

Μιγαδική Ανάλυση
Παλιά Θέματα Εξετάσεων

Ιάσωνας Ασκούνης

March 20, 2025

Περιεχόμενα

1 Εφαρμογές του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων και του Ολοκληρωτικού Τύπου του Cauchy	3
1.1 Κατηγορία 1η	3
1.2 2η Κατηγορία	10
1.2.1 1η υποκατηγορία	10
1.2.2 2η υποκατηγορία	13
2 Επουσιώδεις ανωμαλίες και επέκταση σε ολόμορφη συνάρτηση σε δίσκο	16
3 Mixed Ασκήσεις πάνω στο Κεφάλαιο 7	20
4 Εφαρμογές Αρχής του Rouché και Αρχής Ορίσματος	23
5 Εφαρμογές της Αρχής της Ταυτότητας	27
6 Σειρές Laurent και Εφαρμογή του Casorati-Weirstrass	29
7 Εφαρμογές των Εκτιμήσεων Cauchy και του Θεωρήματος Αναλυτικότητας Ολόμορφων συναρτήσεων	32
8 Εφαρμογές του Θεωρήματος Σύγκλισης του Weirstrass	38
9 Εφαρμογές του Θεωρήματος Αναλυτικότητας και Μετασχηματισμοί Möbius	42
10 Θέματα απο Μιγαδική Ολοκλήρωση	46
11 Ασκήσεις πάνω σε σειρές και δυναμοσειρές	51

Κεφάλαιο 1

Εφαρμογές του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων και του Ολοκληρωτικού Τύπου του Cauchy

1.1 Κατηγορία 1η

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την basic κατηγορία υπολογισμού επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων μέσω του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων **που πάντα η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια**. Οι παρακάτω υπολογισμοί επιλύονται όλες και με το **Θεώρημα του Cauchy**, αλλά εμείς επιλέγουμε το **Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων** στις περισσότερες περιπτώσεις που είναι πιο εύχρηστο. Παρόλα αυτά θα περιγράψουμε παρακάτω και τους δύο τρόπους επίλυσης σε κάποιες ασκήσεις.

Άσκηση 1 (Σεπτέμβριος 2023-Ιούλιος 2016).

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2/3} \frac{\sin^2 \pi z}{(2z-1) \log^3(1-z)}.$$

Λύση 1.

- **Ανωμαλίες της ολοκληρωτέας ποσότητας:**

Αρχικά παρατηρούμε ότι οι μεμονωμένες ανωμαλίες της

$$f(z) = \frac{\sin^2 \pi z}{(2z-1) \log^3(1-z)}$$

είναι στα σημεία $z = 1/2$ και $z = 2$ γιατί $\log(1-z) = 0$ αν και μόνο αν $1-z = 1$, δηλαδή $z = 0$.

- **Είδος Ανωμαλιών:**

Απο την άληθη, παρατηρούμε ότι το 0 είναι ρίζα της $\sin^2 \pi z$ και μάλιστα τάξης 2, αφού είναι απλή ρίζα της $\sin \pi z$. Επίσης το 0 είναι ρίζα τάξης 3 του παρανομαστή αφού είναι απλή ρίζα της $\log(1-z)$. Αφού όμως $3 > 2$ έπεται από τον Κανόνα De L'Hospital ότι η f έχει πόλο τάξης $3 - 2 = 1$, δηλαδή απλό πόλο στο 0.

Επίσης στο $1/2$ έχουμε ότι η f έχει απλό πόλο γιατί

$$\lim_{z \rightarrow 1/2} (z - 1/2) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{\sin^2 \pi z}{\log^3(1-z)} = \frac{\sin^2 \pi/2}{\log^3(1/2)} = \frac{1}{\log^3(1/2)} \neq 0.$$

- **Υπολογίζουμε τα Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα στις ανωμαλίες:**

απο Πρόταση έχουμε ότι

$$\text{Res}(f, 1/2) = \lim_{z \rightarrow 1/2} (z - 1/2) \cdot f(z) = \frac{1}{\log^3(1/2)}.$$

και

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z).$$

Αφού όμως

$$z \cdot f(z) = \frac{\frac{\sin^2 \pi z}{z^2}}{(z - 1/2) \frac{\log^3(1-z)}{z^3}} = \frac{\left(\frac{\sin \pi z}{z}\right)^2}{(z - 1/2) \left(\frac{\log(1-z)}{z}\right)^3}$$

και

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

και

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1-z)}{z} = 1$$

έπεται ότι

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = -\frac{\pi}{1/2} = -2\pi.$$

- **Υπολογίζουμε τους δείκτες στροφής της καμπύλης γ στα σημεία ανωμαλιών:**

Παρατηρούμε τώρα ότι από αυτές τις δύο ρίζες στο εσωτερικό του κύκλου $C(0, 2/3)$ ανήκουν και οι δύο και άρα έχουμε ότι

$$\delta_{C(0, 2/3)}(1/2) = 1 \text{ και } \delta_{C(0, 2/3)}(2) = 1$$

αφού και το $1/2, 0$ ανήκουν στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $C(0, 2/3)$.

- **Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:**

Έτσι από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2/3} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 1/2) \delta_{C(0, 2/3)}(1/2) + \text{Res}(f, 0) \delta_{C(0, 2/3)}(2)) = 2\pi i \text{Res}(f, 1/2) + 2\pi i \text{Res}(f, 0) \\ &= \frac{2\pi i}{\log^3(1/2)} - 4\pi^2 i. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Φεβρουάριος 2024).

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2/3} \frac{\sin^2 \pi z}{(6z-1) \log^2(1-z)} dz.$$

Λύση 2.

Όμοια με την προηγούμενη.

Άσκηση 3 (Φεβρουάριος 2022).

Αν γ είναι η καμπύλη $\gamma(t) = 3 \cos t + 3i \sin t, t \in [0, 2\pi]$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \cos\left(iz + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(z^3 + \frac{\pi}{6}\right) dz.$$

Λύση 3.

Εύκολος τρόπος-Με το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:

- **Ανωμαλίες της ολοκληρωτέας ποσότητας:**

Είναι μόνο το σημείο 0.

- **Είδος Ανωμαλιών:**

Έχει πόλο τάξης στο 2 στο 0, αφού

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \cos(iz + \pi/6) \cos(z^3 + \pi/6) = \cos^2(\pi/6) = 3/4 \neq 0.$$

- **Υπολογίζουμε τα Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα στις ανωμαλίες:**

Αφού τώρα όμως το 0 είναι πόλος τάξης 2, έχουμε από Πρόταση ότι

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} g'(z)$$

όπου

$$g(z) = z^2 \cdot f(z) = \cos(iz + \pi/6) \cos(z^3 + \pi/6)$$

και παραγωγίζοντας την g και παίρνοντας όριο στο 0, βρίσκουμε το $\text{Res}(f, 0)$.

- **Υπολογίζουμε τους δείκτες στροφής της καμπύλης γ στα σημεία ανωμαλιών:**

το $0 \in \Delta(0, 3)$, δηλαδή το 0 ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου $\gamma = C(0, 3)$ και άρα δηλαδή στην φραγμένη συνεκτική του συνιστώσα, δηλαδή $\delta_{\gamma}(0) = 1$.

- **Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:**

Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) \delta_{\gamma}(0). \quad (1.1)$$

και έτσι αντικαθιστώντας στην (1) όσα βρήκαμε παίρνουμε το ζητούμενο.

2ος τρόπος-Με τον Τύπο του Cauchy:

Παρατηρούμε ότι η γ περιγράφει τον κύκλο $C(0, 3)$ και παρατηρούμε ότι η μοναδική ρίζα του παρανομαστή είναι η 0 η οποία περιέχεται στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 3)$ και άρα στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $C(0, 3)$. Επίσης αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(z) = \cos(iz + \pi/6) \cos(z^3 + \pi/6)$, τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη στον ασπρόμορφο $\mathbb{C}$ και άρα απο τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-0)^2} = \frac{2\pi i f'(0) \delta_{\gamma}(0)}{1!} = 2\pi i f'(0).$$

Όμως

$$f'(z) = i \sin(iz + \pi/6) \cos(z^3 + \pi/6) - 3z^2 \sin(z^3 + \pi/6) \cos(iz + \pi/6)$$

και άρα

$$f'(0) = i \sin(\pi/6) \cos(\pi/6) = i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

και άρα

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

Άσκηση 4.

Σωστό ή Λάθος; Αν γ είναι ο κύκλος κέντρου $3i/2$ και ακτίνας 1, τότε

$$\operatorname{Re} \left[\int_{\gamma} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z(z-i)} dz \right] = \pi \sqrt[6]{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Λύση 4.

1ος τρόπος-Με το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:

- **Ανωμαλίες της ολοκληρωτέας ποσότητας:**

Είναι τα σημεία 0 και i .

- **Είδος Ανωμαλιών:**

Είναι και τα δύο απλοί πόλοι (πόλοι τάξης 1) αφού

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z-i} = -\frac{1}{i} = i \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z} = \frac{\sqrt[3]{i+1}}{i} \neq 0.$$

- **Υπολογίζουμε τα Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα στις ανωμαλίες:**

Αφού τα 0 και i είναι πόλοι τάξης 1, απο Πρόταση έχουμε ότι

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = i$$

και

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot f(z) = -i \sqrt[3]{1+i}.$$

- **Υπολογίζουμε τους δείκτες στροφής της καμπύλης γ στα σημεία ανωμαλιών:**

Παρατηρούμε ότι $i \in \Delta(3i/2, 1)$ και άρα το i ανήκει στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της $\gamma = C(3i/2, 1)$, δηλαδή $\delta_{\gamma}(i) = 1$ και $0 \notin \Delta(3i/2)$, δηλαδή ανήκει στην μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της γ , που σημαίνει ότι $\delta_{\gamma}(0) = 0$.

• **Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:**

Απο το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (Res(f, i) \delta_{\gamma}(i) + Res(f, 0) \delta_{\gamma}(0))$$

και αντικαθιστώντας τα $Res(f, 0)$, $Res(f, i)$ αλλήλα και τους δίκτες στροφής που βρήκαμε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, και έπειτα και το πραγματικό του μέρος.

2ος Τρόπος-Με τον Τύπο του Cauchy:

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες του παρανομαστή είναι οι i , 0 και από αυτές η μόνη που ανήκει στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(3i/2, 1)$ είναι η i και έτσι αν $\delta_{\gamma}(i) = 1$, αφού ανήκει στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της γ .

Αν τώρα θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(z) = \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z}$, τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη σε μια ανοιχτή περιοχή του $\Delta(3i/2, 1)$ και άρα από τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z(z-i)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) \delta_{\gamma}(i) = 2\pi i f(i).$$

Όμως

$$f(i) = \frac{\sqrt[3]{i+1}}{i} = \frac{1}{i} e^{\frac{1}{3} \log(1+i)} = \frac{1}{i} e^{\frac{1}{3} \log \sqrt{2} + \frac{i}{3} \arg(1+i)} = \frac{1}{i} e^{\frac{1}{3} \log \sqrt{2} + \frac{i\pi}{12}} = \frac{1}{i} e^{\frac{1}{3} \log \sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{12}}$$

και αφού

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

έπεται τελικά ότι

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z(z-i)} dz = 2\pi e^{\frac{1}{3} \log \sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Έτσι

$$Re \left[\int_{\gamma} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z(z-i)} dz \right] = 2\pi e^{\frac{1}{3} \log \sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} = 2\pi \sqrt[6]{2} \cos \frac{\pi}{12}$$

και αφού

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \implies \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

έπεται ότι

$$Re \left[\int_{\gamma} \frac{\sqrt[3]{z+1}}{z(z-i)} dz \right] = \pi \sqrt[6]{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

και άρα ο ισχυρισμός είναι **σωστός**.

Άσκηση 5 (Ιούνιος 2023).

Αποδείξτε ότι

$$Im \left[\int_{C(i/2, 3/4)} \frac{(z+i)^z}{(z+1)^2(z-i)} dz \right] = \pi e^{\beta\pi} \sin(\log a)$$

για κάποιους $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Λύση 5.

1ος τρόπος-Με τον Τύπο του Cauchy:

(Να σημειωθεί ότι ρήνεται όπως και όλρες οι προηγούμενες και με το Θεώρημα Ολοκλήρωτικών Υπολοίπων).

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες του παρανομαστή της ολοκληρωτέας ποσότητας είναι οι $-1, i$ και παρατηρούμε ότι για αυτές ισχύει ότι

$$|-1 - i/2| = |(2 - i)/2| = \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{4}$$

και

$$|i - i/2| = |i/2| = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

και άρα μόνο η i ανήκει στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(i/2, 3/4)$ και άρα $\delta_\gamma(i) = 1$ αφού ανήκει στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της $\gamma = C(i/2, 3/4)$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $f(z) = \frac{(z+i)^z}{(z+1)^2}$ η οποία είναι ολόμορφη σε ανοιχτή περιοχή του $\Delta(i/2, 3/4)$ και έτσι απο τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$\int_{C(i/2, 3/4)} \frac{(z+i)^z}{(z+1)^2(z-i)} dz = \int_{C(i/2, 3/4)} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i \delta_\gamma(i) f(i) = 2\pi i f(i)$$

και αφού

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{(2i)^i}{(i+1)^2} = \frac{e^{i \log(2i)}}{2i} = \frac{e^{i \log 2 - \arg(2i)}}{2i} = \frac{e^{i \log 2 - \frac{\pi}{2}}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{-\frac{\pi}{2}} e^{i \log 2} \\ &= \frac{1}{2i} e^{-\frac{\pi}{2}} (\cos(\log 2) + i \sin(\log 2)) \end{aligned}$$

έχουμε τελικά ότι

$$\int_{C(i/2, 3/4)} \frac{(z+i)^z}{(z+1)^2(z-i)} dz = \pi e^{-\frac{\pi}{2}} (\cos(\log 2) + i \sin(\log 2))$$

δηλαδή

$$\operatorname{Im} \left[\int_{C(i/2, 3/4)} \frac{(z+i)^z}{(z+1)^2(z-i)} dz \right] = \pi e^{-\frac{\pi}{2}} \sin(\log 2)$$

και άρα για $a = 2$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 6 (Φεβρουάριος 2022).

