

# Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας

Σημειώσεις Μ. ΓΕΡΑΠΕΤΡΙΤΗ  
από τις παραδόσεις  
(διορθώσεις, 2016)

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΑΘΗΝΑ, 2013



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Τοπολογικοί Χώροι</b>	<b>3</b>
1.1	Ανοιχτά σύνολα, βάσεις και υποβάσεις . . . . .	3
1.2	Κλειστά σύνολα, εσωτερικό, κλειστή θήκη και σύνορο . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Τοπικές Έννοιες</b>	<b>15</b>
2.1	Περιοχές και Βάσεις Περιοχών . . . . .	15
2.2	Φίλτρα και Υπερφίλτρα . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Σύγκλιση και Συνέχεια</b>	<b>25</b>
3.1	Σύγκλιση Δικτύων . . . . .	25
3.2	Συνέχεια . . . . .	29
3.3	Σύγκλιση κατά Υπερφίλτρο . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Κατασκευή νέων τοπολογικών χώρων</b>	<b>37</b>
4.1	Υπόχωροι τοπολογικών χώρων . . . . .	37
4.2	Ασθενής τοπολογία ως προς μια οικογένεια συναρτήσεων . . . . .	41
4.3	Τοπολογία γινόμενο . . . . .	42
4.4	Τοπολογία πηλίκο . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Διαχωριστικά Αξιώματα</b>	<b>51</b>
5.1	Χώροι $T_1$ . . . . .	51
5.2	Χώροι Hausdorff . . . . .	53
5.3	Κανονικοί Χώροι . . . . .	55
5.4	Φυσιολογικοί Χώροι . . . . .	58
5.5	Τελείως Κανονικοί Χώροι . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Συνεκτικότητα</b>	<b>69</b>
6.1	Συνεκτικοί Χώροι . . . . .	69
6.2	Τοπικά συνεκτικοί χώροι και συνεκτικές συνιστώσες . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Συμπαγεια</b>	<b>77</b>
7.1	Συμπαγείς Χώροι . . . . .	77
7.2	Καρτεσιανά γινόμενα συμπαγών χώρων . . . . .	81
7.3	Το Θεώρημα Tychonoff . . . . .	84

---

<b>8</b>	<b>Συνθήκες Αριθμησιμότητας</b>	<b>87</b>
8.1	Διαχωρίσιμοι Χώροι . . . . .	87
8.2	Πρώτοι Αριθμήσιμοι Χώροι . . . . .	90
8.3	Δεύτεροι Αριθμήσιμοι Χώροι . . . . .	92
8.4	Χώροι Lindelöf . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Μετρικοποιησιμότητα</b>	<b>99</b>
9.1	Το Θεώρημα μετρικοποιησιμότητας Urysohn . . . . .	99
9.2	Το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing . . . . .	101



# Κεφάλαιο 1

## Τοπολογικοί Χώροι

Μελετώντας κανείς τους μετρικούς χώρους και τις βασικές τους έννοιες εντοπίζει ότι για κάθε μετρικό χώρο ορίζεται, με αρκετά φυσιολογικό τρόπο, η οικογένεια των ανοικτών συνόλων, η οποία έχει τη βασική ιδιότητα να περιέχει την τομή οποιωνδήποτε δύο στοιχείων της, αλλά και την ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε υποοικογένειάς της. Η ιδιότητα αυτή είχε καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των μετρικών χώρων, καθώς επέτρεψε να εκφραστούν και να μελετηθούν δομικές έννοιες, όπως η κλειστή θήκη και το σύνορο συνόλου, με αρχική έννοια το ανοικτό σύνολο και όχι τη μετρική του χώρου. Αυτό μας οδηγεί στο να προσεγγίσουμε την έννοια της τοπολογίας, δηλαδή της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων ενός συνόλου και να γενικεύσουμε με ουσιαστικό τρόπο την έννοια του μετρικού χώρου, δημιουργώντας μια εξαιρετικά πλουσιότερη κλάση, αυτή των τοπολογικών χώρων.

### 1.1 Ανοικτά σύνολα, βάσεις και υποβάσεις

**Ορισμός 1.1.1.** Έστω  $X$  σύνολο. Μια οικογένεια  $\mathfrak{T}$  υποσυνόλων του  $X$  καλείται τοπολογία στο  $X$ , αν:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$ ,
- (ii) Κάθε πεπερασμένη τομή στοιχείων της  $\mathfrak{T}$  ανήκει στην  $\mathfrak{T}$ . Δηλαδή αν  $n \in \mathbb{N}$  και  $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathfrak{T}$  τότε  $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathfrak{T}$  και
- (iii) Κάθε ένωση στοιχείων της  $\mathfrak{T}$  ανήκει στην  $\mathfrak{T}$ . Δηλαδή αν  $I$  αυθαίρετο σύνολο δεικτών και  $G_i \in \mathfrak{T} \forall i \in I$  τότε  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}$ .

Το ζεύγος  $(X, \mathfrak{T}) \equiv X$  καλείται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία της  $\mathfrak{T}$  καλούνται ανοικτά σύνολα (ως προς  $\mathfrak{T}$  ή του  $(X, \mathfrak{T})$ )

**Παρατηρήσεις 1.1.2.** (α) Εύκολα ελέγχεται με επαγωγή ότι η (ii) του ορισμού είναι ισοδύναμη με την

$$(ii)' \text{ αν } G_1, G_2 \in \mathfrak{T}, \text{ τότε } G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$$

(β) Αν στην (iii) του ορισμού  $I = \emptyset$  τότε έχουμε  $\bigcup_{i \in \emptyset} G_i = \emptyset$ , άρα  $\emptyset \in \mathfrak{T}$  (κάτι που περιέχεται στην (i) του ορισμού).

Ας εντοπίσουμε κάποια αρχικά παραδείγματα τοπολογικών χώρων.

**Παράδειγμα 1.1.3.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος. Τότε η οικογένεια

$$\mathfrak{T}_\rho = \{A \subseteq X : \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A\}$$

των ανοικτών υποσυνόλων του  $X$  (ως προς τη μετρική  $\rho$ ) είναι τοπολογία στο  $X$  και καλείται η *μετρική τοπολογία που καθορίζεται από τη  $\rho$* .

**Ορισμός 1.1.4.** Ένας τοπολογικός χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  λέγεται *μετριοποιήσιμος* αν υπάρχει μετρική  $\rho$  στο  $X$ , τέτοια ώστε  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\rho$ . Στην περίπτωση αυτή, η τοπολογία  $\mathfrak{T}$  λέγεται *μετριοποιήσιμη*.

**Παραδείγματα 1.1.5.** Έστω  $X$  σύνολο. Οι παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του  $X$  είναι τοπολογίες του  $X$ :

(α)  $\mathfrak{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ , η *διακριτή τοπολογία*. Ο διακριτός χώρος  $(X, \mathfrak{T}_1)$  είναι μετριοποιήσιμος, αφού  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_\rho$  για  $\rho$  τη διακριτή μετρική του  $X$ .

(β)  $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, X\}$ , η *τετριμμένη τοπολογία*. Παρατηρούμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  τα μονοσύνολα είναι κλειστά, δηλαδή  $X \setminus \{x\} \in \mathfrak{T}_\rho$ ,  $\forall x \in X$ . Συνεπώς αν ο  $X$  έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο  $(X, \mathfrak{T}_2)$  δεν είναι μετριοποιήσιμος, αφού  $X \setminus \{x\} \notin \mathfrak{T}_2$  για  $x \in X$  τυχόν.

(γ)  $\mathfrak{T}_3 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \in A\}$  (όπου  $x_0 \in X$ ), η *τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου* ( $x_0$ ). Όπως πριν, αν ο  $X$  έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο  $(X, \mathfrak{T}_3)$  δεν είναι μετριοποιήσιμος, αφού  $X \setminus \{x_0\} \notin \mathfrak{T}_3$ . Στην ειδική περίπτωση  $X = \{a, b\}$  (με  $a \neq b$ ), η  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$  είναι η τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου  $a$  στο  $X$  και ο τοπολογικός χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  λέγεται *χώρος του Sierpinski*.

(δ)  $\mathfrak{T}_4 = \{X\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \notin A\}$  (όπου  $x_0 \in X$ ), η *τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου* ( $x_0$ ). Αν ο  $X$  έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο  $(X, \mathfrak{T}_4)$  δεν είναι μετριοποιήσιμος, αφού  $X \setminus \{x\} \notin \mathfrak{T}_4$ , για  $x \in X \setminus \{x_0\}$ .

(ε)  $\mathfrak{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A^c \equiv X \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$ , η *συμπεπερασμένη τοπολογία*. Δείχνουμε ότι η  $\mathfrak{T}_5$  είναι τοπολογία στο  $X$ :

(i)  $\emptyset \in \mathfrak{T}_5$  και  $X \in \mathfrak{T}_5$ , αφού  $X \setminus X = \emptyset$ , πεπερασμένο.

(ii) Έστω  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}_5$ . Τότε, αν  $G_1 = \emptyset$  ή  $G_2 = \emptyset$  έχουμε  $G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \mathfrak{T}_5$ . Αν τώρα  $G_1 \neq \emptyset$  και  $G_2 \neq \emptyset$ , τότε  $G_1^c, G_2^c$  πεπερασμένα, άρα και το  $G_1^c \cup G_2^c$  είναι πεπερασμένο, δηλαδή  $(G_1 \cap G_2)^c$  πεπερασμένο. Άρα  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}_5$ .

(iii) Έστω  $I \neq \emptyset$  σύνολο δεικτών και  $G_i \in \mathfrak{T}_5 \forall i \in I$ . Αν  $G_i = \emptyset \forall i \in I$ , τότε  $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \mathfrak{T}_5$ . Διαφορετικά  $\exists i_0 \in I : G_{i_0} \neq \emptyset$ . Τότε  $(G_{i_0})^c$  πεπερασμένο, και αφού  $(\bigcup_{i \in I} G_i)^c \subseteq (G_{i_0})^c$ , έχουμε ότι  $(\bigcup_{i \in I} G_i)^c$  είναι πεπερασμένο, συνεπώς  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}_5$ .

Αν ο  $X$  είναι πεπερασμένος, τότε  $(X, \mathfrak{T}_5) = (X, \mathfrak{T}_1)$ , άρα είναι μετριοποιήσιμος. Αν ο  $X$  είναι άπειρος, τότε ο  $(X, \mathfrak{T}_5)$  δεν είναι μετριοποιήσιμος. Πράγματι, σε κάθε μετρικό χώρο, με τουλάχιστον δύο σημεία, υπάρχουν ξένα ανοικτά μη κενά σύνολα (αφού αν  $x \neq y$ , τότε  $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ , για  $\varepsilon = \frac{\rho(x, y)}{2} > 0$ ). Όμως στον  $(X, \mathfrak{T}_5)$  δεν υπάρχουν τέτοια σύνολα: Αν υποθέσουμε ότι  $G_1, G_2$  είναι ξένα ανοικτά μη κενά, τότε  $G_1^c, G_2^c$  είναι πεπερασμένα, άρα  $X = X \setminus (G_1 \cap G_2) = G_1^c \cup G_2^c$ , πεπερασμένο, πράγμα άτοπο.

(στ)  $\mathfrak{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A^c \equiv X \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$ , η *συναριθμήσιμη τοπολογία*. Όπως πριν, ο  $(X, \mathfrak{T}_6)$  είναι μετριοποιήσιμος αν και μόνο αν το  $X$  είναι αριθμήσιμο σύνολο.

**Παρατήρηση 1.1.6.** Αν  $\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία σε ένα σύνολο  $X$ , τότε  $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_1$ .

Έστω ότι σε ένα σύνολο  $X$  έχει κατασκευαστεί μία οικογένεια τοπολογιών. Αποτελεί φυσιολογικό ερώτημα, το αν με απλές συνολοθεωρητικές πράξεις μπορούν να κατασκευασθούν επιπλέον τοπολογίες στο  $X$ .

**Πρόταση 1.1.7.** Έστω  $X$  σύνολο και  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  δύο τοπολογίες στο  $X$ . Τότε η  $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$  είναι τοπολογία στο  $X$ . Γενικότερα αν  $(\mathfrak{T}_i)_{i \in I}$  είναι οικογένεια τοπολογιών στο  $X$ , τότε η  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{T}_i$  είναι τοπολογία στο  $X$ .

*Απόδειξη.* (για τομή δύο τοπολογιών) (i) Άμεσα,  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ .

(ii) Έστω  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ . Τότε  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}_1$  και  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}_2$ . Αφού  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  τοπολογίες,  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}_1$  και  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}_2$ . Δηλαδή  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ .

