

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/>

A. Κατάβολος

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγικά	3	5	Κατηγορίες τελεστών	25
2	Γραμμικοί χώροι	4	5.1	Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary	25
3	Χώροι με εσωτερικό γινόμενο	7	5.2	Θετικοί τελεστές	26
3.1	Χώροι Hilbert	11	5.3	Τετραγωνική ρίζα - Πολυ- λική αναπαράσταση	27
3.2	Συνεχείς γραμμικές μορ- φές, Θεώρημα Riesz	13	5.4	Προβολές	28
3.3	Ορθοκανονικές Βάσεις, Ισομορφισμοί	13	6	Πίνακες Τελεστών και αναλλοίω- τοι υπόχωροι	31
3.4	Η πλήρωση. Ο χώρος L^2 .	15	7	Συμπαγείς τελεστές	32
4	Φραγμένοι τελεστές	17	8	Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών	36
4.1	Γραμμικοί τελεστές και πί- νακες	17	8.1	Ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα .	36
4.2	Φραγμένοι τελεστές	19	8.2	Το Φασματικό Θεώρημα .	38
4.3	Ο συζυγής τελεστής	20	8.3	Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm	41
4.4	Παραδείγματα	21	8.4	Ο Συναρτησιακός Λογισμός	42
4.5	Ο Χώρος των Τελεστών . .	23			

1 Εισαγωγικά

Γουατ ιξ αν Οπερέιτωρ?



Αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

Αν στην είσοδο u_1 αντιστοιχεί έξοδος v_1 και στην είσοδο u_2 αντιστοιχεί έξοδος v_2 και λ αριθμός, τότε για την είσοδο $u_1 + \lambda u_2$ αναμένουμε έξοδο $v_1 + \lambda v_2$.



Παράδειγμα 1. $T : f \mapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ οι a_i είναι «καλές» συναρτήσεις).

Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ($[x_i] \in \mathbb{C}^n, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$)

Παράδειγμα 3. $T : f \mapsto Tf$ όπου $(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π -περιοδική).

Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρισκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

όπου $\hat{g}(n)$ (μυγαδικοί) αριθμοί.

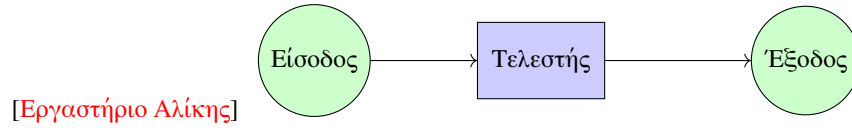
Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονική**. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

Alice και Bob στην QIT (Κβαντική Θ. Πληροφορίας)

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

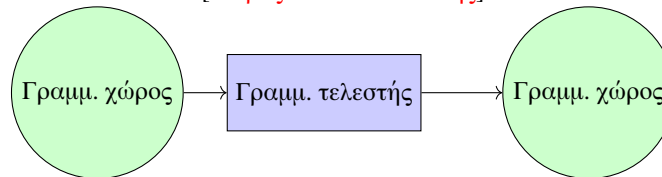


Μετάδοση Πληροφοριών

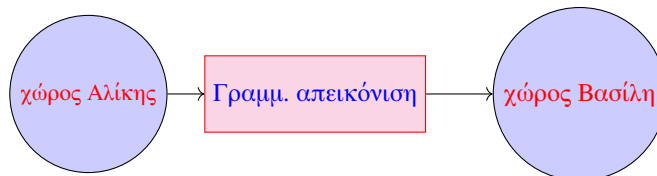


Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]



[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης \rightarrow Βασίλη]



2 Γραμμικοί χώροι

\mathbb{K} είναι το σώμα \mathbb{R} ή \mathbb{C} .

Ορισμός 1. Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται \mathbb{K} -γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$: $X \times X \rightarrow X$ και \cdot : $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης:** $\forall x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists \vec{0} \in X$ ώστε $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X \exists (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:** $\forall x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

• Το \mathbb{C} .

• Αν $n \in \mathbb{N}$, ο \mathbb{C}^n που αποτελείται από όλες τις n -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμιά φορά τα στοιχεία του \mathbb{C}^n ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

• Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00} : κάθε $x = (x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός

$$\text{συνδυασμός } x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m.$$

Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00} .

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \dots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Αν $A \neq \emptyset$ και \mathbb{K}^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, τότε το \mathbb{K}^A γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g, \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

• Παράδειγμα: Αν $A = [n] \times [m]$ (εδώ $[n] := \{1, \dots, n\}$) τότε \mathbb{K}^A είναι ο χώρος των $M_{nm}(\mathbb{K})$ των $n \times m$ πινάκων με συντελεστές από το \mathbb{K} .

