτών

$$0 = I[1], I[\sqrt[q]{x}], I[(\sqrt[q]{x})^2], \dots, I[(\sqrt[q]{x})^p], \dots, I[(\sqrt[q]{x})^{q-1}], I[x] = 1$$

πρέπει να είναι αριθμητική πρόοδος, το οποίο μας δίνει ότι

$$I[(\sqrt[q]{x})^p] = \frac{p}{q}$$

αη p και q είναι φυσικοί, άρα από την (3.4.2) παίρνουμε

$$(3.4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[q]{0})^p + (\sqrt[q]{1})^p + \dots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + \dots + (\sqrt[q]{n})^p} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{p}{p + q}.$$

Μάλιστα, ο Wallis αντιστοίχισε τον εκθέτη p/q στη δύναμη $(\sqrt[q]{x})^p$, κάτι που οδήγησε στο συμβολισμό $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$ τον οποίο χρησιμοποιούμε σήμερα. Εισήγαγε επίσης άρρητους εκθέτες, και ισχυρίστηκε ότι «αν θεωρήσουμε άρρητο δείκτη, π.χ. τον $\sqrt{3}$, τότε ο λόγος που θα προκύψει είναι 1 προς $\sqrt{3} + 1$, κλπ.»

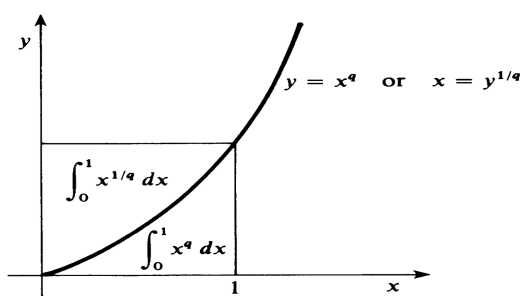
Ο Wallis μπορούσε να επαληθεύσει την (3.4.3) μόνο στην ειδική περίπτωση $p = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι

$$\int_0^1 x^{1/q} dx + \int_0^1 x^q dx = 1,$$

άρα

$$\int_0^1 x^{1/q} dx = 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{1}{\frac{1}{q} + 1},$$

όπως είχε εικάσει.

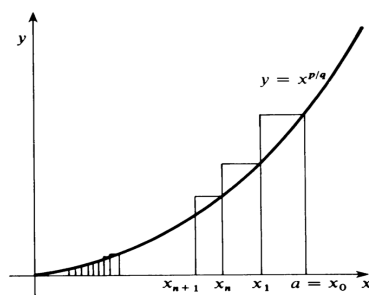


Σχήμα 3.11:

Η εικασία του Wallis ότι

$$(3.4.4) \quad \int_0^a x^{p/q} dx = \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{p}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}$$

για κάθε θετικό ρητό αριθμό p/q επαληθεύτηκε από τον Fermat και από τον Evangelista Torricelli (1608-1647), ο οποίος ήταν μαθητής του Γαλιλαίου και του Cavalieri.



Σχήμα 3.12:

Ο Fermat ξεκίνησε χωρίζοντας το διάστημα $[0, a]$ σε μια άπειρη ακολουθία υποδιαστημάτων με άκρα τα σημεία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, όπου $x_n = ar^n$ για κάποιον $0 < r < 1$. Αν θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο ύψους $x_n^{p/q}$ με βάση το $[x_{n+1}, x_n]$ (βλέπε σχήμα) τότε το άθροισμα των εμβαδών

αυτών των ορθογωνίων ισούται με

$$\begin{aligned}
 A(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{p/q} (x_n - x_{n+1}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)^{p/q} (ar^n - ar^{n+1}) \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^{n\frac{p+q}{q}} \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \quad (\text{όπου } s = r^{\frac{p+q}{q}}) \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1-r}{1-s} \\
 &= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1-t^q}{1-t^{p+q}} \quad (\text{όπου } t = r^{\frac{1}{q}}),
 \end{aligned}$$

δηλαδή

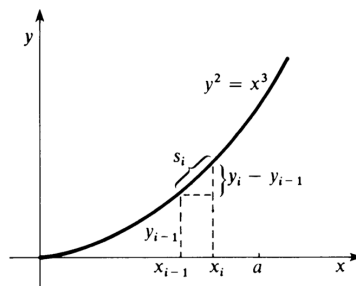
$$(3.4.5) \quad A(r) = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+t+\dots+t^{q-1}}{1+t+\dots+t^{p+q-1}},$$

αφού $(1-t)(1+t+\dots+t^{k-1}) = 1-t^k$. Τώρα, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι το όριο της $A(r)$ καθώς το $r \rightarrow 1$, οπότε $t \rightarrow 1$, άρα η (3.4.4) προκύπτει από την (3.4.5) αν περάσουμε στο όριο.

3.5 Η πρώτη ευθειοποίηση καμπύλης

Με τον όρο «ευθειοποίηση καμπύλης» εννοούμε την κατασκευή ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει το ίδιο μήκος με δοθείσα καμπύλη. Το πρώτο παράδειγμα ευθειοποίησης καμπύλης με τεχνικές απειροστικού λογισμού δόθηκε από τον Άγγλο William Neil το 1657. Ο Neil, ο οποίος ήταν τότε είκοσι ετών, θεώρησε την «ημι-κυβική παραβολή» $y^2 = x^3$.

Για να περιγράψουμε το επιχείρημά του, θεωρούμε την $y = x^{3/2}$ στο διάστημα $[0, a]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα σε n υποδιαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, όπου το n είναι αρκετά μεγάλο.



Σχήμα 3.13:

Αν συμβολίσουμε με s_i το σχεδόν ευθύγραμμο κομμάτι της καμπύλης που συνδέει τα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i) , έχουμε

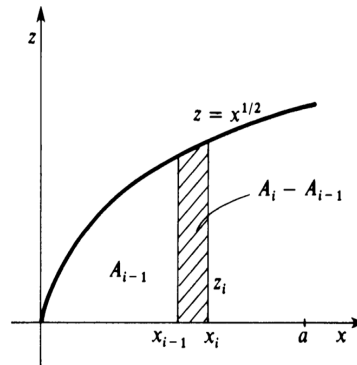
$$(3.5.1) \quad s_i \simeq \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right]^{1/2}.$$

Συνεπώς, το μήκος της καμπύλης ικανοποιεί την

$$(3.5.2) \quad s \simeq \sum_{i=1}^n \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right]^{1/2}.$$

Για να υπολογίσει το άθροισμα στην (3.5.2), ο Neil εισήγαγε ως βοηθητική καμπύλη την παραβολή $z = x^{1/2}$ (βλέπε σχήμα). Αν A_i είναι το εμβαδόν κάτω από αυτή την παραβολή στο διάστημα $[0, x_i]$, τότε από την (3.4.4) γνωρίζουμε ότι $A_i = \frac{2}{3}x_i^{3/2}$. Συνεπώς,

$$y_i - y_{i-1} = x_i^{3/2} - x_{i-1}^{3/2} = \frac{3}{2}(A_i - A_{i-1}).$$



Σχήμα 3.14:

Δηλαδή, αν προσεγγίσουμε το εμβαδόν του χωρίου πάνω από το $[x_{i-1}, x_i]$ με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ύψους $z_i = x_i^{1/2}$ έχουμε

$$(3.5.3) \quad y_i - y_{i-1} \simeq \frac{3}{2}z_i(x_i - x_{i-1}).$$

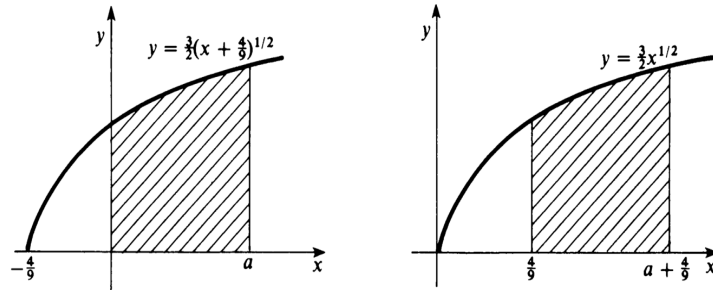
Αντικαθιστώντας την (3.5.3) στην (3.5.2) παίρνουμε

$$(3.5.4) \quad \begin{aligned} s &\simeq \sum_{i=1}^n \left[1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 \right]^{1/2} (x_i - x_{i-1}) \\ &\simeq \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{4}z_i^2 \right)^{1/2} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{3}{2} \left(x_i + \frac{4}{9} \right)^{1/2} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζει κανείς ότι το άθροισμα στην (3.5.4) δίνει (στο όριο) το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής

$$y = \frac{3}{2} \left(x + \frac{4}{9} \right)^{1/2}$$

το οποίο βρίσκεται πάνω από το διάστημα $[0, a]$. Με μεταφορά βλέπουμε ότι αυτό ισούται με το εμβαδόν της παραβολής $y = \frac{3}{2}x^{1/2}$ πάνω από το διάστημα $[\frac{4}{9}, a + \frac{4}{9}]$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 3.15:

Από τον γενικό τύπο ολοκλήρωσης (3.4.4) παίρνουμε λοιπόν

$$s = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} \left(a + \frac{4}{9} \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^{3/2} \right] = \frac{(9a + 4)^{3/2} - 8}{27}.$$

Η γενική ιδέα πίσω από τη διαδικασία που ακολούθησε ο Neil είναι η εξής. Για να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ πάνω από το $[0, a]$, χρειαζόμαστε μια βοηθητική καμπύλη $z = g(x)$ με την εξής ιδιότητα: το εμβαδόν A_i πάνω από το $[0, x_i]$ ικανοποιεί την

$$(3.5.5) \quad A_i = \int_0^{x_i} g(x) dx = f(x_i) = y_i.$$

Τότε,

$$y_i - y_{i-1} = A_i - A_{i-1} \simeq g(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας τα «χαρακτηριστικά τρίγωνα» παίρνουμε

$$s \simeq \sum_{i=1}^n [1 + (g(x_i))^2]^{1/2} (x_i - x_{i-1}),$$

δηλαδή

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + [g(x)]^2} dx.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, η σωστή επιλογή της βοηθητικής καμπύλης, ώστε να πάρουμε την (3.5.5), είναι η $g(x) = f'(x)$. Δηλαδή, η επιλογή του Neil για την $f(x) = x^{3/2}$ ήταν ένας συνδυασμός τετραγωνισμού και εφαπτομένης μέσω του χαρακτηριστικού τριγώνου.

3.6 Ασκήσεις

1. Εξηγήστε γιατί η (3.1.4) δεν ισχύει γενικά. Παρατηρήστε ότι, με συμβολισμό ολοκληρωμάτων, μας δίνει

$$\alpha = \frac{1}{2} \int r \, ds,$$

ενώ ο τύπος για το εμβαδόν, σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\alpha = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\theta.$$

Είναι σωστό ότι $\Delta s = r\Delta\theta$ για ένα μικρό τμήμα τυχούσας καμπύλης;

2. Καταλήξτε στον τύπο για τον όγκο της σφαίρας συγκρίνοντας ένα ημισφαίριο ακτίνας r με το στερεό που προκύπτει αν από έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης r και ύψος r αφαιρέσουμε έναν αντεστραμμένο κώνο που η βάση του είναι στην κορυφή του κυλίνδρου και η κορυφή του είναι το κέντρο της βάσης του κυλίνδρου.

3. Θεωρούμε το σφαιρικό δακτύλιο που προκύπτει από μια σφαίρα αν κάνουμε μια κυλινδρική οπή με άξονα την κατακόρυφη διάμετρο της σφαίρας. Να βρείτε τον όγκο του δακτυλίου συγκρίνοντάς τον με μια σφαίρα που έχει διάμετρο ίση με το ύψος του δακτυλίου.

4. Αναπτύξτε το $\sum_A^B a^4 = \sum_A^B (x+y)^4$ και αποδείξτε ότι

$$\sum_A^B x^4 = \frac{1}{5} \sum_A^B a^4 = \frac{1}{5} a^5.$$

5. Θεωρούμε το χωρίο στο xy -επίπεδο, το οποίο φράσσεται από την ευθεία $y = 1$ και την παραβολή $y = x^2$. Έστω P το στερεό που προκύπτει αν περιστρέψουμε αυτό το χωρίο γύρω από την ευθεία $y = 1$. Εκφράζοντας αυτό το στερεό ως «άθροισμα» των κυκλικών τομών του, εφαρμόστε τα αποτελέσματα του Cavalieri για να αποδείξετε ότι $\text{Vol}(P) = \frac{16\pi}{15}$.

6. Αποδείξτε ότι για κάθε $n, k \geq 1$ ισχύει η ανισότητα

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

7. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε σταθερό $k \geq 1$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)\cdots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Ξεκινώντας από την $\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$ και χρησιμοποιώντας την (3.3.7) υπολογίστε τα $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ και $\sum_{i=1}^n i^4$. Σε κάθε βήμα, θα χρειαστεί να υπολογίσετε τους συντελεστές a_i στην (3.3.6), για $k = 2, 3, 4$ αντίστοιχα.

9. Αποδείξτε, με επαγωγή ως προς n , την

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{χαμηλότερες δυνάμεις του } n.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή μας δίνει αμέσως την (3.3.4).

10. Ξεκινώντας από την $\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$ και χρησιμοποιώντας την (3.3.8) υπολογίστε τα $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ και $\sum_{i=1}^n i^4$. Κάντε τη σύγκριση με την Άσκηση 8: ποιά μέθοδος είναι «γρηγορότερη»;

11. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό τύπο αναπτύξτε το δεξιό μέλος της (3.3.8) και αποδείξτε με επαγωγή ως προς k ότι

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \text{χαμηλότερες δυνάμεις του } n.$$

12. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση αποδείξτε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε

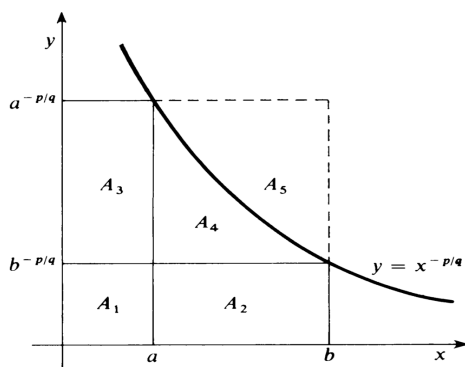
$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

13. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν κάτω από τη γενικευμένη υπερβολή $y = x^{-p/q}$ (όπου $p/q > 1$) πάνω από την ημιευθεία $[a, \infty)$ είναι ίσο με

$$\int_a^\infty x^{-p/q} dx = \frac{p}{p-q} a^{-\frac{p-q}{q}},$$

ακολουθώντας την τεχνική του Fermat: διαιρέστε τη βάση $[a, \infty)$ σε άπειρα το πλήθος υποδιαστήματα με άκρα $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, όπου $x = ar^n$ για κάποιο $r > 1$.

14. Ο Torricelli θεώρησε τη γενικευμένη υπερβολή $y = x^{-p/q}$, όπου p/q είναι ένας θετικός ρητός αριθμός, διαφορετικός από 1, και τα εμβαδά A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.16:

Απέδειξε με τη μέθοδο της εξάντλησης ότι

$$(3.6.1) \quad \frac{A_3 + A_4}{A_2 + A_4} = \frac{p}{q},$$

(α) Επαληθεύστε την (3.6.1) υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα

$$A_2 + A_4 = \int_a^b x^{-p/q} dx$$

και

$$A_3 + A_4 = \int_{b^{-p/q}}^{a^{-p/q}} y^{-q/p} dy.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την (3.6.1) και τη σχέση

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = ba^{-p/q}$$

η οποία είναι άμεση από το σχήμα, αποδείξτε ότι

$$\int_a^b x^{-p/q} dx = A_2 + A_4 = \frac{b^{-\frac{p-q}{q}} - a^{-\frac{p-q}{q}}}{\frac{q-p}{p}}.$$

15. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Neil για να δείξετε ότι η ευθειοποίηση μιας παραβολής είναι ισοδύναμη με τον τετραγωνισμό μιας παραβολής. Ειδικότερα, το μήκος s της $y = x^2$ πάνω από το $[0, a]$ ισούται με

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Κεφάλαιο 4

Οι πρώτες κατασκευές εφαπτομένης

4.1 Η μέθοδος των ψευδο-ισοτήτων του Fermat

Ο Fermat ήταν ο πρώτος ο οποίος έλυσε προβλήματα μεγίστου-ελαχίστου παίρνοντας κάπως υπόψη του τη χαρακτηριστική συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά στα ακρότατά της. Για παράδειγμα, προκειμένου να δει πώς πρέπει να χωρίσουμε ένα διάστημα μήκους b σε δύο διαστήματα με μήκη x και $b - x$ των οποίων το γινόμενο $x(b - x) = bx - x^2$ να είναι μέγιστο (δηλαδή, να βρει το ορθογώνιο περιμέτρου $2b$ που έχει μέγιστο εμβαδόν), χρησιμοποίησε το ακόλουθο επιχείρημα. Πρώτα, αντικατέστησε το x με $x + \epsilon$ και έγραψε την «ψευδο-ισότητα»

$$b(x + \epsilon) - (x + \epsilon)^2 = bx + b\epsilon - x^2 - 2x\epsilon - \epsilon^2 \sim bx - x^2,$$

θεωρώντας ότι για μικρό ϵ οι δύο ποσότητες είναι σχεδόν ίσες. Κατόπιν, διέγραψε τους ίσους όρους και διαίρεσε με ϵ , φτάνοντας στην

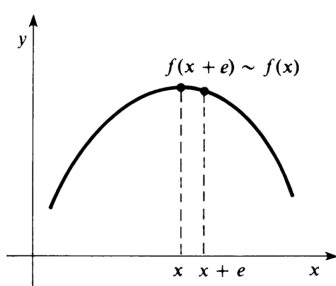
$$2x + \epsilon \sim b.$$

Τέλος, θεώρησε αμελητέο τον εναπομείναντα όρο που περιείχε το ϵ , μετασχηματίζοντας έτσι την ψευδο-ισότητα στην κανονική ισότητα

$$x = \frac{b}{2}$$

που δίνει την τιμή του x η οποία μεγιστοποιεί την $bx - x^2$.

Δυστυχώς, ο Fermat δεν εξήγησε ποτέ τη λογική βάση της μεθόδου του με επαρκή σαφήνεια ή πληρότητα ώστε να φανεί ο τρόπος με τον οποίο είχε καταλήξει σε αυτήν. Έτσι, οι ιστορικοί διαφωνούν για το τι ακριβώς εννοούσε ή ήθελε να κάνει. Μια εξήγηση, η οποία είναι πιο κοντά στις σημερινές μας γνώσεις, χωρίς απαραίτητα να αποδίδει τον τρόπο σκέψης του Fermat, είναι η ακόλουθη. Αν η $f(x)$ είναι μέγιστη τιμή τότε, αν κρίνουμε από το σχήμα παρακάτω, οι τιμές της f μεταβάλλονται πολύ αργά κοντά στο x .



Σχήμα 4.1:

Αν λοιπόν το ϵ είναι αρκετά μικρό, τότε τα $f(x)$ και $f(x + \epsilon)$ είναι σχεδόν ίσα, δηλαδή $f(x + \epsilon) \sim f(x)$ και

$$f(x + \epsilon) - f(x) \sim 0.$$

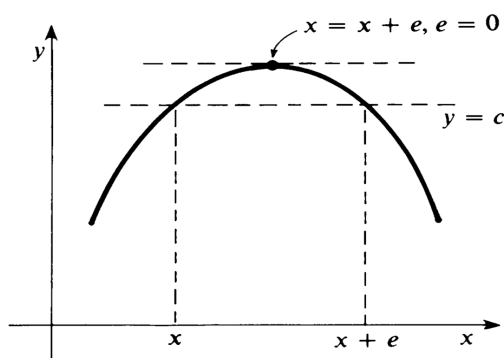
Αν η f είναι πολυωνυμική, τότε η διαφορά $f(x + \epsilon) - f(x)$ διαιρείται με ϵ , και μετά από τη διαίρεση θεωρούμε ότι εξακολουθούμε να έχουμε

$$\frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \sim 0.$$

Όμως, το όριο αυτού του πηλίκου καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$ είναι η παράγωγος σύμφωνα με το σύγχρονο ορισμό. Συνεπώς, το γεγονός ότι ο Fermat αγνοούσε τους υπόλοιπους όρους που περιείχαν το ϵ αντιστοιχεί στην

$$f'(x) = 0.$$

Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι ο Fermat δεν διατύπωνε ρητά το ότι έπαιρνε το ϵ «μικρό», και δεν έλεγε τίποτα για το όριο καθώς το ϵ τείνει στο 0. Στα γραπτά του, τουλάχιστον μία φορά έχει αναφερθεί στα x και $x + \epsilon$ με τελείως αλγεβρικό τρόπο, θεωρώντας τα διακεκριμένες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = c$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 4.2:

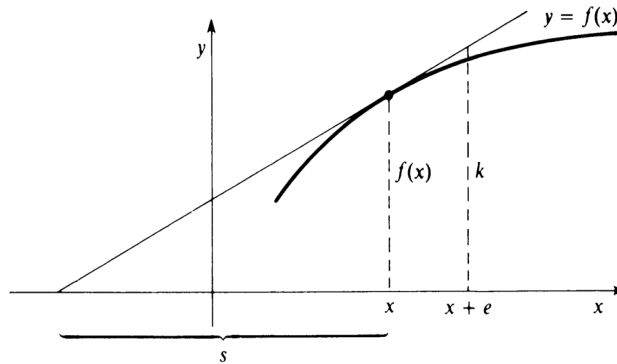
Γράφοντας $f(x + \epsilon) = f(x)$, διέγραφε τους όμοιους όρους, διαιρούσε με ϵ , και τέλος «έσβηνε» τους υπόλοιπους όρους που περιείχαν το ϵ , θεωρώντας ότι οι δύο ρίζες είναι ίσες (οπότε $\epsilon = 0$) όταν η $c = f(x)$ είναι η μέγιστη τιμή της f .

Ο Fermat χρησιμοποιούσε παρόμοιες τεχνικές «ψευδο-ισότητας» για να κατασκευάσει εφαπτόμενες. Από τα όμοια τρίγωνα του παρακάτω σχήματος, βλέπουμε ότι

$$\frac{s + \epsilon}{s} = \frac{\kappa}{f(x)}.$$

Αντικαθιστώντας $\kappa \sim f(x + \epsilon)$, βρίσκουμε την υπο-εφαπτόμενη s που δίνεται από την

$$(4.1.1) \quad s \sim \frac{\epsilon f(x)}{f(x + \epsilon) - f(x)}.$$



Σχήμα 4.3:

Αν μεταφέρουμε το ϵ από τον αριθμητή στον παρονομαστή, σχηματίσουμε το λόγο $\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$, κάνουμε τη διαίρεση και αγνοήσουμε τους όρους που περιέχουν το ϵ , παίρνουμε μια έκφραση για την υπο-εφαπτόμενη, η οποία με το σημερινό συμβολισμό αντιστοιχεί στο να γράψουμε

$$s \sim \frac{f(x)}{\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}}$$

και να πάρουμε το όριο καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$ για να φτάσουμε στην

$$(4.1.2) \quad s = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Αφού η κλίση της εφαπτόμενης είναι $f(x)/s$, η (4.1.2) μας δίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης $y = f(x)$ ισούται με την παράγωγο $f'(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την $f(x) = x^2$. Η (4.1.1) μας δίνει

$$s \sim \frac{\epsilon x^2}{(x + \epsilon)^2 - x^2} = \frac{x^2}{2x + \epsilon}.$$

Απλοποιώντας και διαγράφοντας το ϵ που απομένει, παίρνουμε $s = x/2$, άρα η κλίση της εφαπτόμενης της παραβολής $y = x^2$ είναι ίση με

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2}{x/2} = 2x.$$

4.2 Η μέθοδος του κύκλου του Descartes

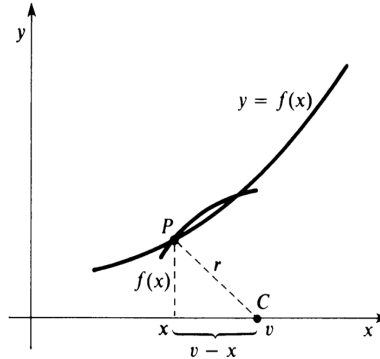
Ο Descartes επινόησε μια μέθοδο κατασκευής εφαπτόμενων που ήταν περισσότερο αλγεβρική και όχι τόσο κοντά σε τεχνικές με απειροστά. Αν και η μέθοδος του Fermat βρισκόταν πιο κοντά στις πτυχές του προβλήματος που σχετίζονται με τον απειροστικό λογισμό, η αλγεβρική προσέγγιση του Descartes άσκησε μεγαλύτερη επιρροή στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Ο Descartes εκτιμούσε τόσο πολύ τη σημασία του προβλήματος της κατασκευής εφαπτόμενης που δήλωσε κάποτε ότι «ήταν το πιο χρήσιμο και γενικό πρόβλημα που γνωρίζει αλλά και που θέλησε ποτέ να γνωρίσει στη γεωμετρία».

Για να βρει την εφαπτόμενη της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $P(x, f(x))$ προσπαθεί αρχικά να εντοπίσει το σημείο $C(v, 0)$ τομής του x -άξονα με την κάθετη στην καμπύλη στο σημείο P . Κατόπιν, η εφαπτόμενη είναι η κάθετη προς αυτήν την ευθεία που περνάει από το σημείο P .

Γενικά, ένας κύκλος με κέντρο το $C(v, 0)$ και ακτίνα $r = CP$ θα τέμνει την καμπύλη $y = f(x)$ σε ένα δεύτερο σημείο κοντά στο P (βλέπε σχήμα). Αν όμως η CP είναι η κάθετη στην καμπύλη στο P , τότε το σημείο P θα πρέπει να είναι «διπλό σημείο» τομής της καμπύλης $y = f(x)$ με τον κύκλο $y^2 + (x - v)^2 = r^2$. Υποθέτοντας ότι η $[f(x)]^2$ είναι πολυώνυμο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση

$$(4.2.1) \quad [f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = 0$$

(με τα v και r σταθερά) θα έχει την συντεταγμένη x του P ως διπλή ρίζα.



Σχήμα 4.4:

Τώρα, ένα πολυώνυμο που έχει διπλή ρίζα, ας πούμε $x = \rho$, πρέπει να είναι της μορφής

$$(x - \rho)^2 \sum_i c_i x^i.$$

Ο Descartes εξέφρασε την ιδέα ότι το ρ θα είναι διπλή ρίζα της (4.2.1) γράφοντας

$$(4.2.2) \quad [f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = (x - \rho)^2 \sum_i c_i x^i.$$

Εξισώνοντας τις δυνάμεις του x , έλυσε ως προς v συναρτήσκει της ρίζας $\rho = x$. Η κλίση της εφαπτόμενης στο P είναι τότε ίση με $(v - x)/f(x)$, αφού η κλίση της κάθετης CP είναι ίση με $-f(x)/(v - x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την παραβολή $y^2 = \kappa x$, δηλαδή $y = f(x) = \sqrt{\kappa x}$. Τότε η (4.2.1) γίνεται

$$\kappa x + (v - x)^2 - r^2 = 0.$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση, άρα το δεξιό μέλος της (4.2.2) θα πρέπει να είναι πολυώνυμο βαθμού 2. Οπότε, γράφουμε

$$\kappa x + (v - x)^2 - r^2 = (x - \rho)^2.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x παίρνουμε $\kappa - 2v = -2\rho$, δηλαδή $v = \rho + \frac{\kappa}{2}$. Αντικαθιστώντας $\rho = x$, βλέπουμε ότι $v - x = \frac{\kappa}{2}$, και η κλίση της εφαπτόμενης στην παραβολή στο $(x, \sqrt{\kappa x})$ είναι

$$\frac{v - x}{f(x)} = \frac{\kappa/2}{\sqrt{\kappa x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{x}}.$$

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την παραβολή $y = x^2$. Γράφουμε την (4.2.2) στη μορφή

$$x^4 + (v - x)^2 - r^2 = (x - \rho)^2(x^2 + ax + b),$$

διότι το αριστερό μέλος είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα. Αναπτύσσοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2vx + (v^2 - r^2) &= x^4 + (a - 2\rho)x^3 + (b - 2a\rho + \rho^2)x^2 \\ &\quad + (a\rho^2 - 2b\rho)x + b\rho^2. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας συντελεστές παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a - 2\rho &= 0 \\ b - 2a\rho + \rho^2 &= 1 \\ a\rho^2 - 2b\rho &= -2v \end{aligned}$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $v = 2\rho^3 + \rho$. Αντικαθιστώντας $\rho = x$ έχουμε $v - x = 2x^3$, και η κλίση της εφαπτόμενης της παραβολής στο σημείο (x, x^2) δίνεται από την

$$\frac{v - x}{f(x)} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

4.3 Ο κανόνας του Hudde και ο κανόνας του Sluse

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου, η απευθείας εφαρμογή της μεθόδου του Descartes ακόμα και σε απλές καμπύλες, οδηγούσε σε χρονοβόρους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Σύντομα όμως αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι για την κατασκευή εφαπτόμενων από τους Ολλανδούς μαθηματικούς Johann Hudde και René Francois de Sluse, οι οποίοι επέτρεπαν τον ευκολότερο υπολογισμό της κλίσης της εφαπτόμενης για πολύ γενικές αλγεβρικές καμπύλες.

Ο κανόνας του Hudde δίνει έναν εύκολο τρόπο για να εντοπιστούν οι διπλές ρίζες ενός πολυωνύμου, αυτό ακριβώς που χρειαζόταν κανείς για να εφαρμόσει τη μέθοδο του κύκλου του Descartes. Για δοθέν πολυώνυμο

$$F(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i,$$

ορίζουμε ένα δεύτερο πολυώνυμο $F^*(x)$ ως εξής. Οι όροι του $F(x)$, διατεταγμένοι ώστε να αυξάνεται ο βαθμός τους, πολλαπλασιάζονται με τους όρους τυχούσας αριθμητικής προόδου

$$(4.3.1) \quad a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb.$$

Το πολυώνυμο που προκύπτει είναι το

$$(4.3.2) \quad F^*(x) = \sum_{i=0}^n c_i (a + ib)x^i.$$

Παρατηρήστε ότι αν $a = 0$ και $b = 1$, οπότε ο όρος που περιέχει το x^i πολλαπλασιάζεται με i , τότε

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^n i c_i x^i = x \sum_{i=1}^n i c_i x^{i-1} = x F'(x),$$

όπου $F'(x)$ είναι η γνωστή μας σήμερα παράγωγος του πολυωνύμου $F(x)$. Στη γενική περίπτωση,

$$(4.3.3) \quad F^*(x) = aF(x) + bxF'(x).$$

Ο κανόνας του Hudde λέει ότι κάθε διπλή ρίζα της $F(x) = 0$ πρέπει να είναι ρίζα της $F^*(x)$.

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται εύκολα αλγεβρικά, με τον ακόλουθο τρόπο. Αν ρ είναι μια διπλή ρίζα του $F(x)$, μπορούμε να γράψουμε

$$F(x) = (x - \rho)^2 \sum_{i=0}^k d_i x^i = \sum_{i=0}^k d_i (x^{i+2} - 2\rho x^{i+1} + \rho^2 x^i).$$

Θέτοντας $A_i = a + bi$ έχουμε $A_{i+2} = A_i + 2b$ και $A_{i+1} = A_i + b$, άρα

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \sum_{i=0}^k d_i (A_{i+2} x^{i+2} + 2\rho A_{i+1} x^{i+1} + \rho^2 A_i x^i) \\ &= \sum_{i=0}^k d_i ((A_i + 2b)x^2 - 2\rho(A_i + b)x + \rho^2 A_i)x^i \\ &= \sum_{i=0}^k d_i (A_i(x - \rho)^2 + 2bx(x - \rho))x^i, \end{aligned}$$

απ' όπου είναι φανερό ότι ο ρ είναι ρίζα του $F^*(x)$.

Ειδικότερα, κάθε διπλή ρίζα του πολυωνύμου $F(x)$ πρέπει να είναι ρίζα της παραγώγου $F'(x)$. Ήταν μάλιστα η εμφάνιση της $F'(x)$ στο τελείως αλγεβρικό πλαίσιο του Hudde εκείνη που απέδειξε την υπολογιστική σημασία αυτού που σήμερα αποκαλούμε παράγωγο ενός πολυωνύμου.

Σαν πρώτο παράδειγμα, ας εφαρμόσουμε τον κανόνα του Hudde στην παραβολή $y^2 = \kappa x$. Ξεκινάμε με τη συνθήκη

$$F(x) = \kappa x + (v - x)^2 - r^2 = 0$$

στην οποία μας οδηγεί η μέθοδος του κύκλου του Descartes. Επιλέγοντας $a = 0$, $b = 1$ έχουμε $F^*(x) = xF'(x)$. Ο κανόνας του Hudde μας λέει ότι ο x είναι διπλή ρίζα του $F(x)$ μόνο αν είναι ρίζα της

$$F^*(x) = 1 \cdot \kappa x + 0 \cdot v^2 - 1 \cdot 2vx + 2 \cdot x^2 - 0 \cdot r^2 = \kappa x - 2vx + 2x^2 = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $v - x = \frac{\kappa}{2}$. Άρα, η κλίση της εφαπτόμενης είναι

$$\frac{v - x}{\sqrt{\kappa x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{x}},$$

όπως πριν.

Σαν δεύτερο παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτόμενης στην $y = x^n$, κάτι που θα ήταν πολύ επίπονο με απευθείας εφαρμογή της μεθόδου του Descartes στην περίπτωση $n > 2$. Η συνθήκη του κύκλου είναι

$$F(x) = x^{2n} + (v - x)^2 - r^2 = 0,$$

άρα παίρνουμε

$$F^*(x) = (2n)x^{2n} + 0 \cdot v^2 - 1 \cdot 2vx + 2 \cdot x^2 - 0 \cdot r^2 = 0,$$

δηλαδή

$$2nx^{2n} - 2vx + 2x^2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται εύκολα ως προς $v - x$ και μας δίνει $v - x = nx^{2n-1}$, άρα η κλίση της εφαπτόμενης είναι

$$\frac{v - x}{x^n} = \frac{nx^{2n-1}}{x^n} = nx^{n-1},$$

δηλαδή η γνωστή παράγωγος της x^n . Ο υπολογισμός αυτός εξακολουθεί να δουλεύει και στην περίπτωση που ο n είναι της μορφής $s/2$ για κάποιον φυσικό αριθμό s .

Στη γλώσσα της παραγωγού, η εφαρμογή του κανόνα του Hudde στη συνθήκη του κύκλου του Descartes αντιστοιχεί στο εξής: γράφουμε

$$F(x) = [f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = 0,$$

και κατόπιν λύνουμε την εξίσωση $F'(x)$ για να βρούμε το x συναρτήσει του v . Δηλαδή, θεωρούμε σταθερό σημείο $C(v, 0)$ στον x -άξονα και βρίσκουμε το x για το οποίο η απόσταση του C από το σημείο $P(x, f(x))$ της καμπύλης $y = f(x)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Hudde σε προβλήματα μεγίστου-ελαχίστου. Ο Fermat ξεκινούσε με την παρατήρηση ότι η μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή M της $f(x)$ εμφανίζεται ως διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = M$, δηλαδή της

$$F(x) = f(x) - M = 0,$$

άρα θα πρέπει να είναι ρίζα της $F^*(x) = 0$. Από την (4.3.3) βλέπουμε λοιπόν ότι ένα (τοπικό) μέγιστο ή ελάχιστο της $f(x)$ εμφανίζεται όταν έχουμε ρίζα της $f'() = 0$, όπως ακριβώς μαθαίνουμε σήμερα στον απειροστικό λογισμό.

Ο συνδυασμός του κανόνα του Hudde και της μεθόδου του κύκλου του Descartes εφαρμόζονταν μόνο σε αλγεβρικές καμπύλες που μπορούσαν να περιγραφούν στη μορφή $y = f(x)$. Όμως, ο Sluse διατύπωσε έναν κανόνα που μπορούσε να εφαρμοστεί εξίσου καλά (και ακόμα πιο εύκολα) σε αλγεβρικές καμπύλες που περιγράφονταν σε πεπλεγμένη μορφή $f(x, y) = 0$, όπου

$$f(x, y) = \sum c_{ij}x^i y^j$$

είναι ένα πολυώνυμο ως προς x και y . Για δοθείσα αριθμητική πρόοδο της μορφής (4.3.1) θεωρούμε τις

$$(4.3.4) \quad f_x^*(x, y) = \sum (a + bi)c_{ij}x^{i-1}y^j \quad \text{και} \quad f_y^*(x, y) = \sum (a + bi)c_{ij}x^i y^{j-1}.$$

Ο κανόνας του Sluse λέει ότι η κλίση m της εφαπτόμενης σε ένα σημείο (x, y) της καμπύλης $f(x, y) = 0$ δίνεται από την

$$(4.3.5) \quad m = -\frac{y}{x} \cdot \frac{f_x^*}{f_y^*}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$f_x^*(x, y) = a f(x, y) + b x f_x(x, y) \quad \text{και} \quad f_y^*(x, y) = a f(x, y) + b y f_y(x, y),$$

όπου f_x και f_y είναι οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum i c_{ij} x^{i-1} y^j \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum j c_{ij} x^i y^{j-1}.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση της προόδου με $a = 0$, $b = 1$, ο κανόνας του Sluse είναι ισοδύναμος με το γνωστό αποτέλεσμα

$$dy/dx = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

το οποίο προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας αν παραγωγίσουμε την $f(x, y) = 0$ ως προς x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Σας παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα του Sluse, ας θεωρήσουμε το «φύλλο του Descartes»

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

το οποίο είχε προτείνει ο Descartes στον Fermat ως πρόβλημα-πρόκληση για τη μέθοδό του για να κατασκευάζει παραγώγους. Παίρνοντας $a = 0$, $b = 1$ στις (4.3.4) και (4.3.5) παίρνουμε αμέσως

$$m = -\frac{y}{x} \cdot \frac{3x^3 - 3xy}{3y^3 - 3xy} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Ο κανόνας του Sluse δημοσιεύτηκε το 1673 στο Philosophical Transactions, όπου δεν δινόταν καμία εξήγηση για τον τρόπο με τον οποίο είχε ανακαλυφθεί. Μια ερμηνεία είναι ότι ο Sluse τον βρήκε εφαρμόζοντας τον κανόνα του Hudde. Αυτό μοιάζει λογικό, διότι και οι δύο χρησιμοποιούσαν τις αριθμητικές προόδους για να διατυπώσουν το αποτέλεσμά τους.

Από την αλγεβρική σκοπιά, μια εφαπτόμενη της καμπύλης $f(x, y) = \sum c_{ij}x^i y^j = 0$ είναι μια ευθεία $y = mx + \kappa$ η οποία τέμνει την καμπύλη σε ένα διπλό σημείο. Δηλαδή, η πολυωνυμική εξίσωση

$$F(x) = f(x, mx + \kappa) = 0$$

θα πρέπει να έχει διπλή ρίζα. Όμως,

$$(4.3.6) \quad F^*(x) = f_x^* + \frac{mx}{y} f_y^*,$$

άρα ο κανόνας του Hudde για την $F^*(x) = 0$ μας δίνει αμέσως τον κανόνα του sluse.

Λόγω της γραμμικότητας της διαδικασίας που μας δίνει τις F^* , f_x^* , f_y^* από τις F , f , αρκεί να ελέγξουμε ότι η (4.3.6) ισχύει μόνο στην ειδική περίπτωση $f(x, y) = x^i y^j$. Τότε,

$$F(x) = x^i (mx + \kappa)^j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} m^p x^{i+p} \kappa^{j-p}$$

από τον τύπο του διωνύμου. Άρα, για την αριθμητική πρόοδο με $a = 0$, $b = 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} m^p (i+p) x^{i+p} \kappa^{j-p} \\ &= ix^i \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (mx)^p \kappa^{j-p} + mx^{i+1} \sum_{p=1}^j p \binom{j}{p} m^{p-1} x^{p-1} \kappa^{j-p} \\ &= ix^i (mx + \kappa)^j + mx^{i+1} \sum_{p=1}^j j \binom{j-1}{p-1} m^{p-1} x^{p-1} \kappa^{j-p} \\ &= ix^i (mx + \kappa)^j + mjx^{i+1} \sum_{p=0}^{j-1} \binom{j-1}{p} (mx)^p \kappa^{j-1-p} \\ &= ix^i (mx + \kappa)^j + mjx^{i+1} (mx + \kappa)^{j-1} \\ &= ix^i y^j + mjx^{i+1} y^{j-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$F^*(x) = f_x^* + \frac{mx}{y} f_y^*,$$

όπως θέλαμε.

Όποιος κι αν ήταν ο τρόπος με τον οποίο ο Sluse ανακάλυψε τον κανόνα του, η κύρια σημασία των κανόνων του Hudde και του Sluse βρισκόταν στο ότι έδιναν γενικούς αλγορίθμους με τους οποίους μπορούσε κανείς να κατασκευάσει τις εφαπτόμενες σε αλγεβρικές καμπύλες με συγκεκριμένα βήματα. Δεν ήταν πλέον αναγκαίο να ψάχνει για ειδικές τεχνικές που να ταυριάζουν σε ειδικές καμπύλες ούτε να δίνει σε κάθε περίπτωση πλήρη απόδειξη για τη διαδικασία που ακολουθούσε.

4.4 Απειροστικές μέθοδοι για την χάραξη εφαπτόμενης

Αμέσως μετά από τη διατύπωση των αλγεβρικών κανόνων του Hudde και του Sluse, γύρω στο 1650, δόθηκαν εναλλακτικές αποδείξεις αυτών και άλλων κανόνων με απειροστικές μεθόδους. Οι μέθοδοι αυτές βρίσκονταν πολύ πιο κοντά στις ιδέες του Fermat παρά σε αυτές του Descartes, και κατά κάποιον τρόπο «έβλεπαν» την εφαπτόμενη στο σημείο P μιας καμπύλης σαν την οριακή θέση μιας χορδής PQ καθώς το Q πλησιάζει το P βρισκόμενο πάνω στην καμπύλη.