(iii) Έστω  $G_i \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 \forall i \in I$ , όπου  $I$  αυθαίρετο σύνολο. Τότε  $\forall i \in I, G_i \in \mathfrak{T}_1$  και  $G_i \in \mathfrak{T}_2$ . Αφού  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  τοπολογίες,  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}_1$  και  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}_2$ . Δηλαδή  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ .  $\square$

**Παρατήρηση 1.1.8.** Προφανώς, η  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{T}_i$  περιέχεται σε κάθε  $\mathfrak{T}_i$  και είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο  $X$  με αυτήν την ιδιότητα. Πράγματι, αν  $\mathfrak{T}$  τοπολογία στο  $X$  με  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_i, \forall i \in I$ , τότε  $\mathfrak{T} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{T}_i$ .

Σημειώνουμε ότι η (συνολοθεωρητική) ένωση δε συμπεριφέρεται εξίσου καλά. Ενδέχεται η ένωση δύο τοπολογιών να μην είναι τοπολογία, όπως φαίνεται από το ακόλουθο:

**Παράδειγμα 1.1.9.** Αν  $X = \{a, b, c\}$ , με  $a, b, c$  διακεκριμένα, και  $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ,  $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ , τότε  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  είναι τοπολογίες στο  $X$ , ενώ η  $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$  δεν είναι τοπολογία, αφού τα  $\{a\}, \{b\}$  ανήκουν στην  $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$  ενώ  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ .

Όμως υπάρχει η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την  $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ . Το ίδιο ισχύει για κάθε οικογένεια  $\mathcal{C}$ , υποσυνόλων του  $X$ .

**Πρόταση 1.1.10.** Έστω  $X$  σύνολο και  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Τότε υπάρχει η μικρότερη τοπολογία  $\mathfrak{T}$  στο  $X$  ώστε η  $\mathfrak{T}$  να περιέχει τη  $\mathcal{C}$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε  $\Gamma = \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{S} \text{ τοπολογία στο } X \text{ με } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}\}$ . Τότε  $\Gamma \neq \emptyset$  αφού  $\mathcal{P}(X) \in \Gamma$ . Θέτουμε  $\mathfrak{T} = \bigcap \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \Gamma\}$ . Τότε, από την Πρόταση 1.1.7 η  $\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία στο  $X$  και προφανώς  $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ . Αν τώρα  $\mathcal{S}$  είναι τοπολογία στο  $X$  με  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ , δηλαδή  $\mathcal{S} \in \Gamma$ , τότε  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{S}$  (από τον ορισμό της  $\mathfrak{T}$ ). Δηλαδή η  $\mathfrak{T}$  είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την  $\mathcal{C}$   $\square$

**Ορισμός 1.1.11.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{B}$  υποοικογένεια της  $\mathfrak{T}$ . Η  $\mathcal{B}$  καλείται *βάση* για την  $\mathfrak{T}$ , αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι μια ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$ . Δηλαδή, αν  $\forall G \in \mathfrak{T} \exists (B_i)_{i \in I}$  οικογένεια στοιχείων της  $\mathcal{B}$ , ώστε  $G = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Τα στοιχεία της  $\mathcal{B}$  λέγονται *βασικά ανοικτά σύνολα*.

Ιδιαίτερα, ισχύει η

$$\mathfrak{T} = \left\{ G \subseteq X : \exists (B_i)_{i \in I} \text{ οικογένεια στοιχείων της } \mathcal{B}, \text{ ώστε } G = \bigcup_{i \in I} B_i \right\} \quad (1.1)$$



**Παρατήρηση 1.1.12.** Αν  $X$  είναι ένα σύνολο,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  και  $G \subseteq X$ , τότε το  $G$  γράφεται ως ένωση των στοιχείων κάποιας υποοικογένειας της  $\mathcal{B}$  αν και μόνο αν για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B \subseteq G$ . Πράγματι: αν  $G = \bigcup_{i \in I} B_i$  για κάποια υποοικογένεια  $(B_i)_{i \in I}$  της  $\mathcal{B}$ , τότε για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = G$ . Αντίστροφα, αν για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $B_x \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B_x \subseteq G$ , τότε  $G = \bigcup_{x \in G} B_x$ , όπου  $(B_x)_{x \in G}$  υποοικογένεια της  $\mathcal{B}$ .

**Πρόταση 1.1.13.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ .
- (ii) Για κάθε  $G \in \mathfrak{T}$  και για κάθε  $x \in G$ , υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B$  και  $B \subseteq G$ .

Στην περίπτωση αυτή, για κάθε  $G \subseteq X$  έχουμε:

$$G \in \mathfrak{T} \iff \forall x \in G \exists B \in \mathcal{B} \text{ ώστε } x \in B \subseteq G.$$

Απόδειξη. Άμεσο από την Παρατήρηση 1.1.12 και τη σχέση (1.1).  $\square$

**Παραδείγματα 1.1.14.** (α) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος. Οι οικογένειες  $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$  και  $\mathcal{B}' = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$  είναι βάσεις για την τοπολογία  $\mathfrak{T}_\rho$ . Ειδικά στο  $\mathbb{R}$  με τη συνηθισμένη τοπολογία, η  $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a < b\}$  είναι βάση (σημειώνουμε ότι  $(a, b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{|a-b|}{2})$ ).

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ , τότε κάθε οικογένεια  $\mathcal{B}'$  με  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathfrak{T}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ . Ειδικά, η  $\mathfrak{T}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ .

(γ) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  ο διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε η  $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$  είναι (η μικρότερη) βάση για την  $\mathfrak{T}$ .

Όπως γίνεται φανερό από τη σχέση (1.1), μια τοπολογία καθορίζεται πλήρως από κάθε βάση της. Είναι σημαντικό, όμως, να εξετάσουμε πότε μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου  $X$  αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στο  $X$ . Αφού τα στοιχεία της οικογένειας αυτής θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν κάθε ανοικτό σύνολο για εκείνη την τοπολογία, θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν και το ίδιο το  $X$ . Επίσης μια υποψήφια βάση θα πρέπει να περιέχει και «μικρά» σύνολα, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η εσωτερική κάλυψη ανοικτών συνόλων. Το παραπάνω διατυπώνεται αυστηρά στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 1.1.15.** Έστω  $X$  σύνολο και  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για μία (μοναδική από τη σχέση (1.1)) τοπολογία στο  $X$ , αν και μόνο αν:

- (α')  $X = \bigcup \mathcal{B} \equiv \bigcup \{B : b \in \mathcal{B}\}$  και
- (β') Αν  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  και  $x \in B_1 \cap B_2$ , τότε  $\exists B_3 \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$  (δηλαδή, από την Παρατήρηση 1.1.12, για κάθε  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , το  $B_1 \cap B_2$  είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$ ).

Απόδειξη. ( $\Rightarrow$ ) Υποθέτουμε ότι η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για μια τοπολογία  $\mathfrak{T}$ . Αφού  $X \in \mathfrak{T}$  και  $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{T}$  για κάθε  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , έπονται τα (i) και (ii).

( $\Leftarrow$ ) Θέτουμε  $\mathfrak{T} = \{G \subseteq X : \exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \text{ ώστε } G = \bigcup \mathcal{C}\}$ .<sup>1</sup>

Η  $\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία:

<sup>1</sup> Το σύνολο  $\bigcup \mathcal{C}$  είναι το σύνολο όλων των  $x \in X$  με την ιδιότητα: υπάρχει  $C \in \mathcal{C}$  ώστε  $x \in C$

- (i)  $\emptyset \in \mathfrak{T}$  (θέτοντας  $\mathcal{C} = \emptyset$ ) και  $X \in \mathfrak{T}$  (θέτοντας  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ ).
- (ii) Έστω  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}$ . Τότε  $G_1 = \bigcup \mathcal{C}_1$  και  $G_2 = \bigcup \mathcal{C}_2$  για κάποιες  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}$ . Άρα  $G_1 \cap G_2 = \bigcup \{B \cap C : B \in \mathcal{C}_1, C \in \mathcal{C}_2\}$ . Όμως κάθε  $B \cap C$  είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$ , λόγω του  $(\beta')$ . Άρα το  $G_1 \cap G_2$  είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$ , δηλαδή  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$ .
- (iii) Έστω  $I$  σύνολο και  $G_i \in \mathfrak{T} \forall i \in I$ . Τότε  $\exists \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{B}$  ώστε  $G_i = \bigcup \mathcal{C}_i \forall i \in I$ . Θέτουμε  $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ . Τότε  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  και  $\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup \mathcal{C}$ . Συνεπώς  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}$ .

*Η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ :*

Αφού για κάθε  $B \in \mathcal{B}$  έχουμε  $B \in \bigcup \mathcal{C}$  για  $\mathcal{C} = \{B\}$ , έπεται ότι κάθε στοιχείο της  $\mathfrak{T}$  ανήκει στην  $\mathfrak{T}$ . Άρα, από τον ορισμό της  $\mathfrak{T}$ , η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ .  $\square$

**Παραδείγματα 1.1.16.** (α) Έστω  $\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$  (όπου  $(a, a] = \emptyset$ ). Η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για κάποια τοπολογία του  $\mathbb{R}$ , αφού:

- (i)  $\mathbb{R} = \bigcup \mathcal{B} (= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n])$  και
- (ii) Αν  $(a_1, b_1], (a_2, b_2] \in \mathcal{B}$  τότε η τομή  $(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2]$  ανήκει στη  $\mathcal{B}$ , αφού, είτε είναι κενή, είτε  $(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = (a, b]$  με  $a = \max\{a_1, a_2\}$  και  $b = \min\{b_1, b_2\}$ .

Η μοναδική τοπολογία  $\mathfrak{T}_S$  του  $\mathbb{R}$  που έχει βάση την  $\mathcal{B}$  ονομάζεται *τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων*. Ο τοπολογικός χώρος  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$  συμβολίζεται επίσης  $\mathbb{R}_S$ . Η τοπολογία  $\mathfrak{T}_S$  είναι μεγαλύτερη από τη συνήθη τοπολογία  $\mathfrak{T}_{|\cdot|}$  του  $\mathbb{R}$ , διότι αν  $a, b \in \mathbb{R}$  και  $a < b$  τότε  $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$ , όπου  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $a \leq b - \frac{1}{n_0}$ . Άρα  $(a, b) \in \mathfrak{T}_S$ . Οι δύο τοπολογίες δεν ταυτίζονται, εφόσον  $(a, b] \notin \mathfrak{T}_{|\cdot|}$  (όταν  $a < b$ ) ενώ  $(a, b] \in \mathfrak{T}_S$  κι επομένως  $\mathfrak{T}_{|\cdot|} \subsetneq \mathfrak{T}_S$ .

(β) Η οικογένεια  $\mathcal{C} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$  δεν είναι βάση για κάποια τοπολογία του  $\mathbb{R}$  διότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη  $(\beta')$  του Θεωρήματος 1.1.15. Πράγματι, αν  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , τότε  $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$ , που δεν είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{C}$ . Όμως, όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, τα στοιχεία της μορφής  $B \cap C : B, C \in \mathcal{C}$  αποτελούν βάση για τη συνήθη τοπολογία του  $\mathbb{R}$ .

Το τελευταίο παράδειγμα μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 1.1.17.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια  $\mathcal{C}$  της  $\mathfrak{T}$  καλείται *υποβάση* για την  $\mathfrak{T}$  αν η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της  $\mathcal{C}$  αποτελεί βάση για την  $\mathfrak{T}$ . Δηλαδή, αν η

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n C_i : n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C} \text{ για } i = 1, 2, \dots, n \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ .

Αν  $\mathcal{C}$  είναι υποβάση για την τοπολογία  $\mathfrak{T}$ , τότε τα στοιχεία της  $\mathfrak{T}$  είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής

$$G = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} C_j^i \quad (1.2)$$

όπου  $I$  αυθαίρετο σύνολο,  $n_i \in \mathbb{N} \forall i \in I$  και  $C_j^i \in \mathcal{C}$ .

**Πρόταση 1.1.18.** Έστω  $\mathcal{C}$  οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου  $X$ . Τότε υπάρχει μοναδική τοπολογία  $\mathfrak{T}$  στο  $X$  που έχει υποβάση την  $\mathcal{C}$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^n C_i : n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C} \text{ για } i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{X\}$ . Τότε  $X \in \mathcal{B}$  και η τομή δύο στοιχείων της  $\mathcal{B}$  ανήκει στην  $\mathcal{B}$ . Άρα, από το Θεώρημα 1.1.15, η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για κάποια τοπολογία  $\mathfrak{T}$  στο  $X$ . Για την  $\mathfrak{T}$  η  $\mathcal{C}$  είναι υποβάση. Η μοναδικότητα έπεται από τη σχέση (1.2).  $\square$

**Παρατήρηση 1.1.19.** Αν  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$  και  $\mathfrak{T}$  τοπολογία στο  $X$  με υποβάση τη  $\mathcal{C}$ , τότε από τη σχέση (1.2) η  $\mathfrak{T}$  είναι η μικρότερη τοπολογία στο  $X$  που περιέχει τη  $\mathcal{C}$ . Έτσι έχουμε μια δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 1.1.10, κατά την οποία περιγράφονται πιο κατασκευαστικά τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας  $\mathfrak{T}$ .