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathcal{R}[0, 1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f = u + iv$ όπου $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$, $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i \int v(t)dt,$$

Ο $\mathcal{R}[0, 1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Γραμμικοί χώροι

Αν E γραμμικός χώρος και $x \in E$, $A \subseteq E$, λέμε ότι το x ανήκει στην **γραμμική θήκη του A** (γράφουμε $x \in \text{span}(A)$) ή ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A** , αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα y_1, \dots, y_m λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι **μη τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$, **όχι όλα 0**, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k , δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = \vec{0} \quad \implies \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Ένα μη κενό $M \subseteq E$ λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν περιέχει **κάποια** y_1, \dots, y_m που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε **πεπερασμένο** σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ στοιχείων του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ένας $F \subseteq E$ λέγεται **(γραμμικός) υπόχωρος** του E αν $\text{span}(F) \subseteq F$, δηλαδή αν

$$x, y \in F \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \implies x + \lambda y \in F.$$

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 2. Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) **γραμμικοί** (:διανυσματικοί) **χώροι**. Μια απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ λέγεται **γραμμική** αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται **(γραμμικός) ισομορφισμός** αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \rightarrow F$.

3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 3. Έστω E ένας \mathbb{K} -γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C}). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (**inner product** ή **scalar product**) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$(i) \quad \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$$

$$(ii) \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$$

$$(iii) \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(iv) \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\text{άρα } (i)' \quad \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle.$$

Πρόταση 4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση 5. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E .

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται **ημι-εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{C}^n ως εξής: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x(k)}y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμμιά φορά και **χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space)**.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 6. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach**.

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a, b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση 7. (α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός 8. Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορθοκανονική \Rightarrow γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση 9 (Διαδικασία Gram-Schmidt). Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει¹ $[e_n : n = 1, 2, \dots, k] = [x_n : n = 1, 2, \dots, k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα 10. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E . (α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $y_x \in F$ που είναι **πλησιέστερο στο x** . Αν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F , το y_x δίνεται από τον τύπο $y_x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. (β) Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

¹με $[A]$ ή $\text{span } A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Δηλαδή, αν δοθεί ορθοκανονική οικογένεια $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle e_k$.

Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \forall k, \iff \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \forall k, \iff y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k = y_x$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (α))

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι $u \perp F$ (γιατί $\langle u, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots, n$) και $v \in F$, άρα $v \perp u$. Πυθαγόρειο: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \\ &\geq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2, \text{ ισότητα αν } \langle x, e_k \rangle = \lambda_k \forall k. \end{aligned} \quad (1)$$

Παρατήρηση 11. Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$). Συνεπώς, αν $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\text{dist}(x, F_n)^2 = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 : \vec{\lambda} \in \mathbb{K}^n \right\} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Πρόταση 12 (Ανισότητα Bessel). (i) $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Πρόταση 13 (Γενικευμένη ανισότητα Bessel).

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ερώτηση Μπορούμε να βρούμε πόσο κάνει η διαφορά $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$;

3.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός 14. Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος \mathbb{K}^n , εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{\infty}$, αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{00} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 15 (Πλησιέστερο διάνυσμα (Π)). Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $F \neq \emptyset$ κυρτό και πλήρες υποσύνολο του E . Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in F$ πλησιέστερο προς το x , δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y_x\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

Πρόταση 16 (Κάθετο διάνυσμα). Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F πλήρης γραμμικός υπόχωρος του E . Αν $x \in E \setminus F$, το πλησιέστερο προς το x στοιχείο $y_x \in F$ είναι το μοναδικό $y \in F$ τέτοιο ώστε $x - y \perp F$.

Ορισμός 17. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του F ονομάζουμε **(ορθή) προβολή** του x στον F , και το συμβολίζουμε $P_F(x)$ ή $P(F)x$.

Θεώρημα 18 (Υπαρξη καθέτου διανύσματος). Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M , ώστε $M^\perp = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο A^\perp είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H .

Θεώρημα 19 (Ορθογώνια διάσπαση). Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Δηλαδή

$\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_\perp$ όπου $y_M \in M, y_\perp \in M^\perp$.

Πυθαγόρειο: $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H$.

Πόρισμα 20 (Ορθή προβολή). Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^\perp = H$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\begin{aligned} \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 &= \|y\|^2 \\ \text{άρα } \|P_M(y)\| &= \|y_M\| \leq \|y\| \end{aligned}$$

οπότε, αν $y_n \rightarrow y$ έχουμε $\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert: $A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$ πυκνός στον H .

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. A^\perp κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5. $A^\perp = A^{\perp\perp}$.
6. Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7. Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

3.2 Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα 21. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \rightarrow \mathbb{K} : y \rightarrow \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα 22. Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \rightarrow \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Θεώρημα 23 (Riesz). Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή

$$f(y) = \langle y, x \rangle \text{ για κάθε } y \in H.$$

3.3 Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός \mathbb{K} -γραμμικού χώρου V είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$.