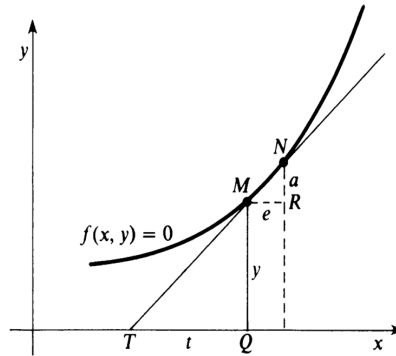
Μια τέτοια μέθοδος περιγράφεται από τον Isaac Barrow (1630-1677) στις *Γεωμετρικές Διαλέξεις* του, οι οποίες δημοσιεύτηκαν το 1670 αλλά βασίζονταν σε διαλέξεις που δόθηκαν στο Cambridge στα μέσα του 1660, και τις οποίες πιθανότατα παρακολούθησε το 1664-65 ο Isaac Newton. Το μεγαλύτερο μέρος των δημοσιευμένων διαλέξεων του Barrow ασχολείται με προβλήματα εφαπτόμενων και τετραγωνισμού, τα οποία αντιμετωπίζει περισσότερο με κλασικό και γεωμετρικό τρόπο παρά με αναλυτικό πνεύμα. Για παράδειγμα, υιοθετεί γενικά τον Ελληνικό ορισμό της εφαπτόμενης σε μια καμπύλη ως μιας ευθείας η οποία αγγίζει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο. Όμως, στο τέλος της 10ης Διάλεξης γράφει:

Έχουμε τώρα ολοκληρώσει κατά κάποιον τρόπο το πρώτο μέρος του θέματός μας, όπως το είχαμε προγραμματίσει. Σαν συμπλήρωμα προσθέτουμε, υπό μορφή παραρτημάτων, μια μέθοδο εύρεσης εφαπτόμενων μέσω υπολογισμών, την οποία χρησιμοποιούμε συχνά. Παρόλο που δεν γνωρίζω αν υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου μετά από τις τόσες πολύ γνωστές και ευρύτατα χρησιμοποιημένες μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω, την παρουσιάζω κι αυτήν ακούγοντας τις συμβουλές ενός φίλου (σημείωση: ο φίλος ήταν, όπως φάνηκε αργότερα, ο Newton). Και το κάνω με μεγάλη προθυμία, διότι φαίνεται πολύ πιο εύχρηστη και γενική από τις μεθόδους που έχω παρουσιάσει.

Συνεχίζει περιγράφοντας μια τροποποίηση, δική του όπως φαίνεται, μιας μεθόδου που είχε επινοήσει (αλλά δεν είχε δημοσιεύσει) ο Fermat για να κατασκευάσει εφαπτόμενες σε καμπύλες που ορίζονται πεπλεγμένα από μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$. Θεωρώντας ένα «απείρως μικρό τόξο» MN της καμπύλης (βλέπε σχήμα), γράφει $M(x, y)$ και $N(x + \epsilon, y + a)$ για τις συντεταγμένες τους και θέτει

$$(4.4.1) \quad f(x + \epsilon, y + a) = f(x, y) = 0,$$

αφού τα σημεία M και N είναι και τα δύο πάνω στην καμπύλη. Στη συνέχεια διαγράφει «όλους τους όρους που περιέχουν κάποια δύναμη του a ή του ϵ καθώς και τα γινόμενα αυτών» διότι αυτοί οι όροι δεν έχουν καμία αξία.



Σχήμα 4.5:

Τέλος, αγνοώντας τη διαφορά του «απείρως μικρού τόξου» MN από το ευθύγραμμο τμήμα \overline{MN} , παρατηρεί ότι το τρίγωνο TQM είναι όμοιο με το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» MNR , και λύνει την (4.4.1) (με διαγραμμένους τους όρους υψηλότερης τάξης ως προς a και ϵ) για να βρει την κλίση $y/t = a/\epsilon$ της εφαπτόμενης στο M . Βλέπουμε λοιπόν ότι ο Barrow εφαρμόζει τη μέθοδο του «χαρακτηριστικού τριγώνου» - ουσιαστικά την ιδέα ότι η εφαπτόμενη είναι η οριακή θέση της χορδής καθώς τα a και ϵ τείνουν στο 0 - και παίρνει το όριο με το «τέχνασμα» της διαγραφής των «υψηλότερης τάξης απειροστών».

Για παράδειγμα, για το φύλλο του Descartes, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$, γράφουμε

$$(x + \epsilon)^3 + (y + a)^3 - 3(x + \epsilon)(y + a) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

δηλαδή

$$3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 + 4y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3t\epsilon - 3a\epsilon = 0.$$

Διαγράφοντας όλους τους όρους βαθμού μεγαλύτερου από 1 ως προς a και ϵ παίρνουμε

$$3x^2\epsilon + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0,$$

και λύνουμε ως προς την κλίση:

$$m = \frac{a}{\epsilon} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Γενικά, αν μας δοθεί η καμπύλη

$$f(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j = 0,$$

γράφουμε

$$\sum_{i,j} c_{ij} (x + \epsilon)^i (y + a)^j = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j.$$

Αναπτύσσοντας τα $(x + \epsilon)^i$ και $(y + a)^j$ με το διωνυμικό τύπο, παίρνουμε

$$\sum_{i,j} c_{ij} (x^i + ix^{i-1}\epsilon + \dots)(y^j + jy^{j-1}a + \dots) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j.$$

Διαγράφοντας όλους τους όρους βαθμού μεγαλύτερου από 1 ως προς a και ϵ παίρνουμε

$$\sum_{i,j} c_{ij}(ix^{i-1}y^j\epsilon + jx^iy^{j-1}a) = 0,$$

άρα η κλίση της εφαπτόμενης είναι

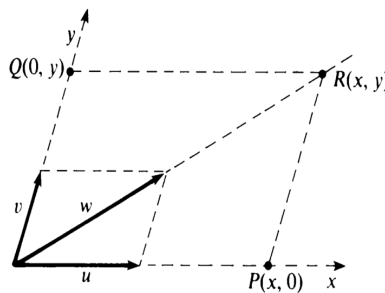
$$m = \frac{a}{\epsilon} = -\frac{\sum_{i,j} ic_{ij}x^{i-1}y^j}{\sum_{i,j} jc_{ij}x^iy^{j-1}} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$

Δηλαδή, η μέθοδος του Barrow δίνει μια αναλυτική απόδειξη του κανόνα του Sluse.

4.5 Σύνθεση στιγμιαίων κινήσεων

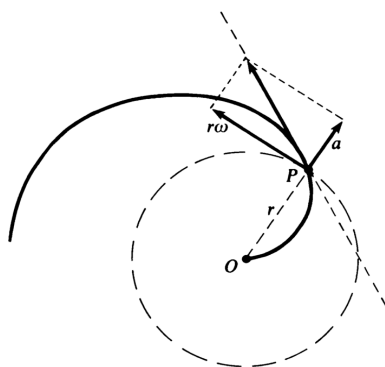
Στη διάρκεια των δεκαετιών 1630 και 1640 μια άλλη προσέγγιση στις εφαπτόμενες, που βασίζονταν στη διαισθητική έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, αναπτύχθηκε από τον Torricelli και ιδιαίτερα από τον de Roberval ο οποίος ήταν καθηγητής στο College Royal στη Γαλλία. Η ιδέα τους (που δεν ήταν νέα) ήταν να θεωρήσουν μια καμπύλη ως την τροχιά ενός κινούμενου σημείου και την εφαπτόμενη ως την ευθεία της στιγμιαίας κίνησης αυτού του σημείου. Αν η κίνηση του σημείου που γεννούσε την καμπύλη μπορούσε να ιδωθεί ως η συνισταμένη ή ο συνδυασμός δύο αρξετά απλών κινήσεων, τότε η ευθεία της στιγμιαίας κίνησης μπορούσε να προσδιοριστεί από τη σύνθεση των δύο συνιστωσών κινήσεων.

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση σταθερών διανυσμάτων ταχύτητας ήταν γνωστός. Δηλαδή, αν τα σημεία P και Q κινούνται κατά μήκος δύο τεμνόμενων ευθειών με σταθερά διανύσματα ταχύτητας \vec{u} και \vec{v} αντίστοιχα, και αν δούμε αυτές τις ευθείες ως x -άξονα και y -άξονα, τότε η κίνηση του σημείου R , του οποίου οι x και y συντεταγμένες δίνονται από τα P και Q , έχει διάνυσμα ταχύτητας το $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 4.6:

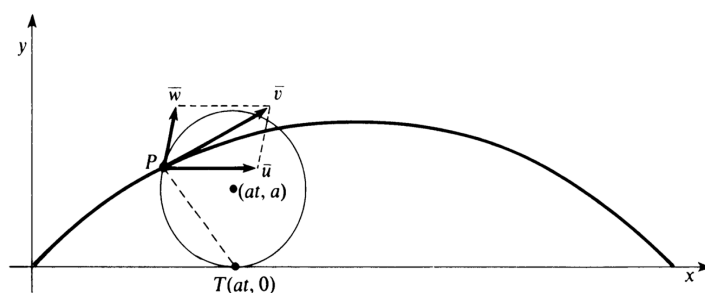
Ο Roberval έκανε ένα βήμα παραπέρα και εφάρμοσε τον κανόνα του παραλληλογράμμου σε διανύσματα *στιγμιαίας* ταχύτητας. Δηλαδή, έχοντας μια κίνηση σημείου που μπορούσε να αναλυθεί σε δύο απλούστερες κινήσεις, υπέθεσε ότι το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας του σημείου είναι το άθροισμα των διανυσμάτων στιγμιαίας ταχύτητας που αντιστοιχούν στις δύο απλούστερες κινήσεις.



Σχήμα 4.7:

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη σπείρα του Αρχιμήδη που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τις $r = at$ και $\theta = \omega t$. Η κίνηση του σημείου $P(at, \omega t)$ κατά μήκος της σπείρας μπορεί να θεωρηθεί ως η συνισταμένη μιας ακτινικής κίνησης (που απομακρύνει το σημείο από την αρχή των αξόνων) και μιας κυκλικής κίνησης. Για να βρούμε την εφαπτόμενη της σπείρας στο P , κατασκευάζουμε ένα ακτινικό διάνυσμα μήκους a (την ακτινική ταχύτητα) και ένα διάνυσμα μήκους $r\omega$ (τη γωνιακή ταχύτητα) που εφάπτεται στον κύκλο ακτίνας r που περνάει από το P . Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που ορίζεται από αυτά τα διανύσματα είναι το διάνυσμα ταχύτητας στο P , άρα προσδιορίζει την εφαπτόμενη της σπείρας στο P (βλέπε το παραπάνω σχήμα).

Μια μεγάλη επιτυχία της μεθόδου της στιγμιαίας κίνησης ήταν ο προσδιορισμός της εφαπτόμενης της κυκλοειδούς. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο ακτίνας a ο οποίος αρχικά εφάπτεται στον x -άξονα στην αρχή των αξόνων και στη συνέχεια κυλίνεται κατά μήκος του x -άξονα με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα. Τότε, η κυκλοειδής είναι η τροχιά του σημείου P του κύκλου το οποίο βρισκόταν αρχικά στην αρχή των αξόνων, και δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τις $x = a(t - \sin t)$ και $y = a(1 - \cos t)$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 4.8:

Ο Roberval θεώρησε ότι η κίνηση του σημείου P κατά μήκος της κυκλοειδούς είναι η σύνθεση μιας ομοιόμορφης μετατόπισης προς τα δεξιά με ταχύτητα a και μιας περιστροφής κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα, η οποία την χρονική στιγμή t έχει κέντρο το σημείο (at, a) . Τα αντίστοιχα διανύσματα στιγμιαίας ταχύτητας

δίνονται σε ορθογώνιες συντεταγμένες από τις

$$\vec{u} = (a, 0) \text{ (μεταφορά)}$$

και

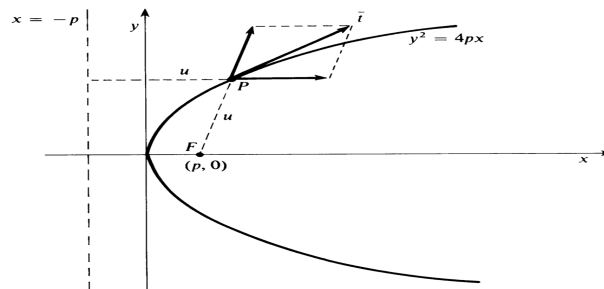
$$\vec{w} = (-a \cos t, a \sin t) \text{ (περιστροφή).}$$

Το άθροισμά τους (το οποίο υπολογίζεται σε ορθογώνιες συντεταγμένες με πρόσθεση των συντεταγμένων) είναι το διάνυσμα ταχύτητας

$$\vec{v} = (a(1 - \cos t), a \sin t),$$

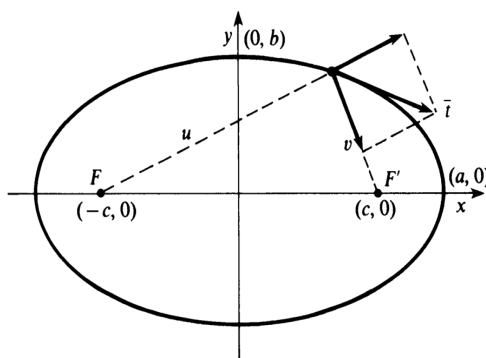
και προσδιορίζει την εφαπτόμενη της κυκλοειδούς στο P . Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που θα παίρναμε αν παραγωγίζαμε κατά συντεταγμένη το διάνυσμα θέσης $(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$. Από τη σημερινή σκοπιά, η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνει (τουλάχιστον σε αυτό το παράδειγμα) την ορθότητα της διαδικασίας της σύνθεσης των διανυσμάτων στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της πρόσθεσης διανυσμάτων.

Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η παραβολή $y^2 = 4px$ που είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τη διευθετούσα $x = -p$ και την εστία $F(p, 0)$. Ένα σημείο P που κινείται κατά μήκος της παραβολής, και υπόκειται σε αυτή τη συνθήκη, έχει ίσες συνιστώσες ταχύτητας στις διευθύνσεις που απομακρύνονται από τη διευθετούσα και από την εστία. Φαίνεται λοιπόν ότι η εφαπτόμενη στην παραβολή στο P πρέπει να είναι η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν η ευθεία PF και η κάθετος από το P προς τη διευθετούσα (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 4.9:

Όμοια, μια έλλειψη μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους, u και v , από δύο εστίες F και F' , αντίστοιχα, είναι σταθερό: $u + v = 2a$. Αν ένα σημείο P κινείται κατά μήκος της έλλειψης, και υπόκειται σε αυτή τη συνθήκη, τότε ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται το u και ο ρυθμός με τον οποίο ελαττώνεται το v πρέπει να είναι ίσοι. Δηλαδή, το σημείο πλησιάζει την εστία F με τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο απομακρύνεται από την εστία F' . Φαίνεται λοιπόν ότι η εφαπτόμενη στην έλλειψη στο P πρέπει να είναι η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν δύο μοναδιαία διανύσματα με αρχή το P , αυτό που απομακρύνεται από το F και αυτό που κατευθύνεται προς το F' (βλέπε σχήμα).

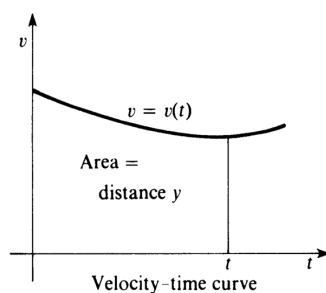


Σχήμα 4.10:

4.6 Η σχέση μεταξύ ολοκλήρωσης και εφαπτόμενης

Η εφαρμογή των εννοιών του χρόνου και της κίνησης στη μελέτη των καμπυλών οδήγησε τους Torricelli και Barrow σε κάποια διαισθητική κατανόηση της αντίστροφης σχέσης του προβλήματος του εμβαδού με το πρόβλημα της χάραξης εφαπτόμενης, δηλαδή της αντίστροφης σχέσης της ολοκλήρωσης με την παραγωγήιση.

Οι μελέτες του Μεσαίωνα και η μεταγενέστερη δουλειά του Γαλιλαίου υπεδείκνυαν ότι η κίνηση ενός σημείου κατά μήκος μιας ευθείας, με μεταβλητή ταχύτητα, μπορούσε να αναπαρασταθεί από τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως συνάρτησης του χρόνου. Συλλογισμοί βασισμένοι στα αδιαίρετα υπεδείκνυαν με τη σειρά τους ότι η συνολική απόσταση που διανύει το σημείο πρέπει να είναι ίση με το εμβαδόν κάτω από αυτή την καμπύλη ταχύτητα-χρόνου, γιατί η απόσταση που διανύει σε απειροστό χρονικό διάστημα είναι ίση με το γινόμενο αυτού του χρονικού διαστήματος με τη στιγμιαία ταχύτητα (βλέπε σχήμα).



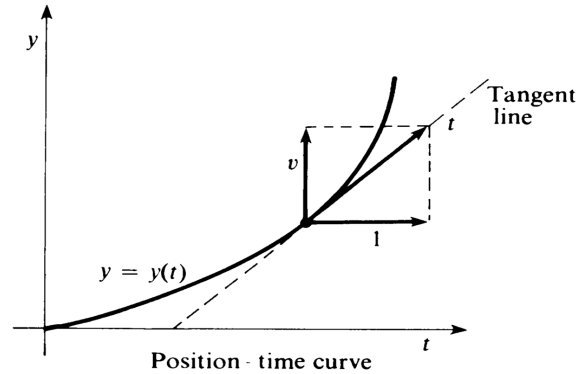
Σχήμα 4.11:

Για παράδειγμα, αν το σημείο ξεκινούσε την κίνησή του τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κινούνταν με ταχύτητα $v = t^n$ τη χρονική στιγμή t , τότε η απόσταση που θα διήνυε θα ήταν ίση με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $v = t^n$, δηλαδή

$$(4.6.1) \quad y = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Από την άλλη πλευρά, η ίδια κίνηση μπορούσε να παρασταθεί με το γράφημα της θέσης ως

συνάρτησης του χρόνου. Αν ένα σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(t)$ με οριζόντια ταχύτητα 1 και κατακόρυφη ταχύτητα v , τότε το διάνυσμα της ταχύτητας αυτού του σημείου είναι το άθροισμα ενός οριζόντιου διανύσματος μήκους 1 και ενός κατακόρυφου διανύσματος μήκους v (βλέπε σχήμα). Συνεπώς, η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη $y = y(t)$ θα είναι η ταχύτητα v .



Σχήμα 4.12:

Για παράδειγμα, αν η απόσταση που διανύεται σε χρόνο t δίνεται από την (4.6.1) τότε η ταχύτητα πρέπει να είναι ίση με

$$(4.6.2) \quad v = t^n,$$

γιατί η t^n είναι η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη $y = t^{n+1}/(n+1)$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι (4.6.1) και (4.6.2) συνεπάγονται η μία την άλλη. Παρόλο που τα δύο αποτελέσματα

το εμβαδόν κάτω από την $y = x^n$ είναι $x^{n+1}/(n+1)$

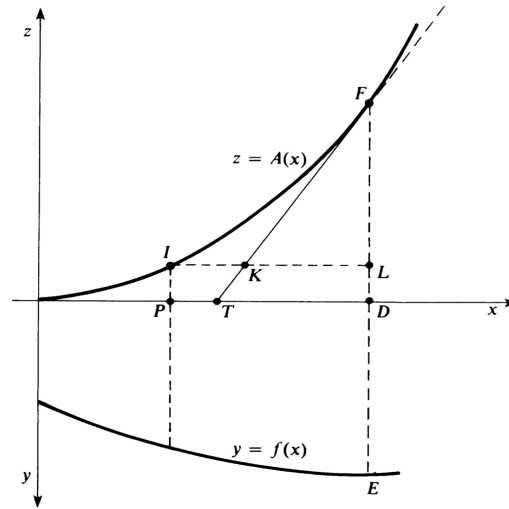
και

η εφαπτόμενη της καμπύλης $y = x^{n+1}/(n+1)$ έχει κλίση x^n

είχαν αποδειχθεί με τελείως διαφορετικά επιχειρήματα, η σχέση ανάμεσα στα δύο σχήματα έδειχνε ότι το ένα προέκυπτε από το άλλο.

Πιο συγκεκριμένα, η σχέση ανάμεσα στα δύο αυτά σχήματα είναι ότι η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη εμβαδού $y = y(t)$ είναι ίση με την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης της αρχικής καμπύλης. Αυτή η παρατήρηση είναι μια εμβρυακή διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού (και ήταν η αφετηρία του Newton).

Ούτε ο Torricelli ούτε ο Barrow εκμεταλλεύτηκαν με κάποιο τρόπο μια έστω διαισθητική μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Παρόλο που ο Barrow ξεκινούσε τις «Γεωμετρικές Διαλέξεις» του μελετώντας καμπύλες με αναφορές στην έννοια της κίνησης, στο τέλος διατύπωνε αποτελέσματα που είχαν αυστηρά γεωμετρικό και στατικό χαρακτήρα. Αυτό φαίνεται από το πλησιέστερο προς το θεμελιώδες θεώρημα αποτέλεσμα που συναντάει κανείς στο βιβλίο του: Για ευκολία, θεωρούμε τον y -άξονα και τον z -άξονα προσανατολισμένους όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.13:

Δίνεται μια αύξουσα θετική συνάρτηση $y = f(x)$ και $z = A(x)$ είναι το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη $y = f(x)$ και το διάστημα $[0, x]$ του x -άξονα. Αν $D(x_0, 0)$ είναι ένα σημείο στον x -άξονα, θεωρούμε το σημείο T του x -άξονα για το οποίο

$$DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}.$$

Τότε, ο Barrow ισχυρίζεται ότι η ευθεία TF αγγίζει την καμπύλη $z = A(x)$ μόνο στο σημείο $F(x_0, f(x_0))$.

Παρατηρήστε ότι η κλίση της TF είναι ίση με

$$\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)} = f(x_0).$$

Αν ο Barrow ισχυριζόταν ότι η TF είναι εφαπτόμενη της καμπύλης $z = A(x)$ με την αναλυτική έννοια, έχοντας κατάλληλα ορίσει την κλίση $A'(x_0)$, αυτό το αποτέλεσμα θα αναλογούσε στο συμπέρασμα ότι $A'(x_0) = f(x_0)$, το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Όμως, ο Barrow ισχυρίζεται απλώς (και το αποδεικνύει) ότι η TF είναι εφαπτόμενη της $z = A(x)$ με την έννοια των αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή ότι είναι μια ευθεία που αγγίζει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο.

Για να το αποδείξει, θεωρεί πρώτα τυχόν σημείο $I(x_1, A(x_1))$ στην καμπύλη, για κάποιο $x_1 < x_0$, και προχωράει αποδεικνύοντας ότι το σημείο K , η τομή της οριζόντιας ευθείας IL με την TF , βρίσκεται δεξιά από το I όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αυτό φαίνεται ως εξής: παρατηρούμε ότι $LF/LK = DF/DT = DE$ (από τον ορισμό του σημείου T), άρα $LF = LK \times DE$. Όμως,

$$LF = DF - PI = A(x_0) - A(x_1) < DP \times DE,$$

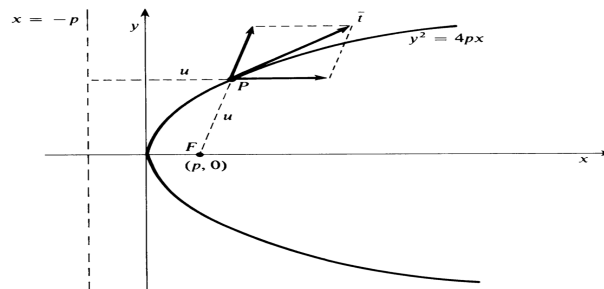
διότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση. Συνεπώς, $LK \times DE < DP \times DE$, άρα $LK < DP = LI$ όπως θέλαμε.

Η περίπτωση $x_1 > x_0$ εξετάζεται με τον ίδιο τρόπο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το αποτέλεσμα του Barrow, το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί ως μια πρόωμη διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, στην πραγματικότητα διατυπώθηκε από αυτόν με ένα πνεύμα πιο κοντινό στην κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία απ' ό,τι στον απειροστικό λογισμό που βρισκόταν επί θύραις. Αξίζει τον κόπο να προσθέσουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα με την ίδια απόδειξη είχε δημοσιευθεί λίγο νωρίτερα, το 1668, από τον James Gregory (1638-1675), ο οποίος είχε καταλήξει και σε κάποια από τα πιο κρίσιμα συμπεράσματα των Newton και Leibniz, αλλά δεν τα είχε δημοσιεύσει και ο πρόωρος θάνατός του είχε ως συνέπεια να μην αναγνωριστεί όσο έπρεπε η συμβολή του.

4.7 Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = \sum a_i x^i$ είναι ένα πολυώνυμο, αποδείξτε ότι η διαφορά $f(x + \epsilon) - f(x)$ διαιρείται με ϵ .
2. Εφαρμόστε τυπικά τη μέθοδο του Fermat για να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x) = bx^2 - x^3$ στο $0 \leq x \leq b$.
3. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Fermat για να δείξετε ότι η υπο-εφαπτόμενη της $y = x^n$ είναι $s = x/n$, άρα η κλίση της εφαπτόμενης είναι nx^{n-1} .
4. Αν $y = x^{3/2}$, εφαρμόστε τη μέθοδο του κύκλου του Descartes για να δείξετε ότι η υπο-κάθετος είναι $v - x = 3x^2/2$ και η κλίση της εφαπτόμενης είναι $3\sqrt{x}/2$.
5. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Descartes σε συνδυασμό με τον κανόνα του Hudde για να δείξετε ότι η κλίση της εφαπτόμενης της $y = (x^2 + 1)^{3/2}$ είναι $3x(x^2 + 1)^{1/2}$.
6. Αποδείξτε ότι αν ο κανόνας του Sluse εφαρμοστεί στην $y = \sum c_i x^i$ δίνει $m = \sum ic_i x^{i-1}$.
7. Εφαρμόστε τον κανόνα του Sluse για το φύλλο του Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, παίρνοντας όμως $a = 2$ και $b = 1$. Ποιά είναι η τιμή βρίσκετε για το m ;
8. Εφαρμόστε τη μέθοδο του τλBarrow για την $y = x^n$ και αποδείξτε ότι η κλίση της εφαπτόμενης είναι $\alpha/\epsilon = nx^{n-1}$.
9. Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην κυκλοειδή είναι κάθετο στην ευθεία που περνάει από το σημείο P της κυκλοειδούς και το σημείο T στο οποίο εφαπτονται ο κυλιόμενος κύκλος και ο x -άξονας.
10. Έστω u η απόσταση ενός σημείου P κινούμενου πάνω στην παραβολή $y^2 = 4px$ από την διευθετούσα $x = -p$ και την εστία $(p, 0)$.



Σχήμα 4.14:

Αν το σημείο κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε $u' = x' = 1$ (έχει μοναδιαία οριζόντια ταχύτητα), αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{t} που φαίνεται στο σχήμα είναι το

$$\vec{t} = \left(\frac{2x}{x+p}, \frac{y}{x+p} \right),$$

ενώ το πραγματικό διάνυσμα ταχύτητας του P είναι το

$$\vec{v} = (1, \sqrt{p/x}).$$

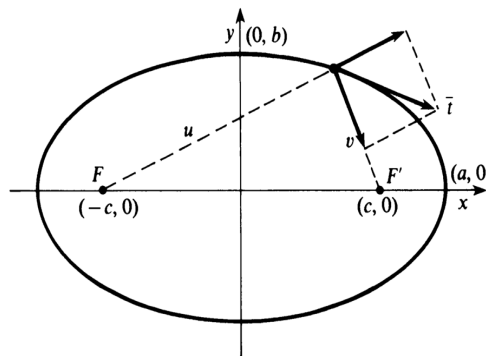
Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι τα \vec{t} και \vec{p} έχουν την ίδια κατεύθυνση, αλλά

$$|\vec{t}| = 2\sqrt{\frac{x}{x+p}} \quad \text{ενώ} \quad |\vec{v}| = \sqrt{\frac{x+p}{x}}.$$

11. Συμβολίζουμε με u και v τις αποστάσεις του σημείου P της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις εστίες $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$ αντίστοιχα, όπου $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Τότε,

$$u = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad v = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Υποθέτουμε ότι το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και ικανοποιεί τη συνθήκη $u + v = 2a$, με $u' = 1$ και $v' = -1$.



Σχήμα 4.15:

Αποδείξτε ότι, όταν το P βρίσκεται στο σημείο $(0, b)$ τότε το διάνυσμα \vec{t} που φαίνεται στο σχήμα είναι το $\vec{t} = (2c/a, 0)$, ενώ το πραγματικό διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v} = (x', y')$ είναι το $\vec{v} = (a/c, 0)$.

[Υπόδειξη. Αφαιρώντας τις εξισώσεις $(x+c)^2 + y^2 = u^2$ και $(x-c)^2 + y^2 = v^2$ παίρνουμε $4xc = u^2 - v^2$.]

Κεφάλαιο 5

Η ανακάλυψη της διωνυμικής σειράς

5.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο σημαντικά σημεία στην εξέλιξη του απειροστικού λογισμού είναι η ανάπτυξη και η εφαρμογή τεχνικών για τις άπειρες σειρές. Οι σειρές εμφανίστηκαν φυσιολογικά στη μελέτη των κλασικών τότε προβλημάτων του απειροστικού λογισμού, των προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών και εύρεσης εφαπτόμενης. Για παράδειγμα, για να εφαρμοστούν οι τότε υπάρχουσες μέθοδοι σε υπερβαϊκές ή «μηχανικές» συναρτήσεις, ήταν συχνά απαραίτητο να εκφράσει κανείς αυτές τις συναρτήσεις σαν άπειρα αθροίσματα και να τα ολοκληρώσει ή να τα παραγωγίσει όρο προς όρο. Έτσι, αν η συνάρτηση $f(x)$ μπορούσε να «αναπτυχθεί» σαν άπειρη δυναμοσειρά

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

τότε φαινόταν λογικό ότι η παράγωγός της θα δινόταν από την

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

και ότι αντίστοιχο αποτέλεσμα θα ισχύει για το ολοκλήρωμα. Η νομιμότητα αυτής της διαδικασίας δεν είχε τεθεί σε αμφισβήτηση στον 17ο αιώνα. Βέβαια, η δυνατότητα αυτή γεννούσε διάφορα ερωτήματα σχετικά με τη συμπεριφορά των άπειρων σειρών σε σχέση με τις γνωστές αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της εξαγωγής ριζών. Τα ερωτήματα αυτά απαντήθηκαν καταφατικά, με τελικό συμπέρασμα ότι η άλγεβρα των άπειρων σειρών υπακούει στους ίδιους νόμους με αυτήν των πεπερασμένων αλγεβρικών ποσοτήτων.

Το κεντρικό γεγονός σε αυτή τη διαδικασία της «νομιμοποίησης» της χρήσης και της απόλαυσης των άπειρων σειρών ήταν η ανακάλυψη της διάσημης διωνυμικής σειράς από τον Newton. Σε σύγχρονο συμβολισμό, η διωνυμική σειρά παίρνει τη μορφή

$$(5.1.1) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n,$$

όπου ο α είναι τυχών πραγματικός αριθμός και οι «διωνυμικοί συντελεστές» ορίζονται από την

$$(5.1.2) \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Η αναγκαία συνθήκη $|x| < 1$ για τη σύγκλιση της διωνυμικής σειράς δεν διατυπώθηκε από τον Newton.

Στην περίπτωση που ο εκθέτης α είναι φυσικός αριθμός, η (5.1.2) ξαναγράφεται στη μορφή

$$(5.1.3) \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$$

αν $n \leq \alpha$, ο συντελεστής είναι όμως ίσος με 0 αν $n > \alpha$, οπότε στην (5.1.1) έχουμε απλώς ένα πολυώνυμο, όπως το γνωστό

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Αν όμως ο α δεν είναι φυσικός αριθμός, τότε η (5.1.1) μας δίνει ένα ανάπτυγμα της $(1+x)^\alpha$ σε άπειρη σειρά, όπως τα

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

ή

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

Για να εκτιμήσει κανείς το μέγεθος του επιτεύγματος του Newton, της εύρεσης της διωνυμικής σειράς 1665, θα πρέπει να το δει στο πλαίσιο δύο σχετικών ιστορικών στοιχείων. Το πρώτο είναι ότι η χρήση μη ακέραιων εκθετών ήταν τότε άγνωστη. Ο σύγχρονος εκθετικός συμβολισμός A^n για τις δυνάμεις είχε εισαχθεί από τον Descartes στη Γεωμετρία του, το 1637, και ήταν γενικά σε χρήση το 1660. Στο *Arithmetica infinitorum* του 1655, ο Wallis είχε αναφέρει αρνητικούς και κλασματικούς «δείκτες». Όμως, οι κλασματικοί και αρνητικοί εκθέτες εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη μελέτη του Newton για τη διωνυμική σειρά.

Το δεύτερο πράγμα που πρέπει να θυμάται κανείς είναι ότι ο διωνυμικός τύπος για την περίπτωση θετικών ακέραιων δυνάμεων δεν ήταν γνωστός σε μορφή που να υποδεικνύει με ποιον τρόπο θα μπορούσε να γενικευτεί για αρνητικές ή κλασματικές δυνάμεις. Οι διωνυμικοί συντελεστές δεν ήταν γνωστοί ως αριθμοί που προκύπτουν από έναν απλό τύπο όπως ο (5.1.3). Ήσαν καταγεγραμμένοι ως όροι στο « τρίγωνο του Pascal », το οποίο φαίνεται ότι ήταν γνωστό από τους μεσαιωνικούς χρόνους, σε έναν πίνακα δηλαδή, όπου κάθε όρος είναι το άθροισμα των δύο όρων που βρίσκονται στην προηγούμενη γραμμή, αριστερά και δεξιά από αυτόν:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Σχήμα 5.1:

Οι αριθμοί της n -οστής γραμμής (ξεκινώντας από το 0 και μετρώντας από πάνω προς τα κάτω) έδιναν τους συντελεστές των δυνάμεων του x στο διωνυμικό ανάπτυγμα του $(1+x)^n$.

Αν γράψουμε τους αριθμούς του τριγώνου του Pascal στη μορφή ενός πίνακα (βλέπε παρακάτω) με μονάδες στη μηδενική γραμμή και στήλη, τότε ο κανόνας με τον οποίο σχηματίζεται αυτός ο πίνακας μας δίνει ότι ο όρος $b_{p,q}$ στην p -οστή γραμμή και q -οστή στήλη δίνεται από την

$$(5.1.4) \quad b_{p,q} = b_{p,q-1} + b_{p-1,q}.$$

Είναι δηλαδή το άθροισμα των δύο όρων που βρίσκονται ακριβώς από πάνω και αριστερά από τον $b_{p,q}$. Ο διωνυμικός τύπος για θετικούς ακέραιους εκθέτες γράφεται τότε ως εξής:

$$(5.1.5) \quad (1+x)^n = \sum_{p=0}^n b_{p,n-p} x^p.$$

p	q				
	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70

Σχήμα 5.2:

Με μια έννοια, ο Newton αντιμετώπισε το πρόβλημα της γενίκευσης της (5.1.5) ώστε να καλυφθεί η περίπτωση όπου ο n δεν είναι φυσικός αριθμός, σαν ένα πρόβλημα παρεμβολής μεταξύ των γραμμών και στηλών του τριγώνου του Pascal, εκφρασμένου στη μορφή του παραπάνω πίνακα. Ζητούσε λοιπόν κάποιον φυσιολογικό τρόπο, συνεπή με την (5.1.4), με τον οποίο θα μπορούσε να προσθέσει νέες γραμμές και στήλες στον πίνακα, οι οποίες να αντιστοιχούν στις μη ακέραιες τιμές των p και q .

Ο Newton χρησιμοποίησε σαν μοντέλο για το σκοπό αυτό, παρόμοια διαδικασία που είχε χρησιμοποιήσει ο Wallis δέκα χρόνια νωρίτερα, για να πάρει το φημισμένο του απειρογινόμενο για τον π :

$$(5.1.6) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots.$$

Στις μέρες μας ο τύπος του Wallis αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων

$$(5.1.7) \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

και

$$(5.1.8) \quad I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

και είναι ένα σημαντικό βήμα για την απόδειξη του ασυμπτωτικού τύπου του Stirling για το παραγοντικό

$$(5.1.9) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

όπου το σύμβολο \sim σημαίνει ότι το όριο του λόγου των δύο μελών της (5.1.9) καθώς το $n \rightarrow \infty$ είναι ίσο με 1.

Η διαδικασία με την οποία ο Wallis ανακάλυψε την (5.1.6) δεν ήταν αρκετή για να την αποδείξει, όπως και η διαδικασία που χρησιμοποίησε ο Newton για να βρει τη διωνυμική σειρά δεν ήταν αρκετή για να αποδείξει ότι αυτό το ανάπτυγμα ισχύει. Ούτε ο Newton ούτε και κανείς άλλος δεν έδωσε αυστηρή απόδειξη, μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα. Όμως αυτό δεν έχει καμία σημασία: η ανακάλυψη και μόνο ήταν αρκετή για να καθιερώσει τις άπειρες σειρές σαν εργαλείο του απειροστικού λογισμού.

5.2 Η μέθοδος παρεμβολής και το απειρογινόμενο του Wallis

Στο τελευταίο μέρος του έργου του *Αριθμητική του Απείρου* (1665) ο Wallis προσπαθεί να υπολογίσει, χρησιμοποιώντας την αριθμητική του μέθοδο, το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου

$$(5.2.1) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Εκείνη την εποχή, φυσικά, δεν χρησιμοποιούσε τα σύμβολα π και \int . Γράφει \square για τον αντίστροφο του εμβαδού που προσπαθούσε να υπολογίσει και, αρχικά, επιχειρεί να υπολογίσει το άθροισμα που σήμερα θα μας έδινε

$$\frac{1}{\square} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}.$$

Ένα άθροισμα Riemann δηλαδή για το ολοκλήρωμα της (5.2.1), το οποίο αντιστοιχεί στη διαμέριση του $[0, 1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα.

Καθώς δεν μπορούσε να υπολογίσει απευθείας αυτό το άθροισμα, ακολούθησε μια πολύ διαφορετική και ευφάνταστη οδό, η οποία τον οδήγησε σε σωστο αποτέλεσμα (και θα μπορούσε να συγκριθεί μόνο με μεταγενέστερα αντίστοιχα τεχνάσματα του Euler). Η κατάληξη είναι η αναπαράσταση του π στη μορφή απειρογινόμενου που συζητήσαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου.