**Παραδείγματα 1.1.20.** (α) Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε βάση  $\mathcal{B}$  της  $\mathfrak{T}$  είναι και υποβάση για την  $\mathfrak{T}$ . Πράγματι, αν  $\mathcal{B}'$  είναι η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της  $\mathcal{B}$ , τότε  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathfrak{T}$ . Άρα η  $\mathcal{B}'$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ . Δηλαδή, η  $\mathcal{B}$  είναι υποβάση της  $\mathfrak{T}$ .

(β) Η οικογένεια  $\mathcal{C} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$  είναι υποβάση για τη συνήθη τοπολογία στο  $\mathbb{R}$ . Πράγματι, έστω  $\mathcal{B}$  η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της  $\mathcal{C}$ . Παρατηρούμε ότι  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, (-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$ . Άρα η  $\mathcal{B}$  περιέχει τη βάση για τη συνήθη τοπολογία  $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  και προφανώς περιέχεται στη συνήθη τοπολογία. Έτσι, η  $\mathcal{B}$  είναι βάση και συνεπώς, η  $\mathcal{C}$  υποβάση για τη συνήθη τοπολογία του  $\mathbb{R}$ .

(γ) Ανάλογα με το (β), η  $\mathcal{C} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$  είναι υποβάση για την τοπολογία  $\mathfrak{T}_S$  των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων.

## 1.2 Κλειστά σύνολα, εσωτερικό, κλειστή θήκη και σύνορο

Κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων, πέρα από τα ανοικτά σύνολα, κεντρικά αντικείμενα ήταν τα κλειστά σύνολα καθώς και οι έννοιες του εσωτερικού, της κλειστής θήκης και του συνόρου. Οι ίδιες έννοιες θα μας απασχολήσουν και θα αποδειχθούν εξίσου κεντρικές κατά τη μελέτη των τοπολογικών χώρων. Στην αναζήτηση και απόδειξη των ιδιοτήτων των παραπάνω αντικειμένων, οδηγός μας θα είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στους μετρικούς χώρους.

**Ορισμός 1.2.1.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Ένα  $F \subseteq X$  καλείται *κλειστό* στο  $X$  (ή κλειστό ως προς  $\mathfrak{T}$ ), αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Δηλαδή το  $F$  είναι κλειστό αν  $F^c \in \mathfrak{T}$ .

**Πρόταση 1.2.2.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε:

- (i) Τα  $\emptyset, X$  είναι κλειστά στο  $X$ .
- (ii) Κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
- (iii) Κάθε τομή (αυθαίρετου πλήθους) κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

*Απόδειξη.* (i)  $\emptyset^c = X \in \mathfrak{T} \implies \emptyset$  κλειστό,  $X^c = \emptyset \in \mathfrak{T} \implies X$  κλειστό.

- (ii) Έστω  $n \in \mathbb{N}$  και  $F_1, F_2, \dots, F_n \subseteq X$  κλειστά. Τότε τα  $F_1^c, F_2^c, \dots, F_n^c$  είναι ανοικτά. Άρα το  $\bigcap_{i=1}^n F_i^c = (\bigcup_{i=1}^n F_i)^c$  είναι ανοικτό. Επομένως το  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  είναι κλειστό.

(iii) Ανάλογα, χρησιμοποιώντας ότι η αυθαίρετη ένωση ανοικτών είναι ανοικτό.  $\square$

**Παραδείγματα 1.2.3.** (α)  $\Sigma'$  ένα διακριτό τοπολογικό χώρο όλα τα υποσύνολα είναι κλειστά (και συγχρόνως ανοικτά).

(β)  $\Sigma'$  έναν τετριμμένο τοπολογικό χώρο τα μόνα κλειστά σύνολα είναι τα  $\emptyset, X$ .

(γ) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  έχει τη συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε τα κλειστά σύνολα είναι τα πεπερασμένα και το  $X$ .

(δ) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  έχει τη συναριθμήσιμη τοπολογία, τότε τα κλειστά σύνολα είναι τα αριθμήσιμα και το  $X$ .

**Ορισμός 1.2.4.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Το σύνολο  $\bigcup\{G : G \subseteq A \text{ και } G \text{ ανοικτό}\}$  λέγεται *εσωτερικό* του  $A$  και συμβολίζεται  $A^\circ$  ή  $\text{int}_{\mathfrak{T}} A$ .

**Παρατήρηση 1.2.5.** Το  $A^\circ$  είναι ανοικτό σύνολο, περιέχεται στο  $A$  και είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο  $A$ .

**Πρόταση 1.2.6.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε  $A, B \subseteq X$ :

$$(i) A^\circ \subseteq A$$

$$(ii) A \in \mathfrak{T} \iff A^\circ = A$$

$$(iii) (A^\circ)^\circ = A^\circ$$

$$(iv) \text{Αν } A \subseteq B, \text{ τότε } A^\circ \subseteq B^\circ$$

$$(v) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

*Απόδειξη.* (i), (ii) Άμεσα, από την Παρατήρηση 1.2.5.

(iii) Έπεται από τη (ii) αφού  $A^\circ$  ανοικτό.

(iv) Αν  $A \subseteq B$ , τότε κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο  $A$ , περιέχεται και στο  $B$ . Επομένως, από τον ορισμό έπεται  $A^\circ \subseteq B^\circ$ .

(v)

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array} \right\} \xrightarrow{(iv)} \left. \begin{array}{l} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \end{array} \right\} \implies (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

Από την (i) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \\ B^\circ \subseteq B \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B \\ A^\circ \cap B^\circ \text{ ανοικτό} \end{array} \right\} \implies A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$$

Άρα  $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ .  $\square$

**Ορισμός 1.2.7.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Το σύνολο  $\bigcap\{F : F \supseteq A \text{ και } F \text{ κλειστό}\}$  λέγεται *κλειστή θήκη* του  $A$  και συμβολίζεται  $\bar{A}$  ή  $\text{cl}_{\mathfrak{T}} A$ .

**Παρατήρηση 1.2.8.** Το  $\bar{A}$  είναι κλειστό σύνολο, περιέχει το  $A$  και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το  $A$ .

**Πρόταση 1.2.9.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε  $A, B \subseteq X$ :

$$(i) \bar{A} \supseteq A$$

(ii)  $A$  κλειστό  $\iff \bar{A} = A$

(iii)  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$

(iv) Αν  $A \subseteq B$ , τότε  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

(v)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 1.2.6. □

**Παραδείγματα 1.2.10.** (α) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε  $\bar{A} = A = A^\circ \forall A \subseteq X$ .

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι τετριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε

$$A^\circ = \begin{cases} \emptyset, & A \neq X \\ X, & A = X \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ X, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

(γ) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  έχει την συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε

$$A^\circ = \begin{cases} A, & \text{αν } A^c \text{ πεπερασμένο} \\ \emptyset, & \text{αν } A^c \text{ άπειρο} \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{cases} A, & \text{αν } A \text{ πεπερασμένο} \\ X, & \text{αν } A \text{ άπειρο} \end{cases}$$

**Παρατηρήσεις 1.2.11.** (α) Η ιδιότητα (iv) του εσωτερικού και της κλειστής θήκης γενικεύονται με επαγωγή, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$ , ως εξής:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ \cap \dots \cap A_n^\circ \quad \text{και} \quad \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

Όμως οι σχέσεις αυτές δεν ισχύουν για άπειρες τομές και ενώσεις. Για παράδειγμα στο  $\mathbb{R}$  έχουμε:

$$\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \quad \text{ενώ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)^\circ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

Άρα

$$\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)^\circ \subsetneq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)^\circ.$$

Ανάλογα

$$\overline{\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right] \right)} = \overline{[0, 1)} = [0, 1] \quad \text{ενώ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right] = [0, 1).$$

Άρα

$$\overline{\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right] \right)} \supsetneq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right]}.$$

(β) Δεν ισχύουν γενικά οι σχέσεις  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ,  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ . Για παράδειγμα στο  $\mathbb{R}$ , αν  $A = \mathbb{Q}$  και  $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^\circ &= \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} & \text{και} & & A^\circ \cup B^\circ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \overline{(A \cap B)} &= \bar{\emptyset} = \emptyset & \text{και} & & \bar{A} \cap \bar{B} &= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.2.12.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε

- (i)  $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$  ή ισοδύναμα,  $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ .  
(ii)  $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$  ή ισοδύναμα,  $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$ .

Απόδειξη. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} X \setminus A^\circ &= X \setminus \bigcup \{G \subseteq X : G \text{ ανοικτό, } G \subseteq A\} \\ &= \bigcap \{X \setminus G \subseteq X : G \text{ ανοικτό, } G \subseteq A\} \\ &= \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ κλειστό, } X \setminus A \subseteq F\} \\ &= \overline{(X \setminus A)}. \end{aligned}$$

(ii) Από το (i), θέτοντας  $X \setminus A$  στη θέση του  $A$ , έχουμε:

$$X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{(X \setminus (X \setminus A))} = \overline{A}$$

Άρα  $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ . □

**Πρόταση 1.2.13.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subseteq X$  και  $x \in X$ . Τότε

$$x \in \overline{A} \iff G \cap A \neq \emptyset \quad \forall G \in \mathfrak{T} : x \in G.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.2.12(ii), έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff x \notin (X \setminus A)^\circ = \bigcup \{G \subseteq X, G \text{ ανοικτό και } G \subseteq X \setminus A\} \\ &\iff \forall G \in \mathfrak{T} \text{ με } G \subseteq X \setminus A \text{ ισχύει } x \notin G \\ &\iff \forall G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \text{ ισχύει } G \not\subseteq X \setminus A, \text{ δηλαδή } G \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση 1.2.14.** Αν  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ , τότε

$$x \in \overline{A} \iff B \cap A \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B} : x \in B.$$

Πράγματι, αν κάθε  $B \in \mathcal{B}$  που περιέχει το  $x$  τέμνει το  $A$ , τότε κάθε  $G \in \mathfrak{T}$  που περιέχει το  $x$  επίσης θα τέμνει το  $A$ , εφόσον υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  με  $x \in B \subseteq G$ . Επομένως  $x \in \overline{A}$  από την Πρόταση 1.2.13. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανής από την Πρόταση 1.2.13.

**Παράδειγμα 1.2.15.** Στον  $\mathbb{R}_S$ , έχουμε  $\overline{(a, b)} = (a, b]$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ . Πράγματι,  $(a, b) \subseteq \overline{(a, b)}$  και για  $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$

- αν  $x \leq a$ , τότε για  $B = (x - 1, x] \in \mathcal{B}$  έχουμε  $B \cap (a, b) = \emptyset$ . Άρα  $x \notin \overline{(a, b)}$ .
- αν  $x > b$ , τότε για  $B = (b, x] \in \mathcal{B}$  έχουμε  $B \cap (a, b) = \emptyset$ . Άρα  $x \notin \overline{(a, b)}$ .
- αν  $x = b$  και  $B \in \mathcal{B}$  με  $x \in B$ , τότε  $B \cap (a, b) \neq \emptyset$ . Άρα  $x \in \overline{(a, b)}$ .

(όπου  $\mathcal{B}$  η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}_S$ )

**Ορισμός 1.2.16.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $D \subseteq X$ . Το  $D$  λέγεται **πυκνό στο  $X$**  (ή πυκνό υποσύνολο του  $X$ ) αν  $\overline{D} = X$ .

**Παρατήρηση 1.2.17.** Από την Πρόταση 1.2.13, ένα υποσύνολο  $D$  είναι πυκνό αν και μόνο αν  $G \cap D \neq \emptyset \forall G \in \mathfrak{T}, G \neq \emptyset$ . Αντίστοιχα, αν  $B$  είναι μια βάση για την  $\mathfrak{T}$ , τότε το  $D$  είναι πυκνό αν και μόνο αν  $B \cap D \neq \emptyset \forall B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$ .

**Παραδείγματα 1.2.18.** (α) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι τετριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε κάθε μη κενό  $D \subseteq X$  είναι πυκνό.

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε ένα  $D \subseteq X$  είναι πυκνό στο  $X$  αν και μόνο αν  $D = X$ , αφού  $\{x\} \in \mathfrak{T} \forall x \in X$ .

(γ) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  έχει την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου  $x_0$ , τότε το  $\{x_0\}$  είναι πυκνό στο  $X$ .

(δ) Στον  $\mathbb{R}_S$  το  $\mathbb{Q}$  είναι πυκνό, διότι  $\mathbb{Q} \cap (a, b] \neq \emptyset$  για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ .

**Ορισμός 1.2.19.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subseteq X$  και  $x \in X$ . Το  $x$  καλείται *σημείο συσσώρευσης* του  $A$  αν για κάθε  $G \in \mathfrak{T}$  με  $x \in G$  ισχύει ότι  $A \cap G \setminus \{x\} \neq \emptyset$ . Συμβολίζουμε με  $A'$  το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του  $A$ . Το  $A'$  καλείται *παράγωγο σύνολο* του  $A$ . Κάθε σημείο του  $A$  που δεν είναι σημείο συσσώρευσης, καλείται *μεμονωμένο σημείο* του  $A$ .

**Παρατήρηση 1.2.20.** Ένα στοιχείο  $x$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $\overline{A}$  αν και μόνο αν  $x \in A \setminus \{x\}$ . Πράγματι, από την Πρόταση 1.2.13 έχουμε ότι  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$  αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο  $G$  με  $x \in G$  ισχύει  $(A \setminus \{x\}) \cap G \neq \emptyset$ , δηλαδή  $A \cap G \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

**Παραδείγματα 1.2.21.** (α) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε  $A' = \emptyset$  για κάθε  $A \subseteq X$  (παίρνουμε  $G = \{x\}$  στον ορισμό). Δηλαδή κάθε σημείο του  $A$  είναι μεμονωμένο.

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  έχει την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου  $x_0$ , τότε  $\{x_0\}' = X \setminus \{x_0\}$ . Πράγματι,  $x_0 \notin \{x_0\}'$  αφού  $\{x_0\} \setminus \{x_0\} = \emptyset = \emptyset$ , άρα  $x_0 \notin \{x_0\} \setminus \{x_0\}$ . Επίσης, αν  $x \in X \setminus \{x_0\}$ , τότε  $x \in \{x_0\}'$  αφού  $\{x_0\} \setminus \{x\} = \{x_0\} = X$ , άρα  $x \in \{x_0\} \setminus \{x\}$ .

**Πρόταση 1.2.22.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε

$$(i) \overline{A} = A' \cup A$$

$$(ii) A \text{ κλειστό αν και μόνο αν } A' \subseteq A.$$

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \overline{A} \quad (\text{Πρόταση 1.2.9}) \\ A' \subseteq \overline{A} \quad (\text{Πρόταση 1.2.13}) \end{array} \right\} \implies A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Για την αντίστροφη σχέση, αρκεί να δείξουμε ότι  $\overline{A} \setminus A \subseteq A'$ . Έστω  $x \in \overline{A} \setminus A$  και  $G \in \mathfrak{T}$  με  $x \in G$ . Αφού  $x \in \overline{A}$ , έχουμε  $A \cap G \neq \emptyset$  (Πρόταση 1.2.13). Αφού  $x \notin A$ , έχουμε  $(A \setminus \{x\}) \cap G = A \cap G \neq \emptyset$ . Επομένως  $x \in A'$ .

(ii) Άμεσο από (i). □

**Ορισμός 1.2.23.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Το σύνολο  $\overline{A} \cap (X \setminus A)$  καλείται *σύνορο* του  $A$  και συμβολίζεται  $\text{Bd } A$  ή  $\partial A$ .

**Παρατήρηση 1.2.24.** Το σύνορο ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο, ως τομή κλειστών συνόλων. Επιπλέον ισχύει ότι  $\text{Bd } A = \text{Bd } A^c$  για κάθε  $A \subseteq X$ , δηλαδή κάθε σύνολο έχει το ίδιο σύνορο με το συμπλήρωμά του.

**Πρόταση 1.2.25.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε

(i)  $\text{Bd} A = \bar{A} \setminus A^\circ$

(ii)  $\text{Bd} A \cap A^\circ = \emptyset$

(iii)  $\bar{A} = \text{Bd} A \cup A^\circ$

(iv) Τα σύνολα  $A^\circ, (X \setminus A)^\circ, \text{Bd} A$  διαμερίζουν το  $X$ .

Απόδειξη. (i)  $\text{Bd} A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \bar{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \bar{A} \setminus A^\circ$ .

(ii)  $\text{Bd} A \cap A^\circ = \emptyset$  γιατί  $\text{Bd} A \subseteq \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ .

(iii)  $\text{Bd} A \cup A^\circ = A^\circ \cup (\bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}) = A^\circ \cup (\bar{A} \cap (X \setminus A^\circ)) = \bar{A}$ .

(iv) Από το (iii) έχουμε  $\text{Bd} A \cup A^\circ = \bar{A}$  και συνεπώς

$$A^\circ \cup \text{Bd} A \cup (X \setminus A)^\circ = \bar{A} \cup (X \setminus A)^\circ = \bar{A} \cup (X \setminus \bar{A}) = X.$$

Επιπλέον,  $A^\circ \cap (X \setminus A)^\circ \subseteq A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ ,  $A^\circ \cap \text{Bd} A = \emptyset$  (από τη (ii)) και  $(X \setminus A)^\circ \cap \text{Bd} A = (X \setminus A)^\circ \cap \text{Bd}(X \setminus A) = \emptyset$  (από την (ii) για το  $X \setminus A$ ).  $\square$

**Πρόταση 1.2.26.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A, B \subseteq X$ . Τότε

(i)  $\text{Bd}(\emptyset) = \emptyset$

(ii)  $\text{Bd} A = \text{Bd}(A^c)$

(iii)  $\text{Bd}(\text{Bd} A) \subseteq \text{Bd} A$

(iv)  $A \cap B \cap \text{Bd}(A \cap B) = A \cap B \cap (\text{Bd} A \cup \text{Bd} B)$

(v) Το  $A$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν  $A \cap \text{Bd} A = \emptyset$

(vi) Το  $A$  είναι κλειστό αν και μόνο αν  $\text{Bd} A \subseteq A$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση.  $\square$





## Κεφάλαιο 2

# Τοπικές Έννοιες

### 2.1 Περιοχές και Βάσεις Περιοχών

Η προσοχή μας τώρα μεταφέρεται από τις ολικές έννοιες, που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στη συμπεριφορά της τοπολογίας κοντά σε κάθε σημείο του χώρου. Για κάθε σημείο του χώρου θα θεωρήσουμε το σύστημα περιοχών του, δηλαδή την οικογένεια των συνόλων που περιέχουν το σημείο στο εσωτερικό τους. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε οικογένειες βασικών περιοχών του σημείου, οι οποίες αποτελούν ανάλογο της οικογένειας των μπαλών με σταθερό κέντρο, οι οποίες αποτέλεσαν κεντρικό εργαλείο κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων.

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ . Ένα  $U \subseteq X$  καλείται *περιοχή του  $x$*  αν  $x \in U^\circ$ . Το σύνολο των περιοχών του  $x$  καλείται *σύστημα περιοχών του  $x$*  και συμβολίζεται με  $\mathfrak{N}_x$  (ή με  $\mathfrak{N}_x^\mathfrak{T}$  για διάκριση της τοπολογίας).

**Παρατηρήσεις 2.1.2.** (α) Ισχύει ότι

$$U \in \mathfrak{N}_x \iff \exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq U,$$

αφού  $U^\circ = \bigcup \{G \in \mathfrak{T} : G \subseteq U\}$ .

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει, δεν απαιτείται από το σύνολο  $U$  να είναι ανοικτό, για να είναι περιοχή. Για παράδειγμα, αν  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , τότε το  $(a, b]$  στο  $\mathbb{R}$  είναι περιοχή κάθε σημείου  $x \in (a, b)$  (αλλά δεν είναι περιοχή του  $b$ ), ενώ το  $(a, b]$  δεν είναι ανοικτό στο  $\mathbb{R}$ .

**Πρόταση 2.1.3.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε τα συστήματα περιοχών  $\{\mathfrak{N}_x, x \in X\}$  έχουν τις εξής ιδιότητες:

- (i) Αν  $U \in \mathfrak{N}_x$ , τότε  $x \in U$  (άρα  $U \neq \emptyset$ ).
- (ii) Αν  $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$ , τότε  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$ .
- (iii) Αν  $U \in \mathfrak{N}_x$  και  $U \subseteq V \subseteq X$ , τότε  $V \in \mathfrak{N}_x$ .
- (iv) Ένα  $G \subseteq X$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν  $G \in \mathfrak{N}_x \forall x \in G$ .
- (v) Αν  $U \in \mathfrak{N}_x$  τότε υπάρχει  $G \in \mathfrak{N}_x$  με  $G \subseteq U$  και  $G \in \mathfrak{N}_y \forall y \in G$ .

Απόδειξη. (i) Αν  $U \in \mathfrak{N}_x$ , τότε  $x \in U^\circ \subseteq U$ . Άρα  $x \in U$ .

(ii) Αν  $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$ , τότε  $x \in U_1^\circ$  και  $x \in U_2^\circ$ . Άρα  $x \in U_1^\circ \cap U_2^\circ = (U_1 \cap U_2)^\circ$ . Επομένως  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$ .

(iii) 
$$\left. \begin{array}{l} U \in \mathfrak{N}_x \Rightarrow x \in U^\circ \\ U \subseteq V \Rightarrow U^\circ \subseteq V^\circ \end{array} \right\} \implies x \in V^\circ \implies V \in \mathfrak{N}_x.$$

(iv) Έστω  $G \subseteq X$ . Το  $G$  είναι ανοικτό  $\iff G = G^\circ \iff G \subseteq G^\circ \iff$  για κάθε  $x \in G$  ισχύει  $x \in G^\circ \iff G \in \mathfrak{N}_x \forall x \in G$ .

(v) Έστω  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Υπάρχει  $G \in \mathfrak{T}$  με  $x \in G \subseteq U$  (Παρατήρηση 2.1.2 (α)). Τότε, από την (iv),  $G \in \mathfrak{N}_y \forall y \in G$ . Ειδικά, για  $y = x$  έχουμε  $G \in \mathfrak{N}_x$ .  $\square$

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα (iv) δίνει ένα χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων με χρήση της έννοιας της περιοχής. Επίσης οι ιδιότητες (i), (ii), (iii), (v) χαρακτηρίζουν την τοπολογία, κατά την έννοια του ακόλουθου Θεωρήματος, το οποίο μας παρέχει έναν επιπλέον μηχανισμό παραγωγής τοπολογιών.

**Θεώρημα 2.1.4.** Έστω  $X$  ένα σύνολο και για κάθε  $x \in X$  έστω  $\mathcal{N}_x$  μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του  $X$  με τις ιδιότητες:

(α') Αν  $U \in \mathcal{N}_x$ , τότε  $x \in U$ .

(β') Αν  $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$ , τότε  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$ .

(γ') Αν  $U \in \mathcal{N}_x$  και  $U \subseteq V \subseteq X$ , τότε  $V \in \mathcal{N}_x$ .

(δ') Αν  $U \in \mathcal{N}_x$ , τότε υπάρχει  $G \in \mathfrak{N}_x$ , τέτοιο ώστε  $G \subseteq U$  και  $G \in \mathcal{N}_y \forall y \in G$ .

Θέτουμε  $\mathfrak{T} = \{G \subseteq X : G \in \mathcal{N}_x \forall x \in G\} \cup \{\emptyset\}$ . Τότε

- $H\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία στο  $X$ .
- Το σύστημα περιοχών κάθε σημείου  $x \in X$ , ως προς την  $\mathfrak{T}$ , είναι η οικογένεια  $\mathcal{N}_x$ . Δηλαδή,  $\mathfrak{N}_x^\mathfrak{T} = \mathcal{N}_x$  για κάθε  $x \in X$ .

Απόδειξη. Η  $\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία στο  $X$ :

(i) Από τον ορισμό της  $\mathfrak{T}$ , έχουμε  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ . Ακόμη, αφού  $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$  για κάθε  $x \in X$ , υπάρχει  $U_x \in \mathcal{N}_x$ ,  $U_x \subseteq X$ . Άρα, από την ιδιότητα (γ'),  $X \in \mathcal{N}_x$  για κάθε  $x \in X$ . Συνεπώς  $X \in \mathfrak{T}$ .

(ii) Έστω  $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}$ . Αν  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , τότε προφανώς  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$ . Διαφορετικά, έστω  $x \in G_1 \cap G_2$ . Τότε  $x \in G_1$  και  $x \in G_2$ . Άρα  $G_1 \in \mathcal{N}_x$  και  $G_2 \in \mathcal{N}_x$ . Από την ιδιότητα (β') παίρνουμε ότι  $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{N}_x$ . Αφού το  $x \in G_1 \cap G_2$  ήταν τυχόν, έχουμε ότι  $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$ .