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο X είναι **(αλγεβρική) βάση** του V αν η **γραμμική του θήκη** $\text{span}(X)$ ισούται με V , δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$

στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός 24. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια

$\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική βάση** του E αν

(i) είναι ορθοκανονική και

(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E , δηλ. $\overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση **δεν είναι** αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2 . Είναι αλγεβρική βάση του c_{00} , άρα και ορθοκανονική του c_{00} .
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2 , γιατί $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2 , η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2 .
3. Στον χώρο $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε $f \in (C([-\pi, \pi])$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η $\{f_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση 25. Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H . Η \mathcal{C} είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι **μεγιστική**, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την \mathcal{C}), ισχύει αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην \mathcal{C} είναι το 0.

Πρόταση 26. Κάθε διαχωρίσιμος² χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμητική ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E μέσα στον F (π.χ. $E = C([0, 1])$ και $F =$ πολυώνυμο).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ αν και μόνον αν $x \in \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Θεώρημα 27. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

$$(i) \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \text{ (σύνκλιση ως προς τη νόρμα του } E\text{)}.$$

$$(ii) \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ (Ισότητα Parseval)}.$$

Πόρισμα 28. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E , για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2 .

²Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 29. Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος³ χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2 .

Ακριβέστερα, **αν επιλέξουμε** μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H , η απεικόνιση

$$U : H \xrightarrow{\sim} \ell^2 : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) **ισομετρικά επί** του ℓ^2 .

3.4 Η πλήρωση. Ο χώρος L^2

Η πλήρωση

Πρόταση 30. Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \rightarrow H$ με πυκνή εικόνα.

Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \rightarrow K$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H **επί** του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$. Ο χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται η **πλήρωση** του $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & \phi(E) & \xrightarrow{\quad} & H = \overline{\phi(E)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{---} & & \downarrow T \\ E & \xrightarrow{\psi} & \psi(E) & \xrightarrow{\quad} & K = \overline{\psi(E)} \end{array}$$

Δείτε και το αρχείο [complun.pdf](#).

Ο $L^2([a, b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Ονομάζω $L^2([a, b])$ **την πλήρωση του E** .

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$). Θέτω $\langle f, g \rangle = \int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt$. Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ **την πλήρωση του F** .

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι **ορισμοί** των χώρων Hilbert $L^2([a, b])$ και $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται στις επόμενες δυο διαφάνειες οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

³Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ . (Αποδ. παραλείπεται.)

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Αριστον!) Έστω (X, \mathcal{S}, μ) χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός 31. Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ -σχ. παντού $\iff f - g \in \mathcal{N}$.

Επίσης, ο \mathcal{N} είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathcal{L}^2 .

Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκου $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.

Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ -σχ. παντού.

Ο $L^2([a, b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο $C([a, b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a, b], \mathcal{B}, m)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος σε κλειστό υπόχωρο.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. (Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

Συμβολισμός: $\ell^2[n] = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

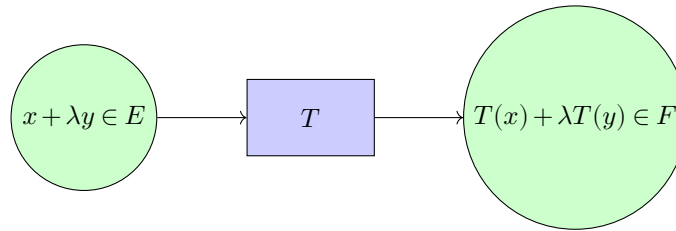
Όποιος ενδιαφέρεται για τον $\ell^2(\Gamma)$ (για τυχόν Γ) ας δει το αρχείο [nonsep.pdf](#).

4 Φραγμένοι τελεστές

4.1 Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Ορισμός 32. Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \rightarrow F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.



Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \xi_j \end{bmatrix}.$$

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \rightarrow \mathbb{K}^m, W : F \rightarrow \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \langle \tilde{T}_A e_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Πίνακες και Τελεστές

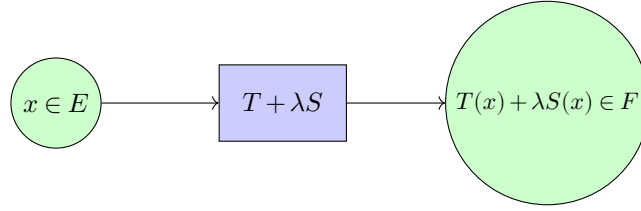
• Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle T e_k, f_i \rangle$.

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(E, F)$

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.



Πίνακες και Τελεστές

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto \tilde{T}_A$ είναι 1-1, επί, γραμμική.

Πρόταση 33. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F , η απεικόνιση $T \rightarrow \langle Te_k, f_i \rangle$ είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο $\mathcal{L}(E, F)$ επί του γραμ. χώρου $M_{nm}(\mathbb{K})$.