Αφετηρία του ήταν το γεγονός ότι γνώριζε, και είχε ήδη αιτιολογήσει στην *Αριθμητική του Απείρου*, ότι

$$(5.2.2) \quad \int_0^1 x^{p/q} dx = \frac{1}{(p/q) + 1} = \frac{q}{p + q}$$

στην περίπτωση που οι p και q είναι θετικοί ακέραιοι. Η σχέση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό οποιουδήποτε ολοκληρώματος της μορφής

$$(5.2.3) \quad \int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx.$$

Για παράδειγμα,

$$\int_0^1 (1 - x^{1/3})^2 dx = \int_0^1 (1 - 2x^{1/3} + x^{2/3}) dx = 1 - \frac{2}{\frac{1}{3} + 1} + \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{10}.$$

Σκοπός του ήταν να ανακαλύψει έναν γενικό τύπο για ολοκληρώματα αυτής της μορφής, συναρτήσει των p και q , και μετά να αντικαταστήσει σε αυτόν $p = q = \frac{1}{2}$ ώστε να υπολογίσει το

$$\frac{1}{\square} = \int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} dx.$$

Για να ανακαλύψει το μοτίβο που ακολουθούσαν αυτά τα ολοκληρώματα, προτίμησε να δουλέψει με τους αντίστροφους τους. Δηλαδή, έθεσε

$$f(p, q) = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx}.$$

Άρχισε να υπολογίζει τις τιμές $a_{p,q} := f(p, q)$ για $p, q \leq 10$, και κατέγραψε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, όπου η τιμή $a_{p,q} = f(p, q)$ έχει τοποθετηθεί στην p -οστή γραμμή και q -οστή στήλη.

p	q						
	0	1	2	3	4	...	10
0	1	1	1	1	1	...	1
1	1	2	3	4	5	...	11
2	1	3	6	10	15	...	66
3	1	4	10	20	35	...	286
4	1	5	15	35	70	...	1001
...
10	1	11	66	286	1001	...	184756

Σχήμα 5.3:

Με βάση τις υπολογισμένες τιμές του πίνακα, για $p, q \leq 10$, ο Wallis θεώρησε προφανές ότι (για κάθε p και q) ο πίνακας έδινε τους διωνυμικούς συντελεστές. Δηλαδή, ότι σε κάθε θέση του πίνακα μπαίνει το άθροισμα του αριθμού που βρίσκεται ακριβώς από πάνω και του αριθμού που βρίσκεται ακριβώς αριστερά. Αυτό αιτιολογείται σήμερα, εύκολα, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα και τον ορισμό της συνάρτησης Βήτα (βλέπε ασκήσεις). Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$a_{p,q} = \binom{p+q}{p}.$$

Από αυτή την παρατήρηση έβγαλε αμέσως το συμπέρασμα ότι ο πίνακας των τιμών πρέπει να έχει διαγώνια συμμετρία, δηλαδή $a_{p,q} = a_{q,p}$ για κάθε p και q . Πέρα όμως από αυτό, διέκρινε αναδρομικές σχέσεις οι οποίες του έδωσαν την ιδέα να κάνει παρεμβολή μεταξύ των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Για παράδειγμα, η δεύτερη γραμμή ($p = 2$) του πίνακα σχηματίζεται από τους «τριγωνικούς» αριθμούς

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots,$$

που δίνονται από την

$$a_{2,q} = \frac{1}{2}(q+1)(q+2).$$

Όμοια, η τρίτη γραμμή ($p=3$) σχηματίζεται από τους αριθμούς «τύπου 3»

$$1, 4, 10, 20, 35, \dots,$$

που δίνονται από την

$$a_{3,q} = \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3).$$

Γενικά,

$$(5.2.4) \quad a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\cdots(q+p),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$(5.2.5) \quad a_{p,q} = \frac{p+q}{q}a_{p,q-1}.$$

Ο Wallis σκέφτηκε να επεκτείνει τον πίνακά του με παρεμβολή, προσθέτοντας γραμμές και στήλες που να αντιστοιχούν στα μισά των ακεραίων p και q . Ειδικότερα, αυτο θα δημιουργούσε θέση για το ζεύγος $p=q=\frac{1}{2}$, για το οποίο $a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \square$. Ξεκίνησε, αντικαθιστώντας τέτοιες τιμές του q στην (5.2.4) ώστε να βρει νέα στοιχεία για την p -οστή γραμμή του πίνακά του. Για παράδειγμα, έθεσε

$$a_{2,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 2 \right)$$

και

$$a_{2,\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \left(\frac{5}{2} + 2 \right) \left(\frac{5}{2} + 3 \right) = \frac{693}{48}.$$

Λόγω της διαγώνιας συμμετρίας, αυτό προσέθετε την ίδια στιγμή τιμές $a_{p,q}$ για p μισό ακεραίου, ανάμεσα στα στοιχεία της q -οστής στήλης του πίνακά του. Το αποτέλεσμα αυτής της παρεμβολής τιμών $a_{p,q}$ για το p ή το q μισό ακεραίου (όχι όμως και τους δύο) δημιούργησε τον παρακάτω επεκτεταμένο πίνακα.

n		0	1	2	3	4	5	6	...
		q							
m	p	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
0	0	1	1	1	1	1	1	1	...
1	$\frac{1}{2}$	1	\square	$\frac{3}{2}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{105}{48}$...
2	1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	...
3	$\frac{3}{2}$	1		$\frac{5}{2}$		$\frac{35}{8}$		$\frac{315}{48}$...
4	2	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	...
5	$\frac{5}{2}$	1		$\frac{7}{2}$		$\frac{63}{8}$		$\frac{693}{48}$...
6	3	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	...

Σχήμα 5.4:

Η άγνωστη τιμή $a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \square$ έχει τοποθετηθεί κι αυτή στον πίνακα. Αυτό που απέμενε ήταν το κρίσιμο βήμα με το οποίο θα «γέμιζαν τα κενά» του πίνακα. Για ευκολία, στη συνέχεια θέτουμε

$$m = 2p, \quad n = 2q, \quad b_{m,n} = a_{p,q} = a_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}.$$

Όταν οι m και n είναι άρτιοι φυσικοί, από την (5.2.5) βλέπουμε ότι

$$b_{m,n} = a_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}} = \frac{m/2 + n/2}{n/2} a_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2} - 1},$$

δηλαδή

$$(5.2.6) \quad b_{m,n} = \frac{m+n}{n} b_{m,n-2}.$$

Όμως, ο Wallis παρατήρησε ότι η (5.2.6) ικανοποιείται και από εκείνα τα στοιχεία $b_{m,n}$ που αντιστοιχούν σε m ή n περιττό. Για παράδειγμα, από την $b_{1,2} = \frac{3}{2}$ παίρνουμε

$$b_{1,4} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2},$$

και από την $b_{4,1} = \frac{15}{8}$ παίρνουμε

$$b_{4,3} = \frac{7}{3} \times \frac{15}{8} = \frac{35}{8}.$$

Χρησιμοποίησε λοιπόν την (5.2.6) για να γεμίσει τις υπόλοιπες θέσεις της γραμμής $m = 1$ (και, λόγω συμμετρίας, της στήλης $n = 1$) συναρτήσει του αγνώστου \square . Για παράδειγμα,

$$b_{1,3} = \frac{4}{3} b_{1,1} = \frac{4}{3} \square,$$

και

$$b_{1,5} = \frac{6}{5} b_{1,3} = \frac{8}{5} \square.$$

Τέλος, γέμισε τα υπόλοιπα κενά του πίνακα χρησιμοποιώντας το «γεγονός» ότι

$$(5.2.7) \quad b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}.$$

Όταν ο m και ο n είναι άρτιοι, η (5.2.7) προκύπτει φυσικά από την $a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q}$ του προηγούμενου πίνακα, δηλαδή από το τρίγωνο του Pascal. Ο Ωάλλις απλούστατα υπέθεσε ότι, δια της «αναλογίας», η (5.2.7) θα εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που ο m ή ο n και οι δύο θα είναι περιττοί. Για παράδειγμα, έχοντας ήδη υπολογίσει τον $b_{1,3} = b_{3,1} = \frac{4}{3} \square$, από την (5.2.7) παίρνουμε

$$b_{3,3} = \frac{4}{3} \square + \frac{4}{3} \square = \frac{8}{3} \square.$$

Επίσης,

$$b_{3,5} = b_{3,3} + b_{1,5} = \frac{8}{3} \square + \frac{8}{5} \square = \frac{64}{15} \square,$$

και ούτω καθεξής.

Το τελευταίο βήμα για τον υπολογισμό του $\square = b_{1,1}$ έρχεται από την, συμπληρωμένη πλέον, πρώτη γραμμή ($m = 1$):

	n							
m	0	1	2	3	4	5	6	...
1	1	\square	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{105}{48}$...

Σχήμα 5.5:

Από την (5.2.6) με $m = 1$ έχουμε

$$b_{1,n} = \frac{n+1}{n} b_{1,n-2}.$$

Έπεται εύκολα με επαγωγή ότι

$$(5.2.8) \quad b_{1,n} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$$

αν ο n είναι άρτιος, ενώ

$$(5.2.9) \quad b_{1,n} = \frac{\square}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$$

αν ο n είναι περιττός.

Είναι επίσης φανερό από τον ορισμό

$$b_{1,n} = \frac{1}{\int_0^1 (1-x^2)^{n/2} dx}$$

ότι η ακολουθία $\{b_{1,n}\}$ είναι γνησίως αύξουσα:

$$b_{1,1} < b_{1,2} < b_{1,3} < \cdots < b_{1,n} < b_{1,n+1} < \cdots$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (5.2.8) και (5.2.9) στην

$$b_{1,2n-1} < b_{1,2n} < b_{1,2n+1}$$

παίρνουμε

$$\frac{\square}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} < \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} < \frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k-1},$$

και αναδιατάσσοντας καταλήγουμε στην

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} < \frac{2}{\square} < \left[\prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \right] \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Δεδομένου ότι $\frac{2}{\square} = \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2n+2}{2n+1} \rightarrow 1$ καθώς το $n \rightarrow \infty$, τελικά έχουμε

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots,$$

όπως θέλαμε.

Είδαμε λοιπόν ότι ο Wallis έφτασε στο περίφημο απειρογινόμενό του μέσα από διάφορες αναπόδεικτες υποθέσεις οι οποίες, όπως φαίνεται από τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου, μπορούν να ελεγχθούν αυστηρά με χρήση των στοιχειωδών ιδιοτήτων της συνάρτησης Γάμμα. Το γεγονός ότι ο Wallis αιτιολογούσε δια «της αναλογίας» δεν ξέφυγε από την κριτική των συγχρόνων του. Ο Thomas Hobbes (1588-1679) επιτέθηκε συνολικά στην *Αριθμητική του Απέριου* και ο Fermat επέκρινε την ατελή επαγωγή του. Ο Wallis απάντησε στο έργο του *Άλγεβρα* (1685) ότι σκοπός του «δεν ήταν τόσο να παρουσιάσει μια μέθοδο Απόδειξης αυτών που ήσαν ήδη γνωστά όσο να δείξει μια μέθοδο Διερεύνησης για να βρεθούν πράγματα που δεν ήσαν γνωστά». Και συνέχισε: «βλέπω λοιπόν την ατελή επαγωγή σαν μια πολύ καλή μέθοδο διερεύνησης, η οποία πολύ συχνά μας οδηγεί στην εύκολη ανακάλυψη ενός Γενικού Κανόνα, ή έστω, μας προετοιμάζει πολύ καλά για κάτι τέτοιο».

5.3 Ο Newton και η διωνυμική σειρά

Το ανάπτυγμα της δωνυμικής σειράς, στο οποίο κατέληξε ο Newton μελετώντας το *Arithmetica infinitorum* το 1665, ήταν η πρώτη σημαντική μαθηματική ανακάλυψή του. Δεν το δημοσίευσε κάπου, το περιέγραψε όμως στις δύο διάσημες επιστολές του 1676, τα οποία κατέθεσε στον γραμματέα της Royal Society of London για να διαβιβαστούν στον Leibniz. Στην πρώτη επιστολή (με ημερομηνία 3 Ιουνίου 1676) διατυπώνει το ανάπτυγμα

$$(P + Q)^{m/n} = P^{m/n} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m/n}{k} Q^k \right],$$

όπου οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται από την

$$\binom{m/n}{k} = \frac{1}{k!} \binom{m}{n} \binom{m}{n} - 1 \dots \binom{m}{n} - k + 1.$$

Οι διωνυμικοί συντελεστές θετικών ακεραίων ήταν πιθανότατα γνωστοί εκατοντάδες χρόνια πριν. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι, διατυπώνοντας τη γενίκευση για θετικούς ή αρνητικούς ρητούς m/n , ο Newton εισάγει για πρώτη φορά τη χρήση αρνητικών ή ρητών εκθετών στους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Ο Wallis έγραφε $1/a^2$ και έλεγε ότι «ο αριθμός έχει δείκτη -2 » ή « \sqrt{a} που έχει δείκτη $1/2$ ». Ο Newton γράφει καθαρά ότι: «αντί για \sqrt{a} , $\sqrt{a^3}$ θα γράφω $a^{1/2}$, $a^{3/2}$ και αντί για $1/a$, $1/aa$, $1/a^3$ θα γράφω a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} ».

Στην πρώτη επιστολή προσθέτει εννέα παραδείγματα, μεταξύ των οποίων τα εξής:

$$\begin{aligned} (c^2 + x^2)^{1/2} &= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \dots, \\ (d + e)^{4/3} &= d^{4/3} + \frac{4ed^{1/3}}{3} + \frac{2e^2}{9d^{2/3}} - \frac{4e^3}{81d^{5/3}} + \dots, \\ \frac{1}{d + e} &= \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \dots, \\ (d + e)^{-3} &= \frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \dots. \end{aligned}$$

Απαντώντας σε αίτημα του Leibniz για περισσότερες διευκρινίσεις σχετικά με τον τρόπο που βρήκε τη διωνυμική σειρά, ο Newton στέλνει δεύτερη επιστολή (με ημερομηνία 24 Οκτωβρίου 1676) στην οποία περιγράφει τα βήματα που ακολούθησε. Ο διωνυμικός τύπος για ακέραιες θετικές δυνάμεις δεν ήταν ως τότε γνωστός σε μορφή που να επιτρέπει απλή αντικατάσταση ενός ακεραίου εκθέτη με έναν ρητό. Ο τρόπος με τον οποίο έφτασε σε αυτόν ο Newton ήταν μέσα από μια πολύπλοκη διερεύνηση την οποία εμπνεύστηκε από τη μέθοδο της παρεμβολής του Wallis.

Ο Newton θεώρησε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{n/2} dt,$$

ενώ ο Wallis είχε θεωρήσει μόνο την ακολουθία αριθμών

$$a_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n/2} dt.$$

Όταν ο n είναι άρτιος, μπορεί να υπολογίσει την τιμή $f_n(x)$, αφού γνωρίζει από τον Wallis ότι

$$\int_0^x t^p dt = \frac{x^{p+1}}{p+1}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1(x), \\ f_2(x) &= 1(x) + 1 \left(-\frac{1}{3}x^3 \right), \\ f_4(x) &= 1(x) + 2 \left(-\frac{1}{3}x^3 \right) + 1 \left(\frac{1}{5}x^5 \right), \\ f_6(x) &= 1(x) + 3 \left(-\frac{1}{3}x^3 \right) + 3 \left(\frac{1}{5}x^5 \right) + 1 \left(-\frac{1}{7}x^7 \right), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Παρατηρεί ότι οι ακεραίοι διωνυμικοί συντελεστές εμφανίζονται ως «τα ψηφία των δυνάμεων του αριθμού 11». Ο Newton θέλει να κάνει παρεμβολή, για n περιττό, των συντελεστών της άπειρης σειράς

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \left[(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \right].$$

Ειδικότερα, όταν $n = 1$ αυτό θα δώσει το εμβαδόν ενός τμήματος του κύκλου.

Οι λεπτομέρειες της διαδικασίας που ακολούθησε περιέχονται σε ένα αδημοσίευτο κείμενο που χρονολογείται από το 1665. Αρχικά παρατηρεί ότι αν ο n είναι άρτιος τότε οι πρώτοι δύο συντελεστές είναι

$$a_{0n} = 1 \quad \text{και} \quad a_{1n} = \frac{n}{2}.$$

Υποθέτει λοιπόν ότι το ίδιο ισχύει και όταν ο n είναι περιττός. Το πρόβλημά του είναι να συμπληρώσει τις τιμές που λείπουν στον παρακάτω πίνακα των συντελεστών a_{mn} (αυτές που είναι σημειωμένες με αστερίσκο).

m	n								
	0	1	2	3	4	5	6	...	10
0	1	1	1	1	1	1	1	...	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...	5
2	0	*	0	*	1	*	3	...	10
3	0	*	0	*	0	*	1	...	10
4	0	*	0	*	0	*	0	...	5
5	0	*	0	*	0	*	0	...	1

Σχήμα 5.6:

Παρατηρεί ότι, λόγω του γνωστού κανόνα για τους ακέραιους διωνυμικούς συντελεστές, ισχύει η

$$(5.3.1) \quad a_{m,n+2} = a_{m-1,n} + a_{m,n},$$

άρα, με το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε τώρα, οι διαδοχικές γραμμές του υποπίνακα που αποτελείται μόνο από τις γνωστές (με n άρτιο) στήλες θα έχουν την παρακάτω μορφή:

m	n						
	0	1	2	3	4	5	6
0	a	a	a	a	a	a	a
1	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$
2	c	$b+c$	$a+2b+c$	$3a+3b+c$	$6a+4b+c$	$10a+5b+c$	$15a+6b+c$
3	d	$c+d$	$b+2c+d$	$a+3b+3c+d$	$4a+6b+4c+d$	$10a+10b+5c+d$	$20a+15b+6c+d$

Σχήμα 5.7:

Στη συνέχεια υποθέτει, όπως θα έκανε και ο Wallis, ότι οι γραμμές του πλήρους πίνακα (παραπάνω) έχουν την ίδια μορφή, μόνο που οι σταθερές a, b, c, \dots πρέπει να προσδιοριστούν χωριστά για κάθε γραμμή. [Αυτό προκύπτει αυστηρά αν υποθέσουμε ότι, για κάθε m , οι a_{mn} συμπεριφέρονται ως πολυώνυμο του n που έχει βαθμό m .]

Εξισώνοντας τις τιμές του a_{2n} , με n άρτιο, τις οποίες δίνει ο πρώτος πίνακας, με τις αντίστοιχες τιμές της γραμμής $m = 2$ του δεύτερου πίνακα, παίρνουμε τις εξισώσεις

$$0 = c$$

$$0 = a + 2b + c$$

$$1 = 6a + 4b + c.$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα παίρνουμε $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$, $c = 0$. Συνεπώς,

$$a_{21} = b + c = -\frac{1}{8}, \quad a_{23} = 3a + 3b + c = \frac{3}{8}, \quad \dots$$

Γράφοντας αρκετούς όρους για τη γραμμή $m = 4$ καταλήγει σε ένα σύστημα, το οποίο λύνει, και παίρνει

$$a_{41} = -\frac{5}{128} \quad \text{και} \quad a_{43} = \frac{3}{128}.$$

Οι τιμές των a_{m1} που έχει υπολογίσει ως τώρα, δίνουν

$$f_1(x) = \int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{8} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{16} \frac{x^7}{7} - \frac{5}{128} \frac{x^9}{9} + \dots$$

Μάλιστα ο Newton συνέχισε με αυτό τον τρόπο και υπολόγισε τους συντελεστές $a_{51} = \frac{7}{256}$ του $-\frac{x^{11}}{11}$ και $a_{61} = -\frac{21}{1024}$ του $\frac{x^{13}}{13}$. Σε αυτό το σημείο ήταν ήδη σε θέση να μαντέψει τη γενική μορφή των συντελεστών, δηλαδή ότι προκύπτουν ως διαδοχικά μερικά γινόμενα του

$$\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} \times \frac{\frac{1}{2} - 3}{4} \times \dots$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}, \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 2}{3}, \\ -\frac{5}{128} &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} \times \frac{\frac{1}{2} - 3}{4}, \end{aligned}$$

και γενικά

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) (\frac{1}{2} - 2) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}$$

με το σύγχρονο συμβολισμό.

Συμπερασματικά, ο Newton ανακάλυψε τον γενικό διωνυμικό συντελεστή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Wallis της «ολοκλήρωσης με παρεμβολή». Συνεχίζει τότε στην επιστολή του γράφοντας το εξής:

Όταν το είδα αυτό, αμέσως άρχισα να σκέφτομαι ότι θα μπορούσα να κάνω παρεμβολή στους όρους

$$(1-x^2)^{0/2}, \quad (1-x^2)^{2/2}, \quad (1-x^2)^{4/2}, \quad (1-x^2)^{6/2}, \quad \dots$$

ακριβώς όπως έκανα για τα εμβαδά που προκύπτουν από αυτούς. Και ότι δεν χρειαζόταν να κάνω τίποτε άλλο από το να παραλείψω απλώς τους παρονομαστές 1, 3, 5, 7 κλπ. οι οποίοι εμφανίζονται στους όρους που εκφράζουν αυτά τα εμβαδά. Δηλαδή, οι συντελεστές του αναπτύγματος του $(1-x^2)^m$ προκύπτουν από διαδοχικά γινόμενα της σειράς

$$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$$

Δηλαδή, με όρο προς όρο παραγωγή του προηγούμενου αποτελέσματος του παίρνει

$$(1 - x^2)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} x^{2k},$$

όπου

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

Παραθέτει ως παραδείγματα τα

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^{1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots, \\ (1 - x^2)^{3/2} &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \dots, \\ (1 - x^2)^{1/3} &= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 + \dots. \end{aligned}$$

Ο Newton γνώριζε φυσικά ότι αυτή η διερεύνηση του προβλήματος με τη μέθοδο της παρεμβολής δεν συνιστούσε αυστηρή απόδειξη. Για να ελέγξει τα αποτελέσματά του, ύψωσε στο τετράγωνο μερικά αθροίσματα της σειράς που είχε βρει για την $(1 - x^2)^{1/2}$ και είδε ότι το τετράγωνο δίνει $1 - x^2$ με την έννοια ότι οι υπόλοιπες δυνάμεις του x έχουν συντελεστή 0 λόγω του ότι οι συντελεστές με τους οποίους εμφανίζονται κατά την ύψωση στο τετράγωνο αλληλοανααιρούνται (αν φυσικά πάρει αρκετούς όρους στο μερικό άθροισμα).

Μετά από αυτή την επαλήθευση, ο Newton σκέφτηκε να εξετάσει αν, αντίστροφα, «αυτές οι σειρές, που ήταν πλέον ελεγμένα ρίζες της ποσότητας $1 - x^2$, μπορούσαν να βρεθούν με αριθμητικό τρόπο». Σε αυτό το σημείο, σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει μια παραλλαγή της μεθόδου του Viète για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού N , την οποία γνώριζε από τις προηγούμενες σπουδές του.

Ξεκινώντας από μια εκτίμηση A της \sqrt{N} , συμβολίζουμε με E το σφάλμα, δηλαδή $\sqrt{N} = A + E$. Τότε,

$$N - A^2 = (A + E)^2 - A^2 = 2AE + E^2 \simeq 2AE,$$

άρα

$$E \simeq \frac{N - A^2}{2A},$$

αν ο A είναι αρκετά καλή προσέγγιση της \sqrt{N} ώστε να θεωρήσουμε τον E^2 μικρό σε σύγκριση με τον $2AE$. Αυτό μας δίνει τη βάση για τον υπολογισμό της \sqrt{N} με διαδοχικές προσεγγίσεις, ως εξής. Ξεκινώντας με μια αρχική εκτίμηση x_1 της \sqrt{N} , ορίζουμε

$$(5.3.2) \quad x_{n+1} = x_n + \frac{N - x_n^2}{2x_n} = x_n + e_n,$$

όπου

$$e_n = \frac{N - x_n^2}{2x_n}.$$

Παρατηρήστε ότι $N - x_{n+1}^2 = (N - x_n^2) - 2x_n e_n - e_n^2$, άρα ο αριθμητής του e_{n+1} προκύπτει από τον αριθμητή του e_n με απλές αφαιρέσεις.

Η μέθοδος του Viète διδασκόταν σε μαθητές σχολείου με τον τρόπο που δείχνει το επόμενο σχήμα:

$$\begin{array}{rcl}
 N & = & 54,756 \quad x_1 = 200 \\
 x_1^2 & = & 40,000 \quad e_1 = 10 \left[\frac{-14,756}{10(400)} \right] = 30 \\
 \hline
 N - x_1^2 & = & 14,756 \quad x_2 = 230 \\
 2x_1e_1 & = & 12,000 \quad e_2 = \left[\frac{-1,856}{460} \right] = 4 \\
 e_1^2 & = & 900 \quad x_3 = 234 \\
 \hline
 N - x_2^2 & = & 1856 \\
 2x_2e_2 & = & 1840 \\
 e_2^2 & = & 16 \\
 \hline
 N - x_3^2 & = & 0
 \end{array}$$

Σχήμα 5.8:

Έτσι έβρισχε κανείς ότι $\sqrt{54,756} = 234$.

Για να ελέγξει το διωνυμικό ανάπτυγμα που είχε βρει για την $(1-x^2)^{1/2}$, ο Newton εφάρμοσε μια πιστή προσαρμογή της μεθόδου του Viète. Ξεκινώντας με $y_1 = 1$, χρησιμοποίησε την αναδρομική σχέση

$$y_{n+1} = y_n + e_n,$$

όπου e_n είναι ο όρος με τον χαμηλότερο βαθμό στο

$$\frac{(1-x^2) - y_n^2}{2},$$

παρατηρώντας ότι

$$(1-x^2) - y_{n+1}^2 = (1-x^2 - y_n^2) - 2y_n e_n - e_n^2$$

για να διευκολυνθεί στους διαδοχικούς υπολογισμούς. Όπως γράφει στην επιστολή του, «τα πράγματα εξελίχθηκαν καλά – αυτός ήταν ο σωστός τρόπος δουλειάς για την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών»:

$$\begin{array}{r}
 1-x^2 \quad (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.}) \\
 \hline
 1 \\
 -x^2 \\
 \hline
 -x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\
 \hline
 -\frac{1}{4}x^4 \\
 -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \\
 \hline
 -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
 \end{array}$$

Σχήμα 5.9:

Παρόμοιος υπολογισμός, ο οποίος περιγράφεται στο επόμενο σχήμα, δίνει το ανάπτυγμα της $\sqrt{1+x^2}$:

$$\begin{array}{r}
 1+x^2 \qquad (1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} \dots \\
 \hline
 x^2 \\
 x^2+x^4/4 \\
 \hline
 -x^4/4 \\
 -x^4/4 - x^6/8 + x^8/64 \\
 \hline
 x^6/8 - x^8/64 \\
 x^6/8 + x^8/16 - x^{10}/64 + x^{12}/256 \\
 \hline
 -5x^8/64 + x^{10}/64 - x^{12}/256.
 \end{array}$$

Σχήμα 5.10:

Με τον ίδιο τρόπο ο Newton ανακάλυψε τη διαδικασία της αλγεβρικής διαίρεσης πολυωνύμων. Η διωνυμική σειρά του με $m = -1$ έδωσε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots,$$

και παρατήρησε ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν «δουλέψουμε με γενικές μεταβλητές όπως ακριβώς κάνουμε στην αριθμητική για τη διαίρεση δεκαδικών αριθμών». Γράφει τον «αλγόριθμο» της διαίρεσης στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{array}{r}
 1+x \overline{)1} \qquad (1 - x + x^2 - x^3 \dots \\
 \underline{-x} \\
 -x - x^2 \\
 \underline{-x - x^2} \\
 x^2 \\
 x^2 + x^3 \\
 \underline{-x^3} \\
 -x^3 - x^4 \\
 \underline{-x^3 - x^4} \\
 x^4 \dots
 \end{array}$$

Σχήμα 5.11:

Μάλιστα, ο Newton είχε αρχικά ανακαλύψει για πρώτη φορά τη γεωμετρική σειρά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Wallis για το εμβαδόν

$$A = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{1+x}$ στο διάστημα $[0, x]$. Υπολόγισε τους συντελεστές a_{mn} στο ανάπτυγμα

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \frac{x^m}{m}$$

για $n = 0, 1, 2, 3, 4$, ώστε να συμπληρώσει τον παρακάτω πίνακα:

m	n					
	-1	0	1	2	3	4
1		1	1	1	1	1
2		0	1	2	3	4
3		0	0	1	3	6
4		0	0	0	1	4
5		0	0	0	0	1
6		0	0	0	0	0

Σχήμα 5.12:

Υποθέτοντας ότι η γνωστή τριγωνική σχέση του Pascal

$$a_{m-1,n} + a_{m,n} = a_{m,n+1}$$

ισχύει και όταν $n = -1$, καθώς και ότι $a_{1,-1} = 1$, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι

$$a_{m,-1} = (-1)^{m+1}.$$

Συνεπώς, η «παρεμβολή» δίνει ως αποτέλεσμα την

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Είναι επιβεβαιωμένο ότι αυτός ήταν ο τρόπος με τον οποίο ο Newton κατέληξε αρχικά στη σειρά του Mercator! Στη συνέχεια παρατήρησε ότι θα έπαιρνε το ίδιο αποτέλεσμα ολοκληρώνοντας όρο προς όρο τη γεωμετρική σειρά.

Το πιο εντυπωσιακό στοιχείο στις αναζητήσεις του Newton για τα διωνυμικά αναπτύγματα είναι η πορεία της ανακάλυψης. Άρχισε με τον τετραγωνισμό κυκλικών και ελλειπτικών τμημάτων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής του Wallis. Κατόπιν, με παραγωγή όρο προς όρο των αποτελεσμάτων του, ανακάλυψε τη διωνυμική σειρά. Τέλος, για να επαληθεύσει τη διωνυμική σειρά οδηγήθηκε σε αλγεβρικές μορφές των γνωστών αριθμητικών διαδικασιών για τη διαίρεση και την εξαγωγή ριζών.

Το τελευταίο αποτέλεσμα, η εφαρμογή των γνωστών διαδικασιών της αριθμητικής στις άπειρες σειρές, ήταν ακόμα πιο σημαντικό από το φημισμένο αποτέλεσμα της διωνυμικής σειράς. Έδειξε ότι η ανάλυση των άπειρων σειρών είχε την ίδια εσωτερική συνέπεια με την άλγεβρα των πεπερασμένων ποσοτήτων και υπάκουε στους ίδιους γενικούς κανόνες. Έτσι, οι άπειρες σειρές εξελίχθηκαν από εργαλεία προσέγγισης σε εναλλακτικές εκφράσεις των συναρτήσεων που αναπαριστούσαν. Ο ίδιος ο Newton έγραψε, αρκετά αισιόδοξα: «ό,τι μπορεί να κάνει η συνήθης ανάλυση μέσω εξισώσεων που σχηματίζονται από πεπερασμένο πλήθος όρων (δηλαδή, πολυώνυμα) μπορεί η μέθοδος που παρουσιάζω να το κάνει για εξισώσεις που σχηματίζονται από άπειρους όρους (δηλαδή, άπειρες σειρές)». Έτσι, ο Newton διέλυσε τον «τρόμο του απείρου» που είχε εμποδίσει τους Έλληνες. Νομιμοποίησε τη χρήση των άπειρων σειρών, και η

εκτεταμένη χρήση τους επρόκειτο να παίξει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη και τις εφαρμογές του νέου απειροστικού λογισμού.

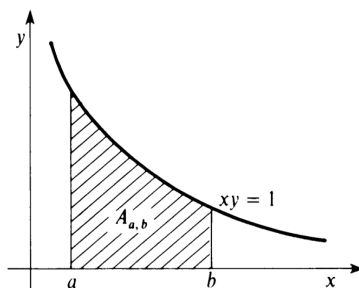
5.4 Λογάριθμοι και υπερβολικά εμβαδά

Οι λογάριθμοι ορίστηκαν από τον Napier και ο ορισμός τους τροποποιήθηκε από τον Briggs. Οι λογαριθμικοί πίνακες που δημιούργησαν τόσο αυτοί όσο και οι επόμενοι τους έπαιξαν αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη της επιστήμης των αριθμητικών υπολογισμών. Η σημασία όμως των λογαρίθμων για την εξέλιξη του απειροστικού λογισμού πηγάζει από μια ανακάλυψη του Βέλγου Ιησουίτη Gregory St. Vincent, η οποία δημοσιεύτηκε το 1647 και συνδέει αναπάντεχα τη φυσική λογαριθμική συνάρτηση με την υπερβολή $xy = 1$.

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα στον θετικό άξονα. Συμβολίζουμε με $A_{a,b}$ το εμβαδόν του χωρίου το οποίο βρίσκεται πάνω από αυτό το διάστημα και κάτω από την υπερβολή $xy = 1$ (βλέπε σχήμα). Η ανακάλυψη του Gregory είναι ότι

$$(5.4.1) \quad A_{ta,tb} = A_{a,b}$$

για κάθε $t > 0$.



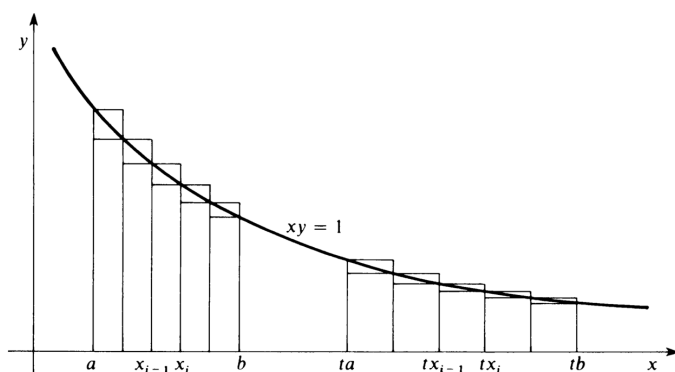
Σχήμα 5.13:

Για να δούμε γιατί ισχύει αυτή η ισότητα θεωρούμε τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

τα οποία χωρίζουν το διάστημα $[a, b]$ σε μεγάλο πλήθος n υποδιαστημάτων του ίδιου μήκους, και πάνω από αυτά τα υποδιαστήματα κατασκευάζουμε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ορθογώνια, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο ορθογώνιο πάνω από το i -οστό υποδιάστημα του $[a, b]$ έχουν βάση $\frac{b-a}{n}$ και ύψη $\frac{1}{x_i}$ και $\frac{1}{x_{i-1}}$ αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$(5.4.2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{a,b} \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}}.$$



Σχήμα 5.14:

Τώρα, τα σημεία

$$ta = tx_0 < tx_1 < \dots < tx_{i-1} < tx_i < \dots < tx_n = tb$$

χωρίζουν το διάστημα $[ta, tb]$ σε n το πλήθος υποδιαστήματα του ίδιου μήκους. Το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο ορθογώνιο πάνω από το i -οστό υποδιάστημα $[tx_{i-1}, tx_i]$ του $[ta, tb]$ έχουν βάση $\frac{t(b-a)}{n}$ και ύψη $\frac{1}{tx_i}$ και $\frac{1}{tx_{i-1}}$ αντίστοιχα. Άρα, τα εμβαδά τους είναι ίσα με εκείνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου ορθογωνίου πάνω από το $[x_{i-1}, x_i]$. Συνεπώς,

$$(5.4.3) \quad \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{ta, tb} \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}}.$$

Συγκρίνοντας τις (5.4.2) και (5.4.3) βλέπουμε αμέσως ότι η (5.4.1) ισχύει.

Μάλιστα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπίεσης του Αρχιμήδη μπορούμε πλέον εύκολα να αποδείξουμε αυστηρά την $a_{ta, tb} = A_{a, b}$.

Διαβάζοντας το Opus Geometricum του Gregory, ο φίλος του A. A. de Sarasa παρατήρησε ότι η (5.4.1) συνεπάγεται ότι κατάλληλη συνάρτηση εμβαδού που σχετίζεται με την υπερβολή $xy = 1$ έχει την προσθετική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους λογαρίθμους. Αν θέσουμε

$$L(x) = \begin{cases} A_{1, x} & \text{αν } x > 1 \\ -A_{x, 1} & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$$

τότε η $L(x)$ ικανοποιεί το «νόμο των λογαρίθμων»

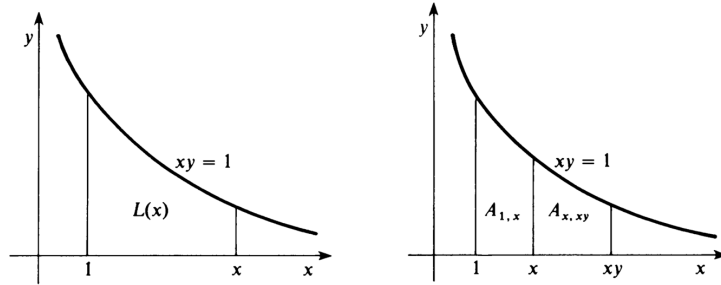
$$(5.4.4) \quad L(xy) = L(x) + L(y).$$

Για παράδειγμα, αν οι x και y είναι και οι δύο μεγαλύτεροι από 1, τότε (από το παρακάτω σχήμα και την (5.4.1))

$$\begin{aligned} L(xy) &= A_{1, xy} = A_{1, x} + A_{x, xy} \\ &= A_{1, x} + A_{1, y}, \end{aligned}$$

άρα

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$



Σχήμα 5.15:

Έτσι, η συνάρτηση υπερβολικού εμβαδού $L(x)$ «μοιάζει με λογάριθμο», αφού δίνει μια σχέση μεταξύ γεωμετρικών και αριθμητικών προόδων, και είναι φυσιολογικό να ρωτήσουμε ποια είναι η σχέση της με το φυσικό λογάριθμο $\log x$. Στην πραγματικότητα ισχύει ότι $L(x) = \log x$, αν και αυτό δεν είχε διευκρινιστεί μέχρι τον καιρό του Euler στον 18ο αιώνα.

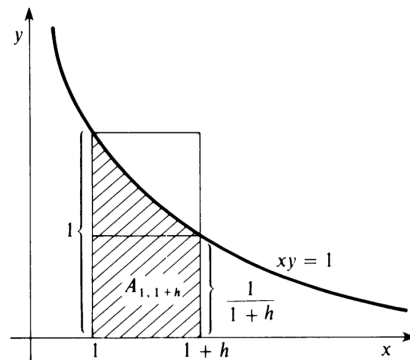
Χρησιμοποιώντας όμως λίγο απειροστικό λογισμό, μπορούμε να «αποκαλύψουμε» τη συνάρτηση $L(x)$, υπολογίζοντας την παράγωγό της ως εξής:

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} L(1+s) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(1+s) - L(1)}{s} = \frac{L'(1)}{x}. \end{aligned}$$

Μένει να υπολογίσουμε την τιμή

$$L'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_{1,1+h}}{h}$$

της παραγωγού της L .



Σχήμα 5.16:

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\frac{h}{1+h} \leq A_{1,1+h} \leq h,$$

άρα

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{A_{1,1+h}}{h} \leq 1.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $h \rightarrow 0$, συμπεραίνουμε ότι $L'(1) = 1$, άρα

$$L'(x) = \frac{1}{x}.$$

Αφού οι $L(x)$ και $\log x$ έχουν την ίδια παράγωγο $1/x$, και την ίδια τιμή $L(1) = \log 1 = 0$ στο $x = 1$, έχουμε $L(x) \equiv \log x$.

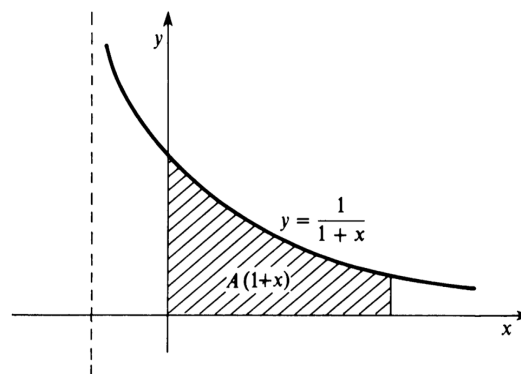
5.5 Υπολογισμοί λογαρίθμων από τον Newton

Παρόλο που η ακριβής σχέση ανάμεσα στους λογαρίθμους και τα υπερβολικά εμβαδά δεν είχε γίνει πλήρως κατανοητή στις αρχές του 17ου αιώνα, ο γενικός λογαριθμικός χαρακτήρας της συνάρτησης εμβαδού κάτω από την υπερβολή έδωσε ώθηση στη μελέτη των υπερβολικών εμβαδών και αυτή η μελέτη έπαιξε σημαντικό ρόλο για την αποδοχή της χρήσης των άπειρων σειρών, με αρχή τις δεκαετίες του 1650 και του 1660.

Φαίνεται ότι οι πρώτοι συστηματικοί υπολογισμοί λογαρίθμων μέσω των υπερβολικών εμβαδών έγιναν από τον Newton στα μέσα του 1660. Σε ένα χειρόγραφο του 1667, ξεκινάει με την υπερβολή

$$y = \frac{1}{1+x}, \quad x > -1$$

και υπολογίζει το εμβαδον $A(1+x)$ κάτω από την υπερβολή και πάνω από το διάστημα $[0, x]$ (αλλά και τον αντίθετο αυτού του εμβαδού αν $-1 < x < 0$) – βλέπε σχήμα.



Σχήμα 5.17:

Γράφοντας

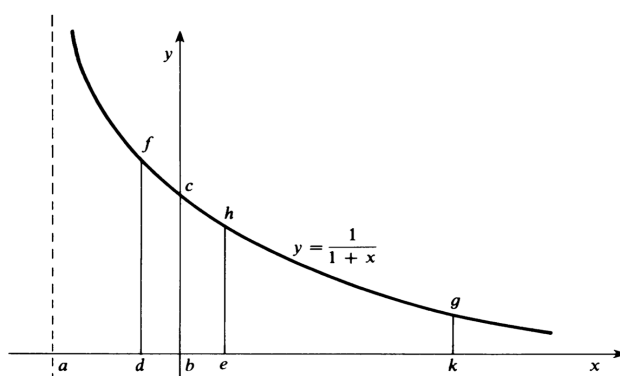
$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

ολοκληρώνει όρο προς όρο και παίρνει την

$$(5.5.1) \quad A(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ισχύει φυσικά η $A(1+x) = \log(1+x)$, δηλαδή η $A(1+x)$ δίνει το φυσικό λογάριθμο του $1+x$. Αν και ο Newton δεν αποκαλεί την $A(1+x)$ λογάριθμο, αναγνωρίζει το λογαριθμικό της χαρακτήρα (πιθανότατα είχε άμεση ή έμμεση γνώση των αποτελεσμάτων του Gregory St. Vincent) και αναφερόμενος στα σημεία του παρακάτω σχήματος γράφει:

Οι ευθείες ad , ae κλπ έχουν σχέση με τα εμβαδά $bcdf$, $bche$ κλπ όμοια με αυτήν που έχουν οι αριθμοί με τους λογαρίθμους τους.



Σχήμα 5.18:

Ισχυρίζεται επίσης ότι

$$A((1+x)(1+y)) = A(1+x) + A(1+y)$$

και

$$A\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = A(1+x) - A(1-y),$$

δηλαδή ότι η $A(1+x)$ ικανοποιεί τους νόμους των λογαρίθμων. Βασιζόμενος σε αυτές τις σχέσεις κατασκευάζει έναν μικρό πίνακα λογαρίθμων για τους φυσικούς.