(iii) Έστω  $I$  αυθαίρετο σύνολο και  $G_i \in \mathfrak{T}$  για κάθε  $i \in I$ . Έστω  $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ . Υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $x \in G_{i_0} \in \mathfrak{T}$ . Άρα  $G_{i_0} \in \mathcal{N}_x$ . Από την ιδιότητα (γ'), παίρνουμε ότι  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{N}_x$ . Συνεπώς  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}$ .

$\mathfrak{N}_x^\mathfrak{T} = \mathcal{N}_x$  για κάθε  $x \in X$ :

Έστω  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x^\mathfrak{T}$ , μια περιοχή του  $x$  ως προς την  $\mathfrak{T}$ . Τότε  $x \in U^\circ$ , με  $U^\circ \in \mathfrak{T}$ . Άρα  $U^\circ \in \mathcal{N}_x$ . Από την ιδιότητα (γ'), παίρνουμε ότι  $U \in \mathcal{N}_x$ . Συνεπώς  $\mathfrak{N}_x^\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{N}_x \forall x \in X$ . Αντίστροφα, έστω  $U \in \mathcal{N}_x$ . Από την ιδιότητα (δ'), υπάρχει ανοικτό σύνολο  $G \in \mathfrak{N}_x$  με  $G \subseteq U$ . Από την ιδιότητα (α'), έχουμε ότι  $x \in G$ . Συνεπώς  $G \in \mathfrak{N}_x^\mathfrak{T}$ . Τώρα, αφού  $G \subseteq U$ , έπεται ότι  $U \in \mathfrak{N}_x^\mathfrak{T}$ . Άρα  $\mathcal{N}_x \subseteq \mathfrak{N}_x^\mathfrak{T}$ . Αποδείχθηκε λοιπόν ότι  $\mathfrak{N}_x^\mathfrak{T} = \mathcal{N}_x$  για κάθε  $x \in X$ .  $\square$

**Ορισμός 2.1.5.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ . Μια υποοικογένεια  $\mathfrak{B}_x$  του  $\mathfrak{N}_x$  λέγεται *βάση περιοχών του  $x$* , αν για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  υπάρχει  $B \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B \subseteq U$ . Τα στοιχεία της  $\mathfrak{B}_x$  λέγονται *βασικές περιοχές του  $x$* . Η  $\mathfrak{B}_x$  (για διάκριση της τοπολογίας) συμβολίζεται και με  $\mathfrak{B}_x^{\mathfrak{T}}$ .

**Παρατήρηση 2.1.6.** Αν για κάθε  $x \in X$  δοθεί μια βάση περιοχών  $\mathfrak{B}_x$  του  $x$ , το σύστημα περιοχών του  $x$  είναι το σύνολο

$$\mathfrak{N}_x = \{U \subseteq X : \exists B \in \mathfrak{B}_x \text{ με } B \subseteq U\}.$$

Δηλαδή ένα υποσύνολο του  $X$  είναι περιοχή του  $x$  αν και μόνο αν περιέχει μια βασική περιοχή του  $x$  (η ισότητα εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.1.3 (iii)).

**Παραδείγματα 2.1.7.** (α) Το  $\mathfrak{N}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ .

(β) Αν  $\mathfrak{B}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ , τότε  $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{N}_x \iff \forall B \in \mathfrak{B}_x \text{ και } U \subseteq X \text{ με } B \subseteq U \text{ ισχύει } U \in \mathfrak{B}_x$ . Πράγματι,

( $\Rightarrow$ ) Από Πρόταση 2.1.3 (iii).

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε, από τον ορισμό της βάσης περιοχών, υπάρχει  $B \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B \subseteq U$ . Από την υπόθεση, έπεται ότι  $U \in \mathfrak{B}_x$ . Άρα  $\mathfrak{N}_x \subseteq \mathfrak{B}_x$  και επομένως  $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{B}_x$ .

(γ) Η οικογένεια  $\mathfrak{B}_x = \{G \subseteq X : G \text{ ανοικτό και } x \in G\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$ : Προφανώς  $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  και για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$ , το  $U^\circ \in \mathfrak{B}_x$  και  $U^\circ \subseteq U$ .

(δ) Σε κάθε μετρικό χώρο  $(X, \rho)$ , η οικογένεια  $\mathfrak{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$  (για κάθε  $x \in X$ ). Πράγματι  $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  γιατί κάθε  $B(x, \varepsilon)$  είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $x$ . Αν  $U$  είναι μια περιοχή του  $x$  ( $U \in \mathfrak{N}_x$ ), τότε  $x \in U^\circ$ , άρα υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε  $B(x, \varepsilon) \subseteq U^\circ \subseteq U$ , όπου  $B(x, \varepsilon) \in \mathfrak{B}_x$ . Ανάλογα, οι οικογένειες  $\{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$  και  $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$  είναι βάσεις περιοχών του  $x$ .

(ε) Σε κάθε διακριτό τοπολογικό χώρο, η  $\mathfrak{B}_x = \{\{x\}\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$ , αφού  $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  και για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  έχουμε  $\{x\} \in \mathfrak{B}_x$  και  $\{x\} \subseteq U$ .

**Πρόταση 2.1.8.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και για κάθε  $x \in X$ , έστω  $\mathfrak{B}_x$  βάση περιοχών του  $x$ . Τότε

(i) Αν  $B \in \mathfrak{B}_x$ , τότε  $x \in B$  (άρα  $B \neq \emptyset$ ).

(ii) Αν  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_x$ , τότε υπάρχει  $B_3 \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

(iii) Ένα  $G \subseteq X$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $B_x \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B_x \subseteq G$ .

(iv) Αν  $B \in \mathfrak{B}_x$ , τότε υπάρχει  $G \subseteq X$  ώστε  $x \in G \subseteq B$  και  $\forall y \in G \exists B_y \in \mathfrak{B}_y$  ώστε  $B_y \subseteq G$ .

*Απόδειξη.* (i) Αν  $B \in \mathfrak{B}_x$ , τότε  $B \in \mathfrak{N}_x$ . Άρα από Πρόταση 2.1.3 (i),  $x \in B$ .

(ii) Αν  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_x$ , τότε  $B_1, B_2 \in \mathfrak{N}_x$ . Άρα, από Πρόταση 2.1.3 (ii),  $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{N}_x$ . Άρα, αφού  $\mathfrak{B}_x$  βάση περιοχών του  $x$ , υπάρχει  $B_3 \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

(iii)  $G$  ανοικτό  $\iff G \in \mathfrak{N}_x \forall x \in G$  (Πρόταση 2.1.3 (iv))  $\iff \forall x \in G \exists B_x \in \mathfrak{B}_x$  ώστε  $B_x \subseteq G$  (Παρατήρηση 2.1.6).

(iv) Έστω  $B \in \mathfrak{B}_x$ . Τότε  $B \in \mathfrak{N}_x$ , άρα υπάρχει  $G \subseteq X$  ανοικτό, ώστε  $x \in G \subseteq B$ . Από την (iii), για κάθε  $y \in G$  υπάρχει  $B_y \in \mathfrak{B}_y$  ώστε  $B_y \subseteq G$ .  $\square$

Το ακόλουθο Θεώρημα δίνει μια επιπλέον μέθοδο κατασκευής τοπολογιών, ανάλογη με τη μέθοδο του Θεωρήματος 2.1.4, αυτή τη φορά με κεντρική έννοια τη βασική περιοχή.

**Θεώρημα 2.1.9.** Έστω  $X$  ένα σύνολο και για κάθε  $x \in X$  έστω  $\mathcal{B}_x$  μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του  $X$  με τις ιδιότητες:

- (α') Αν  $B \in \mathcal{B}_x$ , τότε  $x \in B$ .
- (β') Αν  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ , τότε υπάρχει  $B_3 \in \mathcal{B}_x$  ώστε  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .
- (γ') Αν  $B \in \mathcal{B}_x$ , τότε υπάρχει  $G \subseteq X$ , τέτοιο ώστε  $x \in G \subseteq B$  και για κάθε  $y \in G$  υπάρχει  $B_y \in \mathcal{B}_y$  ώστε  $B_y \subseteq G$ .

Θέτουμε  $\mathfrak{T} = \{G \subseteq X : \text{για κάθε } x \in G \text{ υπάρχει } B \in \mathcal{B}_x \text{ ώστε } B \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}$ . Τότε

- $H\mathfrak{T}$  είναι τοπολογία στο  $X$ .
- Για κάθε  $x \in X$  η οικογένεια  $\mathcal{B}_x$  είναι μια βάση περιοχών του  $x$  ως προς την τοπολογία  $\mathfrak{T}$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 2.1.4 και γι' αυτό αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Θεώρημα 2.1.10** (Κριτήριο Hausdorff). Έστω  $X$  σύνολο και  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  δύο τοπολογίες στο  $X$ . Για κάθε  $x \in X$  έστω  $\mathfrak{B}_x^1, \mathfrak{B}_x^2$  βάσεις περιοχών του  $x$  ως προς  $\mathfrak{T}_1$  και  $\mathfrak{T}_2$  αντίστοιχα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α')  $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$
- (β') Για κάθε  $x \in X$  και κάθε  $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$ , υπάρχει  $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$  ώστε  $B_2 \subseteq B_1$ .

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνθήκη:

- (γ')  $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$  για κάθε  $x \in X$

όπου  $\mathfrak{N}_x^1, \mathfrak{N}_x^2$  είναι τα συστήματα περιοχών του  $x$  ως προς  $\mathfrak{T}_1$  και  $\mathfrak{T}_2$  αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι (α')  $\iff$  (γ')  $\iff$  (β').

(α')  $\implies$  (γ') Έστω  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x^1$ . Τότε υπάρχει  $G \in \mathfrak{T}_1$  ώστε  $x \in G \subseteq U$ . Από το (α') έπεται ότι  $G \in \mathfrak{T}_2$ . Άρα  $U \in \mathfrak{N}_x^2$ . Επομένως  $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$ .

(γ')  $\implies$  (α') Έστω  $G \in \mathfrak{T}_1$ . Τότε  $G \in \mathfrak{N}_x^1 \forall x \in G$  (Πρόταση 2.1.3 (iv)). Από το (γ') έπεται ότι  $G \in \mathfrak{N}_x^2 \forall x \in G$ . Άρα  $G \in \mathfrak{T}_2$ . Επομένως  $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$ .

(γ')  $\implies$  (β') Έστω  $x \in X$  και  $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$ . Τότε  $B_1 \in \mathfrak{N}_x^1$ , άρα από το (γ'),  $B_1 \in \mathfrak{N}_x^2$ . Αφού  $\mathfrak{B}_x^2$  είναι βάση περιοχών του  $x$  ως προς  $\mathfrak{T}_2$ , έπεται ότι υπάρχει  $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$  με  $B_2 \subseteq B_1$ .

(β')  $\implies$  (γ') Έστω  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x^1$ . Αφού  $\mathfrak{B}_x^1$  είναι βάση περιοχών του  $x$  ως προς  $\mathfrak{T}_1$ , υπάρχει  $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$  ώστε  $B_1 \subseteq U$ . Από το (β'), υπάρχει  $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$  ώστε  $B_2 \subseteq B_1$ . Τότε  $B_2 \subseteq U$  κι έτσι  $U \in \mathfrak{N}_x^2$ . Επομένως  $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$ .  $\square$

**Πρόταση 2.1.11.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ . Τότε, η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T} \iff$  για κάθε  $x \in X$  η οικογένεια  $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$ .

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό βάσης για την  $\mathfrak{T}$  (Πρόταση 1.1.13).

( $\Rightarrow$ ) Έστω  $x \in X$ . Έχουμε  $\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  διότι κάθε στοιχείο της  $\mathcal{B}_x$  είναι ανοικτό (από την υπόθεση) και περιέχει το  $x$ . Έστω  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε  $x \in U^\circ \in \mathfrak{T}$ . Αφού  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ , από την Πρόταση 1.1.13, υπάρχει  $B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U^\circ$ . Προφανώς  $B \in \mathcal{B}_x$  και  $B \subseteq U$ . Έπεται ότι η  $\mathcal{B}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $G \in \mathfrak{T}$  και  $x \in G$ . Τότε  $G \in \mathfrak{N}_x$ . Αφού  $\mathcal{B}_x$  βάση περιοχών του  $x$ , υπάρχει  $B \in \mathcal{B}_x$ , ώστε  $B \subseteq G$ . Τότε  $B \in \mathcal{B}$  και  $x \in B \subseteq G$ . Άρα, από την Πρόταση 1.1.13, η  $\mathcal{B}$  είναι βάση περιοχών για την  $\mathfrak{T}$ .  $\square$

Συμπεραίνουμε ότι ολικά ερωτήματα, όπως το αν μια τοπολογία είναι ισχυρότερη από μια άλλη, μεταφράζονται και απαντώνται πλήρως με χρήση τοπικών εννοιών, όπως οι βάσεις περιοχών.