Όταν $n = m$, απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

Σύνθεση \rightsquigarrow γινόμενο πινάκων: Αν επίσης ένας χώρος G έχει ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_k\}$, και $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ είναι γραμμικές με $T \rightsquigarrow [a_{ij}] \in M_{nm}$ και $S \rightsquigarrow [b_{ij}] \in M_{mk}$ τότε $ST := S \circ T \rightsquigarrow [c_{ij}] \in M_{nk}$ όπου $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$. Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle \tilde{T}_{A^*} y, x \rangle = \langle y, \tilde{T}_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.

Συμπεπώς:

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο *πεπερασμένης διάστασης*, και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Πίνακες και Τελεστές

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο *πεπερασμένης διάστασης*, και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα $A := A_T$. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \quad (TR)^* = R^* T^*, \quad T^{**} = T.$$

Τελεστές πρώτης τάξης

Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \rightarrow F : x \rightarrow \langle x, u \rangle v$$

Συνήθειες συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Άσκηση

- Ο συζυγής: $(vu^*)^* = uv^*$
- Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0;
- Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}, u_k \in E, v_k \in F$.
- Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \dots, u_N\}$ ορθοκανονική βάση στον E , ή την $\{v_1, \dots, v_N\}$ ορθοκανονική βάση στον F .
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές βάσεις με $N \leq \min(\dim E, \dim F)$;

4.2 Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλο το χώρο.

Ορισμός 34. Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

(είναι φραγμένος στην $\text{ball}(E)$, δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη \iff συνεχής \iff ομοιόμορφα συνεχής.

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση 35. Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|\cdot\|_F)$ χώρος Banach, $D \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος και

$$T : D \rightarrow F$$

γραμμική απεικόνιση.

Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση

$$\tilde{T} : E \rightarrow F \quad \text{δηλ. } \tilde{T}|_D = T.$$

Η επέκταση \tilde{T} είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Παράδειγμα

$$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, F = \ell^2$$

Αν $a = (a(n))$ με κάθε $a(n) \in \mathbb{K}$, ορίζω

$$T : e_n \mapsto a(n)e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T \left(\sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a(n)e_n$$

δηλ. $T((x(n))) := (a(n)x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}.$

Επεκτείνεται σε $\tilde{T} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ αν-ν η $(a(n))$ είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a(n)|.$$

Μάλιστα αν η $(a(n))$ δεν είναι φραγμένη, υπάρχει $y = (y(n)) \in \ell^2$ ώστε $(a(n)y(n)) \notin \ell^2$.

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο E έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ είναι συνεχής.

Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^m \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Όμως, αν ο E έχει άπειρη διάσταση, υπάρχουν ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις $T : E \rightarrow F$, ακόμα κι αν $\dim F = 1$.

4.3 Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα 36. Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T . Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση 37. Η απεικόνιση $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- (α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda}S^*$.
- (β) $T^{**} = T$.
- (γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
- (δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ φραγμένοι τελεστές, $(TS)^* = S^*T^*$.
- (ε) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$), η $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια **ενέλιξη (involution)** που ικανοποιεί την λεγόμενη **ιδιότητα C^*** , δηλ. την (ε).

4.4 Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο **πεπερασμένης διάστασης**, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F , ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε **φραγμένος** τελεστής $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2 . Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. **Παράδειγμα;**

• **Διαγώνιοι τελεστές** Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας). Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b , όπου $b = a^*$ (δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

• **Τελεστές Hilbert-Schmidt** Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (**σύγκρινε με τους διαγώνιους**). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{ για κάθε } x \in \ell^2.$$

• **Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$** . Αν $k \in C([a, b] \times [a, b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a, b]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x, y)|^2 dx dy$.

Άρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$.

- **Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$.** Αν $f \in C([a, b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) : g \rightarrow fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu) : g \rightarrow fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ -πεπερασμένο μ).

Ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

- **Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον**

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}:$$

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V :

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.

Ο συζυγής του U είναι ο V . Άρα $UU^* = U^*U = I$.

- **Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):**

$$Ue_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$\text{και } Ve_n := e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί).

- **(β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:**

$$Se_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -συστολής (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολής $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Δείχνω $T = S^*$.

(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^* .)

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned} \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}) : Ue_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\ U^*e_n &= e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+) : Se_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \\ S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \end{aligned}$$

• (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \rightarrow f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2 : f \rightarrow f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, επί.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0, 1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων⁴ ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0, 1])$ του $L^2([0, 1])$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2([0, 1])$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M\|f\|_2$ για κάθε $f \in C^1([0, 1])$.

4.5 Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός 38. Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \rightarrow Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση 39. Η απεικόνιση $T \rightarrow \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.

Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ ($x \in E$). Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

Ορισμός 40. Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \rightarrow \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$. Είναι πάντα χώρος Banach.