Αρχικά, παίρνοντας $x = \pm 0.1$ και $x = \pm 0.2$ στην (5.5.1) υπολογίζει τα $A(0.8)$, $A(0.9)$, $A(1.1)$ και $A(1.2)$ με ακρίβεια 57 δεκαδικών ψηφίων! Στη συνέχεια παρατηρεί ότι

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1.2 \times 1.2}{0.8 \times 0.9} \\ 3 &= \frac{1.2 \times 2}{0.8} \\ 5 &= \frac{2 \times 2}{0.8} \\ 10 &= 2 \times 5 \\ 11 &= 10 \times 1.1 \\ 100 &= 10 \times 10, \end{aligned}$$

οπότε μπορεί να υπολογίσει τις τιμές $A(2)$, $A(3)$, $A(5)$, $A(10)$, $A(11)$ και $A(100)$ κάνοντας απλώς προσθέσεις και αφαιρέσεις. Για παράδειγμα,

$$A(2) = 2A(1.2) - A(0.8) - A(0.9).$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστά $x = \pm 0.02$ και $x = \pm 0.001$ στην (5.5.1) για να υπολογίσει τα $A(0.98)$, $A(1.02)$, $A(0.999)$ και $A(1.001)$. Αυτό του επιτρέπει να υπολογίσει τους λογαρίθμους των 7, 13, 17, διότι

$$\begin{aligned} 7 &= \sqrt{\frac{100 \times 0.98}{2}} \\ 13 &= \frac{1000 \times 1.001}{7 \times 11} \\ 17 &= \frac{100 \times 1.02}{6}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$A(7) = \frac{A(100) + A(0.98) - A(2)}{2}.$$

Για να ελέγξει την ακρίβεια των υπολογισμών του, ο Newton υπολογίζει το $A(0.9984)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτα, αντικαθιστώντας $x = -0.0016$ στην (5.5.1) και μετά χρησιμοποιώντας την

$$0.9984 = \frac{2^8 \times 3 \times 13}{10^5},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$A(0.9984) = 8A(2) + A(3) + A(13) - 5A(10).$$

Μένει απόλυτα ικανοποιημένος όταν βλέπει ότι τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν σε περισσότερα από τα πρώτα 50 δεκαδικά ψηφία.

5.6 Η σειρά του Mercator για το λογάριθμο

Ο Nicolas Mercator (1620-1687) δημοσίευσε το *Logarithmotechnia* το 1668. Στα πρώτα δύο μέρη του βιβλίου του ασχολείται αποκλειστικά με την κατασκευή ενός πίνακα λογρίθμων. Αυτό όμως που είναι το πιο σημαντικό μέρος του βιβλίου είναι το τρίτο μέρος του, το οποίο είναι τελείως διαφορετικό.

Σε αυτό, ο Mercator βρίσκει τη φημισμένη σειρά του

$$(5.6.1) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

η οποία, όπως είδαμε, είχε ήδη χρησιμοποιηθεί από τον Newton.

Ο Mercator ξεκινάει υπολογίζοντας τη γεωμετρική σειρά

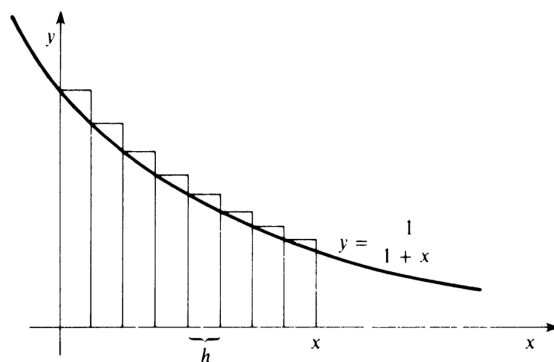
$$(5.6.2) \quad y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Έχει υποστηριχθεί, λανθασμένα όμως, ότι ο Mercator πήρε την (5.6.1) από την (5.6.2) με απλή ολοκλήρωση όρο προς όρο. Η αλήθεια είναι ότι ο Mercator υπολόγισε το εμβαδόν

του υπερβολικού τμήματος πάνω από το $[0, x]$ με μια τεχνική που βασιζόταν στα αδιαίρετα του Cavalieri. Ο ίδιος ο Mercator δεν περιγράφει τις λεπτομέρειες της μεθόδου του, όμως ο Wallis αναφέρεται στο *Logarithmotechnia* στο έργο του *Philosophical Transactions* του 1668, και εκεί δίνει σαφή περιγραφή της τεχνικής που χρησιμοποίησε ο Mercator.

Με σύγχρονους όρους, η περιγραφή που δίνει ο Wallis είναι η εξής. Χωρίζουμε το διάστημα $[0, x]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{x}{n}$, και κατασκευάζουμε τα περιγεγραμμένα ορθογώνια που έχουν βάσεις αυτά τα υποδιαστήματα (βλέπε σχήμα) με ύψη

$$1, \frac{1}{1+h}, \frac{1}{1+2h}, \dots, \frac{1}{1+(n-1)h}.$$



Σχήμα 5.19:

Αναπτύσσοντας καθένα από αυτά τα ύψη σε γεωμετρική σειρά βλέπουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν A είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\begin{aligned} A &\simeq h + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{1+jh} \\ &= h + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k \right) + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2h)^k \right) \\ &\quad + \dots + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k ((n-1)h)^k \right). \end{aligned}$$

Βάζοντας μαζί τους όρους που περιέχουν την ίδια δύναμη του h , και αντικαθιστώντας $h = x/n$,

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 A &\simeq nh - h[h + 2h + \dots + (n-1)h] \\
 &\quad + h[h^2 + (2h)^2 + \dots + (n-1)^2h^2] \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + (-1)^k h[h^k + (2h)^k + \dots + (n-1)^k h^k] \\
 &= x - h^2[1 + 2 + \dots + (n-1)] \\
 &\quad + h^3[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + (-1)^k h^{k+1}[1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k] \\
 &= x - \frac{x^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) + \frac{x^3}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) + \dots \\
 &\quad + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^k \right) + \dots .
 \end{aligned}$$

Θυμηθείτε ότι στο *Arithmetica Infinitorum* ο Wallis είχε δείξει (με τον δικό του είναι η αλήθεια τρόπο) ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1}.$$

Παίρνοντας κατά σημείο όριο, καθώς το $n \rightarrow \infty$, στη σειρά που προσεγγίζει το A , παίρνουμε τη σειρά του Mercator

$$(5.6.3) \quad A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Wallis αναφέρει ότι η $x < 1$ είναι αναγκαία συνθήκη ώστε να συγκλίνει η σειρά.

Χάρη στη δουλειά των Gregory St. Vincent και de Sarasa, φαίνεται ότι γύρω στο 1660 ήταν ευρέως γνωστό ότι το εμβαδόν ενός τμήματος κάτω από την υπερβολή $y = 1/x$ είναι ανάλογο με το λογάριθμο του λόγου των τετμημένων των άκρων του τμήματος. Σε μια σημείωση που ο ίδιος ο Mercator πρόσθεσε στο *Philosophical Transactions* του 1668, οι λογάριθμοι που ορίζονται από τα υπερβολικά τμήματα αποκαλούνται *φυσικοί λογάριθμοι*. Δίνει μάλιστα τον συντελεστή 0.43429 ($= \log_e 10$) ο οποίος επιτρέπει τη μετάβαση από τους φυσικούς στους συνηθισμένους λογαρίθμους.

5.7 Ασκήσεις

1. Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx,$$

ο οποίος προκύπτει με ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε τις (5.1.7) και (5.1.8).

2. (α) Από τις (5.1.7) και (5.1.8) αποδείξτε την

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

(γ) Αποδείξτε τον τύπο του γινομένου του Wallis χρησιμοποιώντας τα (α) και (β).

3. Χρησιμοποιώντας το απειρογινόμενο του Wallis αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι ο

$$P_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$P_n = \frac{(n!)^4 2^{4n}}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.$$

4. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται από την

$$n! = a_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Υποθέτοντας ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, αποδείξτε ότι $a = \sqrt{2\pi}$. Αυτό μας δίνει μια ασθενή μορφή του τύπου του Stirling.

5. Κάνοντας την αντικατάσταση $x = y^p$ και χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Γάμμα και Βήτα αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a_{p,q}} = \int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Αποδείξτε επίσης ότι

$$a_{p,q} = \frac{p+q}{q} a_{p,q-1}.$$

6. Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα και την

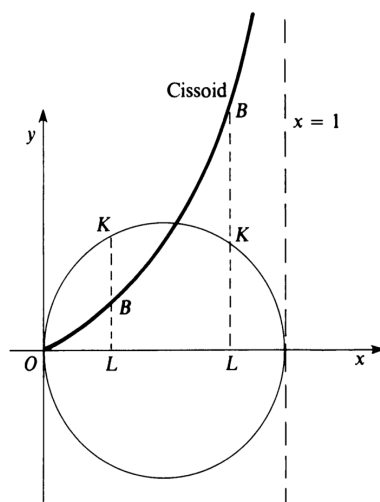
$$a_{p,q} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}$$

αποδείξτε ότι

$$b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}$$

για κάθε ζεύγος ακεραίων $m, n \geq 2$.

7. Η κισσοειδής που αντιστοιχεί στον κύκλο $y^2 = x(1-x)$ διαμέτρου 1, ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων B για τα οποία $BL/OL = OL/KL$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 5.20:

Αποδείξτε ότι η εξίσωση της κισσοειδούς σε ορθογώνιες συντεταγμένες είναι

$$y = x^{3/2}(1-x)^{-1/2}, \quad x \in (0, 1).$$

Είναι φανερό ότι $B \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 0$ και ότι η ευθεία $x = 1$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης. Συνεπώς, το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή ισούται με

$$A = \int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{-1/2} dx,$$

αν βέβαια αυτό το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

8. Έστω

$$a_m = \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{m/2} dx = \int_0^1 x^{m/2}(1-x)^{1/2} dx.$$

Παρατηρήστε ότι $a_1 = \pi/8$, το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου 1. Υπολογίστε απευθείας τις τιμές

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}, \quad a_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}, \quad a_6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9}.$$

Οι τιμές αυτές υποδεικνύουν ότι αν ο m είναι άρτιος τότε

$$a_m = \frac{m}{m+3} a_{m-2}.$$

Υποθέτοντας ότι η ίδια σχέση ισχύει και όταν ο m είναι περιττός, συμπεράνατε ότι

$$a_3 = \frac{3a_1}{6} = \frac{\pi}{16}.$$

9. Έστω

$$b_n = \int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{n/2} dx.$$

Παρατηρήστε ότι ο b_{-1} μας δίνει το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή. Υπολογίστε απευθείας τις τιμές

$$b_0 = \frac{2}{5}, \quad b_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}, \quad b_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9}.$$

Οι τιμές αυτές υποδεικνύουν ότι αν ο n είναι άρτιος τότε

$$b_n = \frac{n}{n+5} b_{n-2}.$$

Υποθέτοντας ότι η ίδια σχέση ισχύει και όταν ο n είναι περιττός, συμπεράνατε ότι

$$b_{-1} = 6b_1 = 6a_3 = \frac{3\pi}{8}.$$

Δηλαδή, το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου που την παράγει.

10. Αποδείξτε αυστηρά τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης, παρατηρώντας ότι

$$b_n = B\left(\frac{5}{2}, \frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{n+5} \cdot \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n+5/2)}.$$

11. Υψώστε στο τετράγωνο την ποσότητα

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + R(x),$$

όπου x^{10} είναι η μικρότερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο $R(x)$, και ελέγξτε ότι

$$[P(x)]^2 = 1 - x^2 + Q(x).$$

Ποιά είναι η μικρότερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο $Q(x)$;

12. Υποθέτοντας ότι η ακολουθία (x_n) που ορίζεται από την (5.3.1) συγκλίνει σε κάποιον $x_* \neq 0$, αποδείξτε ότι $x_*^2 = N$.

13. Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα του 461,041 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Viète.

14. Αποδείξτε την (5.4.4) στις περιπτώσεις $0 < x \leq y \leq 1$ και $0 < x \leq 1 \leq y$.

15. Έστω $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ μια γεωμετρική πρόοδος. Χρησιμοποιώντας την (5.4.1) αποδείξτε ότι η

$$0 < L(a_1) < L(a_2) < \dots < L(a_n) < \dots$$

είναι αριθμητική πρόοδος.

16. Μιμούμενοι τον υπολογισμό της $L'(x)$ αποδείξτε ότι η παράγωγος της $\log x$ είναι ίση με

$$\frac{\log e}{x},$$

όπου

$$e := \lim_{s \rightarrow 0} (1+s)^{1/s}.$$

17. Σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα, ξεκινήστε βρίσκοντας το πολλαπλάσιο του δοθέντος φυσικού το οποίο είναι πιο κοντά στον 1000:

- (α) Εκφράστε το λογάριθμο του 37 συναρτήσει των λογαρίθμων των 3, 10 και 0.999.
- (β) Εκφράστε το λογάριθμο του 19 συναρτήσει των λογαρίθμων των 2, 13 και 0.988. Με ποιόν τρόπο θα υπολογίζατε το λογάριθμο του 0.988;
- (γ) Εκφράστε το λογάριθμο του 31 συναρτήσει των λογαρίθμων των 2, 10 και 0.992. Με ποιόν τρόπο θα υπολογίζατε το λογάριθμο του 0.992;

Κεφάλαιο 6

Ο Απειροστικός Λογισμός του Newton

Όσοι λένε ότι ο απειροστικός λογισμός ανακαλύφθηκε από τους Newton και Leibniz δεν εννοούν απλώς ότι τότε βρέθηκαν αποτελεσματικές μέθοδοι για τη λύση προβλημάτων που αφορούσαν εφαπτόμενες και εμβαδά. Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια ότι τέτοια προβλήματα είχαν μελετηθεί με αρκετή επιτυχία από την αρχαιότητα και πολύ επιτυχημένα στις αρχές του 17ου αιώνα.

Οι προηγούμενες απαντήσεις προέκυπταν από την εφαρμογή ειδικών μεθόδων σε συγκεκριμένα προβλήματα. Όσο επιτυχημένες κι αν ήταν, για παράδειγμα, οι τεχνικές των Fermat και Roberval, δεν οδήγησαν σε γενικές αλγοριθμικές διαδικασίες. Σήμερα βλέπουμε μικρή την απόσταση ανάμεσα στις ειδικές αυτές τεχνικές και τις γενικές μεθόδους του απειροστικού λογισμού για την επίλυση ολόκληρων κλάσεων σχετικών προβλημάτων, όμως ο Fermat, ο Roberval και οι σύγχρονοί τους δεν σκέφτηκαν να διανύσουν αυτήν την απόσταση.

Για παράδειγμα, είδαμε ότι ο Fermat θεώρησε τη διαφορά $f(A + E) - f(A)$, παρατήρησε ότι, για την πολυωνυμική συνάρτηση που μελετούσε, αυτή η διαφορά περιείχε τον E σαν παράγοντα, διαίρεσε με E , και τελικά διέγραψε όλους τους όρους που περιείχαν τον όρο E , καταλήγοντας στην ποσότητα

$$\frac{f(A + E) - f(A)}{E} \Big|_{E=0}.$$

Σήμερα λέμε ότι αυτή η ποσότητα είναι η παράγωγος, και τη συμβολίζουμε με $f'(A)$. Όμως ο Fermat δεν την ονόμασε κάπως, ούτε εισήγαγε κάποιο συμβολισμό γι' αυτήν. Αν το είχε κάνει, θα είχε ανοίξει το δρόμο για γενικές εφαρμογές, και θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι συν-θεμελίωσε το διαφορικό λογισμό.

Το πιο καθαρό παράδειγμα στην ιστορία του απειροστικού λογισμού, το οποίο να δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στην «ανακάλυψη» και την «επίγνωση της σημασίας της ανακάλυψης», δίνεται από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού το οποίο περιγράφει σαφώς την αντίστροφη σχέση μεταξύ προβλημάτων εφαπτόμενων και εμβαδών (με σύγχρονη ορολογία, την αντίστροφη σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος). Η σχέση αυτή αναδεικνύεται από τους υπολογισμούς των αρχών του 17ου αιώνα που συζητήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Ήταν γνωστό ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^n$ στο $[0, x]$ είναι $x^{n+1}/(n+1)$, ενώ η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη $y = x^{n+1}/(n+1)$ είναι x^n . Ο Barrow διατύπωσε

και απέδειξε, όπως είδαμε, ένα γεωμετρικό θεώρημα το οποίο υπεδείκνυε σαφώς τη γενική αντίστροφη σχέση ανάμεσα στις εφαπτόμενες και τον τετραγωνισμό. Δεν μπόρεσε όμως να αντιληφθεί ότι το «θεμελιώδες θεώρημά του» θα μπορούσε να εξελιχθεί σε ένα πανίσχυρο αλγοριθμικό εργαλείο για συστηματικούς υπολογισμούς. Αυτή είναι αντιθέτως η συνεισφορά των Newton και Leibniz, και γι' αυτό θεωρούνται οι θεμελιωτές του απειροστικού λογισμού.

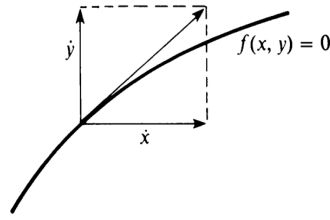
6.1 Εισαγωγή των «ροών»

Ο Newton γεννήθηκε το 1642. Άρχισε να φοιτά στο Cambridge το 1661 και πήρε το πτυχίο του στις αρχές του 1665. Φαίνεται ότι άρχισε να μελετά σοβαρά τα μαθηματικά – ξεκινώντας από τα Στοιχεία του Ευκλείδη και τη Γεωμετρία του Descartes – το καλοκαίρι του 1664. Τα επόμενα δύο χρόνια το Cambridge ήταν κλειστό λόγω της πανώλης και ο Newton επέστρεψε στο σπίτι του στο Linconshire, όπου αφοσιώθηκε στη μελέτη και έθεσε τις βάσεις για τα τρία κορυφαία επιτεύγματα της επιστημονικής του σταδιοδρομίας: τον απειροστικό λογισμό, τη φύση του φωτός και τη θεωρία της βαρύτητας. Γράφει ο ίδιος ότι «εκείνα ήταν τα χρόνια στα οποία σκέφτηκε και παρήγαγε με την μεγαλύτερη επιτυχία».

Τον Οκτώβριο του 1666, ο Newton οργάνωσε τα αποτελέσματά του της προηγούμενης περιόδου σε ένα χειρόγραφο, το οποίο είναι σήμερα γνωστό ως το «δοκίμιο του Οκτωβρίου 1666 για τις ροές». Αυτό ήταν το πρώτο πραγματικό έργο του με θέμα τον απειροστικό λογισμό. Αν και δεν δημοσιεύτηκε, αρκετοί Άγγλοι μαθηματικοί είχαν δει αντίγραφά του, τόσο στη διάρκεια της ζωής του όσο και μετά τον θάνατό του.

Από το τέλος του 1665, ο Newton είχε μελετήσει το πρόβλημα της εφαπτόμενης με τη μέθοδο του συνδυασμού των συνιστωσών της ταχύτητας ενός σημείου που κινείται με βάση κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Αυτή η προσέγγιση είχε ήδη υιοθετηθεί από τον Roberval, φαίνεται όμως ότι δουλειά του τελευταίου ήταν άγνωστη στον Newton. Η μελέτη των εφαπτόμενων μέσω των συνιστωσών κινήσεων του έδωσε το κίνητρο για τη νέα μέθοδο των ροών και ταυτόχρονα ήταν το κλειδί για τις γεωμετρικές εφαρμογές της μεθόδου.

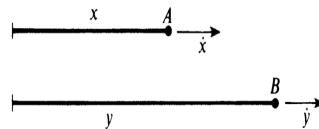
Ο Newton βλέπει την καμπύλη $f(x, y) = 0$ ως τον γεωμετρικό τόπο της τομής δύο κινούμενων ευθειών, μιας κατακόρυφης και μιας οριζόντιας. Βλέπει τις x και y συντεταγμένες του κινούμενου σημείου ως συναρτήσεις οι οποίες προσδιορίζουν τη θέση της κατακόρυφης και της οριζόντιας ευθείας αντίστοιχα. Η κίνηση είναι η σύνθεση μιας οριζόντιας κίνησης με διάνυσμα ταχύτητας που έχει μήκος \dot{x} και μιας κατακόρυφης κίνησης με διάνυσμα ταχύτητας που έχει μήκος \dot{y} . Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση των διανυσμάτων ταχύτητας (ο οποίος ήταν τότε πολύ γνωστός στην περίπτωση που τα διανύσματα ταχύτητας ήταν σταθερά αλλά εδώ εφαρμόζεται για τα διανύσματα της στιγμιαίας ταχύτητας) το εφαπτόμενο διάνυσμα ταχύτητας προκύπτει ως άθροισμα αυτών των οριζόντιων και κατακόρυφων διανυσμάτων. Συνεπώς, η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη είναι ίση με \dot{y}/\dot{x} (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 6.1:

Ξεκινώντας με αυτή την οπτική, ο Newton θεωρεί το γεωμετρικό μοντέλο δύο (ή περισσότερων) σημείων A και B που διανύουν αποστάσεις x και y κατά μήκος διαφορετικών ευθειών σε ίσα χρονικά διαστήματα, με τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιείται η $f(x, y) = 0$ σε κάθε χρονική στιγμή, με στιγμιαίες ταχύτητες \dot{x} και \dot{y} (βλέπε σχήμα).

Δεν επιχειρεί να ορίσει τις ροές \dot{x} και \dot{y} των x και y . Θεώρησε την έννοια της ταχύτητας ενός σημείου που κινείται σε μια ευθεία ως διαισθητικά προφανή από την άποψη της φυσικής. Με τη σύγχρονη ορολογία, οι ροές \dot{x} και \dot{y} είναι απλώς οι παράγωγοι των x και y ως προς t .



Σχήμα 6.2:

Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετώπισε ο Newton ήταν να βρει τη σχέση ανάμεσα στις ροές \dot{x} και \dot{y} με δεδομένη τη σχέση $f(x, y) = 0$ μεταξύ των x και y . Στην περίπτωση όπου

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0$$

καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να ικανοποιείται η

$$(6.1.1) \quad \sum \left(\frac{i\dot{x}}{x} + \frac{j\dot{y}}{y} \right) a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Για την απόδειξη της (6.1.1), ο Newton παρατηρεί αρχικά ότι αν δύο σώματα κινούνται με ομοιόμορφες (σταθερές) ταχύτητες τότε οι αποστάσεις που διανύουν είναι ανάλογες με τις ταχύτητές τους. Η ιδέα του είναι ότι, ακόμα κι αν η ταχύτητα δεν είναι σταθερή, σε ένα «απείρω μικρό» χρονικό διάστημα o η κατάσταση θα πρέπει να είναι ίδια με αυτήν που παρατηρούμε στην περίπτωση της σταθερής ταχύτητας. Δηλαδή, οποιαδήποτε κίνηση είναι ουσιαστικά ομοιόμορφη στη διάρκεια ενός «απείρω μικρού» χρονικού διαστήματος. Οι θέσεις θα μεταβληθούν από x σε $x + \dot{x}o$ και από y σε $y + \dot{y}o$, και αντικαθιστώντας στην $f(x, y) = 0$ πρέπει να έχουμε

$$\sum_{i,j} a_{ij} (x + \dot{x}o)^i (y + \dot{y}o)^j = 0.$$

Παίρνοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$\begin{aligned} & \sum a_{ij}x^i y^j + \sum a_{ij}x^i (jy^{j-1}\dot{y}o + \dots \text{ όροι του } o^2) \\ & + \sum a_{ij}y^j (ix^{i-1}\dot{x}o + \dots \text{ όροι του } o^2) \\ & + \sum a_{ij}(ix^{i-1}\dot{x}o + \dots)(jy^{j-1}\dot{y}o + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν την $\sum a_{ij}x^i y^j = 0$ και διαγράφοντας όλους τους όρους που περιέχουν το o^2 καταλήγουμε στην

$$\sum_{i,j} a_{ij}(ix^{i-1}y^j \dot{x}o + jx^i y^{j-1} \dot{y}o) = 0.$$

Διαιρώντας με o παίρνουμε την (6.1.1).

Με αυτό τον τρόπο, ξεκινώντας από μια διαισθητική φυσική ερμηνεία των ροών ως στιγμιαίων ταχυτήτων, ο Newton μπόρεσε να υπολογίσει, από την (6.1.1), την κλίση \dot{y}/\dot{x} της εφαπτόμενης σε μια αλγεβρική καμπύλη.

6.2 Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Έχοντας υπολογίσει την $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ από την πολυωνυμική εξίσωση $f(x, y) = 0$, ο Newton θέτει το εξής πρόβλημα: να βρεθεί το y συναρτήσει του x αν δίνεται μια εξίσωση που εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στο x και το λόγο \dot{y}/\dot{x} των ροών τους. Στην περίπτωση που αυτή η εξίσωση έχει την απλή μορφή

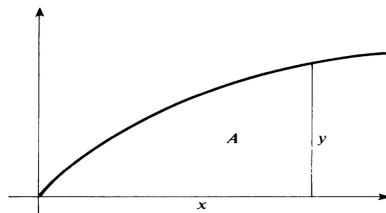
$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \phi(x),$$

αυτό είναι το πρόβλημα που σήμερα ονομάζουμε αντιπαραγωγή, ενώ στη γενική περίπτωση που δίνεται μια εξίσωση $g(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$ τότε έχουμε μια διαφορική εξίσωση. Ο Newton θεώρησε το πρόβλημα αυτό ιδιαίτερα σημαντικό: το 1666 έγραφε ότι «αν αυτό μπορούσε να γίνει τότε όλα τα προβλήματα θα μπορούσαν να λυθούν».

Στο «δοκίμιο του Οκτωβρίου του 1666» ο Newton συζητάει τον υπολογισμό εμβαδών μέσω αντιπαραγωγής. Αυτή είναι η πρώτη, ιστορικά, εμφάνιση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού στη μορφή που το ξέρουμε σήμερα, δηλαδή

$$\frac{dA}{dx} = y,$$

όπου A είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, και δίνει τη βάση για μια αλγοριθμική προσέγγιση στο πρόβλημα του υπολογισμού εμβαδών.



Σχήμα 6.3:

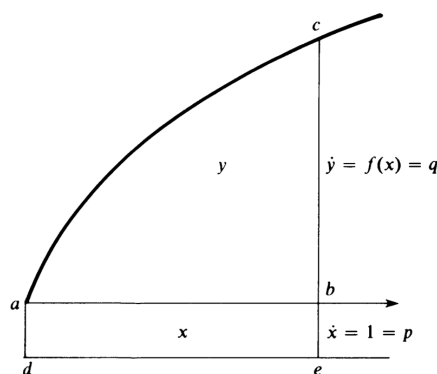
Όπως έχουμε δει, τα εμβαδά και οι εφαπτόμενες υπολογίζονταν με ad hoc τεχνικές στις αρχές του 17ου αιώνα. Η εισαγωγή γενικών αλγοριθμικών τεχνικών που θα συστηματοποιούσαν αυτούς τους υπολογισμούς ήταν η ουσία της «ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού» από τον Newton.

Ενώ οι προηγούμενες τεχνικές βασιζόνταν στην ιδέα ότι το εμβαδόν είναι ένα όριο αθροισμάτων (ή, ακόμα πιο ασαφώς, ένα άθροισμα απειροστών εμβαδών), ο Newton εισήγαγε μια άλλη τεχνική: πρώτα να προσδιορίσει το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού (ως συνάρτησης του x) που ήθελε να υπολογίσει και μετά να υπολογίσει το εμβαδόν με αντιπαραγωγή. Σε συνδυασμό με την προσέγγισή του στα προβλήματα εφαπτόμενων και ρυθμών μεταβολής μέσω των ροών, αυτή η οπτική έκανε σαφή για πρώτη φορά την ακριβή φύση της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στα προβλήματα εφαπτόμενων και τα προβλήματα εμβαδών.

Ο Newton διατύπωσε και «απέδειξε» το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μέσω των ροών: έθεσε y το εμβαδόν abc κάτω από την καμπύλη $q = f(x)$ (βλέπε σχήμα) και θεώρησε ότι το εμβαδόν αυτό σαρώνεται από το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα bc το οποίο κινείται προς τα δεξιά με μοναδιαία ταχύτητα $\dot{x} = 1$. Αν $p = 1$, όπως στο σχήμα, τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με x . Ο Newton θεωρεί προφανές ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού y είναι $\dot{y} = f(x)$ όταν $\dot{x} = 1$, δηλαδή

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x).$$

Αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι ότι παρατήρησε αυτό το γεγονός και όχι αν έδωσε μια αυστηρή απόδειξη με τα σημερινά δεδομένα. Σίγουρα σκέφτηκε ότι το εμβαδόν αυξάνει από y σε $y + oq$ όταν το x αυξάνει σε $x + o$ στη διάρκεια ενός «απείρως μικρού» χρονικού διαστήματος o .



Σχήμα 6.4:

Η παρατήρηση αυτή εξηγεί αμέσως την αντίστροφη σχέση του ότι η κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι x^n ενώ το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^n$ είναι $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Γιατί, αν το εμβαδόν είναι

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

τότε η βασική σχέση (6.1.1) δίνει

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n,$$

και αντίστροφα. Παίρνοντας $\dot{x} = p = 1$ και $\dot{y} = q$ έχουμε την καμπύλη

$$q = x^n.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι ο Newton συνήθως αγνοούσε τη «σταθερά της ολοκλήρωσης», παίρνοντας όλες του τις καμπύλες να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

6.3 Κανόνας της αλυσίδας και ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ο Newton άρχισε να αναπτύσσει τεχνικές παραγώγισης (για τον υπολογισμό του \dot{y}/\dot{x} δεδομένης της $f(x, y) = 0$) και αντιπαραγώγισης (αντιστρόφως). Εκμεταλλεύτηκε συστηματικά τη μέθοδο των αντικαταστάσεων – αυτό που σήμερα ονομάζουμε κανόνα της αλυσίδας για την παραγωγή και ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Ένα παράδειγμα της μεθόδου του μας δίνει το πρόβλημα του υπολογισμού του \dot{y}/\dot{x} αν

$$y = (1 + x^n)^{3/2}.$$

Αυτό που θα έκανε ο Newton σε αυτή την περίπτωση, θα ήταν να ορίσει μια νέα μεταβλητή $z = 1 + x^n$ με ροή

$$(6.3.1) \quad \dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}.$$

Τότε, $y^2 = z^3$, άρα

$$(6.3.2) \quad 2y\dot{y} = 3z^2\dot{z},$$

με εφαρμογή της (6.1.1). Κατόπιν, έχουμε

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}/\dot{z}}{\dot{x}/\dot{z}} = \frac{3z^2/2y}{1/nx^{n-1}} = \frac{3nx^{n-1}(1+x^n)^2}{2(1+x^n)^{3/2}} = \frac{3}{2}nx^{n-1}\sqrt{1+x^n}.$$

Γενικότερα, για να παραγωγίσει (σε συγκεκριμένα βέβαια παραδείγματα) την

$$y = [f(x)]^{m/n}$$

όπου $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο, ο Newton θεωρούσε τη νέα μεταβλητή $z = f(x)$ με ροή $\dot{z} = f'(x)\dot{x}$. Τότε, $y^n = z^m$, άρα

$$ny^{n-1}\dot{y} = mz^{m-1}\dot{z}$$

με εφαρμογή της (6.1.1). Τέλος,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{\dot{y}/\dot{z}}{\dot{x}/\dot{z}} = \frac{mz^{m-1}/ny^{n-1}}{1/f'(x)} = \frac{m}{n} \frac{f'(x)[f(x)]^{m-1}}{[f(x)]^{\frac{m(n-1)}{n}}} \\ &= \frac{m}{n} [f(x)]^{\frac{m}{n}-1} f'(x), \end{aligned}$$

το γνωστό και σήμερα αποτέλεσμα που μαθαίνουμε στο στοιχειώδη απειροστικό λογισμό.

Με παρόμοιο τρόπο, ο Newton μπορούσε να παραγωγίζει γινόμενα και πηλίκα, αν και δεν είχε διατυπώσει γενικά τους σχετικούς κανόνες ως συγκεκριμένους αλγόριθμους. Περιέγραφε όμως με παραδείγματα τις ακόλουθες τεχνικές. Αν

$$y = f(x)g(x),$$

θέτουμε $u = f(x)$ και $v = g(x)$. Οι u και v έχουν ροές \dot{u} και \dot{v} αντίστοιχα. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυωνυμα, τότε η βασική σχέση (6.1.1) για τον υπολογισμό του λόγου ροών μας δίνει

$$(6.3.3) \quad \dot{y} = u\dot{v} + \dot{u}v, \quad \dot{u} = f'(x)\dot{x}, \quad \dot{v} = g'(x)\dot{x}.$$

Άρα,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\dot{v} + \dot{u}v}{\dot{x}} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Όμοια, αν $y = f(x)/g(x) = u/v$, τότε $yv = u$ άρα

$$(6.3.4) \quad \dot{y}v + y\dot{v} = \dot{u}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{\dot{u} - y\dot{v}}{v\dot{x}} = \frac{(\dot{u}/\dot{x}) - y(\dot{v}/\dot{x})}{v} \\ &= \frac{f'(x) - g'(x)[f(x)/g(x)]}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

Για ένα άλλο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την

$$y^2 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Πρώτα θέτουμε $\xi = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, δηλαδή

$$a^2\xi^2 - x^2\xi^2 = x^2.$$

Εφαρμόζοντας την (6.1.1) παίρνουμε

$$2a^2\xi\dot{\xi} - 2x\xi^2\dot{x} - 2x^2\xi\dot{\xi} = 2x\dot{x},$$

άρα

$$\xi = \frac{x(1 + \xi^2)\dot{x}}{(a^2 - x^2)\xi}.$$

Αυτό είναι το πρώτο από τα τρία βήματα που κάνει ο Newton. Από την $y^2 = \xi$ έχει επίσης

$$2y\dot{y} = \dot{\xi} = \frac{x(1 + \xi^2)\dot{x}}{(a^2 - x^2)\xi}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{x(1 + \xi^2)}{2y(a^2 - x^2)\xi} = \frac{x(1 + x^2/(a^2 - x^2))}{2\sqrt{x}(a^2 - x^2)^{-1/4}(a^2 - x^2)x(a^2 - x^2)^{-1/2}} \\ &= \frac{1}{2}a^2x^{-1/2}(a^2 - x^2)^{-5/4}. \end{aligned}$$

Μετά από αρκετά τέτοια παραδείγματα, έβγαζε το συμπέρασμα ότι πολλές παρεμφερείς περιπτώσεις, στις οποίες εμφανίζονταν κυβικές ρίζες, ρίζες στους παρονομαστές, ρίζες μέσα σε ρίζες κλπ. ανάγονταν εύκολα σε όσα είχε ήδη περιγράψει».

Εφαρμόζοντας παρόμοια τεχνική, ο Newton κατασκεύασε έναν αρκετά πλούσιο πίνακα αντιπαράγωγων. Ο βασικός του στόχος ήταν, μέσω αντικατάστασης, να κάνει αναγωγή διαφόρων προβλημάτων τετραγωνισμού στον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από τη γραφική παράσταση κυκλικών ή υπερβολικών συναρτήσεων, όπως τα

$$\square \frac{a}{b+cx} \quad \text{και} \quad \square \sqrt{a^2-x^2}.$$

Υπολόγιζε αυτά τα εμβαδά εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα και μετά ολοκλήρωση όρο προς όρο. Για παράδειγμα, αν

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+cx} = \frac{a}{b} - \frac{acx}{b^2} + \frac{ac^2x^2}{b^3} - \dots,$$

τότε

$$y = \frac{ax}{b} - \frac{acx^2}{2b^2} + \frac{ac^2x^3}{3b^2} - \dots.$$

Όμοια, αν

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} - \dots,$$

τότε

$$y = ax - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{40a^3} - \dots.$$

6.4 Η μέθοδος του Newton για την προσεγγιστική επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων

Προετοιμάζοντας τη μέθοδό του για τον υπολογισμό εμβαδών μέσω της «επίλυσης πεπλεγμένων εξισώσεων», ο Newton δίνει, μέσω παραδειγμάτων, μια τεχνική για την προσεγγιστική εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων. Η τεχνική αυτή ονομάζεται σήμερα «μέθοδος του Newton». Για να λύσει την εξίσωση

$$(6.4.1) \quad y^3 - 2y - 5 = 0,$$

ξεκινάει με την προσέγγιση 2 για τη ρίζα της. Αντικαθιστώντας $y = 2+p$ στην (6.4.1) παίρνει την εξίσωση

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

για το p . Αγνοώντας τους μη γραμμικούς όρους ως προς p , λύνει την $10p - 1 = 0$ και παίρνει την προσέγγιση $p = 0.1$, οπότε ο 2.1 είναι η δεύτερη προσέγγιση της ρίζας. Στη συνέχεια αντικαθιστά $y = 2.1 + q$ στην (6.4.1) και παίρνει την εξίσωση

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$$

για το q . Αγνοώντας και πάλι τους όρους υψηλότερης τάξης, λύνει την $11.23q + 0.061 = 0$ και βρίσκει $q = -0.0054$. Αυτό δίνει την τρίτη προσέγγιση 2.0946 της πραγματικής τιμής της ρίζας, η οποία είναι 2.09455148 με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων.

Αυτή η μέθοδος επίλυσης της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$(6.4.2) \quad f(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i = 0$$

περιγράφεται ως εξής. Αν έχουμε φτάσει σε μια προσέγγιση x_n της ρίζας x_* , αντικαθιστούμε $x_* = x_n + p$ στην (6.4.2) και έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^k a_i x_*^i = \sum_{i=0}^k a_i (x_n + p)^i \\ &= \sum_{i=0}^k a_i (x_n^i + i x_n^{i-1} p + \dots) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i x_n^i + p \sum_{i=0}^k i a_i x_n^{i-1} + \dots, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$0 = f(x_n) + p f'(x_n) + \dots,$$

όπου οι τελείες υποδηλώνουν όρους υψηλότερης τάξης ως προς p . Αγνοώντας αυτούς τους υψηλότερης τάξης όρους, παίρνουμε

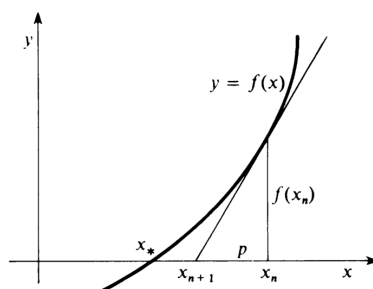
$$p = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

άρα, η επόμενη προσέγγιση x_{n+1} της ρίζας x_* είναι ο

$$(6.4.3) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

δηλαδή έχουμε το γνωστό τύπο της μεθόδου του Newton για τον αναδρομικό υπολογισμό των προσεγγίσεων της ρίζας.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Newton δεν αναφέρει πουθενά το γνωστό γεωμετρικό επιχείρημα με το οποίο πολύ συχνά, στις μέρες μας, αιτιολογείται η αναδρομική σχέση (6.4.3), δηλαδή ότι η παράγωγος $f'(x_n)$ είναι η κλίση της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6.5:

Στη συνέχεια, ο Newton δείχνει, με ένα παράδειγμα, μια γενίκευση της προηγούμενης μεθόδου, για την επίλυση εξίσωσης της μορφής

$$f(x, y) = 0$$

που να εκφράζει τον y ως δυναμοσειρά του x . Τα παραδείγματά του είναι της μορφής

$$y^3 + a^2y + axy - x^3 - 2a^3 = 0.$$

Πιο συγκεκριμένα, ας θέσουμε $a = 1$ σε αυτή την εξίσωση, οπότε έχουμε

$$(6.4.4) \quad y^3 + y + xy - x^3 - 2 = 0.$$

Όταν $x = 0$, η πραγματική λύση είναι προφανώς $y = 1$, οπότε ο πρώτος όρος της δυναμοσειράς για τον y είναι αυτός. Αντικαθιστώντας $y = 1 + p$ στην (6.4.4), και διαγράφοντας από την εξίσωση που θα προκύψει όλους τους μη γραμμικούς ως προς p και x όρους, παίρνουμε

$$p = -\frac{x}{4}.$$

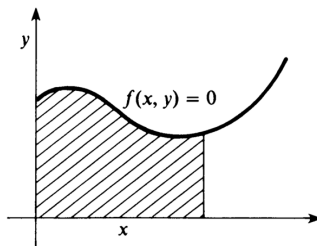
Τώρα, αντικαθιστούμε $p = -\frac{x}{4} + q$ στην προηγούμενη εξίσωση ως προς p και x , και διαγράφουμε όλους τους όρους που έχουν βαθμό μεγαλύτερο από 2. Έτσι, παίρνουμε

$$q = \frac{x^2}{64}.$$

Έτσι, οι τρεις πρώτοι όροι της δυναμοσειράς που δίνει τον y είναι

$$y = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \dots$$

Η ιδέα του Newton (την οποία όμως δεν εκμεταλλεύτηκε εκτεταμένα στο De Analysis) είναι να υπολογίσει το εμβαδόν (βλέπε σχήμα) κάτω από μια καμπύλη $f(x, y) = 0$ επιλύοντας την «πεπλεγμένη εξίσωση» για το y , εκφράζοντάς το ως δυναμοσειρά του x , και μετά να ολοκληρώσει αυτή τη δυναμοσειρά όρο προς όρο, εφαρμόζοντας τους πρώτους δύο κανόνες του.