Για κλειστές ομαλές καμπύλες γ οι οποίες αποφεύγουν τα σημεία 0 και 1 να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του ολοκληρώματος

$$\int_\gamma \frac{e^{7z} - 1}{z^2(z-1)} dz.$$

Λύση 6.

Παρατηρούμε ότι αν γ είναι μια κλειστή και C^1 καμπύλη που αποφεύγει τα σημεία 0, 1 και θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{7z}-1}{z^2(z-1)}$, τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη στο ανοιχτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ και στα σημεία 0, 1 παρουσιάζει μεμονωμένες ανωμαλίες,

Πιο συγκεκριμένα, στο σημείο 1 παρουσιάζει πόλο τάξης 1 (απλό πόλο), αφού

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{7z} - 1}{z^2} = \frac{e^7 - 1}{1} = e^7 - 1 \neq 0$$

και άρα απο Πρόταση, έπεται ότι

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{7z} - 1}{z^2} = e^7 - 1$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο αριθμητής $e^{7z} - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και ο παρονομαστής $z^2(z - 1)$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0, αφού η z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0. Όμως, αφού $1 < 2$ έπεται από τον Κανόνα L'Hospital ότι η f έχει πόλο τάξης $2 - 1 = 1$ στο 0 και άρα

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{7z} - 1}{z(z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{7z} - 1}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - 1} = -7.$$

Τελικά, από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0)\delta_{\gamma}(0) + \text{Res}(f, 1)\delta_{\gamma}(1)) = 2\pi i (-7\delta_{\gamma}(0) + (e^7 - 1)\delta_{\gamma}(1)).$$

Τελικά, οι δυνατές τιμές του ολοκληρώματος είναι οι

$$2\pi i (-7k + (e^7 - 1)\ell), \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

1.2 2η Κατηγορία

Στις παρακάτω ασκήσεις η βασική ιδέα είναι ότι οι **ολόμορφες** συναρτήσεις $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (όπως πχ τα μιγαδικά πολυώνυμα $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι ακέραιες συναρτήσεις) πάνω σε **κλειστές καμπύλες** $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ **έχουν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ίσο με 0**.

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε σε τέτοιου είδους ασκήσεις είναι πρώτα απ όλα να καταλάβουμε με το μάτι αν η δοθείσα συνάρτηση της εκφώνησης έχει σοβαρές ανωμαλίες (πόλους ή ακόμα χειρότερα ουσιώδεις ανωμαλίες) ή επουσιώδεις ανωμαλίες στον δίσκο ή δακτύλιο σύγκλισης που μας δίνει η εκφώνηση.

Στην πρώτη περίπτωση, συνήθως η απάντηση θα είναι αρνητική, ενώ στην δεύτερη λόγω της υπέρβασης επουσιώδους ανωμαλίας, δηλαδή ανωμαλίας που μπορεί να ξεπεραστεί, αφού η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη σε κάποιον δίσκο, συνήθως η απάντηση θα είναι καταφατική.

1.2.1 1η υποκατηγορία

Άσκηση 7 (Φεβρουάριος 2021).

Έστω $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Εξετάστε εάν υπάρχει ακολουθία (P_n) ολόμορφων πολυωνυμών ώστε για τα $z \in \Delta(0, 1, 3)$ να ισχύει

$$\lim_n P_n(z) = f(z) := \frac{z(e^{az} - 1)(e^{bz} - 1)}{\sin^2(z/b) \sin^2(2z/c)}$$

ομοιόμορφα.

Λύση 7.

Έστω ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία ολόμορφων πολυωνύμων (P_n) και τότε λόγω Θεωρήματος του Κεφαλαίου 5. Θα είχαμε ότι αν θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma = C(0, 2)$ που είναι κλειστή και C^1 , και περιέχεται και στον δακτύλιο τότε

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Αφού όμως τα πολυώνυμα P_n είναι ολόμορφες συναρτήσεις $\mathbb{C}$ και έχουν παράγουσα και η γ είναι κλειστή καμπύλη, έπεται από Θεώρημα ότι

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz = 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz \longrightarrow 0$$

Απο μοναδικότητα όμως του ορίου, έπεται τελικά ότι πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για την

$$f(z) = \frac{z(e^{az} - 1)(e^{bz} - 1)}{\sin^2(z/b) \sin^2(2z/c)}$$

αφού

$$\sin^2(z/b) = 0 \iff \sin(z/b) = 0 \iff \frac{z}{b} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

έπεται ότι ο παράγοντας $\sin^2(z/b)$ μηδενίζεται στα σημεία $z_k = bk\pi$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ και όμοια δείχνουμε ότι ο παράγοντας $\sin^2(2z/c)$ μηδενίζεται στα σημεία $z'_k = ck\pi/2$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα τα σημεία $bk\pi, ck\pi/2$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της f και παρατηρούμε ότι απ αυτές οι μόνες που ανήκουν στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 3)$ είναι αυτές που αντιστοιχούν στον $k = 0$, δηλαδή στο 0 και άρα αυτή είναι η μοναδική μεμονωμένη ανωμαλία της f στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 3)$.

Μάλιστα παρατηρούμε ότι ο αριθμητής έχει ρίζα τάξης 3 στο 0 αφού καθεμία από τις ποσότητες $z, e^{bz} - 1, e^{az} - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0. Επίσης ο παρονομαστής έχει ρίζα τάξης 4 στο 0, αφού καθεμία από τις ποσότητες $\sin^2(z/b), \sin^2(2z/b)$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0. Αφού όμως $4 > 3$, έπεται από τον Μιγαδικό κανόνα L'Hospital ότι η f έχει πόλο τάξης $4 - 3 = 1$, δηλαδή απλό πόλο στο 0 και άρα $\text{Res}(f, 0) \neq 0$, λόγω της Πρότασης 3.

Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, έπεται ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) \neq 0$$

και άρα, από και επομένως **δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία.**

Άσκηση 8 (Ιούνιος 2023).

Εξετάστε αν υπάρχει ακολουθία P_n πολυωνύμων ώστε $P_n \rightarrow \frac{z(e^z - 1)^2}{\sin^4 z}$ ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$.

Λύση 8.

Έστω ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία ολόμορφων πολυωνύμων (P_n) και τότε λόγω Θεωρήματος του Κεφαλαίου 5. Θα είχαμε ότι αν θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma = C(0, 2)$ που είναι κλειστή και C^1 , και περιέχεται και στον δακτύλιο τότε

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Αφού όμως τα πολυώνυμα P_n είναι ολόμορφες συναρτήσεις $\mathbb{C}$ και έχουν παράγουσα και η γ είναι κλειστή καμπύλη, έπεται από Θεώρημα ότι

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz = 0, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\int_{\gamma} P_n(z) dz \longrightarrow 0$$

Απο μοναδικότητα όμως του ορίου, έπεται τελικά ότι πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για την

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1)^2}{\sin^4 z}$$

ισχύει ότι αυτή έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία μηδενισμού του παρανομαστή, δηλαδή στα σημεία μηδενισμού της $\sin$ που είναι τα $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα παρατηρούμε ότι απ αυτές οι μόνες που περιέχονται στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 2)$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $k = 0$, δηλαδή το $z_0 = 0$. Παρατηρούμε μάλιστα ότι αφού ο αριθμητής έχει ρίζα τάξης 3 στο 0 (γιατί η z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και η $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0) και ο παρανομαστής έχει ρίζα τάξης 4 στο 0 (γιατί η $\sin$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0), έπεται από τον Μιγαδικό Κανόνα L'Hospital ότι η f έχει πόλο τάξης $4 - 3 = 1$ στο 0, δηλαδή απλό πόλο και άρα $\text{Res}(f, 0) \neq 0$.

Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, έπεται ότι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) \neq 0$$

και άρα, από το και επομένως **δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία**.

Άσκηση 9 (Ιούνιος 2020).

Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία να ισχύει ότι

$$f'(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right);$$

Λύση 9.

Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση, τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την κλειστή καμπύλη $\gamma = C(0, 1)$ τότε από Θεώρημα έπεται ότι

$$\int_{C(0,1)} f'(z) dz = 0$$

και άρα θα έπρεπε να ισχύει ότι και

$$\int_{C(0,1)} z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) dz$$

που παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει μοναδική μεμονωμένη ανωμαλία στο 0 και άρα αφού $0 \in \Delta(0, 1)$ έπεται ότι $\delta_{C(0,1)}(0) = 1$ και από Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\int_{C(0,1)} z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(g, 0) \delta_{C(0,1)}(0) = 2\pi i \text{Res}(g, 0)$$

όπου $g(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right)$.

Πρέπει επομένως να βρούμε το $\text{Res}(g, 0)$ αλλά δεν είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε το είδος της ανωμαλίας της g στο 0 γι αυτό και θα πάμε με το ανάπτυγμα της σε σειρά Laurent κέντρου 0.

Παρατηρούμε ότι για την $\cos$ ισχύει ότι αυτή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 στο $\mathbb{C}$ ως εξής:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

και άρα για $z \neq 0$ έχουμε ότι

$$\cos\left(\frac{1+i}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(1+i)^{2n}}{z^{2n}}$$

και άρα

$$g(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

και έτσι ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι αυτός που αντιστοιχεί στο $n = 1$ και άρα είναι ο

$$\frac{(-1)^1 (1+i)^2}{2!} = -\frac{1+2i-1}{2} = -i$$

και έτσι

$$\text{Res}(g, 0) = -i \implies \int_{C(0,1)} g(z) dz = 2\pi i(-i) = 2\pi \neq 0$$

και άρα **δεν μπορεί να υπάρξει τέτοια συνάρτηση.**

Άσκηση 10.

Υπάρχει συνάρτηση $f : \Delta(0, 1, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε να ισχύει ότι

$$f'(z) = \frac{(e^z - 1 - z)^9}{(\cos z - 1)^8 (e^z - 1)^3};$$

1.2.2 2η υποκατηγορία

Άσκηση 11.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n \in \mathbb{C}[z]$ ώστε

$$P_n(z) \longrightarrow \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2 (1 - \cos z)^2}$$

ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$. Πόσο είναι το $\lim_n P_n(0)$;

Λύση 10.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2 (1 - \cos z)^2}$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτή παρουσιάζει μεμονωμένες ανωμαλίες στις ρίζες των εξισώσεων:

$$\cos z = 1 \iff z_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

και

$$\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1 = 0 \iff e^{z \log \pi} = e^0 \iff z'_k \log \pi = 2k\pi i \iff z'_k = \frac{2k\pi}{\log \pi} i, k \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για το 0 έχουμε ότι αφού η ποσότητα $1 - \cos z$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0, έπεται ότι ο παράγοντας $(1 - \cos z)^2$ έχει ρίζα τάξης 4 στο 0. Απο την άληθη, το 0 ελέγχεται ότι είναι και ρίζα τάξης 1 του $\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1$ γιατί

$$e^{0 \log \pi} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

$$(e^{z \log \pi} - 1)' = \log \pi e^{z \log \pi} \implies \log \pi e^{0 \log \pi} = \log \pi \neq 0$$

και άρα απο Θεώρημα έπεται ο παραπάνω ισχυρισμός.

Επομένως ο παράγοντας $(\pi^z - 1)^2$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0 και τελικά όλος ο παρανομαστής της f έχει ρίζα τάξης $2 + 4 = 6$ στο 0.

Απο την άλλη, ο αριθμητής έχει επίσης ρίζα τάξης 6 στο 0 γιατί ο παράγοντας z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και ο $(e^z - 1)^5$ έχει ρίζα τάξης 5 στο 0, αφού ο $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0.

Επομένως απο τον Μιγαδικό Κανόνα De L'Hospital έπεται ότι η f έχει επουσιώδης ανωμαλία στο 0 και άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση γύρω απο το 0.

Οι υπόλοιπες ρίζες z_k, z'_k , για τα $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ είναι πόλοι της f και αφού τώρα οι πλησιέστεροι στο μηδέν πόλοι είναι οι $2\pi/\log \pi, -2\pi/\log \pi$ και η f επεκτείνεται ομαλά γύρω απο το 0, έπεται ότι επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και απο το Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολομόρφων συναρτήσεων, έπεται ότι αυτή έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κέντρου 0 στον $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$$

και $R_f = 2\pi/\log \pi$, η ακτίνα σύγκλισης της.

Παρατηρούμε όμως ότι $R_f > 2$ και άρα $\Delta(0, 1, 2) \subset \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και απο το θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$, δηλαδή αν θεωρήσουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της δυναμοσειράς, έστω $P_n \in \mathbb{C}[z]$ με

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$$

τότε

$$P_n(z) \longrightarrow f(z)$$

ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$.