⁴Δηλ. των $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0, 1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Αν H είναι χώρος Hilbert και για κάθε $x \in H$ ορίσουμε $f_x : H \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle$, η απεικόνιση

$$H \rightarrow H^* : x \rightarrow f_x$$

είναι **αντιγραμμική** ισομετρία. Το θεώρημα Riesz λέει ότι είναι **επί** του H^* .

Sesquilinear μορφές

Ορισμός 41. Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται **sesquilinear μορφή** αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \rightarrow \phi(x, y) : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

(ii) είναι **αντιγραμμική** ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \rightarrow \phi(x, y) : H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται **φραγμένη**, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\} \end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$ η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή**,

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση 42. Έστω H **μγαδικός** χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη αν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H . Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2 \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

αν $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}$.

... αλλά όχι εν γένει.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα 43. Έστω H **μυγαδικός** χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \rightarrow H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2 \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα 44. Έστω H **μυγαδικός** χώρος Hilbert και $T : H \rightarrow H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Θεώρημα 45. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα 46. Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε **υπάρχει** ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

5 Κατηγορίες τελεστών

5.1 Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary

Ορισμός 47. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν $T^*T = TT^*$. (σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:

Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t .

Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Πρόταση 48. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση 49. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Πρόταση 50. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση 51. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε

(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.

(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

Παραδείγματα

Αν $H_1 = H_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβιαίως επί.

Στον ℓ^2 , ο $S : e_n \rightarrow e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

5.2 Θετικοί τελεστές

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \quad (k = 1, 2).$$

Ορισμός 52. (i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.

(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι \mathbb{R} -χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h(H) \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$ -κλειστός.

Η διάταξη \geq στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:

Η διάταξη \geq στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και } \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$$\text{Αν } A = A^* \text{ τότε } -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$

$$\text{άρα } A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δύο θετικών})$$

5.3 Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση

Λήμμα 53 (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz). Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ **θετικός** τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y \rangle|^2 \leq \langle Bx, x \rangle \langle By, y \rangle \quad \text{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x \rangle.$$

Πρόταση 54. Έστω (B_n) **αύξουσα** (δηλ. $B_{n+1} - B_n \geq 0 \forall n$) και **φραγμένη** (δηλ. $\sup_n \|B_n\| < \infty$) ακολουθία **αυτοσυζυγών** τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει **κατά σημείο**: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$.

Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση 55. Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει **μοναδικός θετικός** τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται **τετραγωνική ρίζα** του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$. Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A .

Πόρισμα 56. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός αν και μόνον αν $AB = BA$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός 57. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

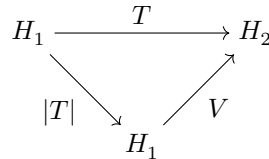
Ορισμός 58. Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **μερική ισομετρία** (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται **αρχικός χώρος** και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται **τελικός χώρος** της V .

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική πολική αναπαράσταση $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

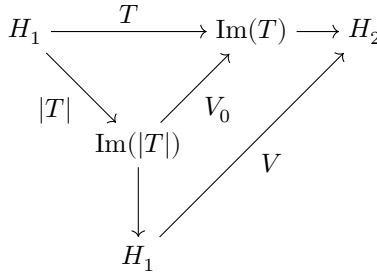
Θα δείξουμε ότι ένας αυθαίρετος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert δέχεται μία «πολική αναπαράσταση».

Πρόταση 59 (πολική αναπαράσταση: polar decomposition). Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$



Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \rightarrow Tx$ και να ελεγκτείεις...



Πρόταση 60. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής $V_1 : \overline{\text{Im}(|T|)} \rightarrow \overline{\text{Im}(T)}$ ώστε $T = V_1|T|$.

Επιπλέον, αν $\dim(\text{Im}(|T|)^\perp) = \dim(\text{Im}(T)^\perp)$ τότε μπορούμε να ελεγκτείουμε τον V_1 σε unitary $U : H_1 \rightarrow H_2$ ώστε $T = U|T|$. Όταν $H_1 = H_2 = \ell^2[n]$ αυτό ισχύει πάντα. Επομένως, κάθε $n \times n$ πίνακας T παραγοντοποιείται σε $T = U|T|$ όπου U unitary.

5.4 Προβολές

Παρατήρηση Αν $P : H \rightarrow H$ γραμμική με $P = P^2$,

$$\begin{aligned} \text{im } P &= \{x \in H : x = Px\}, & \ker P &= \text{im}(I - P) \\ H &= \text{im } P + \ker P, & \text{im } P \cap \ker P &= \{0\}. \end{aligned}$$

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H .

$$H = M \oplus M^\perp : \quad x = x_M + x_{M^\perp}$$

Η ορθή προβολή επί του M : $P_M : H \rightarrow H : x \rightarrow x_M$
είναι γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση 61. Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \rightarrow H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.
- (β) $(\ker P)^\perp = (\operatorname{im} P)$.
- (γ) $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση 62. Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} P$.
- (ii) Ο P είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.
- (iii) Ο P είναι φυσιολογικός.