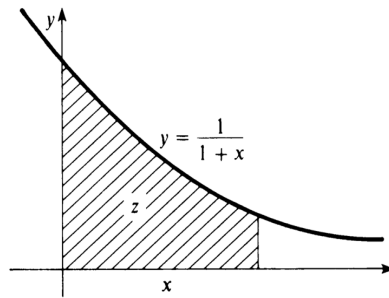
Σχήμα 6.6:

6.5 Η αντιστροφή των σειρών

Στο έργο του De Analysis ο Newton εφαρμόζει τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στην «αντιστροφή των σειρών». Για παράδειγμα, ξεκινώντας από τη σειρά

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

που δίνει το εμβαδόν z κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{1+x}$, θέλει να εκφράσει το x ως συνάρτηση του z (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 6.7:

Αποφασίζει να υπολογίσει μόνο τους πρώτους πέντε όρους της σειράς που δίνει το x , οπότε διαγράφει όλους τους όρους μεγαλύτερου βαθμού και ξεκινάει από την

$$(6.5.1) \quad \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - z = 0.$$

Διαγράφοντας όλους τους μη γραμμικούς όρους παίρνει ως πρώτη προσέγγιση την

$$x \simeq z.$$

Αντικαθιστώντας $x = z + p$ στην (6.5.1) παίρνουμε

$$(6.5.2) \quad \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \right) + p(1 - z + z^2 - z^3 + z^4) \\ + p^2 \left(-\frac{1}{2} + z - \frac{3z^2}{2} + 2z^3 \right) + \dots = 0.$$

Αγνοώντας τους μη γραμμικούς ως προς p όρους, έχουμε

$$p \simeq \frac{\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}}{1 - z + z^2 - z^3 + z^4} = \frac{z^2}{2} + \dots,$$

άρα η δεύτερη προσέγγισή μας είναι

$$x \simeq z + \frac{z^2}{2}.$$

Αντικαθιστώντας $p = \frac{z^2}{2} + q$ στην (6.5.2) έχουμε

$$\left(-\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{20}\right) + q\left(1 - z + \frac{z^2}{2}\right) + \dots = 0,$$

άρα

$$q \simeq \frac{\frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{8} + \frac{z^5}{20}}{1 - z + \frac{z^2}{2}} = \frac{z^3}{6} + \dots.$$

Έτσι, καταλήγουμε στην τρίτη προσέγγιση για το x :

$$x \simeq z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, ο Newton καταλήγει στην

$$(6.5.3) \quad x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots.$$

Δεδομένου ότι η $z = \log(1+x)$ είναι ισοδύναμη με την $x = e^z - 1$, αυτό που ο Newton βρίσκει στην (6.5.3) είναι η εκθετική σειρά

$$(6.5.4) \quad e^z = 1 + x + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots,$$

για πρώτη φορά στην Ιστορία.

Εν συντομία, η μέθοδος του Newton για την αντιστροφή της σειράς

$$z = a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

ώστε να προκύψει η

$$x = b_1z + b_2z^2 + \dots,$$

είναι η εξής. Αφού βρεί τους $b_1 = 1/a_1$, b_2, \dots, b_{n-1} , θέτει

$$x = b_1z + \dots + b_{n-1}z^{n-1} + r$$

στην αρχική σειρά και συγκεντρώνει τους διάφορους όρους στη μορφή

$$(Az^n + Bz^{n+1} + \dots) + r(A' + B'z + \dots) + \dots = 0.$$

Τότε,

$$r \simeq -\frac{Az^n + Bz^{n+1} + \dots}{A' + B'z + \dots} = -\frac{A}{A'}z^n + \dots,$$

οπότε

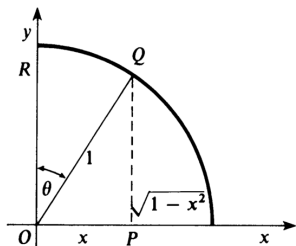
$$b_n = -\frac{A}{A'}.$$

6.6 Η ανακάλυψη των σειρών του ημιτόνου και του συνημιτόνου

Συνεχίζοντας την εφαρμογή αυτών των τεχνικών, ο Newton βρίσκει τη δυναμοσειρά για το $\sin x$ και το $\cos x$, πάλι για πρώτη φορά. Βρίσκει άρχικά τη σειρά

$$(6.6.1) \quad \sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots,$$

με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, όπως στο σχήμα.



Σχήμα 6.8:

Τότε, η γωνία $\theta = \sin^{-1} x$ ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του κυκλικού τομέα OQR . Όμως ο Newton γνώριζε, από το γεγονός ότι είχε υπολογίσει το ολοκλήρωμα της $\sqrt{1-x^2}$ (αναπτύσσοντας την σε σειρά και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο) ότι το εμβαδόν του χωρίου $OPQR$ είναι ίσο με

$$x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \dots$$

Από αυτήν μπορούσε να δει, αναπτύσσοντας και την $\sqrt{1-x^2}$ σε δυναμοσειρά, ότι

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \dots \right) - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 2 \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \dots \right) \\ &\quad - x \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + \dots \right), \end{aligned}$$

άρα

$$\theta = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots$$

όπως ήθελε.

Κατόπιν, ο Newton βρήκε τη σειρά του $\sin x$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο της αντιστροφής σειράς στην (6.6.1)! Είναι μια απλή άσκηση να δείτε ότι

$$(6.6.2) \quad x = \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \frac{\theta^7}{5040} + \dots$$

Κατόπιν, υπολογίζοντας την τετραγωνική ρίζα, παίρνουμε τη σειρά του συνημιτόνου

$$(6.6.3) \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \dots$$

Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους: (α) με αλγεβρική εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας, (β) με εφαρμογή της διωνυμικής σειράς, (γ) με εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων (του Newton) για την επίλυση της εξίσωσης

$$y^2 + \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots \right)^2 = 1$$

ως προς $y = \cos \theta$.

Αφού έκανε αυτούς τους υπολογισμούς, ο Newton τελικά παρατήρησε τον «προφανή» κανόνα που ακολουθούσαν οι συντελεστές:

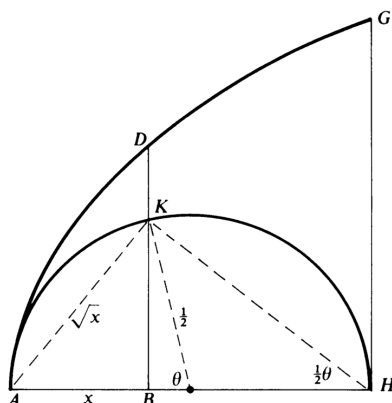
$$\sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{και} \quad \cos \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!}.$$

Για την ακρίβεια, στο *De Analysis*, ο Newton πήρε την (6.6.2) αντιστρέφοντας μια σειρά που έδινε το μήκος του τόξου QR . Ο υπολογισμός που παρουσιάσαμε, ο οποίος ξεκινάει από εμβαδόν και όχι από μήκος τόξου, έχει βρεθεί σε χειρόγραφα της περιόδου του 1665 όπου, σε μεγάλα κέφια, υπολογίζει το ανάπτυγμα της $\sin^{-1} x$ μέχρι και τη δύναμη x^{21} !

Στη συνέχεια, ο Newton εφάρμοσε τις τριγωνομετρικές σειρές για να υπολογίσει τα εμβαδά κάτω από την κυκλοειδή και την τετραγωνίζουσα. Πήρε την κυκλοειδή ADG (βλέπε σχήμα) που ορίζεται ως προς τον κύκλο διαμέτρου $AH = 1$ από τη σχέση

$$BD = BK + \widehat{AK},$$

δηλαδή, το DK είναι ίσο με το μήκος του κυκλικού τόξου \widehat{AK} .



Σχήμα 6.9:

Αν $AB = x$, τότε

$$BK = \sqrt{x - x^2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} \dots$$

από το διωνυμικό τύπο, και το κυκλικό τόξο \widehat{AK} ισούται με

$$\begin{aligned}\widehat{AK} &= \frac{\theta}{2} = \sin^{-1} \frac{AK}{AH} = \sin^{-1}(\sqrt{x}) \\ &= x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{3}{40}x^{5/2} + \frac{5}{112}x^{7/2} + \dots\end{aligned}$$

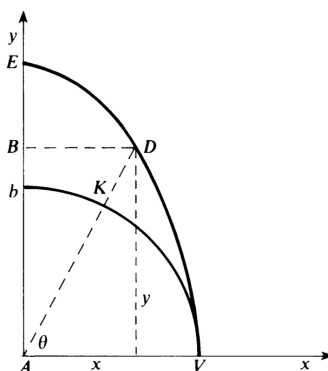
αν πάρουμε υπόψη μας τη σειρά της \sin^{-1} . Συνεπώς, η εξίσωση της κυκλοειδούς γίνεται

$$y = \sqrt{x - x^2} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) = 2x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{20}x^{5/2} - \frac{1}{56}x^{7/2} \dots$$

Ολοκληρώνοντας όρο προς όρο, βλέπει κανείς ότι το εμβαδόν ABD κάτω από την κυκλοειδή ισούται με

$$\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{15}x^{5/2} - \frac{1}{70}x^{7/2} - \frac{1}{252}x^{9/2} \dots$$

Η τετραγωνίζουσα, μια «μηχανική» καμπύλη η οποία είχε χρησιμοποιηθεί από τους Έλληνες για τον τετραγωνισμό του κύκλου και την τριχοτόμηση της γωνίας, ορίζεται ως εξής (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 6.10:

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο B ξεκινάει από το σημείο $E(0, \pi/2)$ του y -άξονα και κινείται προς την αρχή των αξόνων με σταθερή ταχύτητα, έτσι ώστε το ύψος του τη χρονική στιγμή t να είναι

$$y = \frac{\pi}{2}(1 - t).$$

Ταυτόχρονα, ας υποθέσουμε ότι το σημείο K ξεκινάει από το σημείο $b(0, 1)$ και διαγράφει το τεταρτοκύκλιο bKV προς το V με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, έτσι ώστε η γωνία του τη χρονική στιγμή t να είναι

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1 - t).$$

Τότε, το τυπικό σημείο D της τετραγωνίζουσας είναι η τομή της οριζόντιας ευθείας από το B με την ακτίνα που περνάει από το K . Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε

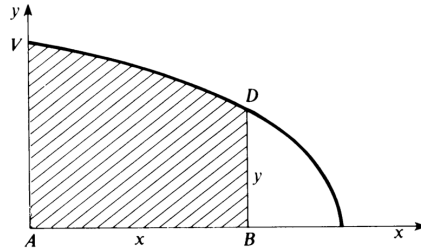
$$y = \theta = \tan^{-1}(y/x),$$

δηλαδή η εξίσωση της τετραγωνίζουσας είναι η

$$x = y \cot y.$$

Ο Newton αλλάζει τος ρόλους των x και y (βλέπε σχήμα), δηλαδή η εξίσωσή του είναι η

$$y = x \cot x.$$



Σχήμα 6.11:

Αντικαθιστώντας τις σειρές για το ημίτονο και το συνημίτονο, παίρνει

$$\begin{aligned} y &= x \frac{\cos x}{\sin x} = x \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \dots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 \dots} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \dots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 \dots}, \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνει

$$y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 \dots,$$

διαιρώντας τις δύο σειρές. Με ολοκλήρωση όρο προς όρο παίρνει

$$x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7 \dots$$

για το εμβαδόν $ABDV$.

6.7 Μέθοδοι των σειρών και των ροών

Το 1671 ο Newton εγγραψε το έργο *De Methodis Serierum et Fluxionum* (Μέθοδοι των σειρών και των ροών) στο οποίο οργάνωσε τα αποτελέσματα που είχε αποδείξει την προηγούμενη εξαετία στον απειροστικό λογισμό. Οι πρώτες του απόπειρες να δημοσιεύσει το σημαντικό αυτό έργο ήταν αποτυχημένες, και εγκατέλειψε αυτή την προσπάθεια. Χρησιμοποίησε όμως τις «μεθόδους» σαν πηγή για τη δουλειά του εκείνης της εποχής, για παράδειγμα αναφερόταν σε αυτό το έργο στις δύο διάσημες επιστολές του 1676 προς τον Leibniz. Αρκετοί ενδιαφερόμενοι δανείζονταν τις «μεθόδους» για να τις μελετήσουν, όμως η δημοσίευσή τους καθυστέρησε ως το 1736, μετά από τον θάνατό του.

Το πρώτο μέρος του De Methodis είναι μια επηυξημένη εκδοχή του De Analysis, και περιέχει μια λεπτομερή συζήτηση για τις τεχνικές των άπειρων σειρών που είχε αναπτύξει για την επίλυση αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων (τη μέθοδο των προσδιοριστων συντελεστών). Ακολουθεί μια πλούσια συλλογή, με επικεφαλίδες δώδεκα γενικά διατυπωμένα προβλήματα, των εφαρμογών που είχαν βρει οι μέθοδοί του για τις σειρές και τις ροές.

Για παράδειγμα, κάτω από τον τίτλο «Πρόβλημα 3 – Προσδιορισμός Μεγίστων και Ελαχίστων», δίνει τις ακόλουθες κατευθύνσεις:

‘Όταν μια ποσότητα είναι μέγιστη ή ελάχιστη, εκείνη τη στιγμή η ροή της ούτε αυξάνει ούτε φθίνει: γιατί αν αυξάνει, αυτό σημαίνει ότι ήταν μικρότερη και αμέσως θα γίνει μεγαλύτερη απ’ ό,τι είναι, και αντίστροφα, αν φθίνει. Αναζητήστε λοιπόν τη ροή της [με τις μεθόδους που έχουμε περιγράψει] και βάλτε της την τιμή μηδέν.

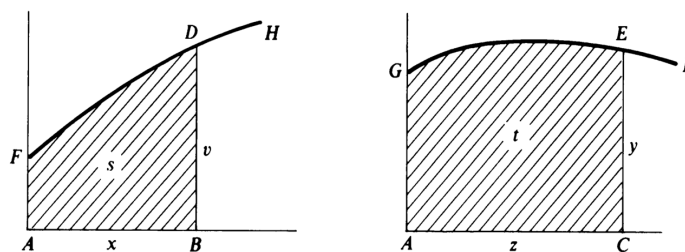
Ο Newton λοιπόν λέει ότι για να βρούμε τα σημεία στα οποία η $f(x)$ μπορεί να παίρνει τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Συμπεριλαμβάνει έναν κατάλογο από εννέα προβλήματα που λύνονται με αυτή την τεχνική, τα οποία συναντάμε σήμερα συχνά στα μαθήματα του απειροστικού λογισμού.

Στις επόμενες υποπαραγράφους περιγράφουμε κάποια σημαντικά σημεία από το De Methodis.

6.7α' Εφαρμογές της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

Στο Πρόβλημα 8, ο Newton εισάγει την τεχνική του για την ολοκλήρωση με αντικατάσταση. Έστω $v = f(x)$ και $y = g(z)$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν τις καμπύλες FDH και GEI αντίστοιχα (βλέπε σχήμα). Τότε,

$$(6.7.1) \quad \frac{\dot{s}}{t} = \frac{v\dot{x}}{y\dot{z}}.$$



Σχήμα 6.12:

Αν θέσουμε $\dot{x} = 1$, οπότε $\dot{s} = v$, έπεται ότι $y = \dot{t}/\dot{z}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $s = t$, τότε $\dot{s} = \dot{t} = v$, άρα

$$(6.7.2) \quad y = \frac{v}{\dot{z}}.$$

Τέλος, αν το $z = \phi(x)$ δίνεται σαν συνάρτηση του x , και $x = \psi(z)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, τότε η (6.7.2), με το δεξιό μέλος εκπεφρασμένο σαν συνάρτηση του z , ορίζει τη

συνάρτηση $y = g(z)$ για την οποία τα δύο εμβαδά είναι ίσα. Ειδικότερα,

$$y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{f(x)}{\phi'(x)} = \frac{f(\psi(z))}{\phi'(\psi(z))},$$

δηλαδή

$$y = f(\psi(z))\psi'(z).$$

Ο Newton λέει λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα

$$\int f(x) dx$$

μετασχηματίζεται στο

$$\int f(\psi(z))\psi'(z) dz$$

με την αντικατάσταση $x = \psi(z)$.

Σαν πρώτο παράδειγμα, παίρνει $v = \sqrt{ax - x^2}$ και $z = \sqrt{ax}$ (τότε, $v^2 = ax - x^2$ και $z^2 = ax$). Γράφει $2z\dot{z} = a$, οπότε η (6.7.2) δίνει

$$y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{2vz}{a} = \frac{2z}{a} \sqrt{ax - x^2},$$

δηλαδή

$$y = \frac{2z^2}{a^2} \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Αυτή είναι η εξίσωση της δεύτερης καμπύλης, άρα

$$\int \sqrt{ax - x^2} dx = \int \frac{2z^2}{a^2} \sqrt{a^2 - z^2} dz.$$

Ο Newton ολοκληρώνει αυτή την παράγραφο με κομψούς τετραγωνισμούς της κισσοειδούς, της κυκλοειδούς και της σπείρας του Αρχιμήδη. Αυτοί οι τετραγωνισμοί χρησιμοποιούν μια πολύ ισχυρή τεχνική για το μετασχηματισμό ολοκληρωμάτων, η οποία γενικεύει την απλή μέθοδο αντικατάστασης που συζητήσαμε παραπάνω.

Αντί να υποθέσει ότι τα εμβαδά s και t κάτω από τις καμπύλες $v = f(x)$ και $y = g(z)$ είναι ίσα, ας υποθέσουμε μια πιο γενική σχέση της μορφής

$$(6.7.3) \quad t = F(x, v) + \kappa s,$$

όπου κ είναι μια σταθερά. Αντικαθιστούμε την

$$\dot{t} = \dot{x}F_x + \dot{v}F_v + \kappa\dot{s} = F_x + \dot{v}F_v + \kappa v$$

στην

$$y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}},$$

και εκφράζουμε το y σαν συνάρτηση του z με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = \psi(z)$, παίρνοντας την $y = g(z)$ ώστε να ισχύει η (6.7.3). Ειδικότερα,

$$y = \frac{F_x(\psi(z), f(\psi(z))) + f'(\psi(z))F_v(\psi(z), f(\psi(z))) + \kappa f(\psi(z))}{\phi'(\psi(z))}.$$

Σημειώνουμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός συνδυάζει την τεχνική της ολοκλήρωσης κατά μέρη με την αντικατάσταση. Πράγματι, αν πάρουμε $v = f(x) = u(x)w'(x)$ και

$$(6.7.4) \quad t = u(x)w(x) - s,$$

τότε

$$\dot{t} = u(x)w'(x) + u'(x)w(x) - u(x)w'(x) = u'(x)w(x),$$

άρα

$$y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = u'(\psi(z))w(\psi(z))\psi'(z) = g(z).$$

Αφού

$$s = \int f(x) dx \quad \text{και} \quad t = \int g(z) dz,$$

η (6.7.4) μας δίνει

$$\int u'(\psi(z))w(\psi(z))\psi'(z) dz = u(x)w(x) - \int u(x)w'(x) dx,$$

δηλαδή τον γνωστό τύπο της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int w du = uw - \int u dw.$$

Για παράδειγμα, για τον τετραγωνισμό της κισσοειδούς $v = x^2/\sqrt{ax-x^2}$, ο Newton παίρνει $z = \sqrt{ax-x^2}$ και

$$(6.7.5) \quad t = \frac{1}{2}x\sqrt{ax-x^2} + \frac{2}{3}s.$$

Στη συνέχεια, γράφει $\dot{t} = \frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, οπότε $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \sqrt{a^2-z^2}$, που είναι η εξίσωση ενός κύκλου. Δηλαδή, με την (6.7.5), το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός τμήματος της κισσοειδούς ανάγεται στο πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός κυκλικού τμήματος.

6.7β' Οι πίνακες ολοκληρωμάτων του Newton

Στο De Methodis υπάρχουν δύο πίνακες ολοκληρωμάτων. Ο πρώτος έχει τον τίτλο «ένας κατάλογος καμπυλών που σχετίζονται με επίπεδα χωρία». Περιέχει έναν κατάλογο από καμπύλες $y = f(x)$ για τις οποίες μπορεί να υπολογίσει το αντίστοιχο εμβαδόν $t = F(z)$ με ευθεία ή αντίστροφη παραγωγήιση.

Ο δεύτερος πίνακας έχει τον τίτλο «ένας κατάλογος καμπυλών που σχετίζονται με κωνικές τομές». Περιέχει έναν κατάλογο από καμπύλες $y = f(x)$ για τις οποίες το αντίστοιχο εμβαδόν εκφράζεται συναρτήσεως του εμβαδού κάποιας κατάλληλης κωνικής τομής, δηλαδή σαν ολοκλήρωμα μιας από τις παρακάτω μορφές:

$$\int \frac{dx}{a+bx} \quad \text{ή} \quad \int \sqrt{a+bx+cx^2} dx.$$

Για να κάνει τις αναγωγές, ο Newton συγκρίνει το εμβαδόν t κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ με το εμβαδόν s κάτω από την καμπύλη $v = g(x)$, μέσω μιας «αντικατάστασης» $x = \psi(z)$.

Για παράδειγμα, για την $y = z^{\eta-1}/(e + fz^\eta)$, κάνει τη ναντικατάσταση $x = z^\eta$ και θεωρεί την υπερβολή

$$v = \frac{1}{e + fx}.$$

Παίρνοντας $\dot{z} = 1$, έχει

$$\dot{t} = y\dot{z} = \frac{z^{\eta-1}}{e + fz^\eta}$$

και

$$\dot{s} = v\dot{x} = \frac{\dot{x}}{e + fx} = \frac{\eta z^{\eta-1}}{e + fx},$$

όπου

$$t = \int y dz \quad \text{και} \quad s = \int v dx.$$

Άρα, $t = s/\eta$, δηλαδή

$$t = \frac{s}{\eta},$$

και έπεται η

$$(6.7.6) \quad \int \frac{z^{\eta-1}}{e + fz^\eta} = \frac{1}{\eta} \int \frac{dx}{e + fx}$$

αν πάρουμε τα κάτω όρια έτσι ώστε η σταθερά ολοκλήρωσης να μηδενιστεί.

Έχοντας την (6.7.6), ο Newton υπολογίζει τα ολοκληρώματα

$$t_k = \int \frac{z^{k\eta-1} dz}{e + fz^\eta} \quad (k \geq 1)$$

αναδρομικά, ως εξής. Παίρνοντας $\dot{z} = 1$ έχει

$$\dot{t}_k = \frac{z^{k\eta-1}}{e + fz^\eta} = \frac{1}{f} z^{(k-1)\eta-1} - \frac{e}{f} \frac{z^{(k-1)\eta-1}}{e + fz^\eta},$$

δηλαδή

$$\dot{t}_k = \frac{1}{f} z^{(k-1)\eta-1} - \frac{e}{f} \dot{t}_{k-1},$$

άρα

$$t_k = \frac{z^{(k-1)\eta}}{(k-1)f\eta} - \frac{e}{f} t_{k-1}.$$

Για $k = 2$ και $k = 3$ η αναδρομική σχέση δίνει

$$\int \frac{z^{2\eta-1} dz}{e + fz^\eta} = \frac{z^\eta}{f\eta} - \frac{e}{f} \int \frac{dx}{e + fx}$$

και

$$\int \frac{z^{3\eta-1} dz}{e + fz^\eta} = \frac{z^{2\eta}}{2f\eta} - \frac{ez^\eta}{f^2\eta} + \frac{e^2}{f^2\eta} \int \frac{dx}{e + fx},$$

όπου $x = z^\eta$ όπως πριν.

Τα ολοκληρώματα αυτά βρίσκονται στην «πρώτη παράγραφο» του πίνακα του Newton. Η τρίτη από δέκα «παραγράφους» του πίνακα περιέχει ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{z^{k\eta-1} dz}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} \quad (k \geq 1).$$

Για παράδειγμα,

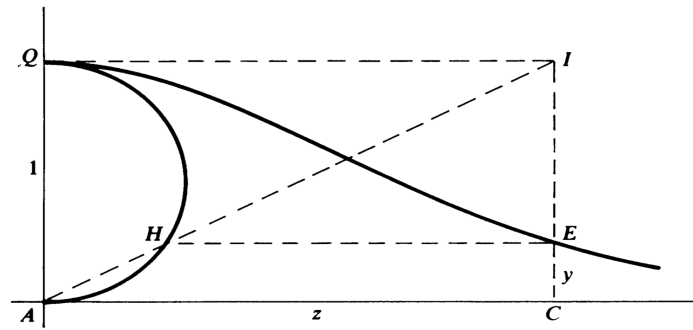
$$(6.7.7) \quad \int \frac{z^{e\eta-1} dz}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = \frac{xv}{\eta} - \frac{2}{\eta} \int v dx,$$

όπου

$$x^2 = \frac{1}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} \quad \text{και} \quad v^2 = \frac{4g + (f^2 - 4eg)x^2}{4g^2}.$$

Η επαλήθευση της (6.7.7) μέσω αντικατάστασης είναι πολύ κουραστική. Όμως, ο Newton έχει και εναλλακτικό απλούστερο τρόπο για να φτάσει στο αποτέλεσμα.

Ο Newton συμπεριλαμβάνει έναν αριθμό από υπολογισμούς εμβαδών στους οποίους εφαρμόζει τους πίνακες ολοκληρωμάτων του. Το πρώτο παράδειγμα του είδους είναι ο τετραγωνισμός της versiera που αργότερα ονομάστηκε «μάγισσα της Agnesi»), την οποία περιγράφει ως εξής. Έστω AHQ ημικύκλιο διαμέτρου 1 στον y -άξονα, όπως στ σχήμα.



Σχήμα 6.13:

Αν C είναι ένα σημείο στον οριζόντιο z -άξονα, έστω E το σημείο της CI που βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την τομή H του ημικυκλίου AHQ με τη διαγώνιο AI του ορθογωνίου $ACIQ$. Το E είναι το τυπικό σημείο της versiera. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$y = \frac{1}{1 + z^2},$$

άρα ο Newton πρέπει να υπολογίσει το

$$t = \int_0^{z_0} \frac{dz}{1 + z^2},$$

το οποίο φυσικά ισούται με $\arctan z$.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες ολοκληρωμάτων του, σημειώνει ότι το εμβαδόν s κάτω από τον κύκλο $v = \sqrt{1 - x^2}$ μετασχηματίζεται στο εμβαδόν t που ζητάει, αν εκτελέσουμε το μετασχηματισμό

$$z = \frac{1}{x} \sqrt{1 - x^2} = \phi(x), \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} = \psi(x).$$

Τότε,

$$(6.7.8) \quad t = xv - 2s.$$

Αυτό επαληθεύεται με τον εξής τρόπο. Έχουμε $\dot{s} = v$, άρα

$$\dot{t} = v + x\dot{v} - 2\dot{s} = x\dot{v} - v = -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

δηλαδή

$$\dot{t} = -\frac{1}{z}\sqrt{1+z^2},$$

και

$$\dot{z} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2} = -\left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{1+z^2},$$

άρα

$$y = -\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{1/z}{z + (1/z)} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Τα όρια $z = 0$ και $z = z$ αντιστοιχούν στα $x = 1$ και $x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, άρα η (6.7.8) δίνει

$$(6.7.9) \quad \begin{aligned} \int_0^{z_0} \frac{dz}{1+z^2} &= x\sqrt{1-x^2} - 2 \int_1^{1/\sqrt{1+z^2}} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + 2 \int_{1/\sqrt{1+z^2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

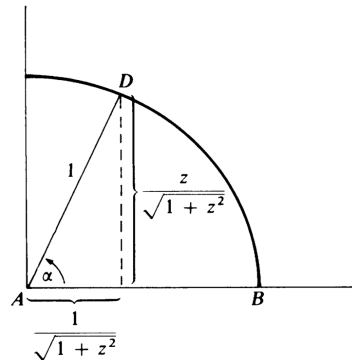
Ο Newton περιγράφει το αποτέλεσμα γεωμετρικά, ως εξής. Η αναλογία

$$\frac{AH}{AI} = \frac{CE}{CI}$$

δίνει $AH = 1/\sqrt{1+z^2} = x$, άρα η (6.7.9) μας λέει απλώς ότι το εμβαδόν t του $ACEQ$ (στο παραπάνω σχήμα) ισούται με το διπλάσιο του κυκλικού τομέα ABD στο παρακάτω σχήμα. Αφού $\tan \alpha = z$, αυτό σημαίνει ότι

$$\int_0^{z_0} \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z,$$

όπως θέλαμε.



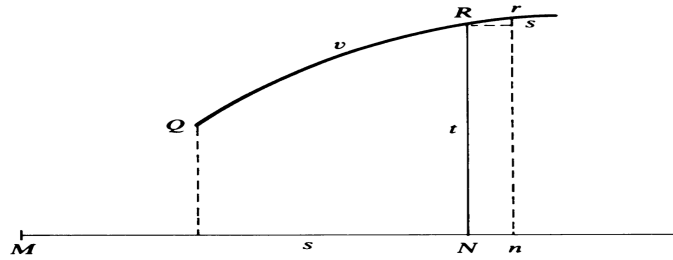
Σχήμα 6.14:

6.7γ' Υπολογισμοί μήκους καμπύλης

Στο Πρόβλημα 12, ο Newton εφαρμόζει τη βασική τεχνική του, μέσω ροών, για τον υπολογισμό του μήκους καμπύλης. Από το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» Rsr του παρακάτω σχήματος παίρνει τη σχέση του μήκους τόξου στη γνωστή μορφή

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

που συνδέει τις ορθογώνιες συντεταγμένες x και y με το μήκος τόξου s .



Σχήμα 6.15:

Όμως, στα παραδείγματα που ακολουθούν, συμβολίζει με z και y την οριζόντια και την κατακόρυφη συντεταγμένη, και με t το μήκος τόξου. Θέτοντας $\dot{z} = 1$, παίρνει $\dot{t} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$. Για παράδειγμα, αν

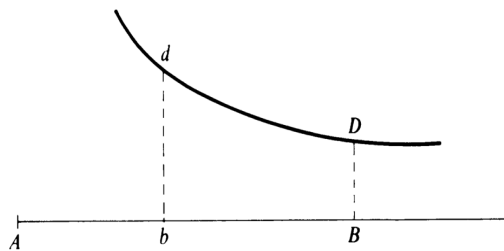
$$y = \frac{z^3}{a^2} + \frac{a^2}{12z},$$

τότε

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \left(\frac{3z^2}{a^2} - \frac{a^2}{12z^2}\right)^2} = \frac{3z^2}{a^2} + \frac{a^2}{12z^2},$$

άρα

$$t = \frac{z^3}{a^2} - \frac{a^2}{12z}.$$



Σχήμα 6.16:

Ο Newton σημειώνει ότι αν $Ab = \frac{1}{2}a$ (βλέπε σχήμα), η αντικατάσταση $z = \frac{1}{2}a$ δίνει $t = -\frac{a}{2A}$, άρα το μήκος του dD (όπου $AB = z$) είναι ίσο με

$$\frac{z^3}{a^2} - \frac{a^2}{12z} - \left(-\frac{a}{24}\right) = \frac{z^3}{a^2} - \frac{a^3}{12z} + \frac{a}{24}.$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο «επιλέγει τη σταθερά της ολοκλήρωσης».

Για να ευθείοποιήσει την ημικυβική παραβολή $z^3 = ay^2$, ο Newton κάνει τον υπολογισμό

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}},$$

και από τον πίνακα των ολοκληρωμάτων του παίρνει

$$t = \frac{8a}{27} \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}.$$

Στο Παράδειγμα 5, ο Newton δίνει την πρώτη του ευθείοποίηση της «κισσοειδούς των αρχαίων», η οποία περιγράφεται από την

$$y = \frac{(a - z)^2}{\sqrt{z(a - z)}}$$

σε ορθογώνιες συντεταγμένες. Γράφει

$$\dot{y} = -\frac{1}{2}z^{-3/2}(a - z)^{1/2}(a + 2z),$$

οπότε

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} = \frac{1}{2}az^{-3/2}\sqrt{a + 3z}.$$

Για να βρει το t , αναφέρει ένα αποτέλεσμα από τον πίνακα των ολοκληρωμάτων του: το εμβαδόν s κάτω από την υπερβολή $v = \sqrt{a^2 + 3x^2}$ αντιστοιχεί στο εμβαδόν t κάτω από την καμπύλη

$$y = \frac{1}{2}az^{-3/2}\sqrt{a + 3z}$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$x^2 = az, \quad t = \frac{6s}{a} - \frac{v^3}{ax}.$$

Αυτό προκύπτει ως εξής. Αρχικά έχουμε

$$\dot{t} = \frac{6v}{a} - \frac{3v^2\dot{v}}{ax} + \frac{v^3}{ax^2} = \frac{a}{x^2}\sqrt{a^2 + 3x^2}.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $v = \sqrt{a^2 + 3x^2}$ και απλοποιώντας, παίρνουμε

$$y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{a}{2x} \cdot \frac{a}{x^2}\sqrt{a^2 + 3x^2} = \frac{a}{2}z^{-3/2}\sqrt{a + 3z},$$

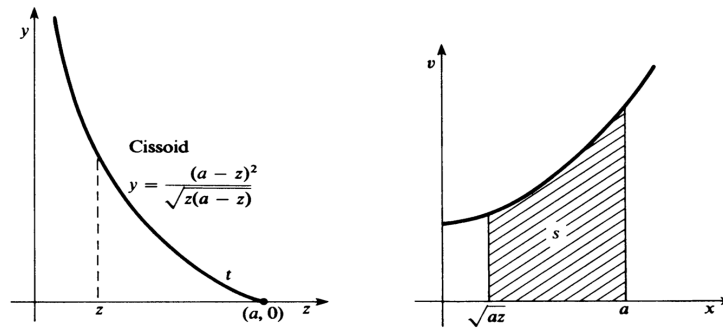
που είναι το ζητούμενο αφού $x^2 = az$.

Κατ' αυτό τον τρόπο, ο Newton έχει εκφράσει το μήκος

$$t = \int_z^a \frac{1}{2}az^{-3/2}\sqrt{a + 3z} dz$$

της κισσοειδούς στο διάστημα $[z, a]$ συναρτήσεως του εμβαδού s (βλέπε σχήμα) κάτω από την υπερβολή $v = \sqrt{a^2 + 3x^2}$ στο διάστημα $[x, a]$:

$$t = \frac{6}{a} \int_{\sqrt{az}}^a \sqrt{a^2 + 3x^2} dx - \left[\frac{(a^2 + 3x^2)^{3/2}}{ax} \right]_{\sqrt{az}}^a.$$



Σχήμα 6.17:

Στο Παράδειγμα 8, ο Newton υπολογίζει με τη μορφή άπειρης σειράς το μήκος της έλλειψης

$$y^2 + bz^2 = a^2.$$

Παραγωγίζοντας παίρνει

$$\dot{y} = \frac{bz}{\sqrt{a^2 + bz^2}},$$

άρα

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \sqrt{1 + \dot{y}^2} = \sqrt{\frac{a^2 + (b + b^2)z^2}{a^2 + bz^2}} \\ &= \left[1 + \frac{b^2}{a^2}z^2 + \frac{b^3}{a^4}z^4 + \frac{b^4}{a^6}z^6 + \dots \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Με διαίρεση και εξαγωγή ρίζας καταλήγει στην

$$t = 1 + \frac{b^2}{2a^2}z^2 + \frac{4b^3 - b^4}{8a^4}z^4 + \frac{8b^4 - 4b^5 + b^6}{16a^6}z^6 + \dots$$

Κάνοντας αντιπαραγωγή στο όρο προς όρο, παίρνει τελικά

$$t = z + \frac{b^2}{6a^2}z^3 + \frac{4b^3 - b^4}{40a^4}z^5 + \frac{8b^4 - 4b^5 + b^6}{112a^6}z^7 + \dots$$

για το μήκος του τόξου της έλλειψης που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, z]$.

Στο τελευταίο του παράδειγμα στο De Methodis, ο Newton χρησιμοποιεί τη σειρά

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

που είχε βρει για το ημίτονο στο De Analysis, για να ευθειοποιήσει την ετραγωνίζουσα

$$y = x \cot \frac{x}{a} = \frac{x\sqrt{1 - \sin^2(x/a)}}{\sin(x/a)}.$$

Με εξαγωγή ρίζας και διαίρεση σειρών παίρνει

$$y = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} \dots,$$

άρα

$$\dot{y} = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5} \cdots$$

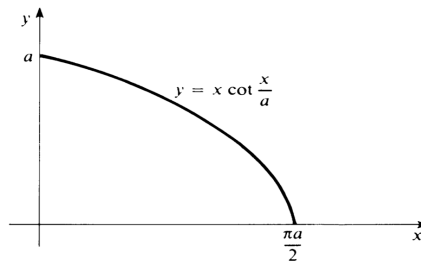
Τότε

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} = 1 + \frac{2x^2}{9a^2} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{6-4}{127,575} \frac{x^6}{a^6} + \cdots,$$

άρα η

$$t = x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893,025a^6} + \cdots$$

δίνει ένα ανάπτυγμα (σε άπειρη σειρά) για το τόξο της τετραγωνίζουσας που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, x]$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 6.18:

6.8 Η αλληλογραφία των Newton και Leibniz

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Newton ανήγγειλε τη διωνυμική του σειρά και περιέγραψε την ανακάλυψή της στις δύο επιστολές του 1676, τα οποία κατέθεσε στον Henry Oldenburg για να διαβιβαστούν στον Leibniz. Αυτές οι δύο φημισμένες επιστολές εξασφάλισαν στον Newton την πατρότητα για πολλά από τα νεανικά του αποτελέσματά στον απειροστικό λογισμό. Παρόλο που απέκρυπτε τις βασικές του τεχνικές των ροών μέσω αναγραμμάτων – μια επινόηση που συνήθιζαν κι άλλοι στο 17ο αιώνα – ανέφερε σε αυτά τα γράμματα πολλά από τα αποτελέσματά του για τις άπειρες σειρές, τον τετραγωνισμό και τον υπολογισμό μήκους καμπύλης, τις αποδείξεις των οποίων έχουμε περιγράψει σε αυτό το κεφάλαιο.

Ένα πρόσθετο ενδιαφέρον σημείο σε αυτή την αλληλογραφία σχετίζεται με τους τετραγωνισμούς του κύκλου που καταλήγουν σε εκφράσεις του αριθμού π υπό τη μορφή άπειρης σειράς. Στην απάντησή του προς την πρώτη επιστολή του Newton, ο Leibniz παρουσιάζει την εναλλάσσοσα σειρά

$$(6.8.1) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

η οποία σήμερα φέρει το όνομά του. Αντίθετα με ό,τι υποθέτουν οι περισσότεροι, ο Leibniz δεν κατέληξε σε αυτό το αποτέλεσμα απευθείας από το ολοκλήρωμα

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

αναπτύσσοντας την $\frac{1}{1+x^2}$ σε γεωμετρική σειρά και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο. Θα δούμε ότι η (6.8.1) προέκυψε στον Leibniz ως εφαρμογή της γενικής μεθόδου «μετατροπής» που είχε επινοήσει για το μετασχηματισμό ολοκληρωμάτων.

Απαντώντας, στη δεύτερη επιστολή του, ο Newton αναφέρει τον δικό του πίνακα ολοκληρωμάτων για τη «σύγκριση καμπυλών με κωνικές τομές» και, ειδικότερα, συμπεριλαμβάνει το ολοκλήρωμα της

$$\frac{z^{\eta-1}}{e + fz + gz^{2\eta}}.$$

Κάνει πρώτα την παρατήρηση ότι θέτοντας $f = 0$ και $\eta = 1$ παίρνει τη σειρά του Leibniz (προφανώς με τη μέθοδο της εφαπτόμενης που αναφέραμε παραπάνω) και στη συνέχεια παρουσιάζει τη σειρά

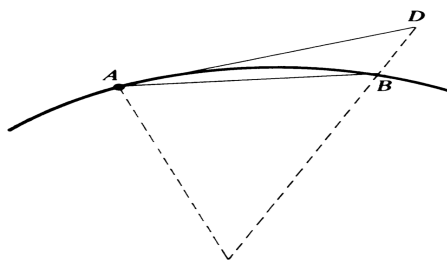
$$(6.8.2) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

για «το μήκος τεταρτοκυκλίου που η χορδή του έχει μοναδιαίο μήκος», δηλαδή τον $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Και συμπληρώνει: «αυτές, εσύ και οι φίλοι σου δεν θα τις περιφρονήσετε, επειδή είναι το ίδιο απλές με τις άλλες και συγκλίνουν γρηγορότερα – όμως εγώ το βλέπω διαφορετικά: καλύτερο είναι αυτό που είναι πιο χρήσιμο και λύνει το πρόβλημα με λιγότερο κόπο».

6.9 Ο απειροστικός λογισμός στο Principia Mathematica

Το μνημειώδες έργο *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* του Newton εκδόθηκε το 1687. Περιέχει μεγάλο αριθμό συλλογισμών με απειροστά και οριακών επιχειρημάτων, γι' αυτό και συχνά θεωρείται το πρώτο του έργο στο οποίο αναφέρεται εκτενώς στον απειροστικό λογισμό. Όμως, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σχεδόν αποκλειστικά στη γλώσσα και τη μορφή της κλασικής συνθετικής γεωμετρίας, και χρησιμοποιεί ελάχιστα τα υπολογιστικά εργαλεία που ο Newton είχε αναπτύξει μέσω του λογισμού των ροών. Μια ερμηνεία είναι ότι ο Newton αρχικά ανακάλυψε τις βασικές προτάσεις του Principia με ανάλυση ροών και υπολογισμούς, και στη συνέχεια τις έντυσε με το αποδεκτό ένδυμα της συνθετικής γεωμετρίας προσπαθώντας να αποφύγει αντιδράσεις. Σύμφωνα όμως με τον Whiteside, «είναι ανώφελο να ψάχνει κανείς στα κείμενα του Newton, τα οποία αριθμούν 10-15 εκατομμύρια λέξεις σύμφωνα με συντηρητικές εκτιμήσεις, για να βρει χειρόγραφα με επιχειρήματα ροών τα οποία επανεμφανίζονται κατάλληλα ενδεδυμένα στις πρώτες σελίδες του Principia – πουθενά δεν υπάρχουν, έστω θολά, ίχνη ότι τέτοια χειρόγραφα υπήρξαν».

Αυτό που ο Newton χρειαζόταν και χρησιμοποιούσε στο Principia ήταν η δυνατότητα να παίρνει όρια λόγων γεωμετρικών μεγεθών. Για παράδειγμα, στο Λήμμα VII της Παραγράφου I του Βιβλίου I ισχυρίζεται ότι αν δοθούν μια χορδή AB και το αντίστοιχο τόξο μιας καμπύλης, καθώς και το αντίστοιχο εφαπτόμενο τμήμα AD (βλέπε σχήμα) τότε «αν τα σημεία A και B πλησιάσουν το ένα το άλλο και συναντηθούν» τότε ο «ύστατος λόγος του τόξου, της χορδής και της εφαπτόμενης, οποιουδήποτε προς οποιοδήποτε άλλο, είναι ο λόγος δύο ίσων μεγεθών».