Άσκηση 12.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $c_2, c_3, c_4, \dots$ μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\frac{z}{\pi^{iz} - 1} = i \log \pi - \frac{z^2}{2} + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $0 < |z| < 2$. Πόσο είναι το $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}$;

Λύση 11.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(z) = \pi^{iz} - 1$, τότε παρατηρούμε ότι

$$g(z) = 0 \iff \pi^z = e^{iz \log \pi} = 1 = e^0 \iff iz \log \pi = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

και άρα έχουμε ότι αυτή μηδενίζεται στα σημεία

$$z_k = \frac{2k\pi}{\log \pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

και μακρίστα αυτές είναι τάξης 1 αφού είναι διακεκριμένες.

Επομένως η συνάρτηση f έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία $z_k, k \in \mathbb{Z}$ και παρατηρούμε ότι στα $z_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ έχει πόλους τάξης 1, ενώ στο $z_0 = 0$ έχει επουσιώδη ανωμαλία αφού ο αριθμητής z έχει ρίζα τάξης 1 στο σημείο 0 ενώ ο παρανομαστής έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και άρα αφού $1 = 1$, απο

τον Μιγαδικό Κανόνα L'Hospital η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0.

Επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\pi^{iz} - 1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z)'}{(\pi^{iz} - 1)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{i \log \pi \cdot \pi^{iz}} = \frac{1}{i \log \pi}$$

Επειδή τώρα οι πλησιέστεροι πόλοι στο 0 της f είναι οι $\frac{2\pi}{\log \pi}, -\frac{2\pi}{\log \pi}$ έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στον δακτύλιο $\Delta(0, 2\pi/\log \pi) \setminus \{0\}$ και άρα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g : \Delta(0, 2\pi/\log \pi) \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta(0, 2\pi/\log \pi) \setminus \{0\} \\ 1/(i \log \pi), & z = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

τότε αυτή είναι ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$. Επομένως από το Θεώρημα Αναλυτικότητας ολόμορφων συναρτήσεων, έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου 0 $\in \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές (c_n) ώστε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \Delta(0, 2\pi/\log \pi).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι από τον τρόπο κατασκευής της g η g έχει ακτίνα σύγκλισης $R_g = 2\pi/\log \pi > 2$.

Απο το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε όμως ότι η g έχει ακτίνα σύγκλισης

$$R_g = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} = 2\pi/\log \pi$$

και άρα

$$\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\log \pi}{2\pi}.$$

Επίσης $c_0 = g(0) = \frac{1}{i \log \pi}$ και για τα αφού $\Delta(0, 2) \subset \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ έχουμε ότι για τα $z \in \Delta(0, 2)$ έχουμε ότι

$$f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots = \frac{1}{i \log \pi} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι $c_1 = -\frac{1}{2}$ και αφού από το Θεώρημα Παραγωγισής δυναμοσειρών έχουμε ότι

$$c_1 = \frac{g'(0)}{1!} = g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g'(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f'(z)$$

γιατί η g' είναι συνεχής στο 0 ως ολόμορφη και άρα $\lim_{z \rightarrow 0} g'(z) = g'(0)$ (θυμηθείτε κάθε δυναμοσειρά είναι απείρως παραγωγίσιμη στον δίσκο σύγκλισης της) και η g ταυτίζεται κοντά στο 0 με την f εξ ορισμού της.

Μένει να αποδείξουμε ότι $\lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = -1/2$ το οποίο αποδεικνύεται εύκολα.

Κεφάλαιο 2

Επουσιώδεις ανωμαλίες και επέκταση σε ολόμορφη συνάρτηση σε δίσκο

Άσκηση 13.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n \in \mathbb{C}[z]$ ώστε

$$P_n(z) \longrightarrow \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2(1 - \cos z)^2}$$

ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$. Πόσο είναι το $\lim_n P_n(0)$;

Λύση 12.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2(1 - \cos z)^2}$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτή παρουσιάζει μεμονωμένες ανωμαλίες στις ρίζες των εξισώσεων:

$$\cos z = 1 \iff z_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

και

$$\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1 = 0 \iff e^{z \log \pi} = e^0 \iff z'_k \log \pi = 2k\pi i \iff z'_k = \frac{2k\pi}{\log \pi} i, k \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για το 0 έχουμε ότι αφού η ποσότητα $1 - \cos z$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0, έπεται ότι ο παράγοντας $(1 - \cos z)^2$ έχει ρίζα τάξης 4 στο 0. Απο την άληθη, το 0 ελεγχεται ότι είναι και ρίζα τάξης 1 του $\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1$ γιατί

$$e^{0 \log \pi} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

$$(e^{z \log \pi} - 1)' = \log \pi e^{z \log \pi} \implies \log \pi e^{0 \log \pi} = \log \pi \neq 0$$

και άρα απο το Θεώρημα 3. έπεται ο παραπάνω ισχυρισμός.

Επομένως ο παράγοντας $(\pi^z - 1)^2$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0 και τελικά όλος ο παρανομαστής της f έχει ρίζα τάξης $2 + 4 = 6$ στο 0.

Απο την άληθη, ο αριθμητής έχει επίσης ρίζα τάξης 6 στο 0 γιατί ο παράγοντας z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και ο $(e^z - 1)^5$ έχει ρίζα τάξης 5 στο 0, αφού ο $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0.

Επομένως απο τον Μιγαδικό Κανόνα De L'Hospital έπεται ότι η f έχει επουσιώδης ανωμαλία στο 0 και άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση γύρω απο το 0.

Οι υπόλοιπες ρίζες z_k, z'_k , για τα $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ είναι πόλοι της f και αφού τώρα οι πλησιέστεροι στο μηδέν πόλοι είναι οι $2\pi/\log \pi, -2\pi/\log \pi$ και η f επεκτείνεται ομαλά γύρω απο το 0, έπεται ότι επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και απο το Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολομόρφων συναρτήσεων, έπεται ότι αυτή έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κέντρου 0 στον $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$$

και $R_f = 2\pi/\log \pi$, η ακτίνα σύγκλισης της.

Παρατηρούμε όμως ότι $R_f > 2$ και άρα $\Delta(0, 1, 2) \subset \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και απο το θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$, δηλαδή αν θεωρήσουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της δυναμοσειράς, έστω $P_n \in \mathbb{C}[z]$ με

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$$

τότε

$$P_n(z) \longrightarrow f(z)$$

ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$.

Άσκηση 14 (Φεβρουάριος 2024).

Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z(1 - \cos z)(e^z - z - 1)}{(e^z - 1)^5}$$

και να υπολογίσετε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1+i)}{n!} (z-1)^n.$$

Λύση 13.

• **Βήμα 1ο:**

Απο το Θεώρημα Cauchy-Hadamard η ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(1+i)}{n!} \right|}}$$

και άρα αρκεί να προσδιορίσουμε την ποσότητα

$$\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(1+i)}{n!} \right|}.$$

Βήμα 2ο-Βρίσκουμε μεμονωμένες ανωμαλίες της f και τις χαρακτηρίζουμε ως προς το είδος εντοπίζοντας την επουσιώδης ανωμαλία της:

Ο παρανομαστής της f μηδενίζεται στα σημεία $z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ και παρατηρούμε ότι όλα τα z_k με $k \neq 0$ είναι πόλοι της f (δεν μηδενίζουν τον αριθμητή οπότε το διαπιστώνουμε εύκολα) ενώ το $z_0 = 0$ μηδενίζει τον αριθμητή και αφού ο παράγοντας z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και ο παράγοντας $e^z - 1 - z$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0, έπεται ότι όλος ο αριθμητής έχει ρίζα τάξης $2 + 2 + 1 = 5$ στο 0. Απο την άληθη ο παράγοντας $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και άρα όλος ο παρανομαστής έχει ρίζα τάξης 5 στο 0. Επομένως από Μιγαδικό Κανόνα L' Hospital έχουμε ότι η f έχει επουσιώδης ανωμαλία στο 0.

Βήμα 3ο-Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της επουσιώδους ανωμαλίας στο σημείο αυτό και βρίσκουμε τον πλησιέστερο πόλο της f σε αυτήν ώστε να αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την f σε κατάλληλη περιοχή:

Παρατηρούμε ότι αφού η f έχει ουσιώδης ανωμαλία στο 0, έπεται ότι επεκτείνεται ολόμορφα γύρω από το 0 και άρα και γύρω από το $1+i$ και αφού το πλησιέστερο πρόβλημα (πόλος) της f στο $1+i$ είναι οι πόλοι $2\pi i, -2\pi i$, έπεται ότι η f μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(1+i, M)$ όπου

$$M = \min\{\sqrt{1+(2\pi-1)^2}, \sqrt{1+(2\pi+1)^2}\} = \sqrt{1+(2\pi-1)^2}.$$

Βήμα 4ο-Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολόμορφων συναρτήσεων για να τεκμηριώσουμε ότι η f μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά στον δίσκο αυτόν:

Απο απο το Θεώρημα Αναλυτικότητας ολόμορφων συναρτήσεων έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου $i+1$ στον δίσκο αυτό, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - (i+1))^n, \quad z \in \Delta(i+1, M)$$

με $R_f = M$ και αφού απο Cauchy-Hadamard ισχύει ότι

$$R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(i+1)}{n!} \right|}} = M$$

έπεται ότι και $R = M = \sqrt{1+(2\pi-1)^2}$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της εκφώνησης.

Άσκηση 15 (Ιούνιος 2015).

Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i+1)}{n!} (z-1)^n$$

αν

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1 - z)^2}{(e^z - 1)^5}.$$

Λύση 14.

Παρατηρούμε ότι απο το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε ότι

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(1+i)}{n!} \right|}}$$

Παρατηρούμε ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0 και επειδή ο αριθμητή έχει ρίζα τάξης 5 στο 0 γιατί καθέναν από τους παράγοντες $z, e^z - 1 - z$ έχει ρίζα τάξης 1 και τάξης 2 αντίστοιχα στο 0 και ο παρανομαστής έχει επίσης ρίζα τάξης 5 στο 0 γιατί ο παράγοντας $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0. Τελικά από το Μιγαδικό Κανόνα De L'Hospital έπεται ότι η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0 και άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση γύρω από το 0.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο παρανομαστής μηδενίζεται στα σημεία $z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ και άρα σε καθένα από αυτά η f επίσης παρουσιάζει μεμονωμένης ανωμαλία και πιο συγκεκριμένα η f έχει πόλο στα $z_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Αφού όμως οι πλησιέστεροι πόλοι στο $i+1$ είναι οι $2\pi i, -2\pi i$, έπεται ότι η f επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(i+1, M)$ όπου

$$M = \min\{\sqrt{1 + (2\pi - 1)^2}, \sqrt{1 + (2\pi + 1)^2}\} = \sqrt{1 + (2\pi - 1)^2}$$

και άρα από το Θεώρημα Αναλυτικότητας ολόμορφων συναρτήσεων έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου $i+1$ στον δίσκο αυτό, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - (i+1))^n, \quad z \in \Delta(i+1, M)$$

με $R_f = M$ και αφού από Cauchy-Hadamard ισχύει ότι

$$R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(i+1)}{n!} \right|}} = M$$

έπεται ότι και $R = M = \sqrt{1 + (2\pi - 1)^2}$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της εκφώνησης.

Άσκηση 16 (Φεβρουάριος 2021).

Αν

$$f(z) = \exp\left(\frac{(e^{az} - 1 - az)^2}{z \sin(z/\beta)(1 - \cos(2z/\gamma))}\right)$$

τότε να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(ai)}{n!} (z - \beta\pi i)^n.$$

Λύση 15.

Όμοια με τις προηγούμενες.

Κεφάλαιο 3

Mixed Ασκήσεις πάνω στο Κεφάλαιο 7

Άσκηση 17 (Ιούνιος 2023).

Όταν $(a_n) \subset \mathbb{C}$ με $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, να υπολογίσετε τον ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) e^{\frac{1}{z}} dz$$

συναρτήσει της σειράς των (a_n) .

Λύση 16.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ έπεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ από το θεώρημα Cauchy-Hadamard είναι

$$R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

και άρα από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έπεται ότι αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\Delta(0, r)$ όπου $0 < r < R$ και άρα και στον $\Delta(0, 1)$.

Επομένως από Θεώρημα, έχουμε ότι

$$\int_{|z|=1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) e^{\frac{1}{z}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{|z|=1} z^n e^{\frac{1}{z}} dz.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν στεθροποιήσουμε $n \in \mathbb{N}$ και θεωρήσουμε την συνάρτηση $f_n(z) = z^n e^{\frac{1}{z}}$ τότε παρατηρούμε ότι αυτή έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0, αφού έχουμε αποδείξει στα παραδείγματα ότι η $e^{\frac{1}{z}}$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0 και η z^n είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, δηλαδή δεν έχει μεμονωμένες ανωμαλίες.

Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, έχουμε ότι

$$\int_{|z|=1} f_n(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_n, 0) \delta_{C(0,1)}(0)$$

και αφού όμως 0 ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου $C(0, 1)$, δηλαδή στην φραγμένη συνεκτική του συνιστώσα, έπεται ότι $\delta_{C(0,1)}(0) = 1$ και άρα

$$\int_{|z|=1} f_n(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_n, 0).$$

Τώρα αφού το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f_n , για να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό της υπόλοιπο θα το υπολογίζουμε μέσω της ανάπτυξης της σε σειρά Laurent στον δακτύλιο $\Delta(0, 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Παρατηρούμε ότι η εκθετική συνάρτηση αναπτύσσεται στο $\mathbb{C}$ (άπειρη ακτίνα σύγκλισης) σε δυναμο-σειρά κέντρου 0 ως εξής

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}.$$

Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \Delta(0, 0, +\infty)$ έχουμε ότι

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$

και έτσι

$$f_n(z) = z^n e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{k-n}}$$

και άρα ο συντελεστής που αντιστοιχεί στον παράγοντα $\frac{1}{z}$ του παρπάνω ανπτύγματος επιτυγχάνεται όταν $k = n + 1$ και άρα

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f_n, 0) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Τελικά,

$$\int_{|z|=1} f_n(z) dz = \frac{2\pi i}{(n+1)!}$$

και άρα

$$\int_{|z|=1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) e^{\frac{1}{z}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi i a_n}{(n+1)!} = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}$$

Άσκηση 18.

Δώστε παράδειγμα δύο συναρτήσεων f, g που καθεμία να έχει πόλο τάξης 4 στο $1-i$ αλλήλ η διαφορά τους $f - g$ να έχει πόλο τάξης 2 στο $1-i$.

Λύση 17.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z(1-i)}{(z-1+i)^4} \text{ και } g(z) = -\frac{(1-i)^2}{(z-1+i)^4}$$

και τότε παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} (z-1+i)^4 \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1-i} (z^2 - 2z(1-i)) = (1-i)^2 - 2(1-i)^2 = -(1-i)^2 \neq 0$$

και

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} (z-1+i)^4 \cdot g(z) = -(1-i)^2 \neq 0$$

και άρα οι f, g έχουν πόλο τάξης 4 στο $1 - i$.

Επίσης

$$f(z) - g(z) = \frac{z^2 - 2z(1 - i) + (1 - i)^2}{(z - 1 + i)^4} = \frac{(z - 1 + i)^2}{(z - 1 + i)^4} = \frac{1}{(z - 1 + i)^2}$$

και άρα

$$\lim_{z \rightarrow 1 - i} (z - 1 + i)^2 (f(z) - g(z)) = 1 \neq 0$$

που σημαίνει ότι η $f - g$ έχει πόλο τάξης 2 στο $1 - i$.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές Αρχής του Rouché και Αρχής Ορίσματος

Άσκηση 19 (Φεβρουάριος 2022).

Αν $a \in \mathbb{C}$ και $|a| < 3$ και ρ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $h(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 + (1 - i\sqrt{2})z + a$, αποδείξτε ότι $|\rho| < 3$.

Λύση 18.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις ολόμορφες συναρτήσεις $f(z) = z^3$ και $g(z) = (1 - i\sqrt{3})z^2 + (1 - i\sqrt{2})z + a$, τότε παρατηρούμε ότι για τα $z \in C(0, 3)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |(1 - i\sqrt{3})||z|^2 + |1 - i\sqrt{2}||z| + |a| = 2|z|^2 + \sqrt{5}|z| + |a| = 18 + 2\sqrt{5} + |a| \\ &< 21 + 2\sqrt{5} \\ &< 81 \\ &= 3^3 \\ &= |z|^3 \\ &= |f(z)| \end{aligned}$$

και άρα από την Αρχή του Rouché έπεται ότι το πλήθος ριζών της $f + g = h$ μέσα στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 3)$ είναι το ίδιο με το πλήθος ριζών της f στον $\Delta(0, 3)$.

Όμως η f έχει ακριβώς μοναδική ρίζα το 0 η οποία είναι τάξης 3, και βρίσκεται στον $\Delta(0, 3)$ και άρα και η h θα έχει 3 ρίζες μέσα στον $\Delta(0, 3)$ και αφού έχει ακριβώς 3, έπεται ότι όλες οι ρίζες του βρίσκονται εντός του $\Delta(0, 3)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 20 (Ιανουάριος 2023-Ιανουάριος 2020).

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(z) = z^5 - iz^4 + (4 - 3i)z^3 + az^2 + \beta z + \gamma$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ με $|a| < 5^2$, $|\beta| < 5^3$ και $|\gamma| < 5^4$. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{|z|=5} z^2 \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ είναι ανεξάρτητο των a, β, γ υπολογίζοντας το. Ποιά είναι η τιμή του ανωτέρω ολοκληρώματος όταν $|\gamma| < 5^6$ και $|a| < 5^2$, $|\beta| < 5^3$;

Λύση 19.

Θεωρούμε τις ολόμορφες συναρτήσεις $f(z) = -iz^4 + (4 - 3i)z^3 + az^2 + \beta z + \gamma$ και $g(z) = z^5$ και παρατηρούμε ότι για τα $z \in C(0, 5)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |i||z|^4 + |4 - 3i||z|^3 + |a||z|^2 + |\beta||z| + |\gamma| = 5^4 + 5 \cdot 5^3 + |a| \cdot 5^2 + |\beta|5 + |\gamma| \\ &< 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 \\ &= 5 \cdot 5^4 \\ &= 5^5 \\ &= |z|^5 \\ &= |g(z)| \end{aligned}$$

και άρα από το θεώρημα του Rouché έπεται ότι η $f + g = p$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την g στον δίσκο $\Delta(0, 5)$ και αφού η g έχει μοναδική ρίζα το 0 που ανήκει στο $\Delta(0, 5)$ πολυπλοπότητας 5 έπεται ότι και το p έχει 5 το πλήθος ρίζες έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_5$ στον δίσκο $\Delta(0, 5)$.

Άρα από την Αρχή του ορισμάτος, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{|z|=5} z^2 \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^5 \rho_k^2 = 2\pi i \left(\left(-\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^2 - \frac{2c_{n-2}}{c_n} \right) \\ &= 2\pi i((-i)^2 - 2(1+i)) \\ &= 4\pi - 6\pi i \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τους **Τύπους του Vieta** που ισχύουν για πολυώνυμα:

Αν $p(z) = c_n(z - \rho_1)(z - \rho_2) \cdots (z - \rho_n)$ τότε ισχύουν οι εξής ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \rho_k &= -\frac{c_{n-1}}{c_n} \\ \sum_{k=1}^n \rho_k^2 &= \left(-\frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^2 - \frac{2c_{n-2}}{c_n}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $|\gamma| = 5^6$ και θεωρήσουμε και την σταθερή συνάρτηση $h(z) = \gamma$, τότε παρατηρούμε ότι για τα $z \in C(0, 5)$

$$\begin{aligned} |p(z) - h(z)| &= |z^5 - iz^4 + (4 - 3i)z^3 + az^2 + \beta z| \leq |z|^5 + |i||z|^4 + |4 - 3i||z|^3 + |a||z|^2 + |\beta||z| \\ &= 5^5 + 5^4 + 5 \cdot 5^3 + |a| \cdot 5^2 + |b|5 \\ &< 5^5 + 5^4 + 5^4 + 5^2 5^2 + 5 \cdot 5^3 \\ &= 5^5 + 4 \cdot 5^4 \\ &= 9 \cdot 5^4 \\ &< 25 \cdot 5^4 \\ &= 5^6 \\ &= |\gamma| \end{aligned}$$

$$= |h(z)|$$

και άρα απο την Αρχή του Rouché έπεται ότι η $(p - \gamma) - \gamma + \gamma = p$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την $h = |\gamma|$ στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 5)$ και άρα καμία. Επομένως η $z^2 \frac{p'(z)}{p(z)}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη συνάρτηση στον $\Delta(0, 5)$ και αφού η $\gamma = C(0, 5)$ είναι κλειστή καμπύλη, έπεται απο το Θεώρημα Cauchy ότι

$$\int_{|z|=5} z^2 \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 0.$$

Άσκηση 21.

Έστω πολυώνυμο $p(z) = 9z^4 + 17iz^3 - z^2 + z + i$.

- Να αποδείξετε ότι ο' όλες οι ρίζες του p βρίσκονται εντός του ανοιχτού δίσκου $\Delta(0, 2)$.
- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{36z^4 + 51iz^3 - 2z^2 + z}{9z^4 + 17iz^3 - z^2 + z + i} dz.$$

Λύση 20.

- Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την $g(z) = 9z^4$ τότε έχουμε ότι για τα z με $|z| = 2$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |p(z) - g(z)| &= |17iz^3 - z^2 + z + i| \leq 17|z|^3 + |z|^2 + |z| + |i| = 17 \cdot 2^3 + 2^2 + 2 = 17 \cdot 2^3 + 6 \\ &< 18 \cdot 2^3 \\ &= 9 \cdot 2^4 \\ &= |9z^4| \\ &= |g(z)| \end{aligned}$$

και άρα απο την Αρχή του Rouché, έπεται ότι η $p - g + g = p$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την g μέσα στον δίσκο $\Delta(0, 2)$, και αφού η g έχει μοναδική ρίζα το 0 πολλαπλότητας 4, έπεται ότι και το p έχει 4 ρίζες εντός του δίσκου $\Delta(0, 1)$.

Όμως το p είναι πολυώνυμο βαθμού 4 και άρα έχει 4 το πλήθος ριζες, δηλαδή όλες οι ρίζες του βρίσκονται μέσα στον δίσκο $\Delta(0, 2)$.

- Για το ολοκλήρωμα τώρα παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής είναι το p και ο αριθμητής είναι ο $zp'(z)$ αφού $p'(z) = 36z^3 + 51iz^2 - 2z + 1$ και άρα απο την Αρχή του ορίσματος

$$I = \int_{|z|=2} z \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in Z(f), a \in \text{εσ. του } C(0, 2)} \alpha$$

και αν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ είναι οι ρίζες του p , τότε απο το πρώτο μέρος, όλες ανήκουν στο εσωτερικό του $C(0, 2)$ και απο τους τύπους Vieta έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^4 \rho_k = -\frac{17i}{9}$$

και έτσι

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^4 \rho_k = -2\pi i \frac{17i}{9} = \frac{34\pi}{9}.$$

Άσκηση 22.

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, όπου Γ είναι η καμπύλη:

$$\Gamma(t) = e^{7it} - 7e^{4it} + 2ie^{i2t} + e^{it} + 1 + i, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Λύση 21.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $p(z) = z^7 - 7z^4 + 2iz^2 + z + i + 1$ και την κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = e^{it}$, τότε έχουμε ότι $\Gamma = p \circ \gamma$ και άρα

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

Απο την αρχή τώρα του ορίσματος, έπεται ότι

$$\int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i \times \text{πλήθος ριζών του } p \text{ στο εσωτερικό της } \gamma.$$

Για να βρούμε πόσες ρίζες έχει το p στο εσωτερικό της καμπύλης γ , θα εφαρμόσουμε την αρχή του Rouché και παρατηρούμε ότι: αν θεωρήσουμε την $g(z) = -7z^4$, τότε παρατηρούμε ότι για τα z με $|z| = 1$ έχουμε ότι

$$|p(z) - g(z)| = |z^7 + 2iz^2 + z + i + 1| \leq |z|^7 + 2|z|^2 + |z| + |i| + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6 < 7 = |-7z^4| = |g(z)|$$

και άρα απο την αρχή του Rouché έπεται ότι η $p - g + g = p$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την g μέσα στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και αφού η g έχει πμωναδική ρίζα πολυπλοπότητας 4 στον $\Delta(0, 1)$, έπεται ότι και το p έχει 4 ρίζες μέσα στον δίσκο $\Delta(0, 1)$ και άρα

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 8\pi i.$$

Άσκηση 23.

Έστω ότι το p είναι μη σταθερό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι για $R > 0$ αρκετά μεγάλο ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \deg p.$$

Λύση 22.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού το p είναι μη σταθερό, έπεται ότι $\deg p = n \geq 1$. Επομένως για $R > 0$ ώστε όλες οι n -το πλήθος ρίζες του p να βρίσκονται στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, R)$, έχουμε απο την Αρχή του Ορίσματος ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = n = \deg p.$$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές της Αρχής της Ταυτότητας

Άσκηση 24.

Εξετάστε εάν υπάρχει συνεχής $f : \overline{\Delta(0,1)} \rightarrow \mathbb{C}$, η οποία είναι ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0,1)$ και

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Λύση 23.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g : \Delta(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ με $g(z) = \frac{z}{1+z}$, τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη και αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση f θα είχαμε ότι

$$f(1/n) = g(1/n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $1/n \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου T είναι σύνολο ταύτισης της f με την g .

Αφού τώρα $1/n \rightarrow 0$ και $1/n \neq 0$ για κάθε n και η ακολουθία $(1/n)$ είναι ακολουθία στοιχείων του T , έπεται ότι τελικά $0 \in T' \cap \Delta(0,1)$ και άρα $T' \cap \Delta(0,1) \neq \emptyset$.

Επομένως από την Αρχή της Ταυτότητας, έπεται ότι $f = g$ στον $\Delta(0,1)$ και αυτό είναι άτοπο, γιατί λόγω της συνέχειας της f στο $-1 \in \overline{\Delta(0,1)}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{C} \ni f(-1) = \lim_{|z|<1, z \rightarrow -1} f(z) = \lim_{|z|<1, z \rightarrow -1} g(z) = \infty$$

Άσκηση 25.

Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f για τις οποίες

$$f'\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

για κάθε n .

Άσκηση 26.

Έστω $f : \Delta(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με

$$\sin(1/n)f(1/n) + \cos(1/n)f'(1/n) = 0, \quad n \geq 1.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \lambda \cos z$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$.