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- (α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.
- (β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και $x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.
- (γ) Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και $Px = x \iff \|Px\| = \|x\|$.

Πρόταση 63 (Η απεικόνιση $P \rightarrow \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη). Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) $P \leq Q$ (β) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ για κάθε $x \in H$
- (γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ (δ) $QP = P$ (ε) $PQ = P$.

Πρόταση 64. Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

- (i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$, αν-ν $P(N) \subseteq N$, αν-ν $Q(M) \subseteq M$. Τότε $R = P(M \cap N)$.
- (ii) $M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0$.
- (iii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.
- (iv) Ο τελεστής $D = P - Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \supseteq N$. Τότε $D = P(M \cap N^\perp)$.

Πρόταση 65. Αν $P = P(M)$ και $Q = P(N)$, όπου M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $L = M \cap N$, τότε:
Οι προβολές P και Q μετατίθενται αν και μόνον αν οι υπόχωροι $M \cap L^\perp$ και $N \cap L^\perp$ είναι κάθετοι.

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H , ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N .

Ο $\overline{M + N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N .

$$\begin{aligned} \text{Συμβολισμοί: } P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M + N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.

(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)

(β) αν $M \perp N$, τότε $M + N$ κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).

(γ) Αν $M = \ell^2 \oplus \{0\} := \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \text{Gr}(D_a) := \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, τότε (M, N) κλειστοί αλλά $M + N$ όχι κλειστός. (ασκ.)

Γεινικότερα, αν $H = H_0 \oplus H_0$ και $M = H_0$, $N = \text{Gr}(A)$ όπου $A \in \mathcal{B}(H_0)$ τότε οι M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H αλλά ο $M + N$ είναι κλειστός αν-ν ο χώρος $\text{im}(A)$ είναι κλειστός στον H_0 .

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών (x, y) όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2} \cdot)$$

Πρόταση 66. Αν (Q_i) είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο⁵ στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των $\text{im } Q_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

Πρόταση 67. Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H .

(i) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$, και $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\text{im } P_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i)).

Εναλλακτική προσέγγιση:

⁵όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Πρόταση 68. Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ'έναν χώρο Hilbert H . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^m P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^m P_n \right\| \leq 1$.

(ii) Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^m P_n$ είναι προβολή.

(iv) $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$.

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\text{im } P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Πόρισμα 69. Αν $\{M_n\}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert και $\vee M_n$ ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n , τότε κάθε διάνυσμα $x \in \vee M_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συγκλίνουσα σειρά $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ όπου κάθε $x_n \in M_n$ και $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$.

6 Πίνακες Τελεστών και αναλλοίωτοι υπόχωροι

Πίνακες Τελεστών

Αν $M \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert και $P = P(M) \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε $P(M^\perp) = I - P := P^\perp$. Για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$\begin{aligned} A &= A(P + P^\perp) = (P + P^\perp)A(P + P^\perp) \\ &= PAP + P^\perp AP + PAP^\perp + P^\perp AP^\perp. \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A_{11} &: M \rightarrow M : x \mapsto PA|_M(x) & A_{12} &: M^\perp \rightarrow M : x \mapsto PA|_{M^\perp}(x) \\ A_{21} &: M \rightarrow M^\perp : x \mapsto P^\perp A|_M(x) & A_{22} &: M^\perp \rightarrow M^\perp : x \mapsto P^\perp A|_{M^\perp}(x) \end{aligned}$$

(οπότε $A_{11} \in \mathcal{B}(M)$, $A_{12} \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $A_{21} \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$, $A_{22} \in \mathcal{B}(M^\perp)$.) Ως προς τη διάσπαση $H = M \oplus M^\perp$, ο A γράφεται

$$A \simeq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Η αντιστοιχία αυτή μεταξύ τελεστών και πινάκων τελεστών είναι συμβιβαστή με τις πράξεις πινάκων.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο κλειστός υπόχωρος \overline{E} είναι και αυτός A -αναλλοίωτος. Όταν και ο E και ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E **ανάγει (reduces)** τον A . Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A \simeq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα 70. Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A -αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$). Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A -αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν λοιπόν ο χώρος H δεν είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος (δηλ. $\neq \{0\}, \neq H$).

Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A -αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μυγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.

Άρα, και στις δυο αυτές περιπτώσεις, κάθε φραγμένος τελεστής έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.

Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχω-ρίσιμο, απειροδιάστατο, μυγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Απάντηση: **Άγνωστο**, ακόμα και για αυτοπαθείς χώρους Banach. Για γενικούς χώρους Banach, η απάντηση είναι: **όχι πάντα**.

- Το πρώτο παράδειγμα τελεστή χωρίς αναλλοίωτο υπόχωρο (~1975): P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.