Σχήμα 6.19:

Και στα σχόλια της Παραγράφου I γράφει, εξηγώντας:

Με τον όρο «ύστατος λόγος» ποσοτήτων που τείνουν να μηδενιστούν εννοούμε το λόγο των ποσοτήτων όχι πριν να μηδενιστούν αλλά αυτόν με τον οποίο μηδενίζονται. Αυτοί οι ύστατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι πραγματικά οι λόγοι των ύστατων ποσοτήτων αλλά τα όρια προς τα οποία συγκλίνουν οι λόγοι των ποσοτήτων που φθίνουν χωρίς όριο, και τα οποία προσεγγίζουν περισσότερο από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, αλλά δεν τα ξεπερνούν, ούτε και τα φτάνουν έως ότου οι ποσότητες γίνουν απείρως μικρές.

Η διατύπωση αυτή είναι ουσιαστικά η απόπειρα του Newton να δώσει τον ορισμό της έννοιας του ορίου. Με σύγχρονο συμβολισμό θα λέγαμε ότι διατυπώνει το εξής: αν για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ διαφέρουν λιγότερο από ϵ όταν το t είναι αρκετά κοντά στο a , τότε

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t).$$

Παρόλο λοιπόν που ο Newton δεν χρησιμοποιεί συστηματικά το λογισμό των ρών στο Principia, σε αυτές τις παραγράφους δίνει την καλύτερή του παρουσίαση της έννοιας του ορίου, στην οποία βασίζεται αυτός ο λογισμός.

Το γεγονός ότι ο Newton φαινομενικά χρησιμοποιεί απειροστά σε επόμενα τμήματα του Principia, υπήρξε συχνά πηγή σύγχυσης και παρανοήσεων. Στα σχόλια του Principia, αλλά και στην εισαγωγή του μεταγενέστερου De Quadratura, τονίζει ότι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μέσω απειροστών ή αδιαιρέτων είναι απλώς μια βολική συντομογραφία (αλλά όχι υποκατάστατο) για την αυστηρή μαθηματική απόδειξη μέσω των ύστατων λόγων (των ορίων).

6.10 De Quadratura Curvarum

Από τα διάφορα δοκίμια του Newton με θέμα τον απειροστικό λογισμό, αυτό που γράφτηκε τελευταίο αλλά εκδόθηκε πρώτο ήταν το De Quadratura Curvarum. Είναι μια αυστηρά τεχνική παρουσίαση του ώριμου λογισμού των ρών, που γράφτηκε την περίοδο 1691-1693 (και όχι το 1676 όπως ισχυρίζονται τα περισσότερα βιβλία της ιστορίας των μαθηματικών) και εμφανίστηκε σαν παράρτημα στην έκδοση του Optics του 1704.

Στην πρώτη του επιστολή προς τον Leibniz ο Newton είχε διατυπώσει χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα για τον τετραγωνισμό καμπυλών. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη

$$y = x^\theta (e + fx^\eta)^\lambda$$

ισούται με

$$(6.10.1) \quad Q \left\{ \frac{x^\eta}{s} - \frac{r-1}{s-1} \frac{eA}{fx^\eta} + \frac{r-2}{s-2} \frac{eB}{fx^\eta} - \frac{r-3}{s-3} \frac{eC}{fx^\eta} + \dots \right\},$$

όπου

$$Q = \frac{(e + fx^\eta)^{\lambda+1}}{\eta f}, \quad r = \frac{\theta + 1}{\eta}, \quad s = \lambda + r, \quad \pi = \eta(r - 1),$$

και τα γράμματα A, B, C, \dots συμβολίζουν τους αμέσως προηγούμενους όρους, δηλαδή,

$$A = \frac{x^\eta}{s}, \quad B = -\frac{r-1}{s-1} \frac{eA}{fx^\eta}, \quad C = \frac{r-2}{s-2} \frac{eB}{fx^\eta}, \dots$$

Σε ισοδύναμο συμβολισμό με αθροίσματα,

$$(6.10.2) \quad \int x^\theta (e + fx^\eta)^\lambda dx = \frac{Qx^\eta}{s} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-k)}{(s-1)(s-2)\dots(s-k)} \frac{e^k}{f^k x^{k\eta}} \right].$$

Αν ο r είναι φυσικός αριθμός, τότε αυτό είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα με r το πλήθος όρους. Αλλιώς, είναι μια άπειρη σειρά που η σύγκλιση της χρειάζεται συζήτηση (την οποία ο Newton δεν έκανε).

Στο De Quadratura περιέχεται το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα. Αν

$$\begin{aligned} R &= e + fx^\eta + gx^{2\eta} + hx^{3\eta} + \dots, \\ S &= a + bx^\eta + cx^{2\eta} + dx^{3\eta} + \dots, \\ r &= \frac{\theta}{\eta}, \quad s = r + \lambda, \quad t = s + \lambda, \quad v = t + \lambda, \dots \end{aligned}$$

τότε

$$(6.10.3) \quad \int x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S dx = x^\theta R^\lambda \left[\frac{a/\eta}{re} + \frac{b/\eta - sfA}{(r+1)e} x^\eta + \frac{c/\eta - (s+1)/B - tgA}{(r+2)e} x^{2\eta} + \frac{d/\eta - (s+2)fC - (t+1)gB - vhA}{(r+3)e} x^{3\eta} + \dots \right],$$

όπου κάθε A, B, C, \dots είναι ο συντελεστής της προηγούμενης δύναμης του x , δηλαδή

$$A = \frac{a/\eta}{re}, \quad B = \frac{b/\eta - s/A}{(r+1)e}, \quad C = \frac{c/\eta - (s+1)fB - tgA}{(r+2)e}, \dots$$

Όπως παρατηρεί (πολύ αργότερα, το 1947) ο Hadamard, το *De Quadratura* «φέρει την ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων σε ένα επίπεδο ανεπαίσθητα χαμηλότερο από αυτό στο οποίο βρίσκεται τώρα».

Ο ίδιος ο Newton, το 1676, σε μια επιστολή του προς τον John Collins γράφει:

Δεν υπάρχει καμπύλη η οποία να εκφράζεται από κάποια εξίσωση με τρεις όρους και για την οποία να μην μπορώ να πω σε λιγότερο από το μισό του ενός τετάρτου της ώρας αν μπορεί να τετραγωνιστεί ή αν υπάρχουν απλούστερα σχήματα με τα οποία να

μπορεί να συγκριθεί, κωνικές τομές ή άλλα. Και μετά με έναν άμεσο και σύντομο τρόπο να μπορώ να τα συγκρίνω. Και έτσι, αν δύο σχήματα που εκφράζονται από τέτοιες εξισώσεις μπορούν να συγκριθούν τότε μπορώ να τα συγκρίνω. Μπορεί αυτό να φαίνεται ένας θρασύς ισχυρισμός γιατί είναι δύσκολο να πούμε αν ένα σχήμα μπορεί ή δεν μπορεί να συγκριθεί με ένα άλλο, μου φαίνεται όμως καθαρό από τον τρόπο με τον οποίο έχω καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα, κάτι που δεν θα μπω στον κόπο να αποδείξω σε άλλους.

6.11 Ασκήσεις

1. Γράψτε την $y = x^n$ στη μορφή $f(x, y) = 0$ και συμπεράνατε από την (6.1.1) ότι

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}.$$

2. Αν $\dot{y}/\dot{x} = cx^{n-1}\sqrt{a + bx^n + cx^{2n}}$, αποδείξτε μέσω της αντικατάστασης $z = x^n$ ότι

$$y = \square \frac{c}{n} \sqrt{a + bz + cz^2}.$$

3. Αν $\dot{y}/\dot{x} = \frac{c}{x}\sqrt{ax^n + bx^{2n}}$, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $z^2 = x^n$ και την $2z\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$ για να δείξετε ότι

$$y = \square \frac{2c}{n} \sqrt{a + bz^2}.$$

4. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στον ακόλουθο υπολογισμό του

$$t = \int \frac{z^{\eta-1} dz}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}$$

από τον Newton. Πρώτα, κάνοντας την αντικατάσταση $x = z^\eta$ δείξτε ότι

$$t = \frac{1}{\eta} \int \frac{dx}{e + fx + gx^2}.$$

Κτόπιν, χρησιμοποιήστε την παραγοντοποίηση

$$4g(e + fx + gx^2) = (f + p + 2gx)(f - p + 2gx),$$

όπου $p^2 = f^2 - 4eg$, για να συμπεράνατε ότι

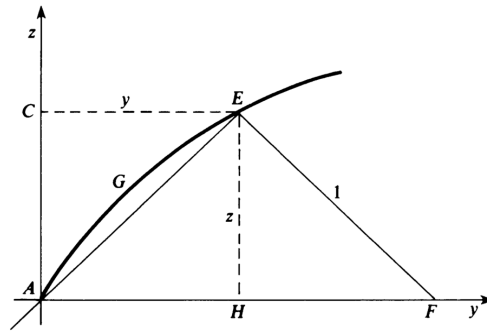
$$t = \frac{2g}{p\eta} \int \left(\frac{1}{f - p + 2gx} - \frac{1}{f + p + 2gx} \right) dx.$$

5. Θεωρούμε την καμπύλη «κάππα» η οποία περιγράφεται, από τον Newton, ως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου E του ορθογωνίου τριγώνου AEF στο σχήμα, όπου A είναι η αρχή των αξόνων και το F κινείται στον οριζόντιο y -άξονα και το EF έχει μοναδιαίο μήκος. Από τα όμοια τρίγωνα AEH και EFH βλέπουμε ότι

$$y = \frac{z^2}{\sqrt{1 - z^2}},$$

άρα το εμβαδόν $AGEC$ είναι ίσο με

$$t = \int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$



Σχήμα 6.20:

Αποδείξτε με αντικατάσταση ότι αν s είναι το εμβαδόν κάτω από τον κύκλο $v = \sqrt{1-x^2}$, και $x = z$, τότε

$$t = s - xv.$$

Δηλαδή,

$$\int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^x \sqrt{1-x^2} dx - x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \arcsin z_0 - \frac{1}{2} z_0 \sqrt{1-z_0^2}.$$

6. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του (πιθανού) επιχειρήματος του Newton για την απόδειξη της

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255} + \dots$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots,$$

αναπτύσσοντας το $1/(1+x^4)$ σε γεωμετρική σειρά και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο.

(β) Παρατηρώντας ότι

$$2 \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2},$$

συμπεράνατε ότι

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}.$$

Αντικαθιστώντας $x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\arctan(1+\sqrt{2}) - \arctan(1-\sqrt{2})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(γ) Τέλος, ομαδοποιήστε τους όρους στη μορφή

$$1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \dots$$

και βρείτε τους κοινούς παρονομαστές.

7. Γράφοντας $\sqrt{x+x^2}/x^5 = x^{-4}(1+x^{-1})^{1/2}$ και χρησιμοποιώντας την (6.10.1) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{1}{x^5} \sqrt{x+x^2} dx = \frac{-16x^2 + 24x - 30}{105x^4} (x+1) \sqrt{x^2+x}.$$

8. Γράφοντας

$$\frac{x^{1/3}}{\sqrt[5]{1-3x^{2/3}+3x^{4/3}-x^2}} = x^{1/3}(1-x^{2/3})^{-3/5}$$

και χρησιμοποιώντας την (6.10.1) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{x^{1/3} dx}{\sqrt[5]{1-3x^{2/3}+3x^{4/3}-x^2}} = \frac{30x^{2/3}+75}{28} (1-x^{2/3})^{2/5}.$$

9. Γράψτε

$$\frac{x^5+x^4-8x^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{x^6-9x^4+8x^3}{(x-1)^4(x+2)^2} = x^3 \frac{8-9x+x^3}{(2-3x+x^3)^2}$$

και εφαρμόζοντας την (6.10.3) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{x^5+x^4-8x^2}{(x-1)^3(x+2)^2} dx = \frac{x^4}{x^3-3x+2}.$$

10. Εφαρμόζοντας την (6.10.3) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{3+2x+8x^2+8x^3-7x^4-6x^5}{(1+x-x^2-x^3)^{4/3}} dx = \frac{3x(1+x^2)}{(1+x-x^2+x^3)^{1/3}}.$$

Κεφάλαιο 7

Ο Απειροστικός Λογισμός του Leibniz

7.1 Εισαγωγή

Η σοβαρή ενασχόληση του Leibniz με τα μαθηματικά αρχίζει το 1672 (ήταν τότε 26 ετών), όταν υπηρέτησε ως διπλωμάτης στο Παρίσι. Στα τέσσερα χρόνια της παραμονής του στο Παρίσι, συνέλαβε τις βασικές ιδέες του δικού του απειροστικού λογισμού. Το 1676 επέστρεψε στη Γερμανία και, παρόλο που η βασική του επαγγελματική δραστηριότητα ήταν άλλη, συνέχισε να αναπτύσσει αυτές τις ιδέες. Ένα φιλόδοξο σχέδιό του, το οποίο προσπαθούσε να υλοποιήσει σε όλη τη διάρκεια της ζωής του, ήταν να αναπτύξει μια καθολική γλώσσα ή συμβολική λογική η οποία θα καθιστούσε μηχανικούς όχι μόνο τους αριθμητικούς υπολογισμούς αλλά και όλες τις διαδικασίες της λογικής ανθρώπινης σκέψης, και θα απάλλαζε τον άνθρωπο από βαρετά και επαναλαμβανόμενα βήματα.

Για το σκοπό αυτό ήθελε να δημιουργήσει ένα σύστημα συμβολισμού και ορολογίας το οποίο θα κωδικοποιούσε και θα απλοποιούσε τον τρόπο με τον οποίο αιτιολογεί κανείς, ακριβώς όπως οι κανόνες της αριθμητικής επιτρέπουν σε οποιονδήποτε να εκτελεί πράξεις. Ο απειροστικός λογισμός του είναι το πιο σπουδαίο παράδειγμα, στην ιστορία της επιστήμης και των μαθηματικών, ενός συστήματος συμβολισμού και ορολογίας το οποίο να υπηρετεί τόσο πιστά αυτό το στόχο, σε σχέση με τις βασικές απαιτήσεις του συγκεκριμένου αντικειμένου. Δίνει τη δυνατότητα σε κάθε φοιτητή να επιλύει, χωρίς να συναντά δυσκολίες, προβλήματα που κάποτε απαιτούσαν την ιδιοφυΐα ενός Αρχιμήδη ή ενός Newton.

Αξίζει τον κόπο να δούμε κάποια παραδείγματα που δείχνουν τι εννοούσε ο Leibniz λέγοντας πως ο συμβολισμός είναι ένα «ευαίσθητο και χειροπιαστό εργαλείο που καθοδηγεί το νού» στα σωστά συμπεράσματα. Με το συνήθη συμβολισμό που καθιερώθηκε πολύ αργότερα από τον Lagrange, ο κανόνας της αλυσίδας λέει ότι αν $h(x) = f(g(x))$ τότε

$$(7.1.1) \quad h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Τίποτα σε αυτή την ισότητα δεν μας υποδεικνύει γιατί ισχύει, ούτε μας βοηθάει στο πώς να την αποδείξουμε. Με τον διαφορικό συμβολισμό όμως, αν θέσουμε $z = f(y)$ και $y = g(x)$, η

(7.1.1) γίνεται

$$(7.1.2) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Αυτή η σχέση, αντιθέτως, φωνάζει ότι ισχύει: δεν έχουμε παρά να διαγράψουμε τα dy στο δεξιό μέλος σα να ήταν πραγματικοί αριθμοί. Αυτή η συμβολική διαγραφή προτείνει ταυτόχρονα και την απόδειξη της σχέσης – αντικαθιστώντας τα διαφορικά dx, dy, dz με πεπερασμένες διαφορές $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ και παίρνοντας το όριο.

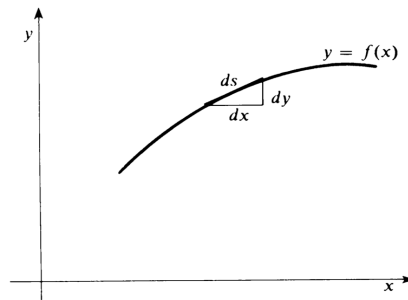
Η ολοκληρωτική μορφή του κανόνα της αλυσίδας είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

$$(7.1.3) \quad \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Η συμβολική αντικατάσταση $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ κάνει την (7.1.3) να μοιάζει αναπόφευκτη, όποια κι αν είναι η απόδειξή της. Αυτή η παρατήρηση ότι η διαφορική μορφή $f(u)du$ παραμένει αμετάβλητη κάτω από αλλαγές μεταβλητής είναι μία από τις πιο σημαντικές ανακαλύψεις του Leibniz.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x)$ γύρω από τον x -άξονα. Αν σκεφτούμε το απειροστό ds ως την υποτείνουσα του «χαρακτηριστικού τριγώνου» με πλευρές dx και dy (βλέπε σχήμα), το Πυθαγόρειο θεώρημα μας δίνει

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Σχήμα 7.1:

Όταν αυτό το τμήμα ds περιστραφεί γύρω από τον x -άξονα (όντας πάνω σε κύκλο ακτίνας y), παράγει μια απειροστή επιφάνεια

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Προσθέτοντας αυτά τα απειροστά εμβαδά, παίρνουμε

$$(7.1.4) \quad A = \int dA = \int 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

για το εμβαδόν της επιφάνειας. Ανακαλύπτουμε έτσι το σωστό τύπο (7.1.4) με έναν πολύ απλό χειρισμό των συμβόλων του Leibniz. Αντιθέτως, η αυστηρή απόδειξή του απαιτεί λεπτομερή συζήτηση και τον ορισμό της έννοιας του εμβαδού επιφάνειας, καθώς και μια απόδειξη (π.χ. μέσω αθροισμάτων Riemann) του ότι αυτός ο ορισμός πράγματι συμφωνεί με την (7.1.4).

Αυτά τα απλά παραδείγματα δείχνουν τα βασικά χαρακτηριστικά του λογισμού του Leibniz: (α) τον κεντρικό ρόλο των απειροστών διαφορών (των διαφορικών) και των αθροισμάτων (των ολοκληρωμάτων) και της αντίστροφης σχέσης τους, (β) το χαρακτηριστικό τρίγωνο ως σύνδεσμο ανάμεσα στα προβλήματα εφαπτόμενης (προβλήματα διαφορίσης) και τα προβλήματα τετραγωνισμού (προβλήματα ολοκλήρωσης), (γ) το μετασχηματισμό ολοκληρωμάτων μέσω αντικαταστάσεων, και γενικά τον τρόπο με τον οποίο αυτός ο λογισμός πράγματι καθοδηγεί το νού στη (φορμαλιστική) ανακάλυψη σωστών αποτελεσμάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε τα στάδια που διαδοχικά ακολούθησε ο Leibniz ως την ανακάλυψη και ανάπτυξη του λογισμού του. Τα κρίσιμα πρώτα βήματα έγιναν στην περίοδο κατά την οποία βρέθηκε στο Παρίσι (1672-76), οκτώ έως και δέκα χρόνια μετά από τα αντίστοιχα πρώτα βήματα του Newton. Όμως, ο Leibniz πρωτοδημοσίευσε τα αποτελέσματά του το 1684, είκοσι χρόνια νωρίτερα από τη δημοσίευση του De Quadratura του Newton. Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου κάνουμε μια σύγκριση των δύο προσεγγίσεων, του Newton και του Leibniz, στον απειροστικό λογισμό. Συζητάμε επίσης τη δυσάρεστη ιστορία της αντιδικίας, στις αρχές του 18ου αιώνα, σχετικά με το ποιος είχε την προτεραιότητα.

7.2 Το ξεκίνημα: αθροίσματα και διαφορές

Τόσο στο *Historia et origo calculi differentialis* όσο και σε άλλα γραπτά του, ο Leibniz περιγράφει ως πηγή έμπνευσής του για τη δουλειά του στον Απειροστικό Λογισμό την ενασχόλησή του με τις ακολουθίες αθροισμάτων και διαφορών αριθμών. Ως φοιτητής, είχε ενδιαφερθεί για απλές ιδιότητες των αριθμών, και το 1666 είχε δημοσιεύσει ένα δοκίμιο με τίτλο *De arte combinatoria*, το οποίο είχε ως θέμα του στοιχειώδεις ιδιότητες των συνδυασμών και των μεταθέσεων.

Περίπου την εποχή που έφτασε στο Παρίσι, το 1672, έκανε μια παρατήρηση για το άθροισμα των διαφορών διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας αριθμών. Έστω

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

μια ακολουθία αριθμών, και ας θεωρήσουμε την ακολουθία

$$d_1, d_2, \dots, d_n$$

των διαφορών $d_i = a_i - a_{i-1}$. Τότε,

$$(7.2.1) \quad d_1 + d_2 + \dots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Δηλαδή, το άθροισμα των διαδοχικών διαφορών ισούται με τη διαφορά του πρώτου από τον τελευταίο όρο της αρχικής ακολουθίας.

Για παράδειγμα, παρατήρησε ότι η «ακολουθία διαφορών» της ακολουθίας των τετραγώνων

$$0, 1, 4, \dots, n^2$$

είναι η ακολουθία των διαδοχικών περιττών αριθμών

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1,$$

διότι $i^2 - (i - 1)^2 = 2i - 1$. Έπεται ότι το άθροισμα των πρώτων n περιττών αριθμών είναι ίσο με n^2 :

$$(7.2.2) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Το αποτέλεσμα του για τα αθροίσματα διαφορών, έδωσε στον Leibniz την ιδέα ότι θα μπορούσε να αθροίσει μια άπειρη ακολουθία αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

είναι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της ακολουθίας

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

δηλαδή, $b_i = a_i - a_{i+1}$. Τότε,

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_{n+1}.$$

Αν, επιπλέον, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, έπεται ότι

$$(7.2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1.$$

Ο Leibniz επικοινωνήσε με τον Christian Huygens (1629-1695), ο οποίος ήταν ένας από τους πλέον καταξιωμένους επιστήμονες της εποχής. Όταν ο Leibniz του περιέγραψε τα αποτελέσματά του για τα αθροίσματα διαφορών, ο Huygens του πρότεινε να προσπαθήσει να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς

$$(7.2.4) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n(n+1)/2} + \dots$$

των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών. Το πρόβλημα αυτό είχε προκύψει σε μια συζήτηση του με τον Hudde για τον υπολογισμό πιθανοτήτων σε σχέση με κάποια τυχερά παιχνίδια.

Το πρόβλημα του Huygens ήταν στα μέτρα του Leibniz. Από την προηγούμενη δουλειά του είχε πολύ καλή αίσθηση για το τρίγωνο του Pascal. Ας γράψουμε το τρίγωνο στην ακόλουθη μορφή:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Σχήμα 7.2:

Το n -οστό στοιχείο κάθε γραμμής είναι το άθροισμα των πρώτων n στοιχείων της προηγούμενης. Έτσι, ο n -οστός τριγωνικός αριθμός (αριθμός τύπου 1), το άθροισμα των πρώτων n φυσικών, είναι το n -οστό στοιχείο της τρίτης γραμμής. Γενικότερα, αφού ο n -οστός αριθμός τύπου k είναι το άθροισμα των πρώτων n αριθμών τύπου $k - 1$, η $(k + 2)$ -οστή γραμμή αποτελείται από τους αριθμούς τύπου k . Άρα, το τρίγωνο του Pascal εκφράζει τους τριγωνικούς αριθμούς ως αθροίσματα φυσικών, τους αριθμούς τύπου 2 ως αθροίσματα τριγωνικών αριθμών, και ούτω καθεξής. Αντίστροφα, οι τριγωνικοί αριθμοί είναι διαφορές διαδοχικών αριθμών τύπου 2, και ούτω καθεξής.

Ο Leibniz κατάλαβε ότι προβλήματα όπως αυτό που του έθεσε ο Huygens θα μπορούσαν να απαντηθούν αν κανείς ξεκινούσε με την ακολουθία των αντιστρόφων των φυσικών αντί για τους ίδιους τους φυσικούς. Με αυτό τον τρόπο, έφτιαξε τον ακόλουθο πίνακα, τον οποίον αποκάλεσε «αρμονικό τρίγωνο»:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	·	·	·
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	·	·	·	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	·	·	·		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	·	·	·			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	·	·	·				
·	·	·							
·	·	·							
·	·	·							

Σχήμα 7.3:

Κάθε γραμμή του αρμονικού τριγώνου είναι η ακολουθία των διαφορών των διαδοχικών όρων της προηγούμενης γραμμής. Έτσι, από την (7.2.3) προκύπτει ότι το άθροισμα των όρων κάθε γραμμής ισούται με το πρώτο στοιχείο της προηγούμενης γραμμής. Ειδικότερα,

$$(7.2.5) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1,$$

$$(7.2.6) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \cdots = \frac{1}{2},$$

$$(7.2.7) \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Το n -οστό στοιχείο της δεύτερης γραμμής του αρμονικού τριγώνου είναι ίσο με

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

δηλαδή είναι το μισό του αντιστρόφου του n -οστού τριγωνικού αριθμού $n(n+1)/2$. Άρα, πολλαπλασιάζοντας την (7.2.5) επί 2 παίρνουμε το άθροισμα που ζητούσε ο Huygens:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots = 2.$$

Όμοια, πολλαπλασιάζοντας την (7.2.6) επί 3 παίρνουμε το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών τύπου 2:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots = \frac{3}{2}.$$

Το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal και το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz έχουν μια σχέση αντιστρόφων ως προς τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζονται – στην πρώτη περίπτωση εμπλέκονται αθροίσματα ενώ στην δεύτερη διαφορές. Στο αριθμητικό τρίγωνο, κάθε γραμμή αποτελείται από αθροίσματα των όρων της προηγούμενης γραμμής και διαφορές των όρων της επόμενης γραμμής. Στο αρμονικό τρίγωνο, κάθε γραμμή αποτελείται από διαφορές των όρων της προηγούμενης γραμμής.

Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν τον Leibniz σε μια πολύ καθαρή ιδέα που επρόκειτο να παίξει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του απειροστικού λογισμού – την έννοια της αντίστροφης σχέσης του να θεωρεί κανείς διαφορές και του να σχηματίζει τα αθροίσματα των όρων μιας ακολουθίας.

7.3 Το χαρακτηριστικό τρίγωνο

Το 1672, όταν μελετούσε τις ακολουθίες αθροισμάτων και διαφορών, ο Leibniz αγνοούσε πολλά από τα μαθηματικά εργαλεία και αποτελέσματα της εποχής του. Σε μια επιστολή του προς τον Tschirnhaus, το 1680, αναφέρεται σε μια συζήτηση που είχε με τον Huygens το 1673, η οποία τον οδήγησε στην απόφαση να αποκτήσει πιο στέρεη μαθηματική παιδεία:

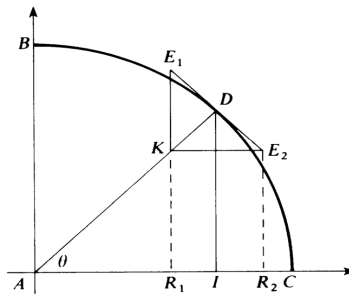
Η αφορμή για να ανακαλύψω τη μέθοδο του χαρακτηριστικού τριγώνου, και άλλες μεθόδους αυτού του είδους, ήταν μια συζήτηση που είχα με τον Huygens, σε μια στιγμή που η μελέτη μου στη γεωμετρία δεν υπερέβαινε τους έξι μήνες. Ο Huygens μου είχε δώσει ένα αντίγραφο του βιβλίου του για το εκκρεμές, και εκείνη την εποχή αγνοούσα την άλγεβρα του Descartes και τη μέθοδο των αδιαιρέτων, για την ακρίβεια δεν γνώριζα ούτε το σωστό ορισμό του κέντρου βάρους. Μίλησα κατά τύχη γι' αυτό στον Huygens και κατάλαβε ότι νόμιζα πως κάθε ευθεία που περνάει από το κέντρο βάρους ενός επίπεδου σχήματος το χωρίζει πάντα σε δύο ίσα μέρη. Επειδή αυτό προφανώς συμβαίνει στην περίπτωση ενός τετραγώνου, ενός κύκλου ή μιας έλλειψης, και όλων των σχημάτων που έχουν κέντρο συμμετρίας, νόμιζα ότι το ίδιο ισχύει για όλα τα άλλα σχήματα. Ο Huygens γέλασε όταν το άκουσε, και μου είπε ότι αυτό απείχε πολύ από την αλήθεια. Αποφάσισα τότε να σχοληθώ με πιο προχωρημένη γεωμετρία, αν και εκείνη την εποχή δεν είχα καν διαβάσει τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Στην πράξη όμως είδα ότι μπορεί κανείς να τα καταφέρει χωρίς να γνωρίζει τον Ευκλείδη, αρκεί να κατέχει μερικές προτάσεις. Ο Huygens, ο οποίος νόμιζε ότι ήμουν καλύτερος γεωμέτρης απ' ότι στην πραγματικότητα ήμουν, μου έδωσε να διαβάσω τα γράμματα του Pascal, τα οποία είχε δημοσιεύσει με το ψευδώνυμο Dettonville. Και από αυτά είδα τι ήταν η μέθοδος των αδιαιρέτων, τι ήταν το κέντρο βάρους, δηλαδή έμαθα για τις γνωστές μεθόδους των Cavalieri και Guldinus

Μέσα σε αυτή τη δουλειά του Pascal ο Leibniz βρήκε το φημισμένο του «χαρακτηριστικό τρίγωνο». Τον Ιούνιο του 1658, ο Pascal είχε προτείνει έναν διαγωνισμό, με ημερομηνία λήξης την 1η Οκτωβρίου 1658, με θέμα διάφορα προβλήματα σχετικά με την κυκλοειδή – να υπολογιστούν το εμβαδόν και το κέντρο βάρους τυχόντος τμήματος της κυκλοειδούς, και να βρεθούν ο όγκος και το κέντρο βάρους διαφόρων στερεών που προκύπτουν από την περιστροφή ενός τέτοιου τμήματος. Ήδη, το 1643, ο Roberval είχε αποδείξει ότι το εμβαδόν της πλήρους

κυκλοειδούς είναι το τριπλάσιο του εμβαδού του κύκλου που την γεννά και ότι ο όγκος του στερεού που παίρνουμε αν περιστρέψουμε την κυκλοειδή ως προς τη βάση της ισούται με τα $5/8$ του περιγεγραμμένου κυλίνδρου της.

Οι περισσότεροι κορυφαίοι μαθηματικοί της εποχής πήραν μέρος στο διαγωνισμό, και μερικοί από αυτούς πρότειναν λύσεις. Ο Pascal δεν θεώρησε καμία από τις απαντήσεις πλήρως ικανοποιητική, και δημοσίευσε τις δικές του λύσεις σε ένα έργο με τίτλο *Lettres de A. Dettonville*, με το ψευδώνυμο Dettonville (αυτό ήταν κάτι που είχε ξανακάνει). Στην πρώτη Πρόταση, ο Pascal αποδείκνυε τον τύπο για το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας. Για να αποδείξει την πρόταση, ο Pascal κατασκεύαζε ορθογώνιο τρίγωνο E_1E_2K με υποτείνουσα E_1E_2 εφαπτόμενη στον κύκλο σε ένα τυπικό σημείο D , και στη συνέχεια παρατηρούσε ότι τα τρίγωνα E_1E_2K και ADI είναι όμοια (βλέπε σχήμα). Συνεπώς,

$$\frac{AD}{E_1E_2} = \frac{DI}{E_2K}, \quad \text{άρα} \quad DI \cdot E_1E_2 = AD \cdot E_2K = AD \cdot R_1R_2.$$



Σχήμα 7.4:

Έτσι, αν $y = DI$, $a = AD$, $\Delta s = E_1E_2$ και $\Delta x = R_1R_2$, έχουμε

$$y \Delta s = a \Delta x.$$

Θεωρώντας τα Δs και Δx απείρως μικρά και προσθέτοντας, βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του Pascal γράφεται ως εξής:

$$(7.3.1) \quad \int y ds = \int a dx.$$

Δεδομένου ότι η ποσότητα $2\pi y ds$ δίνει το εμβαδόν μιας απειροστής ζώνης στο ημισφαίριο ακτίνας a που προκύπτει αν περιστρέψουμε το τεταρτοκύκλιο γύρω από τον x -άξονα, έπεται ότι το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι ίσο με

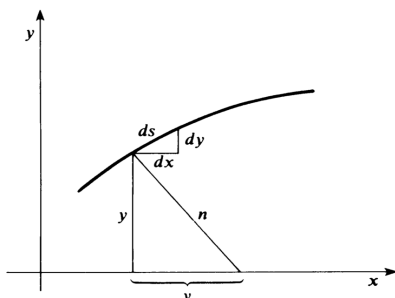
$$A = \int 2\pi y ds = 2\pi a \int_0^a dx = 2\pi a^2.$$

Έτσι, η (7.3.1) μας δίνει μια απόδειξη (μέσω απειροστών) του τύπου $A = 4\pi a^2$ για το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας ακτίνας a .

Η «ξαφνική έμπνευση» του Leibniz ήταν ότι παρατήρησε το γεγονός ότι η κατασκευή του Pascal με το χαρακτηριστικό τρίγωνο θα μπορούσε να εφαρμοστεί στο πολύ γενικότερο

πλαίσιο τυχούσας καμπύλης, αν κανείς αντικαθιστούσε την ακτίνα του κύκλου με την κάθετη στην καμπύλη. Από την ομοιότητα των τριγώνων στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε ότι

$$\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}, \quad \text{δηλαδή} \quad y ds = n dx.$$



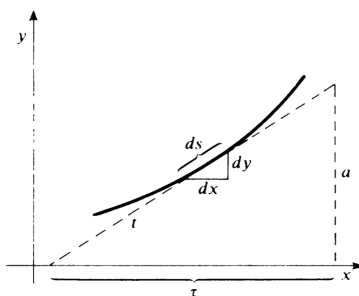
Σχήμα 7.5:

Συνεπώς, προσθέτοντας τα απειροστά παίρνουμε

$$(7.3.2) \quad \int y ds = \int n dx.$$

Βέβαια, ο Leibniz εγκαινίασε τον διαφορο-ολοκληρωτικό συμβολισμό του δύο χρόνια αργότερα, το 1675. Αρχικά λοιπόν περιέγραψε την (7.3.2) με λόγια (η ροπή της δοθείσης καμπύλης ως προς τον x -άξονα ισούται με το εμβαδόν κάτω από μια δεύτερη καμπύλη που έχει τεταγμένη την κάθετη n προς τη δοθείσα καμπύλη). Πολλαπλασιάζοντας επί 2π παίρνουμε το εμβαδόν $A = \int 2\pi y ds$ της επιφάνειας εκ περιστροφής που προκύπτει αν περιστρέψουμε την αρχική καμπύλη γύρω από τον x -άξονα. Όταν ο Leibniz έδειξε αυτό το αποτέλεσμα στον Huygens, εκείνος του ομολόγησε ότι «με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος μπόρεσε να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας των παραβολοειδών και άλλων στερεών αυτού του τύπου, αιτιολογώντας έτσι αποτελέσματα τα οποία είχαν διατυπωθεί χωρίς απόδειξη πριν από πολλά χρόνια».

Περίπου ταυτόχρονα, ο Leibniz είδε πώς να εφαρμόσει τη μέθοδο του χαρακτηριστικού τριγώνου σε προβλήματα υπολογισμού μήκους καμπύλης και εμβαδών. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης στο παρακάτω σχήμα. Συμβολίζουμε με t το μήκος του τμήματος της εφαπτόμενης (σε ένα σημείο της καμπύλης) το οποίο ορίζεται από τον x -άξονα και ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα (σταθερού) μήκους a .



Σχήμα 7.6:

Από την ομοιότητα των τριγώνων στο σχήμα, έπεται ότι

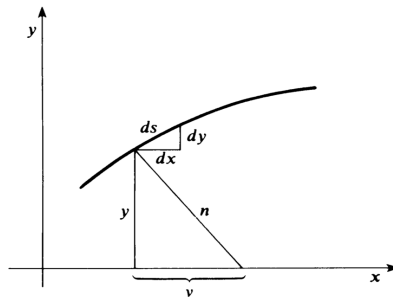
$$\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a}, \quad \text{δηλαδή} \quad a ds = t dy.$$

Συνεπώς,

$$(7.3.3) \quad \int a ds = \int t dy.$$

Έτσι, ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης ανάγεται σε ένα πρόβλημα τετραγωνισμού (ολοκλήρωσης), αυτό του υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου ανάμεσα στον x -άξονα και μια δεύτερη καμπύλη που έχει τεταγμένη στο σημείο x ίση με το μήκος της εφαπτόμενης t στη δοθείσα καμπύλη.

Για την τρίτη εφαρμογή του χαρακτηριστικού τριγώνου, θεωρούμε και πάλι το σχήμα που χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη εφαρμογή:



Σχήμα 7.7:

Από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε

$$\frac{dy}{\nu} = \frac{dx}{y}, \quad \text{δηλαδή} \quad \nu dx = y dy,$$

όπου ν είναι η «υποκάθετος» στη δοθείσα καμπύλη. Συνεπώς,

$$(7.3.4) \quad \int \nu dx = \int y dy.$$

Ο Leibniz παρατήρησε ότι αν η δοθείσα καμπύλη περνάει από την αρχή των αξόνων και το διάστημα στο οποίο την θεωρούμε είναι το $[0, b]$, τότε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (7.3.4) είναι απλώς το εμβαδόν $\frac{1}{2}b^2$ ενός τριγώνου που έχει βάση και ύψος ίσα με b .

Αφού $\nu = y \frac{dy}{dx}$, η (7.3.4) μας λέει ότι

$$\int y \frac{dy}{dx} dx = \int y dy.$$

Εδώ εμφανίζονται για πρώτη φορά δύο ιδέες που θα έπαιζαν κεντρικό ρόλο στον απειροστικό λογισμό του Leibniz – ο μετασχηματισμός ολοκληρωμάτων μέσω αντικαταστάσεων και η αναγωγή προβλημάτων τετραγωνισμού σε αντίστροφα προβλήματα εφαπτόμενων (με αυτό εννοούμε το πρόβλημα του προσδιορισμού μιας καμπύλης αν είναι γνωστή η εφαπτόμενή της).

Για να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο η (7.3.4) μας δίνει αυτή την αναγωγή, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν $\int_0^a x^n dx$ κάτω από την καμπύλη $z = x^n$. Αν βρούμε μια καμπύλη $y = f(x)$ με υποκάθετο $v = x^n$, τότε η (7.3.4) θα μας δώσει

$$\int_0^a x^n dx = \int y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2} f(a)^2,$$

με την υπόθεση ότι $f(0) = 0$. Δοκιμάζοντας καμπύλες της μορφής $y = bx^k$, θέλουμε

$$v = y \frac{dy}{dx} = bx^k \cdot b k x^{k-1} = b^2 k x^{2k-1} = x^n.$$

Αναγκαστικά,

$$k = \frac{1}{2}(n+1) \quad \text{και} \quad b^2 = \frac{2}{n+1}.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{2} (ba^k)^2 = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Με αυτές τις αναζητήσεις, το 1673 (τον πρώτο χρόνο της σοβαρής του ενασχόλησης με τα μαθηματικά), ο Leibniz δεν απέδειξε αποτελέσματα τα οποία να μην ήταν ήδη γνωστά. Όλοι οι τετραγωνισμοί και όλες οι ευθυγραμμίσεις του είχαν ήδη ανακαλυφθεί από άλλους. Ακόμα και η βάση της μεθόδου του, το χαρακτηριστικό τρίγωνο, υπήρχε ουσιαστικά στη δουλειά του Pascal (και εμφανιζόταν αρκετά καθαρά στις Γεωμετρικές Διαλέξεις του Barrow). Έχανε όμως σημαντικά βήματα προς τον πραγματικό του στόχο – την ανάπτυξη μιας γενικής αλγοριθμικής μεθόδου η οποία θα ενοποιούσε τα διάσπαρτα αποτελέσματα και τις τεχνικές που βρήκε στην υπάρχουσα μαθηματική βιβλιογραφία. Είκοσι χρόνια μετά, σε μια επιστολή του προς τον l'Hospital, συνόψισε αυτά τα πρώτα βήματα ως εξής:

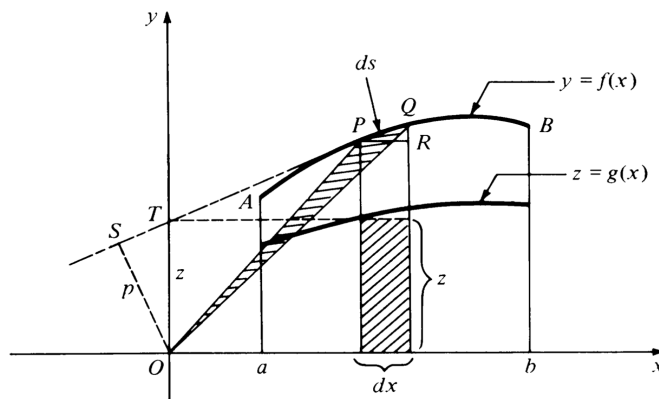
Χρησιμοποιώντας αυτό που αποκαλώ «χαραριστικό τρίγωνο» ανακάλυψα πολύ γρήγορα σχεδόν όλα τα θεωρήματα τα οποία μετέπειτα βρήκα στις δουλειές των Barrow και Gregory. Μέχρι τότε, δεν ήμουν αρκετά εξοικειωμένος με την άλγεβρα του Descartes και δεν χρησιμοποιούσα εξισώσεις για να εκφράσω τη φύση των καμπυλών. Με τις συμβουλές όμως του Huygens, άρχισα να τις επεξεργάζομαι και είμαι ευτυχής που το έκανα. Γιατί μου έδωσαν τα μέσα να δημιουργήσω σχεδόν αμέσως το διαφορικό μου λογισμό. Αυτό έγινε ως εξής. Είχα προηγουμένως ασχοληθεί για κάποιο διάστημα με τον υπολογισμό αθροισμάτων σειρών αριθμών, κάτι που με ευχαριστούσε πολύ, και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούσα το γνωστό θεώρημα ότι αν μια σειρά έχει φθίνοντες όρους τότε ο πρώτος όρος ισούται με το άθροισμα όλων των διαφορών. Από αυτό οδηγήθηκα στον ορισμό του «αρμονικού τριγώνου», το οποίο ονόμασα έτσι σε αντιδιαστολή με το «αριθμητικό τρίγωνο» του Pascal. Αυτή η κατασκευή μου έδειξε τη μεγάλη χρησιμότητα των διαφορών, και βλέποντας από το λογισμό του Descartes ότι οι συντεταγμένες των σημείων μιας καμπύλης μπορούν να εκφραστούν αριθμητικά, είδα ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού μιας καμπύλης, ως πρόβλημα άθροισης, είναι το ίδιο με το να βρεθεί μια καμπύλη (η τετραγωνίζουσα) που οι διαφορές της είναι ανάλογες με αυτές της δοθείσης. Κατάλαβα επίσης αμέσως ότι το να βρίσκεις εφαπτόμενες δεν είναι τίποτε άλλο από το να βρίσκεις διαφορές, και το να βρίσκεις εμβαδά δεν είναι τίποτε άλλο από το να βρίσκεις αθροίσματα, αν φυσικά υποθέσουμε ότι οι διαφορές είναι ασυγκρίτως μικρές.