## 2.2 Φίλτρα και Υπερφίλτρα

<sup>1</sup> Η έννοια του φίλτρου και αντίστοιχα, του υπερφίλτρου, αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο τόσο για τη Θεωρία Συνόλων όσο και για την Τοπολογία. Η σημασία των υπερφίλτρων είναι φανερή κατά την περιγραφή της συμπαγοποίησης Stone-Čech του συνόλου των φυσικών αριθμών, αλλά και μέσα από τις πλούσιες εφαρμογές. Μια μη τετριμμένη εφαρμογή αποτελεί η απόδειξη του Θεωρήματος Ramsey, την οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Οι ιδιότητες ενός συστήματος περιοχών και μιας βάσης περιοχών ενός σημείου σε έναν τοπολογικό χώρο παρουσιάζουν ιδιαίτερο συνολοθεωρητικό ενδιαφέρον γι' αυτό απομονώνονται στον ορισμό του φίλτρου.

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω ένα σύνολο  $X$  και  $\mathcal{F}$  μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του  $X$ . Η  $\mathcal{F}$  καλείται *φίλτρο* στο  $X$  αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- (i)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- (ii) Αν  $A, B \in \mathcal{F}$ , τότε και  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .
- (iii) Αν  $A \in \mathcal{F}$  και  $B \supseteq A$ , τότε  $B \in \mathcal{F}$ .

Σε αυτό το σημείο θα ήταν γόνιμο να αναρωτηθεί κανείς, τι θα σήμαινε η φράση «μεγάλο» υποσύνολο του  $X$ . Με άλλα λόγια, τι είδους ιδιότητες θα αναμέναμε να ικανοποιεί μια οικογένεια  $\mathcal{L}$ , «μεγάλων» υποσυνόλων του  $X$ ; Παραθέτουμε κάποιες μάλλον φυσιολογικές ιδιότητες:

- $X \in \mathcal{L}$  και  $\emptyset \notin \mathcal{L}$ .
- Αν  $A \in \mathcal{L}$  και  $B \supseteq A$ , τότε  $B \in \mathcal{L}$ .

Υπάρχουν κι άλλες ιδιότητες, με περιθώρια διαπραγμάτευσης. Δύο πιθανές είναι οι:

- Δεν μπορεί να υπάρχουν  $A, B \in \mathcal{L}$ , με  $A \cap B = \emptyset$ .
- Αν  $A \in \mathcal{L}$  και  $B \notin \mathcal{L}$  για κάποιο  $B \subseteq A$ , τότε  $A \setminus B \in \mathcal{L}$ .

Η τελευταία ιδιότητα εμπεριέχει μια έννοια σταθερότητας για την οικογένεια  $\mathcal{L}$ : ένα μεγάλο σύνολο δεν μπορεί να γίνει μη-μεγάλο εξαιτίας μιας αφαίρεσης ενός μη-μεγάλου υποσυνόλου του. Μια συνέπεια αυτού είναι το ότι αν  $A, B \in \mathcal{L}$ , τότε και  $A \cap B \in \mathcal{L}$ . Αυτό διότι, αν  $A \cap B \notin \mathcal{L}$ , τότε τα σύνολα  $A \setminus (A \cap B)$  και  $B \setminus (A \cap B)$  ανήκουν στο  $\mathcal{L}$ , αλλά είναι ξένα. Η έννοια του υπερφίλτρου αποτυπώνει πλήρως τη φύση του «μεγάλου συνόλου», όπως αυτή περιγράφεται από τις τέσσερις ιδιότητες που αναφέραμε.

<sup>1</sup> (Συμπλήρωμα από τον Μ. Γεραπετρίτη. Δεν διδάχθηκε)

**Ορισμός 2.2.2.** Ένα φίλτρο καλείται *υπερφίλτρο* αν είναι μεγιστικό ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Δηλαδή, ένα φίλτρο στο  $X$  είναι υπερφίλτρο αν δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα φίλτρο στο  $X$ .

**Παράδειγμα 2.2.3.** Για ένα μη κενό  $S \subseteq X$ , το σύνολο  $\mathcal{F}(S) = \{A \subseteq X : S \subseteq A\}$  είναι ένα φίλτρο. Το  $\mathcal{F}(S)$  είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν  $S = \{x\}$ , μονοσύνολο. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε  $\mathcal{F}(x)$  αντί του  $\mathcal{F}(S)$ .

**Ορισμός 2.2.4.** Ένα υπερφίλτρο  $\mathcal{F}$  καλείται *πρωταρχικό* (ή *τετριμμένο*) αν υπάρχει  $x \in X$  ώστε  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ .

**Ορισμός 2.2.5.** Θα λέμε ότι μια μη κενή οικογένεια  $\mathcal{I}$  υποσυνόλων του  $X$  έχει την *ιδιότητα της πεπερασμένης τομής* αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{I}$  ισχύει ότι  $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ .

**Παράδειγμα 2.2.6.** Κάθε φίλτρο έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

**Πρόταση 2.2.7.** Αν  $\mathcal{F}$  είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του  $X$  με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο  $\mathcal{F}'$  στο  $X$  με  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ . Ιδιαίτερα, κάθε φίλτρο περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την οικογένεια

$$\Gamma = \{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X) : \text{με } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \text{ και η } \mathcal{I} \text{ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής}\}$$

Στην οικογένεια  $\Gamma$  θεωρούμε τη μερική διάταξη  $(\Gamma, \prec)$  με  $\mathcal{I}_1 \prec \mathcal{I}_2 \iff \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ . Έστω  $\mathcal{C}$  μια αλυσίδα στη  $\Gamma$ . Τότε η  $\mathcal{I} = \bigcup \mathcal{C} \in \Gamma$ . Πράγματι, έχουμε προφανώς ότι  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$  και αν  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{I}$ , τότε υπάρχει στοιχείο της αλυσίδας  $\mathcal{I}_0$  που να περιέχει όλα τα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  και αφού  $\mathcal{I}_0 \in \Gamma$ , έχουμε ότι  $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ . Άρα κάθε αλυσίδα στη  $\Gamma$  έχει άνω φράγμα. Συνεπώς, από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο  $\mathcal{F}' \in \Gamma$ . Ισχυριζόμαστε ότι το  $\mathcal{F}'$  είναι υπερφίλτρο. Πράγματι,

- $\emptyset \notin \mathcal{F}'$  αφού το  $\mathcal{F}'$  έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
- Αν  $A \in \mathcal{F}'$  και  $B \supseteq A$ , τότε  $B \in \mathcal{F}'$ , διότι διαφορετικά θα μπορούσαμε να επισυνάψουμε το  $B$  στο  $\mathcal{F}'$  χωρίς να βλάψουμε την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
- Αν  $A, B \in \mathcal{F}'$ , τότε  $A \cap B \in \mathcal{F}'$ , για τον ίδιο λόγο.

Έτσι, το  $\mathcal{F}'$  είναι φίλτρο. Αν  $\mathcal{G}$  είναι φίλτρο με  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$ , τότε  $\mathcal{G} \in \Gamma$  και από τη μεγιστικότητα του  $\mathcal{F}'$ , έπεται  $\mathcal{G} = \mathcal{F}'$ . Άρα το  $\mathcal{F}'$  είναι υπερφίλτρο.  $\square$

**Πόρισμα 2.2.8.** Έστω  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{G}$  υπερφίλτρα στο  $X$ . Τότε

- (i) Αν για ένα  $B \subseteq X$  ισχύει ότι  $B \cap A \neq \emptyset$  για κάθε  $A \in \mathcal{F}$ , τότε:  $B \in \mathcal{F}$ .
- (ii) Αν για  $A, B \subseteq X$  ισχύει ότι  $B \cup A \in \mathcal{F}$ , τότε το  $\mathcal{F}$  περιέχει τουλάχιστον ένα από τα  $A, B$ .
- (iii) Αν  $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ , τότε υπάρχουν  $A \in \mathcal{F}$  και  $B \in \mathcal{G}$  ώστε  $A \cap B = \emptyset$ .

*Απόδειξη.* (i) Παρατηρούμε ότι η οικογένεια  $\mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$  είναι μη κενή και έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, συνεπώς επεκτείνεται σε ένα υπερφίλτρο  $\mathcal{F}'$ . Έχουμε ότι  $B \in \mathcal{F}'$ , αλλά και  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  (γιατί;). Άρα  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$  και  $B \in \mathcal{F}$ .

(ii) Αν  $A, B \notin \mathcal{F}$ , τότε από (i), υπάρχουν  $C, D \in \mathcal{F}$  ώστε  $A \cap C = \emptyset$  και  $B \cap D = \emptyset$ . Άρα  $(A \cup B) \cap (C \cap D) = \emptyset$  και αφού  $C \cap D \in \mathcal{F}$  έχουμε ότι  $A \cup B \notin \mathcal{F}$ , πράγμα άτοπο.

(iii) Αφού  $\mathcal{G} \not\subseteq \mathcal{F}$ , υπάρχει  $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ . Άρα, από (i), υπάρχει  $A \in \mathcal{F}$  με  $A \cap B = \emptyset$ .  $\square$

Με επαγωγή, μπορούμε να γενικεύσουμε τη (ii) του Πορίσματος 2.2.8 ως εξής:

**Πόρισμα 2.2.9.** Έστω  $\mathcal{F}$  ένα υπερφίλτρο και  $A \in \mathcal{F}$ . Αν το  $A$  γράφεται  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , τότε τουλάχιστον ένα από τα  $A_i$  ανήκει στο  $\mathcal{F}$ . Αν επιπλέον τα  $A_i$  είναι ξένα ανά δύο, τότε ακριβώς ένα από τα  $A_i$  ανήκει στο  $\mathcal{F}$ .

Δίνουμε τώρα ένα χαρακτηρισμό των υπερφίλτρων.

**Πρόταση 2.2.10.** Έστω  $X$  ένα σύνολο και  $\mathcal{F}$  μια οικογένεια υποσυνόλων του  $X$ . Η  $\mathcal{F}$  είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

(ii) Αν  $A, B \in \mathcal{F}$ , τότε  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

(iii) Για κάθε  $A \subseteq X$ , είτε  $A \in \mathcal{F}$  είτε  $A^c \in \mathcal{F}$ .

Ιδιαίτερα, ένα φίλτρο  $\mathcal{G}$  στο  $X$  είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν για κάθε  $A \subseteq X$ , είτε  $A \in \mathcal{G}$  είτε  $A^c \in \mathcal{G}$ .

*Απόδειξη.* Αν η  $\mathcal{F}$  είναι υπερφίλτρο, τότε προφανώς ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Αντίστροφα, έστω ότι η  $\mathcal{F}$  ικανοποιεί τις (i), (ii), (iii). Έστω  $A \in \mathcal{F}$  και  $B \supseteq A$ . Υποθέτοντας ότι  $B \notin \mathcal{F}$  παίρνουμε ότι  $B^c \in \mathcal{F}$  και έτσι  $A \cap B^c = \emptyset \in \mathcal{F}$ , πράγμα άτοπο. Συνεπώς η  $\mathcal{F}$  είναι φίλτρο. Η μεγιστικότητα εξασφαλίζεται από την (iii).  $\square$

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε είναι η ύπαρξη μη τετριμμένων υπερφίλτρων.

**Πρόταση 2.2.11.** Έστω  $X$  ένα άπειρο σύνολο. Τότε υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο  $X$ . Επιπλέον, κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο.

*Απόδειξη.* Για ένα άπειρο σύνολο  $X$ , η οικογένεια  $\mathcal{C}$  των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του  $X$  (δηλαδή των συνόλων με πεπερασμένο συμπλήρωμα) έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Άρα, από Πρόταση 2.2.7, η  $\mathcal{C}$  περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο  $\mathcal{F}$ , το οποίο είναι βέβαια μη τετριμμένο (γιατί:). Το ότι κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο, έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.2.8 (ii).  $\square$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε έναν τοπολογικό χώρο που θα μας απασχολήσει αρκετά στο μέλλον.

**Παράδειγμα 2.2.12.** Έστω  $\mathcal{F}$  ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών (η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίστηκε από την Πρόταση 2.2.11). Ορίζουμε το σύνολο

$$\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{F}\}$$

και θέτουμε για τα στοιχεία του  $\Sigma$ :

$$\mathfrak{B}_n = \{\{n\}\} \text{ για } n \in \mathbb{N} \text{ και } \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} = \{A \cup \{\mathcal{F}\} : A \in \mathcal{F}\}$$

Οι οικογένειες  $\mathfrak{B}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ικανοποιούν με τετριμμένο τρόπο τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1.9. Ελέγχουμε τις συνθήκες για την  $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ .



- (α) Προφανώς  $\mathcal{F} \in A \cup \{\mathcal{F}\}$  για κάθε  $A \cup \mathcal{F} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$
- (β) Αν  $A_1 \cup \{\mathcal{F}\}, A_2 \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ , τότε  $(A_1 \cup \{\mathcal{F}\}) \cap (A_2 \cup \{\mathcal{F}\}) = (A_1 \cap A_2) \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ , αφού  $(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{F}$  (το  $\mathcal{F}$  είναι φίλτρο).
- (γ) Αν  $A \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ , θέτουμε  $G = A \cup \{\mathcal{F}\}$ . Προφανώς  $\mathcal{F} \in G \subseteq A \cup \{\mathcal{F}\}$ . Έστω τώρα  $y \in G$ . Αν  $y = \mathcal{F}$ , θέτουμε  $B_y = G \in \mathfrak{B}_y$  και έχουμε τετριμμένα  $B_y \subseteq G$ . Αν  $y \in A$ , θέτουμε  $B_y = \{y\} \in \mathfrak{B}_y$  και έχουμε ότι  $B_y \subseteq G$ .

Άρα, από το Θεώρημα 2.1.9, υπάρχει τοπολογία  $\mathfrak{T}$  στο  $\Sigma$  στην οποία κάθε  $x \in \Sigma$  έχει τη  $\mathfrak{B}_x$  ως βάση περιοχών του.

Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο  $n \in \mathbb{N}$  είναι μεμονωμένο στοιχείο του  $\Sigma$ , ενώ το  $\mathcal{F}$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $\Sigma$ . Επίσης, το  $\mathbb{N}$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $\Sigma$ . Το ότι το  $\mathcal{F}$  είναι υπερφίλτρο δε χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά για τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου  $\Sigma$ . Η χρησιμότητα θα φανεί, όταν επιστρέψουμε στη μελέτη του χώρου  $\Sigma$  και των ιδιοτήτων του.

Κλείνουμε αυτήν την αναφορά μας στα φίλτρα και τις ιδιότητές τους με μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή. Σημειώνουμε ότι για ένα σύνολο  $S$  και έναν αριθμό  $n \in \mathbb{N}$  θα συμβολίζουμε με  $[S]^n$  το σύνολο  $\{A \subseteq S : |A| = n\}$ , δηλαδή την οικογένεια των υποσυνόλων του  $S$  με ακριβώς  $n$  στοιχεία.

**Θεώρημα 2.2.13 (Ramsey).** Έστω  $X$  ένα άπειρο σύνολο,  $n, r \in \mathbb{N}$  κι έστω ότι  $[X]^n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ . Τότε υπάρχει  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  και ένα άπειρο υποσύνολο  $S$  του  $X$ , έτσι ώστε  $[S]^n \subseteq A_j$

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη, ας εξηγήσουμε λίγο το όλο πλαίσιο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σύνολα  $A_i$  που καλύπτουν το  $[X]^n$  είναι ανά δύο ξένα (γιατί:). Ακόμη, συνηθίζουμε να σκεφτόμαστε τους αριθμούς  $1, 2, \dots, r$  ως ένα πεπερασμένο πλήθος χρωμάτων κι ότι ένα σύνολο  $\tilde{x} \in [X]^n$  έχει το χρώμα  $i$  αν  $\tilde{x} \in A_i$ . Τότε το Θεώρημα ανάγεται στο ότι, αν το σύνολο  $[X]^n$  χρωματιστεί με πεπερασμένο πλήθος χρωμάτων, τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο  $S$  του  $X$ , έτσι ώστε το  $[S]^n$  να είναι μονοχρωματικό.

*Απόδειξη.* Περνώντας σε ένα υποσύνολο του  $X$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $X$  είναι αριθμήσιμο (άπειρο) σύνολο. Χάρην απλότητας, αντικαθιστούμε το σύνολο  $X$  με ένα σύνολο ίδιου πληθαιρίθμου, το  $\mathbb{N}$  εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη.

Για  $n = 1$ , το συμπέρασμα είναι άμεσο από την αρχή του Περιστερεώνα. Παρουσιάζουμε την απόδειξη για την απλούστερη μη τετριμμένη περίπτωση,  $n = 2$ . Η γενική περίπτωση αφήνεται ως άσκηση. Ουσιαστικά θα εργασθούμε με τη συνάρτηση χρωματισμού

$$c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow I = \{1, 2, \dots, r\} \text{ με } c(\{x, y\}) = i \iff \{x, y\} \in A_i$$

Έστω  $\mathcal{F}$  ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο του  $\mathbb{N}$ . Για  $i \in I$  και  $x \in X$  θέτουμε

$$A_i(x) = \{y \in \mathbb{N} : c(\{x, y\}) = i\}.$$

Τότε για κάθε  $x \in \mathbb{N}$  τα σύνολα  $A_i(x)$  είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους είναι το σύνολο  $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$ , αφού το  $\mathcal{F}$  είναι μη τετριμμένο. Έπεται ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $i \in I$  τέτοιο ώστε  $A_i(x) \in \mathcal{F}$ . Στη συνέχεια θέτουμε

$$B_j = \{x \in \mathbb{N} : A_j(x) \in \mathcal{F}\}.$$

Τα  $B_j$  καλύπτουν το  $\mathbb{N}$  και από τα παραπάνω προκύπτει ότι επιπλέον είναι ζένα ανά δύο. Έτσι, υπάρχει μοναδικό  $j_0 \in I$  ώστε  $B_{j_0} \in \mathcal{F}$ .

Για την κατασκευή του μονοχρωματικού υποσυνόλου εργαζόμαστε επαγωγικά. Έστω  $a_1 \in B_{j_0}$  τυχόν. Αν έχουμε επιλέξει  $a_1, a_2, \dots, a_m$  έτσι ώστε  $c(\{a_s, a_t\}) = j_0$  για κάθε  $s, t \in \{1, \dots, m\}$  με  $s \neq t$ , ορίζουμε

$$S = B_{j_0} \cap \left( \bigcap_{s=1}^m A_{j_0}(a_s) \right).$$

Το  $S$  είναι πεπερασμένη τομή στοιχείων του  $\mathcal{F}$ , άρα  $S \in \mathcal{F}$ . Επιλέγουμε στοιχείο  $a_{m+1} \in S \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Αυτό είναι εφικτό, αφού το  $\mathcal{F}$  είναι μη τετριμμένο και κατά συνέπεια κάθε στοιχείο του είναι άπειρο (Πρόταση 2.2.11).  $\square$



## Κεφάλαιο 3

# Σύγκλιση και Συνέχεια

### 3.1 Σύγκλιση Δικτύων

Για τη μελέτη των μετρικών χώρων και των τοπολογικών ιδιοτήτων τους, κεντρικής σημασίας μέσο αποτέλεσαν οι ακολουθίες. Η χρησιμότητά τους εντοπίστηκε σε κομβικά σημεία, όπως στο χαρακτηρισμό της κλειστής θήκης ενός συνόλου ή της συνέχειας μιας συνάρτησης (αρχή της μεταφοράς). Ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθιών γενικεύεται φυσιολογικά για ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Για το λόγο αυτό, φαίνεται δόκιμο το να εξετάσουμε κατά πόσο η έννοια της ακολουθίας είναι ικανή να διατηρήσει τον κεντρικό αυτό ρόλο στην ευρύτερη κλάση των τοπολογικών χώρων.

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μια ακολουθία στο  $X$  και  $x \in X$ . Λέμε ότι η ακολουθία  $(x_n)$  συγκλίνει στο  $x$  (θα γράφουμε  $x_n \rightarrow x$ ) αν για κάθε περιοχή  $U \in \mathfrak{N}_x$  υπάρχει  $n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$  ώστε  $x_n \in U$  για κάθε  $n \geq n_0$ .

**Παρατήρηση 3.1.2.** Είναι εμφανές ότι αν η ακολουθία  $(x_n)$  συγκλίνει στο  $x$ , τότε κάθε υπακολουθία  $(x_{k_n})$  της  $(x_n)$  συγκλίνει στο  $x$ .

**Παραδείγματα 3.1.3.** (α) Στον τοπολογικό χώρο  $(\mathbb{N}, \mathfrak{T})$ , όπου  $\mathfrak{T}$  η συμπεπερασμένη τοπολογία, η ακολουθία  $(x_n)$  με  $x_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$  συγκλίνει σε κάθε  $x \in \mathbb{N}$ . Πράγματι, έστω  $x \in \mathbb{N}$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε  $x \in U^\circ \in \mathfrak{T}$ , άρα  $X \setminus U^\circ$  πεπερασμένο άρα προφανώς  $X \setminus U$  πεπερασμένο. Άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $x_n \notin X \setminus U$  για κάθε  $n \geq n_0$ , δηλαδή  $x_n \in U$ . Επομένως  $x_n \rightarrow x$ .

(β) Στον τοπολογικό χώρο  $(X, \mathfrak{T})$ , όπου  $X$  υπεραριθμήσιμο σύνολο και  $\mathfrak{T}$  η συναριθμησιμη τοπολογία, παρατηρούμε τα εξής:

- Αν  $(x_n)$  ακολουθία στο  $X$  και  $x \in X$  ώστε  $x_n \rightarrow x$ , τότε η  $(x_n)$  είναι τελικά σταθερή και ίση με  $x$  (δηλαδή υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $x_n = x$  για  $n \geq n_0$ ). Έστω, προς άτοπο, ότι η  $(x_n)$  δεν είναι τελικά σταθερή και ίση με  $x$ . Τότε το  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$  είναι άπειρο σύνολο. Άρα υπάρχει  $(x_{k_n})$  υπακολουθία της  $(x_n)$  με  $x_{k_n} \neq x$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Θέτουμε  $U = X \setminus \{x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Το σύνολο  $\{x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$  είναι αριθμήσιμο και δεν περιέχει το  $x$ , οπότε  $x \in U$  και  $U \in \mathfrak{T}$ , άρα  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Ακόμη  $x_{k_n} \notin U$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επομένως η  $(x_{k_n})$  δεν συγκλίνει στο  $x$ , πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το ότι  $x_n \rightarrow x$ .
- $X' = X$  (κάθε σημείο του  $X$  είναι σημείο συσσώρευσης). Πράγματι, έστω  $x \in X$ . Τότε για κάθε  $U$  ανοικτό με  $x \in U$  έχουμε  $U \cap X \setminus \{x\} = U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ , αφού το  $U$  είναι υπεραριθμήσιμο (γιατί;). Επομένως  $x \in X'$ .

Έτσι, για κάθε  $x \in X$  έχουμε  $x \in \overline{X \setminus \{x\}}$ , αλλά δεν υπάρχει ακολουθία  $(x_n)$  στο  $X \setminus \{x\}$ , ώστε  $x_n \rightarrow x$ .

Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ότι οι ακολουθίες (σε γενικούς τοπολογικούς χώρους), όχι μόνο δεν έχουν τις συνηθισμένες «καλές» ιδιότητες που έχουν σε μετρικούς χώρους, όπως η μοναδικότητα του ορίου (Παράδειγμα 3.1.3(α)), αλλά είναι και ανεπαρκείς για την πλήρη περιγραφή εννοιών, όπως αυτή της κλειστής θήκης (Παράδειγμα 3.1.3(β)). Έτσι, η έννοια της ακολουθίας φαίνεται να είναι μάλλον ανεπαρκής για τους σκοπούς μας. Το πρόβλημα εντοπίζεται, κατά κύριο λόγο, στο ότι είναι δυνατόν σε έναν τοπολογικό χώρο να μην υπάρχει βάση περιοχών ενός σημείου που να είναι αριθμήσιμη. Επομένως, αν επιθυμούμε να γενικεύσουμε την έννοια της ακολουθίας έτσι ώστε το νέο αντικείμενο να είναι ικανό να περιγράψει έναν τοπολογικό χώρο, όπως ακριβώς οι ακολουθίες στην περίπτωση των μετρικών χώρων, θα πρέπει να επιτρέψουμε στο αντικείμενο αυτό έχει σύνολα «δεικτών» αυθαίρετα «μεγάλα» (τα οποία θα εφοδιάζονται με την ελάχιστη ικανή έννοια διάταξης).

**Ορισμός 3.1.4.** Ένα σύνολο  $\Lambda$  λέγεται *κατευθυνόμενο* αν είναι εφοδιασμένο με μια σχέση  $\leq$  που είναι αυτοπαθής (δηλαδή  $a \leq a$  για κάθε  $a \in \Lambda$ ) και μεταβατική (δηλαδή αν  $a, b, c \in \Lambda$  με  $a \leq b$  και  $b \leq c$ , τότε  $a \leq c$ )<sup>1</sup> και επιπλέον ικανοποιεί την συνθήκη:

για κάθε  $a, b \in \Lambda$  υπάρχει  $c \in \Lambda$  ώστε  $a \leq c$  και  $b \leq c$ .

Όταν  $a \leq b$ , λέμε ότι ο  $a$  προηγείται του  $b$ .