- Στον ℓ_1 : C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1 , *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

- Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable \mathcal{L}_∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).

- Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

7 Συμπαγείς τελεστές

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός 71. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται *τάξης n* ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \text{im } T$ έχει διάσταση n . Γράφουμε $\text{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \rightarrow F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή $\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \text{rank}(T) < +\infty\}$.

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $v \in K$ και $u \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \rightarrow K$$

$$\text{από τον τύπο } vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$$

Ο τελεστής vu^* είναι φραγμένος, και $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$.

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ πρώτης τάξης ($\text{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με u, v μη μηδενικά).

Κάθε $A \in \mathcal{F}(H, K)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^n s_k f_k e_k^*$ όπου $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp = (\ker A^* A)^\perp$ ώστε $(A^* A)e_k = s_k^2 e_k$ και $\{f_k := \frac{Ae_k}{s_k}\}$ ορθοκανονική βάση του $\text{im } A$.

Ισχύει $\|A\| = \sup s_k$ και $A^* = \sum_{k=1}^n s_k e_k f_k^*$.

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των $(\ker T)^\perp = \text{im } T^*$ και $T(E) = \text{im } T$):

Ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$ και $K = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp$ ο T γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathcal{F}(H, K)$, τότε το $A(B_H)$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K .

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E, F)$

Ορισμός 72. Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ λέγεται **συμπαγής (compact)** αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$ -σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $T(\hat{B}_E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Οι **φραγμένοι** τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Παράδειγμα

Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \text{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό (πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί!).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{B}(E, F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα 73. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).
2. Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K .
3. Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).
4. Ο $(K, \rho|_K)$ είναι **ολικά φραγμένος** (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και **πλήρης**.

Παρατήρηση Σε πλήρη μετρ. χώρο X , ένα $A \subseteq X$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλ. \overline{A} συμπαγές) ανν είναι ολικά φραγμένο.

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα 74. Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \rightarrow F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο T είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $\overline{T(A)}$ είναι συμπαγές.
- (iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E , η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$ -συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (iv) Το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E, F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα 75. Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T + \lambda S \in \mathcal{K}(E, F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E, F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα 76. Αν M, E, F, N είναι χώροι Banach,

$$B \in \mathcal{B}(M, E), X \in \mathcal{K}(E, F) \text{ και } A \in \mathcal{B}(F, N) \\ \implies XB \in \mathcal{K}(M, F) \text{ και } AX \in \mathcal{K}(E, N)$$

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E, F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E, F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση 77. Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E, F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathcal{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(E)$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα 78. Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) OT είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H , ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$.
- (iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \rightarrow 0$.

Πόρισμα 79 (Άσκηση). Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., **130** (1973)).

Πρόταση 80. Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\text{im } A$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.

Πρόταση 81. Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$ τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

Πρόταση 82. Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) του H , η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Ολοκληρωτικοί Τελεστές

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Έστω $k \in C([a, b] \times [a, b])$. Ο τελεστής $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a, b])$ με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b])$$

είναι συμπαγής.

Η ιδέα της απόδειξης. Προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.

(Δες και το αρχείο [intops.pdf](#))

8 Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών

Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \rightarrow \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \text{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

8.1 Ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 83. Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \rightarrow E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μυγαδικός) αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** της A αν υπάρχει **μη μηδενικό** $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** της A και το σύνολο

$$M_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο **ιδιόχωρος (eigenspace)** της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A , δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.

Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που μετατίθεται με την A .

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E , γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \rightarrow E$ έχει ιδιοτιμές.

Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.

Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματα του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή $U : e_n \mapsto e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο $L^2([0, 1])$ θεωρούμε τον τελεστή A με $(Af)(t) = tf(t)$ ($f \in C([0, 1])$). Ο A δεν έχει ιδιοτιμές (δείτε το [spmultnew.pdf](#)). Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

(α) Στον $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $V : e_n \mapsto \frac{1}{n+1}e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ο V δεν έχει ιδιοτιμές και είναι συμπαγής.

Και τα δύο μαζί; Αυτοσυζυγής και συμπαγής;

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται **διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable)** αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = (a(n))$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = (a(n))$ φραγμένη και

$$A = U^{-1}D_aU : \quad A \stackrel{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \rightarrow \ell^2 : x_n \rightarrow e_n$ είναι unitary. Άρα

διαγωνοποιήσιμος \Rightarrow φυσιολογικός.

Πρόταση 84. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H .

Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου τελεστή είναι (πεπερασμένο ή) αριθμήσιμο. Αν $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και P_n είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n , τότε για κάθε $x \in H$

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα του H).

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π -περιοδική, $H = L^2([0, 2\pi])$, $T : H \rightarrow H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής). Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι **ορθοκανονική βάση** του $L^2([0, 2\pi])$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 85. Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν (μγαδικό) χώρο Hilbert \mathcal{H} διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ του \mathcal{H} και $a(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ ($k = 1, \dots, n$).

Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2([n])$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Λήμμα 86. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ , τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.

Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

8.2 Το Φασματικό Θεώρημα

Το Φάσμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(A) &\iff A - \lambda I \text{ όχι 1-1} \\ &\Downarrow \Uparrow \text{ όταν } \dim H < \infty \Uparrow \text{ όχι πάντα, αν } \dim H = \infty \\ &A - \lambda I \text{ όχι αντιστρέψιμος} \\ &\Updownarrow \\ &\lambda \in \sigma(A) \end{aligned}$$

Ορισμός 87. Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο}\}$.

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του \mathbb{C} .

Πρόταση 88. Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι το $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση 89. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε

(α) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1\}$.

(β) $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Πόρισμα 90. Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$. (Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.)

Αρα, υπάρχει $x \in H$ που μεγιστοποιεί τον A , δηλ. $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Μάλιστα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\|A\|$ ή $-\|A\|$.

Πρόταση 91. Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.

(i) Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Παρατήρηση Η απόδειξη είναι πιο άμεση όταν ο A είναι φυσιολογικός.

Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

Θεώρημα 92. Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \rightarrow \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \text{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

Λήμμα 93. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A -αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^* -αναλλοίωτος.

Παράδειγμα 94. Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), ο υπόχωρος $M = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$ είναι U -αναλλοίωτος, αλλά ο περιορισμός $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^*e_0 = e_{-1}$.

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \bigoplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n . Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.

Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M .

Θεώρημα 95 (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή). Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H .

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

Θεώρημα 96 (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή). Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ιδιοδιανυσμάτων του A , με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(a(n))$ ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| A - \sum_{n=1}^N a(n) P[x_n] \right\| = 0 \quad (*)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $(a(n))$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

$$(ii) \iff A \simeq_u D_a \oplus 0$$

Το Φασματικό Θεώρημα για φραγμένους τελεστές

Για φραγμένους, όχι κατ' ανάγκη συμπαγείς, τελεστές, αποδεικνύεται το

Θεώρημα 97 (Φασματικό θεώρημα). Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει ένας χώρος μέτρου (X, μ) , ένας ισομετρικός ισομορφισμός U του H επί του $L^2(X, \mu)$ και μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$UAU^{-1}g = fg \quad g \in L^2(X, \mu).$$

Πόρισμα 98. Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ'έναν χώρο Hilbert H . Τότε

$$(i) \quad \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

$$(ii) \quad \|A\| = \max\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρους Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον χώρο Hilbert K και $\{y_n\}$ στον χώρο Hilbert H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \rightarrow K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Θεώρημα 99. Αν $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K , υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.

8.3 Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm

Θεώρημα 100. Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert ⁶ H και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,

ή η εξίσωση
$$\lambda x - Kx = y \tag{3}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$,
ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Για τις αποδείξεις, δείτε το αρχείο [fred22.pdf](#).

Λήμμα 101. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

⁶Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

(ειδική περίπτωση της Πρότασης 88)

Λήμμα 102. Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι $I-I$.

Δείτε σχετικά και την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για το θέμα στο blog του Terence Tao

[a-proof-of-the-fredholm-alternative](#)

8.4 Ο Συναρτησιακός Λογισμός

Παρατηρήσεις για το φάσμα τελεστή

Παρατήρηση Ένας φυσιολογικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in H$.

Λέμε τότε « T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του H ».

Πρόταση 103. Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, ένας $\lambda \in \mathbb{C}$ ανήκει στο φάσμα $\sigma(A)$ του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στη μοναδιαία σφαίρα του H ώστε $\|Ax_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$.

Πόρισμα 104. Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς.

Το φάσμα ενός θετικού τελεστή αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς.

Πρόταση 105. Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Πρόταση 106. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα 107. Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $A = A^*$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα 108 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)). Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \rightarrow (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A . Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p .

Ορισμός 109. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμο με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0.$$

Παρατήρηση 110. Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A . Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.

Πρόταση 111 (Φασματικής Απεικόνισης). Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Πόρισμα 112. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής.

- Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.
- Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.

Πρόταση 113 (Τετραγωνική ρίζα). Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Ο A είναι θετικός.
2. $A = A^*$ και $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.
3. Υπάρχει θετικός $B \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $B^2 = A$.
4. Υπάρχει $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^*X = A$.

Σχόλια (α) Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μοναδική. Δείτε την Πρόταση 55.

(β) Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x \rangle = -1$ για $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Πόρισμα 114. Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Έχουμε μάλιστα $|A| = A_+ + A_-$.

Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.

Αποδείξεις στο αρχείο [funcalc23.pdf](#).

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για συμπαγείς τελεστές

Πρόταση 115. Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A , όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$.

Αν $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$. Όταν η f είναι συνεχής, τότε $f(A) = A_f$.

Παρατήρηση Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, $A_{\text{id}} = I_H$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής ($\|\cdot\|$ -όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).