7.4 «Μετατροπή» και ο αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου

Για δεδομένη καμπύλη $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, και δύο γειτονικά σημεία $P(x, y)$ και $Q(x + dx, y + dy)$ πάνω στην καμπύλη, ο Leibniz θεωρεί το απειροστό τρίγωνο OPQ , όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Ας υποθέσουμε ότι η εφαπτόμενη που προσδιορίζεται από το απειροστό τόξο ds που συνδέει τα P και Q τέμνει τον y -άξονα στο σημείο $T(0, z)$ (βλέπε σχήμα), όπου

$$(7.4.1) \quad z = y - x \frac{dy}{dx},$$

και έστω OS το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα μήκους p από το O προς την προέκταση αυτής της εφαπτόμενης.



Σχήμα 7.8:

Τότε, το τρίγωνο OST είναι όμοιο με το χαρακτηριστικό τρίγωνο PRQ , άρα $dx/p = ds/z$. Συνεπώς, το εμβαδόν του απειροστού τριγώνου OPQ ισούται με

$$(7.4.2) \quad \alpha(OPQ) = \frac{1}{2} p ds = \frac{1}{2} z dx.$$

Αν θεωρήσουμε το τμήμα OAB που φράσσεται από το γράφημα AB της $y = f(x)$ και τις ακτίνες OA και OB , διαιρεμένο σε απειροστά τρίγωνα όπως το OPQ , από την (7.4.2) παίρνουμε

$$(7.4.3) \quad \alpha(OAB) = \frac{1}{2} \int_a^b z dx,$$

όπου η $z = g(x)$ ορίζεται από την (7.4.1). Όμως,

$$\begin{aligned} \int_a^b y dx &= \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) + \alpha(OAB) \\ &= \frac{1}{2} [xy]_a^b + \alpha(OAB), \end{aligned}$$

οπότε η (7.4.3) μας δίνει

$$(7.4.4) \quad \int_a^b y dx = \frac{1}{2} \left([xy]_a^b + \int_a^b z dx \right).$$

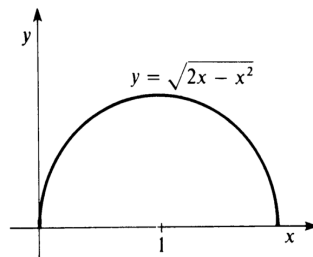
Η σχέση (7.4.4) είναι το «θεώρημα μετατροπής» του Leibniz. Η σημασία της (όπως και η σημασία της (7.3.4)) έγκειται στο ότι δίνει μια αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο πρόβλημα της εφαπτόμενης (αφού η z ορίζεται μέσω της εφαπτόμενης) και το πρόβλημα του τετραγωνισμού (του υπολογισμού του $\int_a^b y dx$). Επιπλέον, εισάγει μια νέα καμπύλη $z = g(x)$ η οποία μπορεί να χρησιμεύσει ως «τετραγωνίζουσα» για την αρχική καμπύλη $y = f(x)$ αν ο υπολογισμός του $\int_a^b z dx$ είναι απλούστερος από αυτόν του $\int_a^b y dx$. Παρατηρήστε επίσης ότι η αντικατάσταση $z = y - x \frac{dy}{dx}$ στην (7.4.4) οδηγεί στον τύπο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int_a^b y dx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x dy.$$

Η πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος μετατροπής ήταν ο «αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου» – η απόδειξή του για το φημισμένο ανάπτυγμα

$$(7.4.5) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

το οποίο σήμερα φέρει το όνομά του.



Σχήμα 7.9:

Το άνω μισό του μοναδιαίου κύκλου που εφάπτεται στον y -άξονα στην αρχή των αξόνων (βλέπε σχήμα) είναι το γράφημα της $y = \sqrt{2x - x^2}$. Αφού

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y},$$

βλέπουμε ότι

$$z = y - x \frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}},$$

δηλαδή

$$z = \frac{2z^2}{1+z^2}.$$

Στη συνέχεια ο Leibniz εφαρμόζει τον τύπο μετατροπής για να υπολογίσει το εμβαδόν του

7.4. «ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ» ΚΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ165

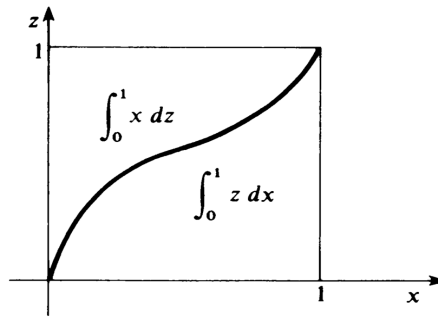
τεταρτοκυκλίου ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[x\sqrt{2x-x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 z \, dx \right) \quad (\text{από την (7.4.4)}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \int_0^1 x \, dz \right) \right] \quad (\text{βλέπε σχήμα}) \\
 &= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} \, dz \\
 &= 1 - \int_0^1 z^2(1-z^2+z^4-\dots) \, dz \quad (\text{γεωμετρική σειρά}) \\
 &= 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \dots \right] \quad (\text{ολοκλήρωση όρο προς όρο}),
 \end{aligned}$$

που τελικά δίνει την

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

αν αγνοήσουμε το ερώτημα για τη σύγκλιση στην περίπτωση $z = 1$.



Σχήμα 7.10:

Ο Leibniz έβρισκε εντυπωσιακή την «ομοιότητα» ανάμεσα στη σειρά

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{8} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14} \right) + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{22} \right) + \dots \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \dots,
 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(7.4.6) \quad \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

και τη σειρά του Mercator στη μορφή

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \log 2 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \right) + \dots,
 \end{aligned}$$

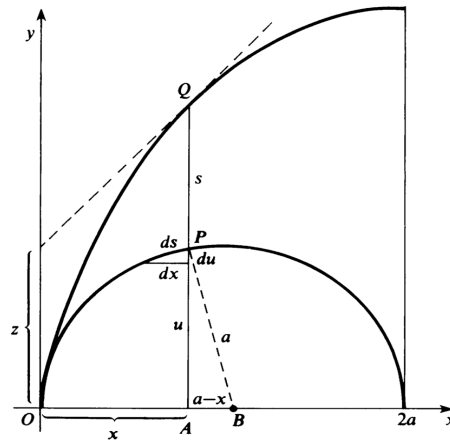
δηλαδή

$$(7.4.7) \quad \frac{1}{4} \log 2 = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{10 \cdot 12} + \dots$$

Μια άλλη σημαντική επιτυχία της μεθόδου της μετατροπής ήταν ο τετραγωνισμός, από τον Leibniz, ενός γενικού τμήματος της κυκλοειδούς (αυτό ήταν το πρώτο από τα προβλήματα του διαγωνισμού του Pascal). Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η μισή αψίδα της κυκλοειδούς που παράγεται από έναν κύκλο ακτίνας a ο οποίος κυλιέται κατά μήκος της κατακόρυφης ευθείας $x = 2a$. Το μήκος y της τεταγμένης AQ του τυπικού σημείου Q της κυκλοειδούς δίνεται από την

$$y = u + s,$$

όπου $u = \sqrt{2ax - x^2}$ είναι το μήκος της τεταγμένης AP του αντίστοιχου σημείου P πάνω στον κύκλο που παράγει την κυκλοειδή, και s είναι το μήκος του τόξου \widehat{OP} . Δηλαδή, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PQ ισούται με το μήκος του τόξου \widehat{OP} .



Σχήμα 7.11:

Από την ομοιότητα του χαρακτηριστικού τριγώνου του κύκλου και του τριγώνου ABP έχουμε

$$\frac{du}{dx} = \frac{a-x}{u} \quad \text{και} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{a}{u},$$

άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dx} = \frac{2a-x}{u}.$$

Συνεπώς,

$$z = y - x \frac{dy}{dx} = (u + s) - \frac{2ax - x^2}{u} = (u + s) - u = s.$$

Τότε, το θεώρημα μετατροπής δίνει

$$(7.4.8) \quad \begin{aligned} \int_0^{x_1} s \, dx &= \int_0^{x_1} z \, dx = 3 \int_0^{x_1} y \, dx - x_1 y_1 \\ &= 2 \int_0^{x_1} (u + s) \, dx - x_1 (u_1 + s_1). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{x_1} s \, dx = x_1(u_1 + s_1) - 2 \int_0^{x_1} u \, dx.$$

Όμως, αφαιρώντας το τρίγωνο ABP από τον κυκλικό τομέα OBP παίρνουμε

$$\int_0^{x_1} u \, dx = \frac{1}{2}as_1 - \frac{1}{2}u_1(a - x_1).$$

Έπεται ότι

$$(7.4.9) \quad \int_0^{x_1} s \, dx = au_1 - s_1(a - x_1).$$

Τέλος, από τις (7.4.9) και (7.4.10) βλέπουμε ότι το εμβαδόν του κυλινδρικού τμήματος πάνω από το διάστημα $[0, x_1]$ είναι ίσο με

$$(7.4.10) \quad \begin{aligned} \int_0^{x_1} y \, dx &= \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} s \, dx \\ &= \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}au_1 - \frac{1}{2}s_1(a - x_1). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν πάρουμε $x_1 = 2a$, $y_1 = pa$, $u_1 = 0$ και $s_1 = pa$, τότε η (7.4.10) μας δίνει ως αποτέλεσμα $3pa^2/2$ για το εμβαδόν της μισής αψίδας του σχήματος.

7.5 Αναλυτικός λογισμός

Ο Leibniz κατέγραψε τα στάδια της γέννησης του αναλυτικού λογισμού του σε μια σειρά από σχετικά ασύνδετα σημειώματα που έγραψε στο τέλος του Οκτωβρίου και τις αρχές του Νοεμβρίου του 1675.

Ξεκινώντας από μια καμπύλη με τετμημένη x και τεταγμένη y , θεωρεί μια διακριτή ακολουθία άπειρων τιμών του y που αντιστοιχούν σε μια ακολουθία τιμών του x . Η ακολουθία των τεταγμένων είναι κατά κάποιον τρόπο ανάλογη με μια συνήθη ακολουθία αριθμών και οι τετμημένες (σαν δείκτες) προσδιορίζουν τη σειρά των όρων αυτής της ακολουθίας. Η διαφορά όμως ανάμεσα σε δύο διαδοχικές τιμές του y υποτίθεται απείρως μικρή (δηλαδή αμελητέα) συγκρινόμενη με τις ίδιες τις τιμές του y .

Αρχικά, ο Leibniz χρησιμοποιεί το γράμμα ℓ για να συμβολίσει τις απειροστές διαφορές μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του y , και συμβολίζει τα αθροίσματα γράφοντας omn (σύντμηση της Λατινικής λέξης *omnia*). Έτσι, σε ένα χειρόγραφο της 29ης Οκτωβρίου, ξεκινάει με το αποτέλεσμα του $\frac{1}{2}y^2 = \int y \, dy$, γράφοντάς το στη μορφή

$$(7.5.1) \quad \frac{\overline{omn. \ell}^2}{2} = omn. \frac{\overline{\ell}}{omn. \ell \, a}.$$

Χρησιμοποιεί τις «παύλες» αντί για παρενθέσεις και εισάγει τη σταθερά $a = 1$ για να ταιριάζουν οι διαστάσεις. Με άλλα λόγια, η (7.5.1) σημαίνει

$$\frac{1}{2} \left(\int dy \right)^2 = \int \left(\int dy \right), dy.$$

Παρατηρεί ότι αυτό είναι ένα «πολύ λεπτό θεώρημα, καθόλου προφανές». Συνεχίζοντας, γράφει:

Ένα άλλο θεώρημα του ίδιου τύπου είναι το

$$(7.5.2) \quad \text{omn. } x\ell = x \text{ omn. } \ell - \text{omn. omn. } \ell,$$

όπου ℓ είναι ο όρος μιας προόδου [διαφορών] και x είναι ο αριθμός που εκφράζει τη θέση του ℓ το οποίο αντιστοιχεί σε αυτόν – δηλαδή, ο x ορίζει τη διάταξη και ο ℓ διατάσσεται.

Μιλάει λοιπόν τώρα για μια ακολουθία διαφορών τεταγμένων. Η (7.5.2) περιγράφει την

$$\int x dy = x \left(\int dy \right) - \int \left(\int dy \right) = xy - \int y dx.$$

Σε αυτά τα χειρόγραφα, συχνά γράφει $\int y$, χωρίς να αποσαφηνίζει αν εννοεί $\int y dx$ ή $\int y dy$.

Σε αυτό ακριβώς το σημείο της συζήτησης, εισάγει το σύμβολο του ολοκληρώματος:

Θα είναι χρήσιμο να γράφουμε \int αντί για omn. , δηλαδή $\int \ell = \text{omn. } \ell$, το άθροισμα των ℓ . Άρα,

$$(7.5.3) \quad \frac{\int \bar{\ell}^2}{2} = \int \overline{\int \bar{\ell} \frac{\ell}{a}}, \quad \text{και} \quad \int \overline{x\ell} = x \int \bar{\ell} - \int \int \ell.$$

Προσθέτει ότι «όλα αυτά τα θεωρήματα ισχύουν για σειρές στις οποίες οι διαφορές των όρων είναι ασύγκριτα μικρότερες από τους όρους».

Έχοντας εισάγει το σύμβολο \int (το οποίο προφανώς προέρχεται από το S του sum) προχωράει στη διερεύνηση των κανόνων με τους οποίους δρα. Για παράδειγμα, με $\ell = dx$ στην πρώτη ισότητα της (7.5.3) παίρνει την $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$. Μετά, με $\ell = x dx$ στη δεύτερη ισότητα της (7.5.3), παίρνει την

$$\int x^2 dx = x \int x dx - \int \left(\int x dx \right) = x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2},$$

απ' όπου προκύπτει η

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3.$$

Μάλιστα, στο χειρόγραφο της 29ης Οκτωβρίου γράφει $\ell = y/d$, το οποίο αλλάζει στο γνωστό μας dy τρεις μέρες αργότερα, στο χειρόγραφο της 1ης Νοεμβρίου.

Στο χειρόγραφο της 11ης Νοεμβρίου, θέτει το ερώτημα αν $d(uv) = (du)(dv)$ και $d(v/u) = (dv)/(du)$ και δίνει αρνητική απάντηση παρατηρώντας ότι

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2 = 2x dx,$$

αγνοώντας το απειροστό υψηλότερης τάξης, ενώ

$$(dx)(dx) = (x + dx - x)(x + dx - x) = (dx)^2.$$

Εκείνη την εποχή, ο Leibniz ακόμα ψάχνει να βρει ποιος είναι ο σωστός κανόνας για το διαφορικό γινομένου ή πηλίκου. Όμως, είναι ήδη σε θέση να εφαρμόσει τον εμβρυακό λογισμό του για να λύσει ένα μη τετριμμένο γεωμετρικό πρόβλημα: να βρει την καμπύλη $y = f(x)$ που η υποκάθετός της ν είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τεταγμένη της, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\nu = \frac{b}{y}.$$

Αρχίζει με το προηγούμενο αποτέλεσμα του, την

$$\int \nu dx = \frac{1}{2}y^2.$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο τελεστή d γράφει

$$\nu dx = d \int \nu dx = d \left(\frac{1}{2}y^2 \right) = y dy.$$

Κατόπιν, κάνοντας την αντικατάσταση $\nu = b/y$ παίρνει

$$\begin{aligned} \frac{b}{y} dx &= y dy, \\ b dx &= y^2 dy, \end{aligned}$$

άρα

$$\int b dx = \int y^2 dy,$$

οπότε η εξίσωση της ζητούμενης καμπύλης είναι η

$$bx = \frac{1}{3}y^3.$$

Στη συνέχεια ελέγχει το αποτέλεσμα του με τον κανόνα του Sluse για την κλίση της εφαπτόμενης, επαληθεύοντας έτσι σε ένα μη τετριμμένο πρόβλημα την εγκυρότητα του λογισμού του.

Τον Ιούλιο του 1676, ο Leibniz έχει πλέον καθιερώσει τη χρήση του διαφορικού μέσα στο ολοκλήρωμα. Σε ένα χειρόγραφο του Νοεμβρίου του 1676, διατυπώνει με σαφήνεια τους κανόνες για την παραγωγή και ολοκλήρωση δυνάμεων,

$$dx^e = ex^{e-1} dx \quad \text{και} \quad \int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1},$$

όπου ο e δεν είναι απαραίτητα ακέραιος. Προσθέτει τη σημαντική παρατήρηση ότι «αυτός ο συλλογισμός είναι γενικός και δεν εξαρτάται από την πρόοδο της οποίας είναι όροι οι τιμές του x ». Αυτός είναι ο τρόπος του για να πει ότι το x μπορεί να είναι μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής και όχι αναγκαστικά η ανεξάρτητη μεταβλητή. Αυτή η γενικότητα επιτρέπει τη χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης για την παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων (αυτό που σήμερα αποκαλούμε κανόνα της αλυσίδας).

Για παράδειγμα, για να υπολογίσει το $d\sqrt{a+bz+cz^2}$ κάνει την αντικατάσταση $x = a + bz + cz^2$. Παρατηρώντας ότι

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad dx = (b + 2cz) dz,$$

έχει την

$$d\sqrt{a+bz+cz^2} = \frac{(b+2cz) dz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}.$$

Μέχρι αυτό το σημείο, ο Leibniz είχε δεχτεί τον κανόνα του Sluse χωρίς απόδειξη. Στο χειρόγραφο του Νοεμβρίου του 1676 δείχνει πώς αυτός αποδεικνύεται από το λογισμό του. Για παράδειγμα, δεδομένης της

$$(7.5.4) \quad z = ay^2 + byx + cx^2 + fx + gy + h = 0,$$

αντικαθιστά $x + dx$ για το x και $y + dy$ για το y , και παίρνει

$$ay^2 + 2ay dy + a(dy)^2 + byx + by dx + bx dy + b dx dy + cx^2 + 2cx dx + c(dx)^2 + fx + f dx + gy + g dy + h = 0.$$

Από την (7.5.4) και την υπόθεση ότι

$$a(dy)^2 + b dx dy + c(dx)^2 = 0,$$

απομένει η

$$2ay dy + by dx + bx dy + 2cx dx + f dx + g dy = 0,$$

άρα

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{by + 2cx + f}{2ay + bx + g} = -\frac{\partial z / \partial x}{\partial z / \partial y},$$

το οποίο συμφωνεί με τον κανόνα του Sluse.

Σε ένα χειρόγραφο με ημερομηνία 11 Ιουλίου 1677, ο Leibniz διατυπώνει και αποδεικνύει τον κανόνα παραγώγισης γινομένου και πηλίκου. Για να δείξει ότι

$$d(xy) = x dy + y dx,$$

γράφει

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= x dy + y dx + dx dy, \end{aligned}$$

και παρατηρεί ότι «παραλείποντας την ποσότητα $dx dy$, η οποία είναι απείρως μικρή σε σύγκριση με τις υπόλοιπες γιατί υποτίθεται ότι τα dx και dy είναι απείρως μικρά, θα μας απομείνει το $x dy + y dx$ ». Για να δείξει ότι

$$d\frac{y}{x} = \frac{x dy - y dx}{x^2},$$

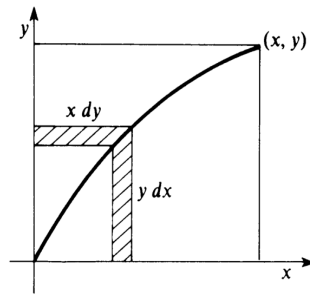
γράφει

$$d\frac{y}{x} = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + x dx},$$

«το οποίο γίνεται (αν γράψουμε x^2 αντί για το $x^2 + x dx$, διότι μπορούμε να παραλείψουμε το $x dx$ ως απείρως μικρό σε σύγκριση με το x^2) ίσο με $(x dy - y dx)/x^2$ ».

Ο Leibniz προσπαθούσε να επαληθεύει αν τα συμπεράσματα που προέκυπταν με τον εξελισσόμενο αναλυτικό λογισμό του συμφωνούσαν με τα συμπεράσματα που προέκυπταν από γνωστά γεωμετρικά επιχειρήματα. Για παράδειγμα, παρατήρησε ότι ο κανόνας του γινομένου $d(xy) = x dy + y dx$ συμφωνεί με την πρόσθεση των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα.

$$\int x dy + \int y dx = xy.$$



Σχήμα 7.12:

Όμοια, προσθέτοντας ροπές ως προς τον x -άξονα και τον t -άξονα, αντίστοιχα, βλέπει ότι

$$\int \frac{1}{2}y^2 dx + \int xy dy = \frac{1}{2}xy^2$$

και

$$\int xy dx + \int \frac{1}{2}x^2 dy = \frac{1}{2}x^2y.$$

Σημειώνει στη συνέχεια ότι «ο λογισμός δείχνει ότι αυτό ισχύει χωρίς να χρειαστεί να ανατρέξουμε σε κάποιο σχήμα, διότι $\frac{1}{2}d(x^2y) = xy dx + \frac{1}{2}x^2 dy$ – έτσι, τώρα, δεν χρειάζεται να θυμόμαστε πολλά από τα λεπτά θεωρήματα των σπουδαίων ανδρών της Αρχιμήδειας γεωμετρίας, παρά μόνο εκείνα που δίνει ο Ευκλείδης στο δεύτερο βιβλίο του και αλλού, για τη συνήθη γεωμετρία». Ο λογισμός έχει γίνει ένα «ευαίσθητο και εύπλαστο εργαλείο, το οποίο θα καθοδηγεί το νού!».

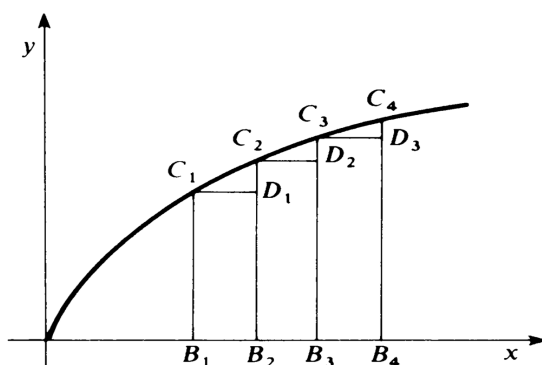
Σε μια επόμενη έκδοση του χειρογράφου του 1677, αποσαφηνίζεται πλήρως ο ρόλος του χαρακτηριστικού τριγώνου στο νέο λογισμό. Μια καμπύλη είναι τώρα ένα πολύγωνο με άπειρες το πλήθος γωνίες και πλευρές απειροστού μήκους. Το στοιχειώδες μήκος τόξου ds είναι η πλευρά αυτού του πολυγώνου – ένα ευθύγραμμο τμήμα με απειροστό μήκος, το οποίο συνδέει διαδοχικές κορυφές, άρα

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

όπου dx και dy είναι οι διαφορές των x - και y -συντεταγμένων αυτών των διαδοχικών κορυφών. Έτσι, για την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$, το μήκος τόξου δίνεται από την

$$s = \int ds = \int \sqrt{1 + x^2} dx,$$

το οποίο δείχνει ότι η ευθειοποίηση της παραβολής βασίζεται στον τετραγωνισμό της υπερβολής $y = \sqrt{1 + x^2}$.



Σχήμα 7.13:

Σε αυτό το χειρόγραφο, το ολοκλήρωμα $\int y dx$ σαφώς θεωρείται σαν ένα άθροισμα απείροστων ορθογωνίων με ύψη y και βάσεις dx . Αναφερόμενος στο παραπάνω σχήμα, ο Leibniz γράφει:

Αναπαριστώ το εμβαδόν ενός χωρίου με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων που περιέχονται από τις τεταγμένες και τις διαφορές των τετμημένων, δηλαδή με το $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 + \dots$. Γιατί τα στενά τρίγωνα $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$ κλπ., επειδή είναι απείρως μικρά συγκρινόμενα με αυτά τα ορθογώνια, μπορούμε να τα παραλείψουμε χωρίς κίνδυνο. Έτσι, στο λογισμό μου αναπαριστώ το εμβαδόν του χωρίου με το $\int y dx$, δηλαδή με τα ορθογώνια που περιέχονται από κάθε y και τη διαφορά dx που αντιστοιχεί σε αυτό.

Στη συνέχεια εισάγει αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού: «τώρα, ανεβαίνοντας σε μεγαλύτερα ύψη, θα βρούμε το εμβαδόν ενός σχήματος βρίσκοντας το σχήμα της τετραγωνίζουσάς του». Δίνεται μια καμπύλη με τεταγμένη z , το εμβαδόν της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε, και ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια καμπύλη με τεταγμένη y , τέτοια ώστε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a},$$

όπου a είναι μια σταθερά (την οποία μάλλον εισάγει ώστε οι διαστάσεις να συμφωνούν). Τότε,

$$z dx = a dy,$$

άρα το εμβαδόν κάτω από την αρχική καμπύλη είναι

$$(7.5.5) \quad \int z dx = a \int dy = ay,$$

αν υποθέσουμε (κάτι που ο Leibniz συνήθιζε) ότι η y -καμπύλη περνάει από την αρχή των αξόνων. Έτσι, τα προβλήματα τετραγωνισμού μετατρέπονται με το λογισμό του Leibniz σε αντίστροφα προβλήματα εφαπτόμενων. Για να βρούμε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη με τεταγμένη y , αρκεί να βρούμε μια καμπύλη που η εφαπτομένη της ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Αφαιρώντας το εμβαδόν πάνω από το $[0, c]$ από το εμβαδόν πάνω από το $[0, d]$, και θέτοντας $a = 1$ στην (7.5.5), παίρνουμε την

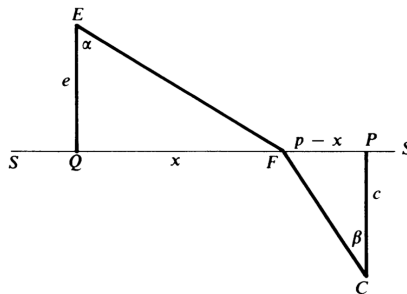
$$\int_c^d z dx = y(d) - y(c).$$

7.6 Acta Eruditorum

Το πρώτο δημοσιευμένο άρθρο του Leibniz με θέμα τον διαφορικό λογισμό του εμφανίστηκε το 1684 στο περιοδικό Acta Eruditorum της Λειψίας. Ο τίτλος του ήταν «μια νέα μέθοδος για μέγιστα και ελάχιστα, καθώς και για εφαπτόμενες, και ένα αξιοσημείωτο είδος λογισμού γι' αυτά». Εισάγει τα διαφορικά χωρίς να δίνει πολλές εξηγήσεις για το κίνητρο και τα απειροστικά επιχειρήματα που αποτέλεσαν το κίνητρο γι' αυτά. Για κάθε αριθμό dx , ορίζει ως dy εκείνο τον αριθμό για τον οποίο ο λόγος dy/dx είναι ίσος με την κλίση της εφαπτόμενης. Με τα σύγχρονα δεδομένα, αυτό μοιάζει αρκετά προωθημένο, με τη διαφορά ότι δεν δίνει κάποιο ορισμό της εφαπτόμενης. Γράφει: «πρέπει μόνο να κρατάμε στο μυαλό μας ότι το να βρούμε μια εφαπτόμενη σημαίνει να σχεδιάσουμε μια ευθεία που συνδέει δύο σημεία της καμπύλης με απειροελάχιστη απόσταση, ή εναλλακτικά, την προέταση μιας πλευράς ενός πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών, το οποίο για εμάς αντικαθιστά την καμπύλη».

Διατυπώνει τους κανόνες για τον υπολογισμό διαφορικών δυνάμεων, γινομένων και πηλίκων, χωρίς να εξηγεί από πού προέκυψαν. Τονίζει ότι το dv είναι θετικό όταν το v αυξάνει καθώς αυξάνει το x , ενώ το dv είναι αρνητικό όταν το v φθίνει. Αφού «κανένα από τα δύο δεν συμβαίνει όταν το v ούτε αυξάνει αλλά ούτε και φθίνει, όταν δηλαδή είναι στάσιμο», αναφέρει την αναγκαία συνθήκη $dv = 0$ για ένα μέγιστο ή ελάχιστο. Εξηγεί επίσης, με παρόμοιο τρόπο, την αναγκαία συνθήκη $d(dv) = 0$ για ένα σημείο καμπής.

Σαν μια πρώτη εφαρμογή της μεθόδου του για τα μέγιστα και ελάχιστα, ο Leibniz λύνει το ακόλουθο πρόβλημα: «Έστω C και E δύο σημεία (βλέπε σχήμα) και μια ευθεία SS στο ίδιο επίπεδο. Θέλουμε να βρούμε ένα σημείο στην SS τέτοιο ώστε όταν τα E και F συνδέονται με το F τότε το άθροισμα του ορθογωνίου [γινομένου] του CF και δοθείσης ευθείας h και του ορθογωνίου του FE κι δοθείσης ευθείας r να είναι το ελάχιστο δυνατό».



Σχήμα 7.14:

Οι λεπτομέρειες του επιχειρήματος αφήνονται για τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου. Και συνεχίζει:

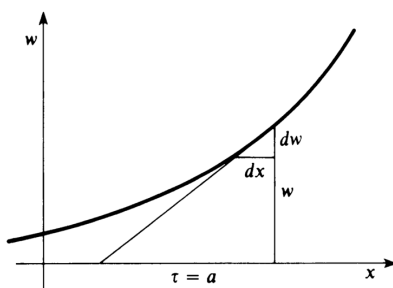
Και αυτή είναι μόνο η αρχή μιας πολύ πιο έξοχης Γεωμετρίας, η οποία αντιμετωπίζει τα πιο δύσκολα και πιο όμορφα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών, στα οποία χωρίς τον διαφορικό λογισμό ή κάτι παρόμοιο κανείς δεν θα μπορούσε να επιτεθεί.

Το άρθρο του 1684 ολοκληρώνεται με τη λύση ενός προβλήματος του De Beaune, το οποίο δεν είχε καταφέρει να λύσει ο Descartes – να βρεθεί η τεταγμένη w μιας καμπύλης, της οποίας η υποεφαπτόμενη τ είναι σταθερή, $\tau = a$. Για μια τέτοια καμπύλη (βλέπε σχήμα) έχουμε

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w}{\tau} = \frac{w}{a},$$

δηλαδή

$$(7.6.1) \quad w = a \frac{dw}{dx}.$$



Σχήμα 7.15:

Ο Leibniz θεωρεί μια ακολουθία τιμών του x με σταθερές διαφορές $dx = b$. Τότε,

$$dw = \frac{b}{a} w,$$

άρα η αντίστοιχη ακολουθία τεταγμένων w είναι ανάλογη με την ακολουθία των διαφορών της. Γνωρίζοντας ότι αυτή είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα μιας γεωμετρικής πρόοδου, συμπεραίνει ότι «αν τα x σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο, τότε τα w σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο – με άλλα λόγια, τα x θα είναι λογάριθμοι, άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι λογαριθμική».

Το ολοκλήρωμα και ο συμβολισμός \int εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία σε ένα άρθρο που δημοσίευσε ο Leibniz στο Acta Eruditorum του 1686, όπου παρουσίασε το αποτέλεσμα που εκφράζεται από την (7.3.4). Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, με την απόδειξη που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, εμφανίστηκε στο Acta Eruditorum του 1693.

7.7 Διαφορικά ανώτερης τάξης

Έχουμε δει ότι ο απειροστικός λογισμός του Leibniz ξεκίνησε από τις απλές έννοιες των ακολουθιών αθροισμάτων και διαφορών, τις οποίες επεξέτεινε στις ακολουθίες των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μια γεωμετρική καμπύλη. Θεώρησε την καμπύλη σαν ένα πολύγωνο με άπειρες το πλήθος γωνίες και απείρως μικρές πλευρές, καθεμία από τις οποίες ταυτίζεται με

μια εφαπτόμενη στην καμπύλη. Οι βασικές ακολουθίες μεταβλητών που αντιστοιχούν στην καμπύλη είναι η ακολουθία των τετμημένων x και η ακολουθία των τεταγμένων y των άπειρων το πλήθος κορυφών του πολυγώνου.

Η διαφορά δύο διαδοχικών τιμών του x είναι το διαφορικό dx , και όμοια για το dy . Υποτίθεται ότι οι τιμές dx και dy είναι μη μηδενικές αλλά ασύγκριτα μικρές, άρα αμελητέες, σε σχέση με τις τιμές των x και y . Όμοια, υποτίθεται ότι ένα γινόμενο διαφορικών, όπως το $(dx)(dy)$ ή το $(dx)^2$, είναι με τη σειρά του ασύγκριτα μικρότερο από τα διαφορικά dx και dy . Με βάση αυτές τις υποθέσεις, οι οποίες λειτουργούν ως κανόνες για τις πράξεις, αποδεικνύονται οι τύποι παραγωγίσισης.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα διαφορικά dx είναι σταθερές μη-μηδενικές ποσότητες. Δεν είναι μεταβλητές που τείνουν στο μηδέν, ούτε μεταβλητές που πρόκειται τελικά να τείνουν στο μηδέν. Για την ακρίβεια, υπάρχει μια ακολουθία διαφορικών dx (ή dy) που αντιστοιχεί στην καμπύλη – είναι η ακολουθία διαφορών της ακολουθίας των τετμημένων x (ή των τεταγμένων y). Αυτή η ακολουθία διαφορών, με τη σειρά της, έχει μια ακολουθία διαφορών που οι όροι της είναι τα διαφορικά δεύτερης τάξης

$$d(dx) = d dx = d^2 x.$$

Όμοια, το $d^2 y$ είναι η διαφορά των διαδοχικών διαφορών των τιμών του y . Παίρνοντας διαδοχικά διαφορές, ορίζουμε τα διαφορικά ανώτερης τάξης

$$d^k x = d(d^{k-1} x) \quad \text{και} \quad d^k y = d(d^{k-1} y).$$

Υποθέτουμε ότι το $d^2 y$ είναι ασύγκριτα μικρότερο από το dy , και γενικά το $d^k y$ είναι ασύγκριτα μικρότερο από το $d^{k-1} y$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ένα διαφορικό k -τάξης $d^k y$ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την k -οστή δύναμη $(dx)^k$ ενός διαφορικού πρώτης τάξης, με την έννοια ότι το πηλίκο $d^k y / (dx)^k$ είναι πραγματικός αριθμός (εκτός από ιδιόζουσες περιπτώσεις). Βασισμένοι σε αυτές τις υποθέσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες παραγωγίσισης γινομένου και πηλίκου για να υπολογίζουμε τα διαφορικά των διαφορικών. Για παράδειγμα,

$$d(x dy) = (dx)(dy) + x d^2 y,$$

ή

$$(7.7.1) \quad d^2(x^n) = d(nx^{n-1} dx) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + nx^{n-1}d^2 x,$$

ή

$$(7.7.2) \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d^2 y)(dx) - (d^2 x)(dy)}{(dx)^2}.$$

Στους υπολογισμούς του Leibniz με τα διαφορικά, η επιλογή του x ως ανεξάρτητης μεταβλητής γίνεται με τον ορισμό της αρχικής ακολουθίας των τιμών του x ως αριθμητικής προόδου, συνεπώς η dx είναι σταθερή και έπειταότι $d^2 x = 0$. Παρατηρήστε ότι, υποθέτοντας ότι $d^2 x = 0$, οι σχέσεις (7.7.1) και (7.7.2) γίνονται

$$d^2(x^n) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 \quad \text{και} \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{d^2(x^n)}{(dx)^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

και

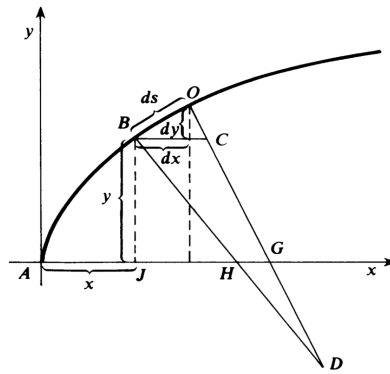
$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{(dx)^2}.$$

Παρόλο που τα διαφορικά ανώτερης τάξης, σε αντίθεση με τα διαφορικά πρώτης τάξης, δεν έχουν επιβιώσει στο σημερινό στοιχειώδη απειροστικό λογισμό, συνεχίζει να μας τα θυμίζει ο συμβολισμός

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

για τη n -οστή παράγωγο της συνάρτησης y της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Σε προβλήματα στα οποία θέλουμε να επιλέξουμε το y ως την ανεξάρτητη μεταβλητή, οπότε παίρνουμε την ακολουθία των τιμών του y ως αριθμητική πρόοδο, έχουμε $d^2y = 0$ αντί για $d^2x = 0$. Αυτή η ελευθερία επιλογής είναι η βάση για τη μέθοδο της αντικατάστασης. Για παράδειγμα, αν πάρουμε σαν ακολουθία τετμημένων x μια ακολουθία τετραγώνων, κάνουμε την αντικατάσταση $x = t^2$, $dx = 2t dt$, όπου t η νέα ανεξάρτητη μεταβλητή, για την οποία $d^2t = 0$. Όπως γράφει ο ίδιος ο Leibniz, «με αυτό τον τρόπο μπορώ να μετασχηματίσω ένα πρόβλημα τετραγωνισμού σε άλλα, με άπειρους διαφορετικούς τρόπους, και να λύνω το ένα μέσω του άλλου».



Σχήμα 7.16:

Για να δώσουμε μια ιδέα για τις γεωμετρικές εφαρμογές των διαφορικών ανώτερης τάξης, συμπεριλαμβάνουμε εδώ την απόδειξη του John Bernoulli για τον τύπο της ακτίνας καμπυλότητας σε σημείο καμπύλης. Οι ακτίνες OD και BD στο παραπάνω σχήμα είναι καθυετες στην καμπύλη AB και τέμνονται στο κέντρο καμπυλότητας D . Η ακτίνα καμπυλότητας στο B είναι $r = BD$, και το διαφορικό του μήκους τόξου είναι $ds = BO$. Από το γεγονός ότι το τρίγωνο BHJ είναι όμοιο με το χαρακτηριστικό τρίγωνο, προκύπτει ότι

$$AH = x + y \frac{dy}{dx}.$$

Παίρνοντας το x σαν ανεξάρτητη μεταβλητή, οπότε $d^2x = 0$, βλέπουμε ότι το GH , το διαφορικό του AH , δίνεται από την

$$(7.7.3) \quad GH = d(AH) = d\left(x + y \frac{dy}{dx}\right) = dx + \frac{(dy)^2 + yd^2y}{dx}.$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων DGH και DCB έχουμε την αναλογία

$$(7.7.4) \quad \frac{BC}{HG} = \frac{BD}{HD},$$

όπου

$$BC = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{dx}, \quad BD = r,$$

και

$$HD = r - BH = r - \frac{y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές και την (7.7.3) στην (7.7.4), λύνουμε εύκολα την εξίσωση που προκύπτει και παίρνουμε

$$(7.7.5) \quad r = -\frac{[(dx)^2 + (dy)^2]^{3/2}}{(dx)(d^2y)} = -\frac{(ds)^3}{(dx)(d^2y)}.$$

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της (7.7.5) με $(dx)^3$, παίρνουμε τον γνωστό τύπο συναρτήσεως των παραγώγων του y ως προς x ,

$$r = \frac{(ds/dx)^3}{|d^2y/dx^2|} = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}.$$

7.8 Τα απειροστά του Leibniz

Σε όλες τις δημοσιεύσεις του για τον απειροστικό λογισμό, ο Leibniz τόνιζε τον επαναλαμβανόμενο και τυπικό χαρακτήρα των κανόνων του για τον υπολογισμό και τον χειρισμό των διαφορικών, και ισχυριζόταν ότι με κατάλληλη εφαρμογή αυτών των κανόνων θα μπορούσε κανείς να οδηγηθεί σε σωστά αποτελέσματα, παρόλο που παρέμενε κάποια αβεβαιότητα για το ακριβές νόημα των απειροστών που εμφανίζονταν στους υπολογισμούς. Για την ακρίβεια, η ορθότητα των αποτελεσμάτων που έπαιρναν καθοδηγούσε στη διαμόρφωση των αλγορίθμων του και επιβεβαίωνε την εμπιστοσύνη του στην ορθότητά τους.