Λύση 24.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ με $h(z) = \sin z f(z) + \cos z f'(z)$ η οποία παρατηρούμε ότι είναι ολόμορφη ως άθροισμα τέτοιων και επίσης λόγω της υπόθεσης έχουμε ότι $h(1/n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα αν T είναι το σύνολο ταύτισης της h με την μηδενική συνάρτηση, τότε $1/n \in T$ για κάθε n .

Αφού όμως $1/n \rightarrow 0$ και $1/n \neq 0$ και η ακολουθία $(1/n)$ είναι ακολουθία στοιχείων του T , έπεται ότι $0 \in T'$ και άρα και $0 \in T' \cap \Delta(0, 1)$, δηλαδή $T \cap \Delta(0, 1) \neq \emptyset$.

Απο την Αρχή της Ταυτότητας, έπεται ότι $h = 0$, δηλαδή

$$\sin z f(z) + \cos z f'(z) = 0, \quad z \in \Delta(0, 1).$$

Παρατηρούμε όμως αν διαιρέσουμε και με το $\cos^2 z$ που δεν μηδενίζεται στον δίσκο $\Delta(0, 1)$, έχουμε ότι

$$\frac{\sin z f(z) + \cos z f'(z)}{\cos^2 z} = 0$$

για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ και άρα $\left(\frac{f}{\cos}\right)'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$.

Αφού όμως το $\Delta(0, 1)$ είναι τόπος, έπεται ότι η $f/\cos$ είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\frac{f(z)}{\cos z} = \lambda \implies f(z) = \lambda \cos z$$

για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$.

Άσκηση 27.

Έστω $f, g : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με $f(z)g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ και

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \lambda g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$.

Κεφάλαιο 6

Σειρές Laurent και Εφαρμογή του Casorati-Weirstrass

Άσκηση 28 (Φεβρουάριος 2024).

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{z^n}, \quad z \neq 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και έπειτα να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει ακολουθία (z_k) του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $z_k \rightarrow 0$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

Λύση 25.

Αρχικά θα μελετήσουμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n!}} w^n$$

για τα διάφορα $w \in \mathbb{C}$ και παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $c_n = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}$, τότε έχουμε ότι αφού

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1} \rightarrow +\infty$$

έπεται από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard ότι η δυναμοσειρά της σχέσης έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$, που σημαίνει ότι συγκλίνει για κάθε $w \in \mathbb{C}$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{z^n}$, συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και έτσι η f είναι καλά ορισμένη.

Επίσης η δυναμοσειρά της σχέσης είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, λόγω του Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών και άρα και η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ως συνθεση της δυναμοσειράς με την συνάρτηση $h(z) = 1/z$ που είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Επίσης όπως είναι προφανές αυτή παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο 0 και μάλιστα είναι ουσιώδης η ανωμαλία της αφού στο Ανάπτυγμα Laurent υπάρχουν άπειροι συντελεστές $c_{-n} \neq 0$ (Πρόταση 3.)

Έστω τώρα $\alpha \in \mathbb{C}$ και από το Θεώρημα Casorati-Weirstrass έπεται ότι για κάθε $R > 0$ το σύνολο

$f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή τέμνει κάθε ανοιχτό δίσκο και άρα για κάθε $R > 0$ έχουμε ότι

$$f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, R) \neq \emptyset.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας αυτό για $R = 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f(\Delta(0, 1/k) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, 1/k) \neq \emptyset$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα υπάρχει ακολουθία (z_k) με $z_k \neq 0$ και $|z_k - 0| < 1/k$ και $|f(z_k) - a| < 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και που μας εξασφαλίζει ότι $z_k \rightarrow 0$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

Άσκηση 29 (Σεπτέμβριος 2022).

Θεωρείστε την ακολουθία $\lambda_n = n^2/(2n+3)$ και έναν μιγαδικό αριθμό $A \neq 0$. Για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda_n^n} \frac{1}{z^n}, \quad z \neq 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι καλώς ορισμένη και ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Στην συνέχεια αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει ακολουθία (z_k) από το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $z_k \rightarrow 0$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

Λύση 26.

- **Δείχνουμε ότι είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ότι για κάθε $z \neq 0$ ισχύει ότι $f(z) \in \mathbb{C}$:**

Για να την μελετήσουμε θα μελετήσουμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n^{\lambda_n}} w^n$$

για τα διάφορα $w \in \mathbb{C}$ και παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $c_n = \frac{A^n}{n^{\lambda_n}}$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|A|}{n^{n/(2n+3)}} \rightarrow 0 \implies \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

και άρα από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard ισχύει ότι η ακτίνα σύγκλισης της είναι

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

που σημαίνει ότι η συγκλίνει για κάθε $w \in \mathbb{C}$ και άρα αν πάρουμε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ αφού $w = 1/z \in \mathbb{C}$ έπεται ότι και η

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n^{\lambda_n}} \frac{1}{z^n}$$

συγκλίνει, δηλαδή $f(z) \in \mathbb{C}$. Το $z \neq 0$ ήταν τυχόν άρα η f είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση.

- **Βήμα 2ο: Αποδεικνύουμε ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ως σύνθεση ολομόρφων συναρτήσεων:**

Παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Διαφόρισης Δυναμοσειρών η ορίζει ολόμορφη συνάρτηση (μάλιστα απείρως παραγωγίσιμη) στον δίσκο σύγκλισης της, που στην περίπτωση μας είναι ο $\mathbb{C}$. Επίσης η συνάρτηση $h: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ με $h(z) = 1/z$ είναι ολόμορφη ως ρητή και άρα τελικά και η σύνθεση της $w \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n^{\lambda_n}} w^n$ με την h , που είναι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- **Βήμα 3ο:** Αποδεικνύουμε το 3ο ερώτημα αποδεικνύοντας ότι η f έχει ουσιώδης ανωμαλία στο 0 και εφαρμόζουμε το **Casorati-Weirstrass**:

Είναι προφανές ότι η f αυτή παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο 0 και μάλιστα είναι ουσιώδης η ανωμαλία της αφού στο Ανάπτυγμα Laurent υπάρχουν άπειροι συντελεστές $c_{-n} \neq 0$.

Έστω τώρα $a \in \mathbb{C}$ και από το Θεώρημα Casorati-Weirstrass έπεται ότι για κάθε $R > 0$ το σύνολο $f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή τέμνει κάθε ανοιχτό δίσκο και άρα για κάθε $R > 0$ έχουμε ότι

$$f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, R) \neq \emptyset.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας αυτό για $R = 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f(\Delta(0, 1/k) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, 1/k) \neq \emptyset$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα υπάρχει ακολουθία (z_k) με $z_k \neq 0$ και $|z_k - 0| < 1/k$ και $|f(z_k) - a| < 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και που μας εξασφαλίζει ότι $z_k \rightarrow 0$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές των Εκτιμήσεων Cauchy και του Θεωρήματος Αναλυτικότητας Ολόμορφων συναρτήσεων

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε εφαρμογές των εξής δύο βασικών αποτελεσμάτων:

- **Εκτιμήσεις Cauchy:** Αν $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι ανοιχτό, τότε για κάθε κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(a, R)} \subset \Omega$ ισχύει ότι

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$$

όπου $M = \sup\{|f(z)| : |z - a| = R\}$.

- **Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολόμορφων συναρτήσεων:** Κάθε ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό Ω για κάθε $a \in \Omega$ αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a στον μεγαλύτερο δίσκο $\Delta(a, R_a)$ που περιέχεται στο Ω .

Ως άμεσο πόρισμα αυτού, έπονται τα εξής:

- Κάθε ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό δίσκο $f : \Delta(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a στον $\Delta(a, R)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Delta(a, R).$$

- Κάθε ακέραια συνάρτηση f (δηλαδή $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη) αναλύεται σε δυναμοσειρά οποιουδήποτε κέντρου $a \in \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Άσκηση 30.

Σωστό ή Λάθος; Αν η f είναι ακέραια συνάρτηση, τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση g ώστε $g^{(n)}(0) = i^{\sqrt{n}} |f^{(n)}(0)|$ για κάθε $n \geq 0$.

Λύση 27. Είναι σωστό!

Αφού η f είναι ακέραια συνάρτηση έπεται ότι αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου $0 \in \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

όπου λόγω Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών, έχουμε ότι για τους συντελεστές (c_n) ισχύει ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Επίσης από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard για την ακτίνα σύγκλισης της R_f ισχύει ότι

$$R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}}$$

και αφού $R_f = +\infty$, έπεται ότι

$$\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|} = 0.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την g όπου

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{\sqrt{n}} |f^{(n)}(0)|}{n!} z^n$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτή από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχει ακτίνα σύγκλισης R_g όπου

$$R_g = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}} = +\infty$$

και άρα η g ορίζει ακέραια συνάρτηση.

Επίσης, λόγω του Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 0$

$$\frac{i^{\sqrt{n}} |f^{(n)}(0)|}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \implies g^{(n)}(0) = i^{\sqrt{n}} |f^{(n)}(0)|$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 31.

Σωστό ή Λάθος; Αν η f είναι ακέραια συνάρτηση και $a, \beta, \Lambda, M \in \mathbb{C}$ τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση g ώστε $g^{(n)}(a) = (n+i)^\Lambda M^n |f^{(n)}(\beta)|$ για κάθε $n \geq 0$.

Λύση 28.**Είναι σωστό!**

Αφού η f είναι ακέραια συνάρτηση έπεται ότι αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου $\beta \in \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \beta)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

όπου λόγω Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών, έχουμε ότι για τους συντελεστές (c_n) ισχύει ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Επίσης από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard για την ακτίνα σύγκλισης της R_f ισχύει ότι

$$R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!} \right|}}$$

και αφού $R_f = +\infty$, έπεται ότι

$$\limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!} \right|} = 0.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την g όπου

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+i)^\Lambda M^n |f^{(n)}(\beta)|}{n!} (z-a)^n$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτή από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχει ακτίνα σύγκλισης R_g όπου

$$R_g = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|(n+i)^\Lambda M^n| \left| \frac{f^{(n)}(\beta)|}{n!} \right|}}.$$

Αφού όμως

$$(n+i)^\Lambda = e^{\Lambda \log(n+i)} = e^{\Lambda(\log \sqrt{n^2+1} + i \arg(n+i))} = e^{\Lambda(\log \sqrt{n^2+1} + i \arccos \frac{n}{n^2+1})}$$

και

$$\begin{aligned} \Lambda \left(\log \sqrt{n^2+1} + i \arccos \frac{n}{n^2+1} \right) &= (Re \Lambda + i Im \Lambda) \left(\log \sqrt{n^2+1} + i \arccos \frac{n}{n^2+1} \right) \\ &= Re \Lambda \log \sqrt{n^2+1} - Im \Lambda \arccos \frac{n}{n^2+1} + i \left(Re \Lambda \arccos \frac{n}{n^2+1} + Im \Lambda \log \sqrt{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\Rightarrow Re \left(\Lambda \left(\log \sqrt{n^2+1} + i \arctan \frac{n}{n^2+1} \right) \right) = Re \Lambda \log \sqrt{n^2+1} - Im \Lambda \arccos \frac{n}{n^2+1}.$$

Επομένως,

$$|(n+i)^\Lambda| = e^{Re((n+i)^\Lambda)} = e^{Re \Lambda \log \sqrt{n^2+1} - Im \Lambda \arccos \frac{n}{n^2+1}}$$

και άρα

$$\sqrt[n]{|n+1|}^\Lambda = e^{Re \Lambda \frac{1}{n} \log \sqrt{n^2+1} - Im \Lambda \frac{1}{n} \arccos \frac{n}{n^2+1}}.$$

Όταν όμως $n \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{n} \log \sqrt{n^2+1} \rightarrow 0$$

και

$$\frac{1}{n} \arccos \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0 \cdot \arccos 0 = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

και άρα

$$\sqrt[n]{|n+i|^\Lambda} = e^{Re\Lambda \frac{1}{n} \log \sqrt{n^2+1} - Im\Lambda \frac{1}{n} \arccos \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}} \longrightarrow e^0 = 1.$$

Επομένως

$$\sqrt[n]{|(n+i)^\Lambda M^n|} = \sqrt[n]{|n+i|^\Lambda} |M| \longrightarrow 1 \cdot |M| = |M|$$

απ όπου και έχουμε τελικά ότι

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+i)^\Lambda M^n| \left| \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{|(n+i)^\Lambda M^n|} \cdot \limsup_n \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!} \right|} = |M| \cdot 0 = 0$$

και άρα

$$R_g = +\infty$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση g ορίζει ακέραια συνάρτηση.

Επίσης, λόγω του Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών έχουμε ότι για κάθε $n \geq 0$

$$\frac{(n+i)^\Lambda M^n |f^{(n)}(\beta)|}{n!} = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \implies g^{(n)}(a) = (n+i)^\Lambda M^n |f^{(n)}(\beta)|$$

που μας δίνει τελικά το ζητούμενο.

Άσκηση 32.

Σωστό ή Λάθος; Αν η f είναι ακέραι συνάρτηση, τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση g ώστε $g^{(n)}(a) = \sqrt{n!} |f^{(n)}(a)|$ για κάθε $n \geq 0$.

Λύση 29.

Όμοια με τις προηγούμενες.

Άσκηση 33 (Σεπτέμβριος 2018).

Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε:

$$|f(z)| \leq 3 + \sqrt[5]{|z^4|} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Λύση 30.

Παρατηρούμε ότι αν f είναι μια τέτοια συνάρτηση, τότε αφού είναι ακέραια, έπεται ότι αναλύεται στο $\mathbb{C}$ σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, z \in \mathbb{C}.$$

Επίσης από το Θεώρημα Διαφόρισης Δυναμοσειρών γνωρίζουμε ότι για τα (c_n) ισχύει ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Επομένως, τώρα αν πάρουμε $R > 0$ τυχόν, τότε αφού $\Delta(0, R) \subset \mathbb{C}$ έπεται ότι από τις Εκτιμήσεις Cauchy θα ισχύει ότι

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$$

για κάθε $n \geq 0$ όπου $M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\}$.

Αφού όμως για κάθε $z \in C(0, R)$ ισχύει ότι

$$|f(z)| \leq 3 + \sqrt[5]{|z^4|} = 3 + \sqrt[5]{|z|^4} = 3 + \sqrt[5]{R^4}$$

έπεται ότι

$$M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\} \leq 3 + \sqrt[5]{R^4}.$$

Τελικά για κάθε $n \geq 0$ έχουμε ότι

$$|c_n| \leq \frac{3 + \sqrt[5]{R^4}}{R^n}.$$

Όμως αν $n \geq 1 > 4/5$ τότε παίρνοντας όριο $R \rightarrow +\infty$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε ότι

$$|c_n| \leq \frac{3 + \sqrt[5]{R^4}}{R^n} = \frac{3}{R^n} + \frac{1}{R^{n-4/5}} \rightarrow 0 \implies |c_n| = 0$$

και άρα $c_n = 0$.

Τελικά,

$$f(z) = c_0, \quad z \in \mathbb{C}$$

με $|c_0| \leq 3$ και άρα οι ακέραιες συναρτήσεις που ικανοποιούν την ανισότητα τις υπόθεσης είναι οι σταθερές και ίσες με μιγαδικό αριθμό που έχει μέτρο μικρότερο του 3.

Άσκηση 34.

Να βρεθούν ολές οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε:

$$|f(z)| \leq |z| + 2|z|^2 \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Λύση 31.

Παρατηρούμε ότι αν f είναι μια τέτοια συνάρτηση, τότε αφού είναι ακέραια, έπεται ότι αναβύεται στο $\mathbb{C}$ σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και άρα έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Επίσης από το Θεώρημα Διαφόρισης Δυναμοσειρών γνωρίζουμε ότι για τα (c_n) ισχύει ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Επομένως, τώρα αν πάρουμε $R > 0$ τυχόν, τότε αφού $\Delta(0, R) \subset \mathbb{C}$ έπεται ότι από τις Εκτιμήσεις Cauchy ότι

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

για κάθε $n \geq 0$ όπου $M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\}$.

Αφού όμως για κάθε $z \in C(0, R)$ ισχύει ότι

$$|f(z)| \leq |z| + 2|z|^2 = R + 2R^2$$

έπεται ότι

$$M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\} \leq R + 2R^2.$$

Τελικά για κάθε $n \geq 0$ έχουμε ότι

$$|c_n| \leq \frac{R + 2R^2}{R^n}.$$

Όμως αν $n > 2$ τότε παίρνοντας όριο $R \rightarrow +\infty$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε ότι

$$|c_n| \leq \frac{R + 2R^2}{R^n} = \frac{1}{R^{n-1}} + \frac{2}{R^{n-2}} \rightarrow 0 \implies |c_n| = 0$$

και άρα $c_n = 0$.

Τελικά,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

όπου

$$|c_0| = |f(0)| \leq 0 \implies c_0 = 0$$

και

$$|c_1| \leq \frac{R + 2R^2}{R} = 1 + 2R$$

και παίρνοντας όριο $R \rightarrow 0^+$ έχουμε ότι $|c_1| \leq 1$.

Επίσης

$$|c_2| \leq \frac{R + 2R^2}{R^2} = \frac{1}{R} + 2$$

και παίρνοντας όριο $R \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι $|c_2| \leq 2$.

Τελικά οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

όπου $|c_1| \leq 1$ και $|c_2| \leq 2$.

Άσκηση 35 (Ιούνιος 2023).

Έστω f ακέραια συνάρτηση με $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι $f = 0$.

Λύση 32.

Όμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις.

Κεφάλαιο 8

Εφαρμογές του Θεωρήματος Σύγκλισης του Weierstrass

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με εφαρμογές του λεγόμενου **Θεωρήματος Σύγκλισης του Weierstrass** το οποίο χρησιμεύει για να αποδείξουμε ότι η κατά σημείο όριο συνάρτηση ολομόρφων συναρτήσεων που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f είναι επίσης ολόμορφη συνάρτηση. Με άλλα λόγια, αν $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων όπου για κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$ ισχύει ότι $f_n|_K \xrightarrow{\text{ομ}} f|_K$, τότε και η f είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Άμεσο πόρισμα στο πλαίσιο των σειρών συναρτήσεων είναι το εξής:

Αν $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα **στα συμπαγή** $K \subset \Omega$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο Ω .

Μάλιστα αφού κάθε συμπαγές είναι φραγμένο και άρα περιέχεται σε κάποιον κλειστό δίσκο, το παραπάνω πόρισμα μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο στο εξής:

Αν $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα **στους κλειστούς δίσκους** $\overline{\Delta}(a, R) \subset \Omega$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο Ω .

Το πιο όμως χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη ομοιόμορφης σύγκλισης σειρών, είναι το **Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass**: Αν $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακολουθία συναρτήσεων με την σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ να συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω .

Ένας συνδυασμός των 2 παραπάνω βασικών Θεωρημάτων του Weierstrass είναι οι παρακάτω εφαρμογές:

Άσκηση 36.

Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n}{1+z^n} \quad (8.1)$$

συγκλίνει σε κάθε σημείο του δίσκου $\Delta(0, 1)$ και ορίζει για τα $z \in \Delta(0, 1)$ ολόμορφη συνάρτηση, αν

(c_n) είναι φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών.

Λύση 33.

Αρχικά αφού η (c_n) είναι φραγμένη, έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι $|c_n| \leq M$. Αν αποδείξουμε ότι για κάθε $r \in (0, 1)$ ισχύει ότι η (6) συγκλίνει στον $\overline{\Delta(0, r)}$, τότε η σειρά θα συγκλίνει και στον $\Delta(0, 1)$ γιατί για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ υπάρχει $r_z \in (0, 1)$ ώστε $|z| \leq r_z$ και έτσι $z \in \overline{\Delta(0, r_z)}$ απ όπου και έπεται ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{1+z^n}$ θα συγκλίνει.

Επομένως έστω $r \in (0, 1)$ τυχόν. Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \overline{\Delta(0, r)}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|z|^n \leq r^n$$
$$|1 + z^n| \geq |1| - |z|^n \geq 1 - r^n \implies \frac{1}{|1 + z^n|} \leq \frac{1}{1 - r^n}$$

και άρα

$$|f_n(z)| = |c_n| \frac{|z|^n}{|1 + z^n|} \leq M \frac{r^n}{1 - r^n}.$$

Αφού όμως αυτό ισχύει για κάθε $z \in \overline{\Delta(0, r)}$, έπεται ότι και

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup\{|f_n(z)| : z \in \overline{\Delta(0, r)}\} \leq M \frac{r^n}{1 - r^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε όμως ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^n}$ συγκλίνει, γιατί αν $c_n = \frac{r^n}{1 - r^n}$ τότε

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{r^{n+1}(1 - r^n)}{r^n(1 - r^{n+1})} = r \frac{1 - r^n}{1 - r^{n+1}} \rightarrow r \cdot 1 = r < 1$$

και άρα απο το Κριτήριο Λόγου για σειρές πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ συγκλίνει.

Λόγω όμως της και του Κριτηρίου σύγκρισης, έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ συγκλίνει.

Απο το Κριτήριο Ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass έχουμε τελικά ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r)}$ και άρα και κανονικά σε κάθε σημείο του $\overline{\Delta(0, r)}$.

Το γεγονός τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δίσκο $\overline{\Delta(0, r)}$ αποδεικνύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Delta(0, 1)$ γιατί αν πάρουμε τυχόν $K \subset \Delta(0, 1)$ συμπαγές, τότε έχουμε ότι υπάρχει $r_K \in (0, 1)$ ώστε $K \subset \Delta(0, r_K)$ και άρα λόγω αυτού που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r_K)}$ και άρα και στο K , αφού είναι υποσύνολο του.

Έτσι απο το Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n}{1+z^n}$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

Άσκηση 37 (Σεπτέμβριος 2022).

Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$$

συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$ και ορίζει για αυτά τα z ολόμορφη συνάρτηση.

Λύση 34.

Αν αποδείξουμε ότι για κάθε $r \in (0, 1)$ ισχύει ότι η (6) συγκλίνει στον $\overline{\Delta(0, r)}$, τότε η σειρά θα

συγκλίνει και στον $\Delta(0, 1)$ γιατί για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ υπάρχει $r_z \in (0, 1)$ ώστε $|z| \leq r_z$ και έτσι $z \in \overline{\Delta(0, r_z)}$ απ όπου και έπεται ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ θα συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε τυχόν $r \in (0, 1)$ και θεωρήσουμε τον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0, r)}$ αληθά και την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \overline{\Delta(0, r)} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f_n(z) = \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$$

τότε έχουμε ότι για $z \in \overline{\Delta(0, r)}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left| \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}} \right| = \frac{n^3 |z|^n}{|e^{ia_n} + z^{3n}|} \leq \frac{n^3 r^n}{|e^{ia_n}| - |z|^{3n}} = \frac{n^3 r^n}{1 - |z|^{3n}} \leq \frac{n^3 r^n}{1 - r^{3n}} \\ &\leq \frac{n^3 r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιήσαμε ότι

$$|e^{ia_n}| = 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$r^{3n} \leq r \implies 1 - r^{3n} \geq 1 - r \implies \frac{1}{1 - r^{3n}} \leq \frac{1}{1 - r}$$

$$|e^{ia_n}| - |z|^{3n} \leq |e^{ia_n} + z^{3n}| \implies \frac{1}{|e^{ia_n} + z^{3n}|} \leq \frac{1}{|e^{ia_n}| - |z|^{3n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έτσι έχουμε όμως ότι

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{1 - r} n^3 r^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αφού όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 2., η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n$ συγκλίνει, έπεται από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ συγκλίνει.

Άρα από το Κριτήριο του Weirstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r)}$ και άρα και κανονικά σε κάθε σημείο του $\overline{\Delta(0, r)}$.

Έτσι ορίζεται η $f : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη:

Αν αποδείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\Delta(0, 1)$, τότε από το Θεώρημα σύγκλισης του Weirstrass θα έχουμε ότι η f είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

Έστω επομένως $K \subset \Delta(0, 1)$ συμπαγές. Τότε όμως έχουμε ότι υπάρχει $r_K \in (0, 1)$ ώστε $K \subset \overline{\Delta(0, r_K)}$ και άρα λόγω αυτού που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r_K)}$ και άρα και στο K , αφού είναι υποσύνολο του.

Έτσι από το Θεώρημα σύγκλισης του Weirstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

Άσκηση 38.

Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\lambda} z^n}{1 + z^{2n}}$$

συγκλίνει σε κάθε σημείο του δίσκου $\Delta(0, 1)$ και ορίζει για τα $z \in \Delta(0, 1)$ ολόμορφη συνάρτηση, αν $0 < \lambda < 1$.

Λύση 35.

Όμοια με την προηγούμενη αλλιά και την επόμενη άσκηση.

Άσκηση 39 (Ιούνιος 2023).

Αποδείξτε ότι αν $(a_n), (b_n)$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^z \log n z^n}{3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n}$$

συγκλίνει σε κάθε σημείο του ανοιχτού δίσκου $\Delta(0, 1)$ και ορίζει για αυτά τα $z \in \Delta(0, 1)$ ολόμορφη συνάρτηση.

Λύση 36.

Αν αποδείξουμε ότι για κάθε $r \in (0, 1)$ ισχύει ότι η (6) συγκλίνει στον $\overline{\Delta(0, r)}$, τότε η σειρά θα συγκλίνει και στον $\Delta(0, 1)$ γιατί για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ υπάρχει $r_z \in (0, 1)$ ώστε $|z| \leq r_z$ και έτσι $z \in \overline{\Delta(0, r_z)}$ απ όπου και έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^z \log n z^n}{3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n}$ θα συγκλίνει.

Επομένως έστω $r \in (0, 1)$ τυχόν. Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \overline{\Delta(0, r)}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |z|^n &\leq r^n \\ |3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n| &\geq 3|e^{ia_n}| - 2|e^{ib_n}| |z|^{2n} - |z|^n = 3 - 2|z|^{2n} - |z|^n \geq 3 - 2r^{2n} - r^n \\ \Rightarrow \frac{1}{|3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n|} &\leq \frac{1}{3 - 2r^{2n} - r^n} \leq \frac{1}{3 - r^n} \leq \frac{1}{1 - r^n} \leq \frac{1}{1 - r} \\ |n^z \log n| &= |e^{z \log n \log n}| = |e^{z \log^2 n}| = e^{Re(z \log^2 n)} = e^{\log^2 n Re(z)} \leq e^{|z| \log^2 n} \leq e^{r \log^2 n} \\ &\leq e^{\log^2 n} \end{aligned}$$

και άρα

$$|f_n(z)| = \left| \frac{n^z \log n z^n}{3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n} \right| \leq \frac{1}{1 - r} e^{\log^2 n} r^n.$$

Αφού όμως αυτό ισχύει για κάθε $z \in \overline{\Delta(0, r)}$, έπεται ότι και

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup\{|f_n(z)| : z \in \overline{\Delta(0, r)}\} \leq \frac{1}{1 - r} e^{\log^2 n} r^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε όμως ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\log^2 n} r^n$ συγκλίνει, γιατί αν $c_n = e^{\log^2 n} r^n$ τότε

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = r \frac{e^{2 \log(n+1)}}{e^{2 \log n}} = r e^{2 \log \frac{n+1}{n}} \rightarrow r \cdot 1 = r < 1$$

γιατί $\log \frac{n+1}{n} \rightarrow \log 1 = 0$ και άρα $e^{\log \frac{n+1}{n}} \rightarrow e^0 = 1$, και άρα από το Κριτήριο Λόγου για σειρές πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\log^2 n} r^n$ συγκλίνει.