Η μαθηματική παράδοση γενικά αποδίδει στον Leibniz την πίστη στην πραγματική ύπαρξη απειροστών ποσοτήτων – με αυτό τον όρο εννοούμε μια ποσότητα που δεν είναι μηδενική αλλά είναι μικρότερη από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Όμως, φαίνεται ότι ο Leibniz δεν είχε απολύτως ξεκαθαρίσει την άποψή του για το ερώτημα αν τα απειροστά όντως υπήρχαν, και κάποιες φορές είχε σίγουρα εκφράσει αμφιβολίες. Σε κάθε περίπτωση, αναγνώριζε ότι το ερώτημα της ύπαρξης των απειροστών είναι ανεξάρτητο από το ερώτημα αν οι υπολογισμοί με τα απειροστά, όταν γίνονταν σύμφωνα με τους κανόνες του λογισμού του, οδηγούν σε ορθές λύσεις των προβλημάτων. Συνεπώς, τα απειροστά, είτε υπήρχαν είτε όχι, μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως «εφευρήματα που βοηθούν για να συντομεύουμε τους υπολογισμούς και να

μιλάμε γενικά». Ο Leibniz έδωσε μια εκτεταμένη ανάλυση των απόψεών του γι' αυτό το θέμα σε ένα αδημοσίευτο χειρόγραφο που χρονολογείται λίγο μετά από το 1700, ως απάντηση στην κριτική του λογισμού του από τον Ολλανδό γιατρό και γεωμέτρη Bernard Nieuwentijdt. Ο Leibniz παρουσιάζει το λογισμό του σαν μια συντομευμένη μορφή της αυστηρής Ελληνικής μεθόδου της εξάντλησης, μια μορφή που ταιριάζει καλύτερα με την τέχνη της ανακάλυψης. Η βάση του επιχειρήματός του είναι ότι κάθε ισότητα μεταξύ δύο εκφράσεων που περιέχουν διαφορικά, η οποία έχει προκύψει με τη διαγραφή διαφορικών ανώτερης τάξης, θα μπορούσε να είχε αποδειχθεί αυστηρά (αλλά με περισσότερο κόπο) με αντικατάσταση των διαφορικών από τις αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές και με ένα επίχειρημα που να δείχνει ότι η διαφορά των δύο εκφράσεων μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή αν επιλέξουμε τις πεπερασμένες διαφορές αρκετά μικρές.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι παρόλο που ο ίδιος ο Leibniz ήταν κάπως υποψιασμένος σχετικά με την πραγματική ύπαρξη των απειροστών, οι άμεσοι διάδοχοί του (για παράδειγμα, οι αδελφοί Bernoulli) δεν συμερίζονταν τις αμφιβολίες του και αποδέχτηκαν άκριτα τα απειροστά ως γνήσιες μαθηματικές οντότητες. Μάλιστα, αυτή η απελευθέρωση από τις αμφιβολίες για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού βοήθησε στην ταχύτατη ανάπτυξη της θεωρίας και των εφαρμογών της.

7.9 Leibniz και Newton

Στα τελευταία κεφάλαια συζητήσαμε τις παράλληλες προσεγγίσεις των Newton και Leibniz στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Είναι χρήσιμο, άνακεφαλαιώνοντας, να συγκρίνουμε και να αντιδιαστείλουμε τις δύο προσεγγίσεις.

Η αφοσίωση του Leibniz στα πλεονεκτήματα του κατάλληλου συμβολισμού ήταν τόσο εμφανής που θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν δημιούργησε τον απειροστικό λογισμό ή ένα εξαιρετικά επιτυχημένο σύστημα συμβολισμού για τον απειροστικό λογισμό. Η απάντηση είναι φυσικά ότι τα έκανε και τα δύο: ο συμβολισμός του για την παράγωγο και το ολοκλήρωμα συνέλαβε την ουσία του απειροστικού του λογισμού τόσο που ο συμβολισμός και οι έννοιες ήταν αδύνατο να διαχωριστούν. Από την άλλη πλευρά, ο Newton δεν ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για τα ζητήματα του συμβολισμού: η χρησιμότητα και η συνέπεια του συμβολισμού δεν ήταν ιδιαίτερα σημαντικά θέματα γι' αυτόν.

Σκοπός του Leibniz ήταν πάντα να διαμορφώσει γενικές μεθόδους και αλγορίθμους που θα ενοποιούσαν την αντιμετώπιση διαφορετικών προβλημάτων. Οι γενικές μέθοδοι εμφανίζονται ασφαλώς σε ολόκληρο το έργο του Newton, είναι όμως προφανές ότι τον ενθουσίαζε περισσότερο το να λύνει συγκεκριμένα προβλήματα. Η διαφορά βρίσκεται στην έμφαση – ο Leibniz τονίζει τις γενικές τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν σε επί μέρους προβλήματα, ο Newton τονίζει συγκεκριμένα αποτελέσματα τα οποία μπορεί κάποιος να γενικεύσει.

Σε σχέση με τον ίδιο τον απειροστικό λογισμό, οι διακριτές απειροστές διαφορές γεωμετρικών μεταβλητών έπαιξαν τον πιο κεντρικό ρόλο στην προσέγγιση του Leibniz, ενώ η θεμελιώδης έννοια για τον Newton ήταν η ροή ή ο ρυθμός μεταβολής με το χρόνο, η οποία βασιζόταν σε διαισθητικές ιδέες για τη συνεχή κίνηση. Αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι το ότι στο συμβολισμό του Leibniz ουσιαστικά μεταμφιέζεται η έννοια του ορίου, η οποία είναι διακρίνεται πολύ καθαρά στο λογισμό του Newton.

Για τον Leibniz, τα διακεκριμένα διαφορικά dx και dy έχουν θεμελιώδη σημασία. Ο λόγος τους dy/dx είναι «απλώς» ένα πηλίκο με γεωμετρική αξία. Για τον Newton όμως, ειδικά στα ώριμα έργα του, η παράγωγος – ως λόγος των ροών ή «ύστατος λόγος ποσοτήτων που τείνουν να εκλείψουν» – είναι η ουσία του θέματος. Η δεύτερη παράγωγος είναι απλώς η ροή των ροών, και κάθε ροή αφορά μόνο απειροστά πρώτης τάξης, δηλαδή ο Newton δεν χρειάζεται τα διαφορικά ανώτερης τάξης του Leibniz.

Το ολοκλήρωμα του Newton είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα, ένα «ρευστό» που πρέπει να προσδιοριστεί από τη ροή του. Λύνει προβλήματα εμβαδών και όγκων ερμηνεύοντάς τα σαν αντίστροφα προβλήματα ρυθμού μεταβολής. Το ολοκλήρωμα του Leibniz, σε αντιδιαστολή, είναι ένα άπειρο άθροισμα διαφορικών. Φυσικά, τόσο ο ένας όσο και ο άλλος, υπολογίζουν τα ολοκληρώματά τους μέσω της αντιπαραγωγίσισης. Βασική συμβολή και των δύο είναι το ότι εκμεταλλεύτηκαν για τους υπολογισμούς την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα προβλήματα του τετραγωνισμού και τα προβλήματα εφαπτόμενων.

Ο Leibniz δεν ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις άπειρες σειρές παρόλο που, όπως είδαμε, έπαιξαν ρόλο ως κίνητρο για τις αρχικές του αναζητήσεις. Ο Newton ανέπτυξε συστηματικά τις συναρτήσεις σαν δυναμοσειρές, και θεωρούσε ότι αυτό το «εργαλείο» είναι αναπόσπαστο μέρος της αναλυτικής του «μεθόδου». Για παράδειγμα, ο Newton ήταν ευτυχής αν μπορούσε να υπολογίσει ένα ολοκλήρωμα ή να λύσει μια διαφορική εξίσωση εκφράζοντας τη λύση σαν μια άπειρη σειρά, ενώ ο Leibniz προτιμούσε πάντα να εκφράζει τη λύση σε «κλειστή μορφή».

7.10 Ασκήσεις

1. (α) Προσθέτοντας το $2 + 4 + \dots + 2n$ στα δύο μέλη της (7.2.4), αποδείξτε ότι

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

(β) Προσθέτοντας τον $2n + 1$ στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης, αποδείξτε ότι

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2n + (2n + 1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι τα (α) και (β) μας δίνουν τη γνωστή ταυτότητα

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Εφαρμόστε την (7.2.1) στην ακολουθία των κύβων

$$0, 1, 8, \dots, n^3$$

και συμπεράνατε ότι

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n = n^3.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3. Εφαρμόστε την (7.2.3) για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{2n-1}$ των αντιστρόφων των περιττών ακεραίων και συμπεράνατε ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}.$$

4. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι η ακολουθία των διαφορών των όρων της γεωμετρικής προόδου

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

είναι η

$$(1-a), (1-a)a, (1-a)a^2, \dots, (1-a)a^n, \dots,$$

και εφαρμόζοντας την (7.2.3), αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

για κάθε $0 < a < 1$.

5. Αποδείξτε ότι το n -οστό στοιχείο της τρίτης γραμμής του αρμονικού τριγώνου ισούται με $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, δηλαδή είναι ίσο με το ένα τρίτο του αντιστρόφου του n -οστού αριθμού τύπου 2.

6. Αποδείξτε, με επαγωγή ως προς k , ότι το n -οστό στοιχείο της $(k+1)$ -οστής γραμμής του αρμονικού τριγώνου ισούται με

$$\frac{k!}{n(n+1) \cdots (n+k)} = \frac{1}{(k+1)F(n, k)},$$

όπου $F(n, k)$ είναι ο n -οστός αριθμός τύπου k . Συμπεράνατε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n, k)} = \frac{k+1}{k}.$$

7. Για κάθε ακολουθία a_1, a_2, a_3, \dots , ορίζουμε την ακολουθία διαφορών $\{\Delta a_n\}$:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots$$

και την ακολουθία αθροισμάτων $\{S a_n\}$:

$$a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n, \dots$$

Αποδείξτε ότι

$$\Delta(S a_n) = a_{n+1} \quad \text{και} \quad S(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_1.$$

8. Εφαρμόστε της (7.3.1) στο τόξο του τεταρτοκυκλίου που αντιστοιχεί στο $\alpha \leq \theta \leq \beta$ και συμπεράνατε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta \, d\theta = \cos \alpha - \cos \beta.$$

9. Θεωρήστε την παραβολή $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq a$. Θεωρώντας γνωστή την $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, αποδείξτε ότι η κάθετη στην παραβολή είναι $n = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$. Εφαρμόζοντας την (7.3.2) αποδείξτε ότι το εμβαδόν του παραβολοειδούς που προκύπτει αν περιστρέψουμε την παραβολή γύρω από τον x -άξονα ισούται με

$$A = \int 2\pi y \, ds = \pi \int_0^a \sqrt{4x+1} \, dx = \frac{\pi}{6} ((4a+1)^{3/2} - 1).$$

10. Θεωρήστε την ημι-κυβική παραβολή $y = x^{2/3}$, $0 \leq x \leq 8$. Θεωρώντας γνωστή την $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ και παίρνοντας $a = 1$, αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη δίνεται από την $t = \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}$. Εφαρμόζοντας την (7.3.3) αποδείξτε ότι το μήκος αυτής της ημι-κυβικής παραβολής ισούται με

$$\ell = \int ds = \int t dy = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{9y+4} dy = \frac{1}{27}(40^{3/2} - 8).$$

11. Θεωρήστε την «παραβολή υψηλότερης τάξης» $y^q = x^p$, όπου $q > p > 0$. Αποδείξτε ότι

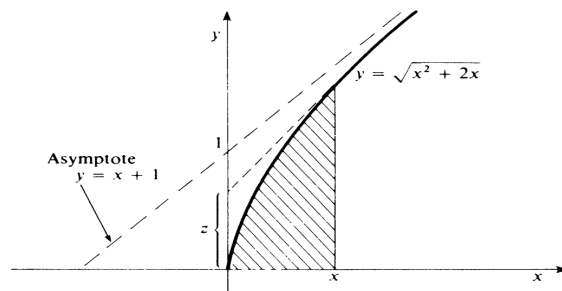
$$\frac{q}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{p}{x}, \quad \text{άρα} \quad z = \frac{q-p}{q} y.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μετατροπής συμπεράνατε ότι

$$\int_a^b x^{p/q} dx = \frac{q}{p+q} [xy]_a^b = \frac{q}{p+q} \left[x^{\frac{p+q}{q}} \right]_a^b.$$

12. Θεωρούμε την υπερβολή $y = \sqrt{x^2 + 2x}$, $x \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετατροπής αποδείξτε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου, στο παρακάτω σχήμα, ισούται με

$$\int_0^x \sqrt{u^2 + 2u} du = \left(3 - \frac{1}{3}\right) z^3 + \left(5 - \frac{1}{5}\right) z^5 + \dots$$

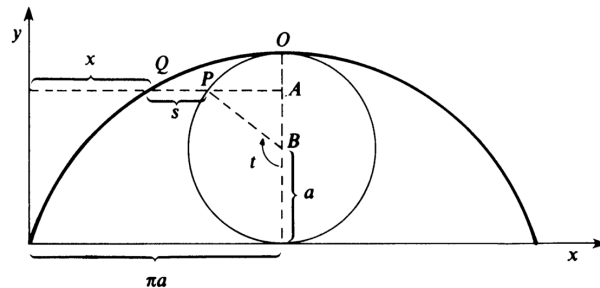


Σχήμα 7.17:

13. Στο σχήμα βλέπουμε την κυκλοειδή που παράγεται από κύκλο ακτίνας a , με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Αποδείξτε ότι το μήκος s του ευθύγραμμου τμήματος PQ είναι ίσο με το μήκος $a(\pi - t)$ του κυκλικού τόξου \widehat{OP} .

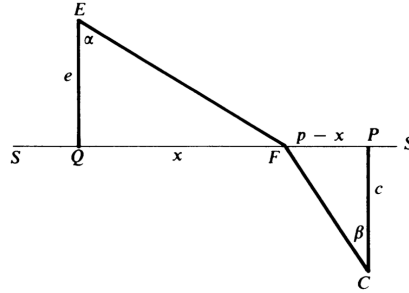


Σχήμα 7.18:

14. Αποδείξτε με παραγωγήσιση ότι η καμπύλη $bx = y^3/3$ έχει υπο-εφαπτόμενη $v = b/y$.

15. Με το συμβολισμό στο παρακάτω σχήμα, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$w = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$



Σχήμα 7.19:

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $dw = 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{h(p-x)}{\sqrt{(p-x)^2 + c^2}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + e^2}}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{h}{r}.$$

16. Ολοκληρώνοντας την (7.6.1) αποδείξτε ότι $w = e^{x/a}$, ισοδύναμα $x = a \log w$, αν $w = 1$ όταν $x = 0$.

17. (α) Αποδείξτε ότι

$$d^2(uv) = u(d^2v) + 2(du)(dv) + (d^2u)v = (d^0u)(d^2v) + 2(du)(dv) + (d^2u)(d^0v),$$

όπου $d^0u = u$ και $d^0v = v$.

(β) Με επαγωγή ως προς n αποδείξτε τον κανόνα του Leibniz

$$d^n(uv) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (d^p u)(d^{n-p} v).$$

18. Υποθέτοντας ότι $d^2x = 0$, αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι

$$d \left(\frac{d^{n-1}y}{(dx)^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{(dx)^{n-1}},$$

και διαιρώντας με dx συμπεράνατε ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{(dx)^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{(dx)^n},$$

Κεφάλαιο 8

Η εποχή του Euler

8.1 Ο 18ος αιώνας

Ο 18ος αιώνας ήταν για τα Μαθηματικά η περίοδος στην οποία έγινε η εδραίωση και η εκμετάλλευση των μεγάλων ανακαλύψεων του 17ου αιώνα, και η περίοδος στην οποία αυτές εφαρμόστηκαν για τη μελέτη επιστημονικών προβλημάτων. Κυρίαρχη μορφή σε αυτή την περίοδο ήταν ο Leonhard Euler, ο πιο παραγωγικός μαθηματικός όλων των εποχών – συγκρινωμένο, το δημοσιευμένο έργο του αντιστοιχεί σε περίπου 75 ογκώδεις τόμους. Με βάση το εύρος και την πρωτοτυπία των θεμελιωδών συνεισφορών του σε όλους τους κλάδους των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, ο Euler θα έπρεπε δικαίως να συγκαταλέγεται στον κατάλογο των γιγάντων των Μαθηματικών, μαζί με τους Αρχιμήδη, Newton και Gauss.

Ο Euler πέρασε την ακαδημαϊκή του ζωή στην Αγία Πετρούπολη (1727-1741 και 1766-1783) και το Βερολίνο (1741-1766). Γεννήθηκε και σπούδασε στη Βασιλεία της Ελβετίας, όπου ολοκλήρωσε την πανεπιστημιακή του εκπαίδευση στην ηλικία των δεκαπέντε ετών. Ο πατέρας του, ένας κληρικός που είχε σπουδάσει μαθηματικά με τον Jacob Bernoulli, προτιμούσε παρόμοια καριέρα για το γιό του, όμως ο Euler έμαθε μαθηματικά από τον Johann Bernoulli και βρήκε σε αυτά την πραγματική του κλίση.

Οι διάσημοι αδελφοί Bernoulli, ο Jacob (1654-1705) και ο Johann (1667-1748) αλληλογραφούσαν τακτικά με τον Leibniz και, μετά από τις δημοσιεύσεις του στον απειροστικό λογισμό (της περιόδου 1684-86), συνεργάστηκαν ισότιμα με αυτόν για την αρχική ανάπτυξη του λογισμού του Leibniz. Η λέξη «ολοκληρώμα» οφείλεται στον Jacob Bernoulli, ο οποίος πρότεινε τον όρο «ολοκληρωτικός λογισμός» αντί του αρχικού όρου «αθροιστικός λογισμός» του Leibniz για το αντίστροφο του «διαφορικού λογισμού».

Στην περίοδο 1691-1692, ο Johann Bernoulli έγραψε δύο μικρά αδημοσίευτα εγχειρίδια με θέμα τον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό. Αμέσως μετά, συμφώνησε να διδάξει αυτό το θέμα στον νεαρό Marquis de l'Hospital (1661-1704) και, έναντι του μισθού που έπαιρνε, να δείξει στον l'Hospital και τις δικές του μαθηματικές ανακαλύψεις, και ο Marquis να τις χρησιμοποιήσει με όποιον τρόπο θεωρούσε ενδεδειγμένο. Το αποτέλεσμα ήταν η δημοσίευση ενός βιβλίου διαφορικού λογισμού από τον l'Hospital, με τίτλο *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Ανάλυση του απείρως μικρού για την κατανόηση των καμπυλών) το 1696. Το βιβλίο αρχίζει με δύο ορισμούς – «μεταβλητές ποσότητες είναι εκείνες που αυξάνουν ή φθίνουν με συνεχή τρόπο» και «το απείρως μικρό μέρος κατά το οποίο μια

μεταβλητή ποσότητα αυξάνει ή φθίνει συνεχώς, ονομάζεται διαφορικό αυτής της ποσότητας» – και δύο αξιώματα – «δύο ποσότητες των οποίων η διαφορά είναι απείρως μικρή ποσότητα μπορούν να αντικαθιστούν η μία την άλλη» και «μια καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί σαν πολύγωνο με άπειρες το πλήθος πλευρές, καθεμία από τις οποίες έχει απείρως μικρό μήκος, οι οποίες προσδιορίζουν την καμπυλότητα της καμπύλης μέσω των γωνιών που σχηματίζουν η μία με την άλλη». Με βάση τα παραπάνω, αποδεικνύονται οι βασικοί τύποι για τα διαφορικά αλγεβρικών συναρτήσεων και εφαρμόζονται σε προβλήματα που αφορούν εφαπτόμενες, μέγιστα και ελάχιστα, και την καμπυλότητα.

Αυτό το πρώτο βιβλίο απειροστικού λογισμού έχει μείνει στην ιστορία κυρίως γιατί περιείχε ένα αποτέλεσμα του Bernoulli το οποίο είναι γνωστό ως ο «κανόνας του l'Hospital» για απροσδιόριστες μορφές: αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f(a) - g(a) = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

αν το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει. Το επιχείρημα του l'Hospital, το οποίο διατυπώνεται με λόγια χωρίς συμβολισμό συναρτήσεων, είναι απλώς ότι

$$\frac{f(a + dx)}{g(a + dx)} = \frac{f(a) + f'(a)dx}{g(a) + g'(a)dx} = \frac{f'(a)dx}{g'(a)dx} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

με την υπόθεση ότι $f(a) = g(a) = 0$. Συμπεραίνει ότι αν η τεταγμένη y μιας καμπύλης «εκφραστεί ως ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής και ο παρονομαστής μηδενίζονται όταν $x = a$ », τότε «αν βρεθεί το διαφορικό του αριθμητή και αν το διαιρέσουμε με το διαφορικό του παρονομαστή, βάζοντας $x = a$, θα έχουμε την τιμή της τεταγμένης y όταν $x = a$ ».

Το βιβλίο του l'Hospital ήταν το πρώτο δημοσιευμένο εγχειρίδιο του νέου λογισμού, όμως το δίτομο *Introductio in analysin infinitorum* του Euler, το 1748, ήταν εκείνο που εγκαθίδρυσε ένα νέο κλάδο των Μαθηματικών (την Ανάλυση, δίπλα στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα) με την έννοια της συνάρτησης και τις άπειρες διαδικασίες (όπως η άθροιση σειρών) για την αναπαράσταση και τη μελέτη των συναρτήσεων. Στο *Introductio* βρίσκουμε, για πρώτη φορά, τη συστηματική μελέτη των λογαρίθμων ως εκθετών και των τριγωνομετρικών σειρών ως αριθμητικών λόγων και όχι ως ευθυγράμμων τμημάτων, και τη μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων των στοιχειωδών υπερβατικών συναρτήσεων μέσω του αναπτύγματός τους σε δυναμοσειρά. Το *Introductio* είναι το παλιότερο βιβλίο μαθηματικών το οποίο μπορεί να διαβάσει με σχετική ευκολία ένας σημερινός φοιτητής. Ο συμβολισμός και η ορολογία του Euler φαίνονται σχεδόν «μοντέρνοι» για τον απλούστατο λόγο ότι ήταν αυτός ακριβώς που εισήγαγε μεγάλο μέρος του συμβολισμού και της ορολογίας που χρησιμοποιούμε ακόμα και σήμερα.

Το *Introductio* ακολούθησαν δύο άλλα βιβλία του Euler, το *Institutiones calculi differentialis* του 1755 και το τρίτομο *Institutiones calculi integralis* της περιόδου 1768-1770. Αυτά τα σπουδαία βιβλία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού παρέχουν την αυθεντική πηγή για μεγάλο μέρος του περιεχομένου και των μεθόδων που συναντάμε στα μαθήματα και τα βιβλία του απειροστικού λογισμού και των διαφορικών εξισώσεων.

8.2 Η έννοια της συνάρτησης

Στα σύγχρονα μαθήματα Μαθηματικών, μια *συνάρτηση* από το X στο Y (όπου X και Y είναι σύνολα πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών) ορίζεται ως ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του συνόλου X κάποιο, μοναδικό, στοιχείο $y = f(x)$ του συνόλου Y . Μερικές φορές, η συνάρτηση f ορίζεται μέσω του συνόλου όλων των ζευγαριών $(x, f(x))$, δηλαδή ως υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$.

Το *Introductio* του Euler ήταν το πρώτο μαθηματικό έργο στο οποίο η έννοια της συνάρτησης έπαιξε σημαντικό και σαφή ρόλο. Η αντικατάσταση των καμπυλών με τις συναρτήσεις στη θέση του κύριου αντικειμένου μελέτης επέτρεψε την αριθμητικοποίηση της γεωμετρίας, με συνέπεια τον διαχωρισμό της Ανάλυσης από τη Γεωμετρία.

Στον απειροστικό λογισμό του 17ου αιώνα, οι γεωμετρικές καμπύλες ήταν το κύριο αντικείμενο μελέτης, και αυτή η μελέτη διεξαγόταν, σε μεγάλο βαθμό, στα πλαίσια της Καρτεσιανής γεωμετρίας. Οι *μεταβλητές* που σχετίζονταν με μια συγκεκριμένη καμπύλη ήταν αποκλειστικά γεωμετρικές ποσότητες: τετμημένες, τεταγμένες, υπο-εφαπτόμενες και υποκάθετοι, μήκη τόξων της καμπύλης, εμβαδά ανάμεσα στην καμπύλη και τους άξονες συντεταγμένων και ούτω καθεξής. Οι σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις ποσότητες συχνά περιγράφονταν μέσω εξισώσεων, με την εξαίρεση των υπερβατικών σχέσεων, δηλαδή εκείνων που «υπερέβαιναν» την περιγραφή μέσω αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες έπρεπε να περιγραφούν με αναφορά σε κάποιες γεωμετρικές κατασκευές. Αυτές όμως οι γεωμετρικές μεταβλητές θεωρούνταν κυρίως συνδεδεμένες με την ίδια την καμπύλη και όχι εταξύ τους.

Ειδικότερα, οι διάφορες μεταβλητές που σχετίζονταν με μια καμπύλη δεν θεωρούνταν γενικά ως «συναρτήσεις» κάποιας «ανεξάρτητης» μεταβλητής. Μερική εξαίρεση αποτελεί η προσέγγιση του Newton, ο οποίος ουσιαστικά θεωρούσε όλες τις γεωμετρικές μεταβλητές ως συναρτήσεις του χρόνου. Πράγματι, ο Newton επέβαλλε σε κάποια μεταβλητή το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, επιλέγοντάς την ως αυτήν που θα έπαιζε το ρόλο της μεταβλητής του χρόνου. Παρόλα αυτά, ο τρόπος με τον οποίο σκεφτόταν ο Newton παρέμενε ουσιαστικά περισσότερο γεωμετρικός και κινηματικός παρά συναρτησιακός.

Ο Leibniz εισήγαγε τη λέξη «συνάρτηση» στα Μαθηματικά ακριβώς ως έναν όρο ο οποίος να υποδηλώνει τις γεωμετρικές ποσότητες που σχετίζονταν με μια καμπύλη. Γι' αυτόν ήταν οι «συναρτήσεις» της καμπύλης. Στη συνέχεια, καθώς η έμφαση μετατοπιζόταν προς τους τύπους και τις εξισώσεις που συνέδεαν τις συναρτήσεις μιας καμπύλης, η προσοχή στράφηκε φυσιολογικά στο ρόλο που έπαιζαν ως σύμβολα σε αυτές τις εξισώσεις, δηλαδή ως μεταβλητές που εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των άλλων μεταβλητών και των σταθερών στις εξισώσεις (παύοντας έτσι να εξαρτώνται άμεσα από την αρχική καμπύλη). Αυτή η σταδιακή μετατόπιση της έμφασης οδήγησε τελικά στον ορισμό της συνάρτησης που έδωσε ο Euler στην αρχή του *Introductio*:

Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή την μεταβλητή ποσότητα και από κάποιες σταθερές ποσότητες.

Οι πράξεις που αποδέχεται ο Euler για το «σχηματισμό αναλυτικών εκφράσεων» είναι οι κλασικές αλγεβρικές πράξεις (μεταξύ των οποίων και η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων) και διάφορες υπερβατικές διαδικασίες τις οποίες απαριθμεί, μεταξύ των οποίων το να θεωρήσει κανείς όρια ακολουθιών, αθροίσματα άπειρων σειρών, απειρογινόμενα, κλπ. Με αυτόν τον

ευρύ ορισμό, η αριθμητικοποίηση του απειροστικού λογισμού από τον Euler ήταν τόσο πλήρης που στον πρώτο τόμο του *Introductio* δεν εμφανίζονται εικόνες ή σχήματα (ο δεύτερος τόμος ήταν αφιερωμένος στην αναλυτική γεωμετρία). Το ίδιο ισχύει και για τα επόμενα βιβλία του.

Αργότερα, στον πρόλογο του *Institutiones calculi differentialis*, ο Euler έδωσε ένα ακόμα ευρύτερο ορισμό, ο οποίος είναι πρακτικά ισοδύναμος με τον σύγχρονο ορισμό της συνάρτησης.

Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από κάποιες άλλες με τέτοιο τρόπο ώστε αν οι δεύτερες μεταβληθούν τότε να μεταβάλλονται και οι πρώτες, θα λέμε ότι οι πρώτες ποσότητες είναι συναρτήσεις των δεύτερων. Αυτός ο ορισμός έχει μεγάλη ευρύτητα και συμπεριλαμβάνει οποιονδήποτε τρόπο με τον οποίο μια ποσότητα μπορεί να προσδιοριστεί από κάποιες άλλες. Αν λοιπόν x είναι μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από την x με οποιονδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτήν θα λέγονται συναρτήσεις της.

8.3 Euler: εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Ο Euler μελετά την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση στο Κεφάλαιο VII του *Introductio*. Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε την προσέγγισή του, με την έμφαση στον τρόπο με τον οποίο ανέπτυξε αυτές τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρά.

Ο Euler δεν έχει κανένα δισταγμό στο να αποδεχτεί την ύπαρξη απείρων μικρών και απείρων μεγάλων αριθμών και τους χρησιμοποιεί σε τέτοιο βαθμό που η ύπαρξή τους να αποδεικνύεται μεγάλο πλεονέκτημα, που κάνει το σύγχρονο, πιο υποψιασμένο, αναγνώστη να ζηλέψει. Το τυπικό του επιχείρημα συμπεριλαμβάνει έναν απείρων μικρό αριθμό ω και έναν απείρων μεγάλο αριθμό i , που θα αντικαταστήσουμε εδώ με ϵ και N , αντίστοιχα, για να μην προκληθεί σύγχυση με το σημερινό συμβολισμό για τη φανταστική μονάδα $i = \sqrt{-1}$. Ο Euler εισήγαγε το συμβολισμό $i = \sqrt{-1}$ αργότερα, προς το τέλος της καριέρας του. Τέλος, χρησιμοποιούμε το γράμμα x αντί για το z που ο Euler χρησιμοποιούσε για τις συνήθεις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Στο Κεφάλαιο VI είχε ορίσει το λογάριθμο $\log_a x$ του x με βάση a , τον οποίο συμβόλιζε απλώς με lx , ως εκείνο τον εκθέτη y για τον οποίο $a^y = x$. Αυτή είναι η πρώτη φορά στην ιστορία που οι λογάριθμοι ερμηνεύονται σαφώς ως εκθέτες. Στην αρχή του Κεφαλαίου VII σημειώνει ότι $a^0 = 1$ και γράφει

$$(8.3.1) \quad a^x = 1 + \kappa\epsilon$$

για έναν απείρων μικρό αριθμό ϵ . Θα εξηγήσει αργότερα ότι ο κ είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τον a .

Για δεδομένο (πεπερασμένο) αριθμό x , ο Euler θεωρεί τον απείρων μεγάλο αριθμό $N = x/\epsilon$. Τότε,

$$(8.3.2) \quad \begin{aligned} a^x &= a^{N\epsilon} = (a^\epsilon)^N = (1 + \kappa\epsilon)^N = \left(1 + \frac{\kappa x}{N}\right)^N \\ &= 1 + N \left(\frac{\kappa x}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!} \left(\frac{\kappa x}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \left(\frac{\kappa x}{N}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

από τη δυωνυμική σειρά, δηλαδή

$$(8.3.3) \quad a^x = 1 + \kappa x + \frac{1}{2!} \frac{N(N-1)}{N^2} \kappa^2 x^2 + \frac{1}{3!} \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} \kappa^3 x^3 + \dots$$

Δεδομένου ότι το N είναι απείρως μεγάλο, υποθέτει ότι

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \dots .$$

Συνεπώς, η (8.3.3) παίρνει τη μορφή

$$(8.3.4) \quad a^x = 1 + \frac{\kappa x}{1!} + \frac{\kappa^2 x^2}{2!} + \frac{\kappa^3 x^3}{3!} + \dots .$$

Αντικαθιστώντας $x = 1$, παίρνει τη σχέση ανάμεσα στον a και το κ :

$$(8.3.5) \quad a = 1 + \frac{\kappa}{1!} + \frac{\kappa^2}{2!} + \frac{\kappa^3}{3!} + \dots .$$

Σε αυτό το σημείο, ο Euler εισάγει τον διάσημο αριθμό e ως την τιμή του a για την οποία $\kappa = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots .$$

Αμέσως αναγνωρίζει τον e ως τη βάση για τους φυσικούς ή υπερβολικούς λογαρίθμους, και γράφει το δεκαδικό του ανάπτυγμα με ακρίβεια 23 ψηφίων:

$$e = 2.71828182845904523536028.$$

Τώρα, η (8.3.2) μας δίνει

$$(8.3.6) \quad e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N ,$$

μια ισότητα που σήμερα θα ερμηνεύαμε ως

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ,$$

και ειδικότερα έχουμε

$$(8.3.7) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

που είναι ο συνήθης σύγχρονος ορισμός. Τέλος, για $\kappa = 1$ η (8.3.4) δίνει

$$(8.3.8) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Για το λογάριθμο, ο Euler αρχικά γράφει

$$1 + y = a^x = a^{N\epsilon} = (1_{\kappa\epsilon})^N ,$$

άρα $\log_a(1 + y) = N\epsilon$. Τότε,

$$1 + \kappa\epsilon = (1 + y)^{1/N} ,$$

άρα $\epsilon = ((1 + y)^{1/N} - 1)/\kappa$, και έπεται ότι

$$(8.3.9) \quad \log_a(1 + y) = N\epsilon = \frac{N}{\kappa} [(1 + y)^{1/N} - 1].$$

Αντικαθιστώντας τον a με e (το οποίο αντιστοιχεί στην τιμή $\kappa = 1$) και το y με x , παίρνουμε

$$(8.3.10) \quad \log(1+x) = N[(1+x)^{1/N} - 1],$$

μια ισότητα που σήμερα θα ερμηνεύαμε ως

$$(8.3.11) \quad \log(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[(1+x)^{1/n} - 1].$$

Ο Euler παίρνει τη σειρά του Mercator για τον $\log(1+x)$ χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά για να αναπτύξει τον όρο $(1+x)^{1/N}$ στην (8.3.10):

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/N} &= 1 + \frac{1}{N}x + \frac{1}{2!} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} - 1 \right) x^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} - 1 \right) \left(\frac{1}{N} - 2 \right) x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{N}x - \frac{1}{2!} \frac{N-1}{N^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{(N-1)(N-2)}{N^3} x^3 + \dots \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\frac{N-1}{N} = 1, \quad \frac{2N-1}{N} = 2, \quad \text{κλπ.}$$

επειδή ο N είναι απείρως μεγάλος, παίρνει την

$$\begin{aligned} (8.3.12) \quad \log(1+x) &= N[(1+x)^{1/N} - 1] = x - \frac{1}{2} \frac{N-1}{N} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{(N-1)(2N-1)}{N^2} x^3 - \dots \\ &= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots \end{aligned}$$

8.4 Euler: τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Πριν από τον Euler, το ημίτονο και το συνημίτονο ήταν μήκη ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία ορίζονταν σε έναν κύκλο ακτίνας R . Το ημίτονο της γωνίας A ήταν το μισό της χορδής του κύκλου που αντιστοιχεί σε κεντρική γωνία $2A$, και το συνημίτονο της γωνίας A ήταν το μήκος της καθέτου από το κέντρο προς αυτή την χορδή. Έτσι, με $R = 10000$, έχουμε $\sin 30^\circ = 5000.00$ και $\cos 30^\circ = 8660.25$.

Στο Κεφάλαιο VIII του *Introductio*, ο Euler ορίζει (και καθιερώνει) τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως εξής: με $\sin x$ και $\cos x$ συμβολίζουμε το ημίτονο και το συνημίτονο της κεντρικής γωνίας σε ένα μοναδιαίο κύκλο, η οποία αντιστοιχεί σε τόξο μήκους x . Δηλαδή, το $\sin x$ και το $\cos x$ είναι το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας x radians σε έναν κύκλο ακτίνας 1. Η θεμελιώδης ταυτότητα

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

προκύπτει άμεσα. Ο Euler παρατηρεί αμέσως τις ιδιότητες περιοδικότητας του ημιτόνου και του συνημιτόνου, και κατέγραψε τις γνωστές ταυτότητες

$$(8.4.1) \quad \begin{aligned} \sin(y \pm z) &= \sin y \cos z \pm \cos y \sin z \\ \cos(y \pm z) &= \cos y \cos x \mp \sin y \sin z, \end{aligned}$$

ακριβώς στη μορφή με την οποία παρουσιάζονται στα εγχειρίδια τριγωνομετρίας μέχρι και σήμερα. Στη συνέχεια υποδεικνύει την επαγωγική απόδειξη της «ταυτότητας του De Moivre»

$$(8.4.2) \quad (\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz,$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ και n είναι ένας φυσικός αριθμός.

Έστω τώρα ϵ ένας απείρως μικρός αριθμός και N ένας απείρως μεγάλος φυσικός αριθμός (!). Οι δύο επιλογές προσήμων στην (8.4.2) δίνουν

$$\cos N\epsilon + i \sin N\epsilon = (\cos \epsilon + i \sim \epsilon)^N$$

και

$$\cos N\epsilon - i \sin N\epsilon = (\cos \epsilon - i \sim \epsilon)^N.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας αυτές τις ισότητες παίρνουμε

$$\cos N\epsilon = \frac{1}{2} [(\cos \epsilon + i \sin \epsilon)^N + (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)^N]$$

και

$$(8.4.3) \quad \sin N\epsilon = \frac{1}{2i} [(\cos \epsilon + i \sin \epsilon)^N - (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)^N].$$

Ο Euler αναπτύσσει τα δεξιά μέλη αυτών των ταυτοτήτων χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά και παίρνει τις

$$\begin{aligned} \cos N\epsilon &= \cos^N \epsilon - \frac{N(N-1)}{2!} \cos^{N-2} \epsilon \sin^2 \epsilon \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \cos^{N-4} \epsilon \sin^4 \epsilon + \dots \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sin N\epsilon &= N \cos^{N-1} \epsilon - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cos^{N-3} \epsilon \sin^3 \epsilon \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} \cos^{N-5} \epsilon \sin^5 \epsilon + \dots \end{aligned}$$

Τέλος, θέτοντας $x = N\epsilon$ και αντικαθιστώντας $\cos \epsilon = 1$, $\sin \epsilon = \epsilon$ και $N = N-1 = N-2 = \dots$ γιατί ο ϵ είναι απείρως μικρός και ο N απείρως μεγάλος, παίρνει τις τριγωνομετρικές σειρές

$$(8.4.4) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

και

$$(8.4.5) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Ο Euler βρίσκει τη φημισμένη σχέση ανάμεσα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και την εκθετική συνάρτηση θέτοντας $\epsilon = x/N$ στις σχέσεις (8.4.3). Προκύπτουν οι

$$\cos x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{ix}{N} \right)^N + \left(1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right]$$

και

$$\sin x = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{ix}{N} \right)^N - \left(1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right],$$

διότι $\cos \epsilon = 1$ και $\sin \epsilon = \epsilon = x/N$. Όμως, έχουμε δει ότι

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N.$$

Έτσι, οι παραπάνω σχέσεις μας λένε ότι

$$(8.4.6) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

και

$$(8.4.7) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

8.5 Ασκήσεις

1. Ερμηνεύοντας τη σταθερά κ ως το $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon}$, εξηγήστε γιατί $\kappa = \log_e a$. Μπορείτε να ερμηνεύσετε αυτό το όριο ως την παράγωγο της a^x στο σημείο $x = 0$.

2. Αν $a = 1 + x$ και $n = 1/h$, η (8.3.11) γίνεται

$$\log a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Εξηγήστε γιατί αυτό προκύπτει από τον υπολογισμό στην Άσκηση 1.

3. Αντικαταστήστε τον x με $-x$ στην (8.3.12), και κατόπιν αφαιρώντας τους λογαρίθμους συμπεράνατε ότι

$$(8.5.1) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \right).$$

4. Παρατηρήστε ότι, αν συνεχίσουμε να κρατάμε την παράμετρο κ της (8.3.9), τότε η απόδειξη της (8.3.12) δίνει

$$\log_a(1+y) = \frac{1}{\kappa} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \right).$$

Στη σελίδα 127 του *Introductio*, ο Euler αντικαθιστά $a = 10$ και $y = 9$, και παίρνει την τιμή

$$\kappa = 9 - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \dots$$

με βάση το 10. Είναι σωστό το αποτέλεσμα;

5. Αποδείξτε την ταυτότητα του De Moivre με επαγωγή ως προς n .

6. Χρησιμοποιώντας τις (8.4.6) και (8.4.7) αποδείξτε ότι

$$(8.5.2) \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x.$$

Οι επόμενες τρεις ασκήσεις περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο ο Euler κατέληξε στο ανάπτυγμα του Gregory για το τόξο εφαπτομένης.

7. Αντικαθιστώντας $x = z/N$ (όπου ο z είναι πεπερασμένος) στην (8.4.7) αποδείξτε ότι

$$\frac{z}{N} = \frac{1}{2i} \left[(e^{iz})^{1/N} - (e^{-iz})^{1/N} \right].$$

Θυμηθείτε ότι $\log y = N(y^{1/N} - 1)$, άρα

$$y^{1/N} = 1 + \frac{1}{N} \log y,$$

και συμπεράνατε ότι

$$z = \frac{1}{2i} [\log(e^{iz}) - \log(e^{-iz})].$$

8. Αντικαθιστώντας την (8.5.2) στο συμπέρασμα της Άσκησης 7, αποδείξτε την ταυτότητα

$$(8.5.3) \quad z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z}.$$

9. Αντικαθιστώντας τη λογαριθμική σειρά (8.5.1) στο δεξιό μέλος της (8.5.3), με $x = i \tan z$, αποδείξτε ότι

$$z = \tan z - \frac{\tan^3 z}{3} + \frac{\tan^5 z}{5} - \dots.$$

Αν $z = \arctan t$, αυτή η σχέση μας δίνει την

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots.$$