Λόγω όμως της και του Κριτηρίου σύγκρισης, έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ συγκλίνει.

Από το Κριτήριο Ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass έχουμε τελικά ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r)}$ και άρα και κανονικά σε κάθε σημείο του $\overline{\Delta(0, r)}$.

Το γεγονός τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δίσκο $\overline{\Delta(0, r)}$ αποδεικνύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Delta(0, 1)$ και άρα από Θεώρημα Σύγκλισης του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^z \log n z^n}{3e^{ia_n} - 2e^{ib_n} z^{2n} - z^n}$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

Κεφάλαιο 9

Εφαρμογές του Θεωρήματος Αναλυτικότητας και Μετασχηματισμοί Mobius

Ας ξεκινήσουμε με βασική θεωρία που θα χρειαστούμε στις παρακάτω ασκήσεις. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : \Delta(0, 1) \rightarrow H_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ όπου

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(g(z)) &= 2\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+z}{1-z} + \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &= \frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1-z)(1+\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

και άρα

$$|z| < 1 \iff \operatorname{Re}(g(z)) > 0$$

που σημαίνει ότι $g(\Delta(0, 1)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} = H_+$ και άρα η g είναι επί.

Επίσης παρατηρούμε ότι είναι και 1-1: πράγματι παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ έχουμε ότι

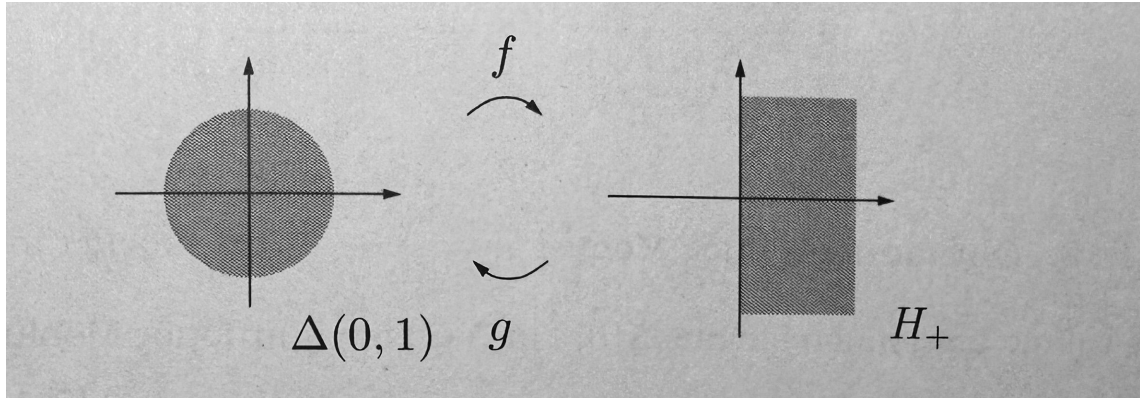
$$\begin{aligned} g(z_1) = g(z_2) &\iff \frac{1+z_1}{1-z_1} = \frac{1+z_2}{1-z_2} \iff (1+z_1)(1-z_2) = (1+z_2)(1-z_1) \\ &\iff 1+z_1-z_1z_2-z_2 = 1-z_1+z_2-z_1z_2 \\ &\iff 2z_1 = 2z_2 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow z_1 = z_2.$$

Ελέγχεται εύκολα ότι η αντίστροφη της g είναι η

$$f : H_+ \rightarrow \Delta(0, 1), \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Η συνάρτηση f με άλλα λόγια απεικονίζει τον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ στον δεξί ημίχωρο H^+ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Άσκηση 40.

Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n, \quad z \in \Omega.$$

Λύση 37.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$g : \Delta(0, 1) \rightarrow \Omega, \quad g(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

τότε όπως έχουμε δει στο μάθημα αυτή είναι μια 1-1, επί απεικόνιση οποία επιπλέον είναι και ολόμορφη επι του $\Delta(0, 1)$ ως ρητή και έχει αντίστροφη την

$$g^{-1} : \Omega \rightarrow \Delta(0, 1), \quad g^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}.$$

Επομένως, αφού και η f είναι ολόμορφη στον Ω έπεται ότι και η σύνθεση τους $f \circ g : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$. Επομένως από το Θεώρημα Αναλυτικότητας, έχουμε ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου $0 \in \Delta(0, 1)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$(f \circ g)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, \quad w \in \Delta(0, 1).$$

Συνθέτοντας τώρα από δεξιά με την g^{-1} , έχουμε τελικά ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n, \quad z \in \Omega$$

και αυτή έχει ακτίνα σύγκλισης

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} \geq 1 \implies \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1.$$

Άσκηση 41.

Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$. Αποδείξτε ότι αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right)^n, \quad z \in \Omega.$$

Λύση 38.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις

$$g_1 : \Delta(0, 1) \rightarrow H_+, \quad g_1(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

και

$$g_2 : H_+ \rightarrow \Omega, \quad g_2(w) = \log w$$

τότε αυτές είναι 1-1 και επί συναρτήσεις και επίσης ολόμορφες, αφού η $\log$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και άρα και στον ημίχωρο $H_+ \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Επίσης η g_2 έχει ως αντίστροφη, όπως ήδη γνωρίζουμε την εκθετική συνάρτηση και η g_1 έχει αντίστροφη την

$$g^{-1} : H_+ \rightarrow \Delta(0, 1), \quad g_1^{-1}(w) = \frac{1-w}{1+w}.$$

Επομένως αφού και η f είναι ολόμορφη στον Ω , έπεται ότι και η σύνθεση

$$f \circ g_2 \circ g_1 : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και λόγω του Θεωρήματος Αναλυτικότητας, έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου 0, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ με

$$(f \circ g_2 \circ g_1)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, \quad w \in \Delta(0, 1)$$

ή ισοδύναμα Όμως $g_1^{-1} \circ g_2^{-1} : \Omega \rightarrow \Delta(0, 1)$ όπου

$$(g_1^{-1} \circ g_2^{-1})(w) = g_1^{-1}(e^w) = \frac{e^w - 1}{e^w + 1}, \quad w \in \Omega$$

και συνθέτοντας την παραπάνω σχέση με $g_1^{-1} \circ g_2^{-1}$ έχουμε τελικά ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right)^n, \quad z \in \Omega$$

με ακτίνα σύγκλισης

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} \geq 1 \implies \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1.$$

Άσκηση 42.

Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \mathbb{C}$. Αποδείξουμε ότι αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολδόμορφη, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n, \quad z \in \Omega.$$

Διατυπώστε ανάλογο αποτέλεσμα για τις συναρτήσεις που είναι ορισμένες στην λωρίδα $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/(2\gamma) < \operatorname{Im} z < \pi/(2\gamma)\}$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}$. Δεν χρειάζεται να δώσετε καμία απόδειξη, απλώς γράψτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις ολδόμορφες συναρτήσεις στο Λ .

Λύση 39.

Όμοια με παραπάνω θεωρούμε τις απεικονίσεις $g_1 : \Delta(0,1) \rightarrow H_+$ και $g_2 : H_+ \rightarrow \Lambda$ όπου

$$g_1(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

και

$$g_2(w) = \log(\gamma z)$$

οι οποίες είναι 1-1, επί ολδόμορφες και ισχυρίζομαστε ότι κάθε $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ολδόμορφη ισχύει ότι αυτή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^{\gamma z} - 1}{e^{\gamma z} + 1} \right)^n, \quad z \in \Lambda$$

Κεφάλαιο 10

Θέματα απο Μιγαδική Ολοκλήρωση

Σε αυτήν την υποενότητα ασχολούμαστε με βασικές εφαρμογές των Θεωρημάτων και των Ορισμών που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4, όταν πρωτομιλήσαμε για **Μιγαδική Ολοκλήρωση** και **Μιγαδικά Επικαμπύλια Ολοκληρώματα**.

Άσκηση 43.

Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ κλειστή και κλάσεως C^1 καμπύλη και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $[\gamma] \subset \Omega$ και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in [\gamma]$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

Λύση 40.

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \delta_{\sigma}(0) \in \mathbb{Z}$$

λόγω του Θεωρήματος αλλθαγής μεταβλητής για $\sigma = f \circ \gamma$.

Άσκηση 44.

Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και $a \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a).$$

Λύση 41.

Έστω $\epsilon > 0$ τυχόν. Τότε έχουμε ότι

$$\int_{C(a, \epsilon)} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{it}}{a + \epsilon e^{it} - a} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

και άρα

$$\left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz - \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(a)}{z - a} dz \right| = \left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} : z \in C(a, \epsilon) \right\} \cdot \ell(C(a, \epsilon)) \\
&= 2\pi\epsilon \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(a)|}{\epsilon} : z \in C(a, \epsilon) \right\} \\
&= 2\pi \sup \{|f(z) - f(a)| : z \in C(a, \epsilon)\}.
\end{aligned}$$

λόγω της ανισότητας ML .

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ έπεται ότι είναι συνεχής στον $C(a, \epsilon) \subset \mathbb{C}$ και άρα αφού το $C(a, \epsilon)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, έπεται ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $C(a, \epsilon)$, και άρα υπάρχει $z_\epsilon \in C(a, \epsilon)$ ώστε

$$\max\{|f(z)| : z \in C(a, \epsilon)\} = \sup\{|f(z)| : z \in C(a, \epsilon)\} = |f(z_\epsilon)|.$$

Τότε όμως,

$$0 \leq \sup\{|f(z) - f(a)| : z \in C(a, \epsilon)\} = \max\{|f(z) - f(a)| : z \in C(a, \epsilon)\} = |f(z_\epsilon) - f(a)|.$$

Τελικά,

$$\left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i f(a) \right| \leq 2\pi |f(z_\epsilon) - f(a)|.$$

Όταν όμως $\epsilon \rightarrow 0^+$, τότε $z_\epsilon \rightarrow a$ και λόγω της συνέχειας της f στο σημείο $a \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι $f(z_\epsilon) \rightarrow f(a)$ και άρα τελικά

$$0 \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i f(a) \right| \leq 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |f(z_\epsilon) - f(a)| = 0$$

και άρα

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i f(a) \right| = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a).$$

Άσκηση 45 (Ιούλιος 2016).

Να ελέγξετε την ισότητα :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{(1+z)^z \log z}{(1+|z|^2)^{\frac{z}{2}}(z-i)} dz = -\frac{\pi^2}{e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

Λύση 42.

Είναι άμεση **εφαρμογή της Άσκησης 44.**:

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \frac{(1+z)^z \log z}{(1+|z|^2)^{\frac{z}{2}}}$, τότε παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο τέτοιων και άρα από την προηγούμενη Άσκηση, έπεται ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{(1+i)^i \log i}{2^{\frac{i}{2}}}$$

και αφού

$$\log i = \log 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

$$(1+i)^i = e^{i \log(1+i)} = e^{i \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}} = e^{i \log \sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$2^{\frac{i}{2}} = e^{\frac{i}{2} \log 2} = e^{i \log \sqrt{2}}$$

έπεται ότι

$$2\pi i \frac{(1+i)^i \log(1+i)}{2^{\frac{i}{2}}} = 2\pi i \frac{e^{i \log \sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} i \frac{\pi}{2}}{e^{i \log \sqrt{2}}} = 2\pi i \frac{i \frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = -\frac{\pi^2}{e^{\frac{\pi}{4}}}$$

και άρα

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{f(z)}{z-i} dz = -\frac{\pi^2}{e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

Άσκηση 46 (Ιούνιος 2017).

Αν η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση σε περιοχή του i , να ελέγξετε την ισότητα :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{(1+z)^z \log z \phi(z)}{(1+|z|^2)^{z/2} (z-i)} dz = -\frac{\pi^2}{e^{\frac{\pi}{4}}} \phi(i).$$

Λύση 43.

Είναι άμεση **εφαρμογή της Άσκησης 44.**

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{(1+z)^z \log z \phi(z)}{(1+|z|^2)^{\frac{z}{2}}}$$

είναι συνεχής σε περιοχή του i και άρα από την Άσκηση 28. έπεται ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{(1+z)^z \log z \phi(z)}{(1+|z|^2)^{z/2} (z-i)} dz = \frac{(1+i)^i \log i \phi(i)}{2^{i/2}}$$

και κάνοντας τους υπολογισμούς στο δεξι μέλος φτάνουμε στην απλοποιημένη μορφή της εκφώνησης.

Άσκηση 47.

Έστω $p(z), q(z)$ δύο μιγαδικά ολοκληρώματα με $\deg q(z) \geq \deg p(z) + 2$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C(0, R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0.$$

Λύση 44.

Παρατηρούμε ότι αν

$$p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$q(z) = b_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

είναι δύο μιγαδικά πολυώνυμα με $n > m + 2$, τότε παρατηρούμε ότι αφού αν θεωρήσουμε τυχόν $R > 0$ μεγάλο, τότε για κάθε $z \in C(0, R)$ αν θέσουμε $M_1 = \max\{|a_k| : 1 \leq k \leq m\}$ και $M_2 = \max\{|b_k| : 1 \leq k \leq n\}$

$$\begin{aligned} |p(z)| &\leq |a_m||z|^m + |a_{m-1}||z|^{m-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| = |a_m|R^m + |a_{m-1}|R^{m-1} + \dots + |a_1|R + |a_0| \\ &\leq M_1 R^m + M_1 R^{m-1} + \dots + M_1 R + M_1 \\ &\leq M_1 R^m + M_1 R^m + \dots + M_1 R^m + M_1 R^m \\ &= M_1(m+1)R^m \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} |q(z)| &\geq |b_n||z|^n - |b_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |b_1||z| - |b_0| = |b_n|R^n - |b_{n-1}|R^{n-1} - \dots - |b_1|R - |b_0| \\ &\geq M_2R^n - M_2R^{n-1} - \dots - M_2R - M_2 \\ &\geq \frac{M_2}{2}R^n \end{aligned}$$

και έτσι

$$\frac{1}{|q(z)|} \leq \frac{M_2}{2}R^{-n}.$$

Τελικά για κάθε $z \in C(0, R)$ έχουμε ότι

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq 2 \frac{M_1}{M_2} (m+1) R^{m-n}$$

και έτσι

$$\sup \left\{ \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| : z \in C(0, R) \right\} \leq 2 \frac{M_1}{M_2} (m+1) R^{m-n}.$$

Επίσης, αφού $\ell(C(0, R)) = 2\pi R$ έπεται από την ανισότητα ML ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{C(0, R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \sup \left\{ \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| : z \in C(0, R) \right\} \cdot \ell(C(0, R)) \leq 4\pi \frac{M_1}{M_2} (m+1) R^{m+1-n} \\ &= 4\pi \frac{M_1}{M_2} (m+1) \frac{1}{R^{n-m-1}} \end{aligned}$$

και αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $R > 0$ μεγάλο.

Αφού τώρα $n \geq m+2$ έπεται ότι $n-m-1 \geq 1$ και άρα αφήνοντας $R \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι $R^{n-m-1} \rightarrow +\infty$ και άρα $\frac{1}{R^{n-m-1}} \rightarrow 0$.

Επομένως,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C(0, R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| = 0$$

και άρα

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C(0, R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0.$$

Άσκηση 48.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε πολυώνυμο $p(z)$ να ισχύει ότι

$$\sup \left\{ \left| p(z) - \frac{1}{z} \right| : |z| = 1 \right\} \geq \epsilon.$$

Λύση 45.

Υποθέτουμε προς άτοπον ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Τότε από την άρνηση του ισχυρισμού έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p_ϵ ώστε

$$\sup \left\{ \left| p_\epsilon(z) - \frac{1}{z} \right| : |z| = 1 \right\} < \epsilon.$$

Επομένως εφαρμόζοντας αυτό για $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία p_n πολυωνύμων με

$$\sup \left\{ \left| p_n(z) - \frac{1}{z} \right| : |z| = 1 \right\} < \frac{1}{n}.$$

Τότε όμως αφήνοντας $n \rightarrow +\infty$, τότε αφού $1/n \rightarrow 0$, έπεται ότι και

$$\sup \left\{ \left| p_n(z) - \frac{1}{z} \right| : |z| = 1 \right\} \longrightarrow 0$$

που σημαίνει ότι $p_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στον κύκλο $C(0, 1)$, όπου $f(z) = \frac{1}{z}$.

Τότε όμως από το Πόρισμα 3. έχουμε ότι και

$$\int_{C(0,1)} p_n(z) \longrightarrow \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$

αλλά

$$\int_{C(0,1)} p_n(z) dz = 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

αφού η $\gamma = C(0, 1)$ είναι κλειστή και κλάσεως C^1 καμπύλη-όπως έχουμε δει-και κάθε πολυώνυμο έχει παράγουσα, άρα από το Θεώρημα 7. έπεται ότι το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του p_n πάνω στην γ είναι μηδενικό.

Επομένως,

$$\int_{C(0,1)} p_n(z) \longrightarrow 0$$

αλλά και

$$\int_{C(0,1)} p_n(z) \longrightarrow 2\pi i$$

που είναι άτοπο, από μοναδικότητα ορίου.

Κεφάλαιο 11

Ασκήσεις πάνω σε σειρές και δυναμοσειρές

Σε αυτήν την υποενότητα ασχολούμαστε με βασικές ασκήσεις πάνω στην **Θεωρία των Δυναμοσειρών** και γενικά των **σειρών μιγαδικών αριθμών** που αναπτύξαμε την θεωρία στα Κεφάλαια 2 και 4.

Άσκηση 49 (Φεβρουάριος 2023).

Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n} + 2i)(2 + 3i)^n}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} z^n.$$

Έπειτα να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z με $|z| = R$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n} + 2i)(2 + 3i)^n}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} z^n$$

να αποκλίνει.

Λύση 46.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $a_n = \frac{\sqrt{n} + 2i}{\sqrt{n} + 3i}$ και $b_n = \frac{(2 + 3i)^n}{(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^n}$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\sqrt{n} + 2i)(\sqrt{n+1} + 3i)}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{n+1} + 2i)} \rightarrow 1$$

και

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(2 + 3i)^n (\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^{n+1}}{(2 + 3i)^{n+1} (\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} = \frac{\sqrt{2} - 2i\sqrt{3}}{2 + 3i} \rightarrow \frac{\sqrt{2} - 2i\sqrt{3}}{2 + 3i}$$

και άρα

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| \rightarrow 1 \cdot \left| \frac{\sqrt{2} - 2i\sqrt{3}}{2 + 3i} \right| = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13}}.$$

Επομένως απο την Πρόταση έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της εκφώνησης είναι $R = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$.

Τώρα αν πάρουμε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\sqrt{n} + 2i)(2 + 3i)^n}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} z^n \right| &= \left| \frac{\sqrt{n} + 2i}{\sqrt{n} + 3i} \right| \cdot \left| \frac{2 + 3i}{\sqrt{2} - 2i\sqrt{3}} \right|^n |z|^n = \left| \frac{\sqrt{n} + 2i}{\sqrt{n} + 3i} \right| \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} \right)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13}} \right)^n \\ &= \left| \frac{\sqrt{n} + 2i}{\sqrt{n} + 3i} \right| \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Επομένως απ αυτό έπεται ότι

$$\frac{(\sqrt{n} + 2i)(2 + 3i)^n}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} z^n \nrightarrow 0$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n} + 2i)(2 + 3i)^n}{(\sqrt{n} + 3i)(\sqrt{2} - 2i\sqrt{3})^n} z^n$ αποκλίνει απο γνωστή Πρόταση του Κεφαλαίου 2.

Άσκηση 50 (Φεβρουάριος 2024).

Να εξετάσετε αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{13} + i)(2 + 3i)^n}{(n - i)(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^n}$$

συγκλίνει.

Λύση 47.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε

$$a_n = \frac{n^{13} + i}{n - i} \quad b_n = \frac{(2 + 3i)^n}{(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^n}$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{(2 + 3i)^{n+1}(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^n}{(2 + 3i)^n(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^{n+1}} \right| = \left| \frac{2 + 3i}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$$

και

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{((n+1)^{13} + i)(n - i)}{(n^{13} + i)(n+1 - i)} \right| \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)^{26} + 1}}{\sqrt{n^{26} + 1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

και άρα τελικά

$$\lim_n \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \lim_n \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} > 1$$

και απο το Κριτήριο Λόγου έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ αποκλίνει.

Άσκηση 51 (Ιούνιος 2018).

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{3^{\frac{n}{2}} n} = a \log b + c\pi i$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Λύση 48.

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{i}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

και άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{3^{\frac{n}{2}} n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{i}{\sqrt{3}} \right)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{i}{\sqrt{3}} \right)^n = -\log \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\log \left| 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right| - i \arg \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\log \frac{2}{\sqrt{3}} - i \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{4}{3} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

όπου $a = -1/2, b = 4/3$ και $c = 1/6$.

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$\arg \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) = \arccos \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Επίσης χρησιμοποιήσαμε ότι για $|z| < 1$ έχουμε ότι

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Άσκηση 52 (Φεβρουάριος 2024).

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n n} = a \log \beta - i \gamma \pi$$

για κάποιους θετικούς ρητούς αριθμούς a, β, γ .

Λύση 49.

Παρατηρούμε ότι αφού

$$\left| \frac{2-i}{3} \right| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2-i}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{i-2}{3} \right)^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{i-2}{3} \right)^n \\ &= -\log \left(1 + \frac{i-2}{3} \right) \\ &= -\log \left| \frac{i+1}{3} \right| - i \arg \left(\frac{i+1}{3} \right) \\ &= -\log \frac{\sqrt{2}}{3} - i \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{2}{9} - i \frac{\pi}{4}$$

και παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\arg \left(\frac{i+1}{3} \right) = \arccos \frac{1/3}{\sqrt{2}/3} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης χρησιμοποιήσαμε ότι για $|z| < 1$ έχουμε ότι

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Άσκηση 53.

Αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 1$ ισχύει η ισότητα

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = \frac{z}{1-z} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-z^k}{k(k+1)} + \frac{1-z^n}{n} \right]. \quad (11.1)$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει για $z \in \mathbb{C}$ όπου $|z| = 1$ αλλήλ $z \neq 1$, αλλήλ η σύγκλιση δεν είναι απόλυτη.

Λύση 50.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n και άρα έστω ότι ισχύει ταυτότητα της υπόθεσης για κάποιο $n > 1$ και τότε θα την αποδείξουμε για $n+1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1-z^k}{k(k+1)} + \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-z^k}{k(k+1)} + \frac{1-z^n}{n(n+1)} \right] + \frac{1-z^{n+1}}{n+1} + \frac{1-z^n}{n} - \frac{1-z^n}{n} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-z^k}{k(k+1)} + \frac{1-z^n}{n} \right] - \frac{1-z^n}{n} + \frac{1-z^n}{n(n+1)} + \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \left(\frac{1-z^n}{n(n+1)} + \frac{1-z^{n+1}}{n+1} - \frac{1-z^n}{n} \right) \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \left(\frac{1-z^n + n(1-z^{n+1}) - (n+1)(1-z^n)}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \left(\frac{1-z^n + n - nz^{n+1} - n - 1 + nz^n + z^n}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \frac{nz^n - nz^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \frac{z^n - z^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \frac{1-z}{z} \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-z}{z} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z^k}{k}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. Επομένως απο επαγωγή έχουμε το ζητούμενο.

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left| \frac{1-z^n}{n} \right| = \frac{|1-z^n|}{n} \leq \frac{1+|z|^n}{n} = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

απ όπου και έπεται ότι

$$\left| \frac{1-z^n}{n} \right| \rightarrow 0$$

και άρα και

$$\frac{1-z^n}{n} \rightarrow 0.$$

Επίσης έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1-z^n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1+|z|^n}{n^2} = 2 \frac{1}{n^2}$$

και αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως $p = 2 > 1$ -σειρά, έπεται απο το Κριτήριο σύγκρισης ότι και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{n(n+1)}$$

συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

Επίσης λόγω της σχέσης (19) παίρνοντας όριο $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{n(n+1)}$$

και αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{n(n+1)}$$

συγκλίνει έπεται ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

συγκλίνει.

Παρόλα αυτά η σύγκλιση της σειράς δεν είναι απόλυτη για $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ με $|z| = 1$, γιατί

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Άσκηση 54.

Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(2+3i)^n}{(1-2i\sqrt{3})^n}.$$

Λύση 51.**Είναι βασική εφαρμογή της Άσκησης 53.**Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $z = \frac{2+3i}{1-2i\sqrt{3}}$, τότε $z \neq 1$ προφανώς και

$$|z| = \frac{|2+3i|}{|1-2i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1.$$

Απο την προηγούμενη Άσκηση έχουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(2+3i)^n}{(1-2i\sqrt{3})^n}$$

συγκλίνει.

Άσκηση 55 (Ιούλιος 2016).Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς θ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$.**Λύση 52.****Είναι βασική εφαρμογή της Άσκησης 53.**Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $z = e^{i\theta}$ τότε παρατηρούμε ότι $|z| = 1$ και

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = 1 \iff \theta = 2k\pi$$

και άρα $z \neq 1$ αν και μόνο αν $\theta \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.Τότε όμως, για αυτά τα θ έχουμε λόγω της Άσκησης 8, ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

συγκλίνει και για κάθε άλλο θ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Άσκηση 56.Να βρείτε ακολουθία μιγαδικών αριθμών (c_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(3+5i)^n$ να συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(3-5i)^n$ να αποκλίνει.**Λύση 53.****Είναι βασική εφαρμογή της Άσκησης 53.**

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών

$$c_n = \frac{1}{n(3-5i)^n}$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(3-5i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(3-5i)^n$ αποκλίνει.

Απο την άλλη,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(3+5i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(3+5i)^n}{(3-5i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3+5i}{3-5i} \right)^n$$

και αν θέσουμε $z = \frac{3+5i}{3-5i} \in \mathbb{C}$ τότε $z \neq 1$ και

$$|z| = \left| \frac{3+5i}{3-5i} \right| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = 1$$

και άρα απο την Άσκηση 8. έχουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3+5i}{3-5i} \right)^n$$

συγκλίνει.