**Παραδείγματα 3.1.5.** (α) Κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Ειδικά τα  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  είναι κατευθυνόμενα με τη συνήθη διάταξη.

(β) Το δυναμοσύνολο  $\mathcal{P}(X)$  κάθε συνόλου  $X$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο με τις:

$$A \leq_1 B \iff A \subseteq B \quad \text{και} \quad A \leq_2 B \iff A \supseteq B.$$

(γ) Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ . Το  $\mathfrak{N}_x$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο με την

$$U \leq V \iff U \supseteq V \quad (*)$$

Πράγματι, το  $(\mathfrak{N}_x, \leq)$  είναι προφανώς προδιατεταγμένο. Έστω τώρα  $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε για το  $U = U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$  έχουμε ότι  $U_1 \leq U$  και  $U_2 \leq U$ .

Γενικότερα, αν  $\mathfrak{B}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ , τότε το  $\mathfrak{B}_x$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο με την (\*).

**Ορισμοί 3.1.6.** (α) Έστω  $X$  σύνολο. Ένα δίκτυο στο  $X$  είναι μια συνάρτηση  $p : \Lambda \rightarrow X$ , όπου  $(\Lambda, \leq)$  είναι κατευθυνόμενο μη κενό σύνολο. Θέτουμε  $p_\lambda \equiv p(\lambda)$  και συμβολίζουμε το δίκτυο  $p$  με  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ή με  $(p_\lambda)$ .

(β) Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ένα δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ . Λέμε ότι το δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  συγκλίνει στο  $x$ , αν για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  υπάρχει  $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in U$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ . Γράφουμε τότε  $p_\lambda \rightarrow x$  ή  $\lim_\lambda p_\lambda = x$ .

**Παρατήρηση 3.1.7.** Προφανώς κάθε ακολουθία στο  $X$  είναι δίκτυο με κατευθυνόμενο σύνολο το  $(\mathbb{N}, \leq)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, ο ορισμός της σύγκλισης δικτύου συμπίπτει με το γνωστό ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας.

<sup>1</sup>αλλά όχι κατ' ανάγκην αντισυμμετρική, δηλ. οι σχέσεις  $a \leq b$  και  $b \leq a$  δεν συνεπάγονται κατ' ανάγκην την ισότητα  $a = b$

**Παραδείγματα 3.1.8.** (α) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, ένα δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  συγχλίνει σε ένα  $x \in X$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda = x$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$  (αφού  $\{x\} \in \mathfrak{T}_x$ ).

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος, κάθε δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  στο  $X$  συγχλίνει σε κάθε  $x \in X$ , αφού  $\mathfrak{T}_x = \{X\}$ .

**Παρατήρηση 3.1.9.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $x \in X$  και το κατευθυνόμενο σύνολο  $(\mathfrak{B}_x, \leq)$ . Για κάθε  $U \in \mathfrak{B}_x$  επιλέγουμε <sup>2</sup> ένα σημείο  $p_U \in U$ . Έτσι ορίζεται ένα δίκτυο  $(p_U)_{U \in \mathfrak{B}_x}$ . Ισχύει ότι  $p_U \rightarrow x$ .

Πράγματι, έστω  $V \in \mathfrak{T}_x$ . Τότε υπάρχει  $U_0 \in \mathfrak{B}_x$  με  $U_0 \subseteq V$ , αφού  $\mathfrak{B}_x$  βάση περιοχών του  $x$ . Για κάθε  $U \in \mathfrak{B}_x$  με  $U \geq U_0$  έχουμε  $p_U \in U \subseteq U_0 \subseteq V$ . Άρα  $p_U \rightarrow x$ .

**Πρόταση 3.1.10.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subseteq X$  και  $x \in X$ . Τότε  $x \in \bar{A}$  αν και μόνον αν υπάρχει δίκτυο  $(p_\lambda)$  στο  $X$  ώστε  $p_\lambda \in A$  για κάθε  $\lambda \in \Lambda$  και  $p_\lambda \rightarrow x$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Υποθέτουμε ότι  $x \in \bar{A}$ . Τότε  $A \cap U \neq \emptyset$  για κάθε  $U \in \mathfrak{T}_x$ . Επιλέγουμε ένα σημείο  $p_U \in U \cap A$  για κάθε  $U \in \mathfrak{T}_x$ . Τότε το  $(p_U)_{U \in \mathfrak{T}_x}$  είναι ένα δίκτυο στο  $X$ . Προφανώς κάθε  $p_U$  ανήκει στο  $A$  και αφού  $p_U \in U$  για κάθε  $U \in \mathfrak{T}_x$ , από την Παρατήρηση 3.1.9, έχουμε ότι  $p_U \rightarrow x$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $U \in \mathfrak{T}_x$ . Αφού  $p_\lambda \rightarrow x$ , υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in U$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ . Ειδικά,  $p_{\lambda_0} \in U \cap A$  (αφού  $p_\lambda \in A \forall \lambda \in \Lambda$ ) κι έτσι  $U \cap A \neq \emptyset$ . Άρα  $U \cap A \neq \emptyset$  για κάθε  $U \in \mathfrak{T}_x$  και συνεπώς  $x \in \bar{A}$ .  $\square$

**Πόρισμα 3.1.11.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε

(i)  $A$  κλειστό  $\iff$  για κάθε δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  στο  $X$  και για κάθε  $x \in X$  με  $p_\lambda \in A \forall \lambda \in \Lambda$  και  $p_\lambda \rightarrow x$ , ισχύει  $x \in A$ .

(ii) Ένα σημείο  $x \in X$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A \iff$  υπάρχει δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  στο  $X$ , ώστε  $p_\lambda \in A \setminus \{x\} \forall \lambda \in \Lambda$  και  $p_\lambda \rightarrow x$ .

*Απόδειξη.* (i)  $A$  κλειστό  $\iff A = \bar{A} \iff \bar{A} \subseteq A$ . Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.1.10.

(ii) Έπεται από την Πρόταση 3.1.10, αφού  $x \in A' \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ .  $\square$

**Ορισμοί 3.1.12.** (α) Έστω  $(\Lambda, \leq)$  κατευθυνόμενο σύνολο και  $N \subseteq \Lambda$ . Το  $N$  καλείται ομοτελικό (στο  $\Lambda$ ), αν για κάθε  $\lambda \in \Lambda$  υπάρχει  $\nu \in N$  με  $\nu \geq \lambda$ .

(β) Έστω  $(\Lambda, \leq)$ ,  $(M, <)$  κατευθυνόμενα σύνολα. Μια συνάρτηση  $\phi : M \rightarrow \Lambda$  καλείται αύξουσα αν για κάθε  $\mu_1, \mu_2 \in M$  με  $\mu_1 < \mu_2$  ισχύει  $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ .

(γ) Έστω  $p : (\Lambda, \leq) \rightarrow X$  ένα δίκτυο στο  $X$ . Μια συνάρτηση  $q : (M, <) \rightarrow X$ , όπου  $(M, <)$  κατευθυνόμενο σύνολο, καλείται υποδίκτυο του  $p$  αν υπάρχει αύξουσα συνάρτηση  $\phi : (M, <) \rightarrow (\Lambda, \leq)$  ώστε το  $\phi(M)$  να είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$  και  $q = p \circ \phi$ . Λέμε τότε ότι το υποδίκτυο  $q$  καθορίζεται από το ζεύγος  $(M, \phi)$ . Το υποδίκτυο  $q$  συμβολίζεται με  $(p_{\phi(\mu)})_{\mu \in M}$  ή με  $(p_{\phi(\mu)})$  και προφανώς είναι δίκτυο.

<sup>2</sup>Η ύπαρξη της συνάρτησης επιλογής  $U \rightarrow p_U$  εξασφαλίζεται από το αξίωμα της επιλογής.

**Παρατηρήσεις 3.1.13.** (α) Ένα  $M \subseteq \mathbb{N}$  είναι ομοτελικό  $\iff$  το  $M$  είναι άπειρο.

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ , ένα υποσύνολο  $B \subseteq \mathfrak{N}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ , αν και μόνο αν το  $(B, \supseteq)$  είναι ομοτελικό στο  $(\mathfrak{N}_x, \supseteq)$ .

(γ) Αν  $(\Lambda, \leq)$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο και  $\lambda_0 \in \Lambda$ , τότε το  $M = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$  είναι ομοτελικό. Το ίδιο ισχύει και για κάθε σύνολο  $N \subseteq \Lambda$  που περιέχει το ένα ομοτελικό σύνολο.

(δ) Κάθε υπακολουθία  $(x_{k_n})$  μιας ακολουθίας  $(x_n)$  είναι υποδίκτυο της ακολουθίας (αφού  $k(\mathbb{N})$  είναι άπειρο). Προφανώς υπάρχουν υποδίκτυα της  $(x_n)$  που δεν είναι υπακολουθίες.

(ε) Κάθε ομοτελικό υποσύνολο  $M$  ενός κατευθυνόμενου συνόλου  $\Lambda$  είναι κατευθυνόμενο (με τον περιορισμό της προδιάταξης του  $\Lambda$ ). Πράγματι, έστω  $\mu_1, \mu_2 \in M$ . Αφού  $\Lambda$  κατευθυνόμενο, υπάρχει  $\lambda \in \Lambda$  ώστε  $\lambda \geq \mu_1$  και  $\lambda \geq \mu_2$ . Αφού  $M$  ομοτελικό, υπάρχει  $\mu \in M$  ώστε  $\mu \geq \lambda$ . Τότε  $\mu \geq \mu_1$  και  $\mu \geq \mu_2$ . Κατά συνέπεια,

Αν  $p : (\Lambda, \leq) \rightarrow X$  είναι δίκτυο και  $M \subseteq \Lambda$  ομοτελικό, τότε το  $q = p|_M$  είναι υποδίκτυο του  $p$ .

Πράγματι, η συνάρτηση  $\phi : M \rightarrow \Lambda$  με  $\phi(\mu) = \mu$  ( $M$  κατευθυνόμενο) είναι αύξουσα, η εικόνα  $\phi(M) (= M)$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$  και ισχύει  $q = p \circ \phi$ .

(στ) Αν  $(p_\lambda)$  είναι δίκτυο στον τοπολογικό χώρο  $X$  και  $x \in X$ , τότε ισχύει

$$\begin{aligned} p_\lambda \rightarrow x &\iff \text{υπάρχει } U \in \mathfrak{N}_x \text{ ώστε } \forall \lambda_0 \in \Lambda \exists \lambda \geq \lambda_0 \text{ με } p_\lambda \notin U \\ &\iff \text{υπάρχουν } U \in \mathfrak{N}_x \text{ και } M \subseteq \Lambda \text{ ομοτελικό ώστε } p_\lambda \notin U \forall \lambda \in M. \end{aligned}$$

Από το (ε), έπεται ότι το  $(p_\lambda)_{\lambda \in M}$  είναι υποδίκτυο του  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  με  $p_\lambda \notin U \forall \lambda \in M$ .

**Πρόταση 3.1.14.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ . Τότε:

$$p_\lambda \rightarrow x \iff \text{κάθε υποδίκτυο του } (p_\lambda) \text{ συγκλίνει στο } x.$$

*Απόδειξη.* ( $\implies$ ) Έστω  $q = p \circ \phi : M \rightarrow X$  υποδίκτυο του  $(p_\lambda)$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Αφού  $p_\lambda \rightarrow x$ , υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in U \forall \lambda \geq \lambda_0$ . Αφού το  $\phi(M)$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ , υπάρχει  $\mu_0 \in M$  ώστε  $\phi(\mu_0) \geq \lambda_0$ . Τότε για κάθε  $\mu \in M$  με  $\mu \geq \mu_0$  έχουμε  $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_0) \geq \lambda_0$  κι έτσι  $p_{\phi(\mu)} \in U$ . Επομένως  $p_{\phi(\mu)} \rightarrow x$ .

( $\impliedby$ ) Είναι προφανές, αφού το  $(p_\lambda)$  είναι υποδίκτυο του  $(p_\lambda)$ . □

**Ορισμός 3.1.15.** Έστω  $(p_\lambda)$  ένα δίκτυο σε ένα τοπολογικό χώρο  $X$  και  $x \in X$ . Το  $x$  καλείται *οριακό σημείο* του  $(p_\lambda)$  αν για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  και για κάθε  $\lambda \in \Lambda$  υπάρχει  $\mu \in \Lambda$  με  $\mu \geq \lambda$  και  $p_\mu \in U$ . Δηλαδή το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $(p_\lambda)$  αν για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  το  $\{\lambda \in \Lambda : p_\lambda \in U\}$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ .

**Παρατήρηση 3.1.16.** Αν  $p_\lambda \rightarrow x$ , τότε το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $(p_\lambda)$ . Πράγματι, έστω  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in U$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ , δηλαδή  $\{\lambda \in \Lambda : p_\lambda \in U\} \supseteq \{\lambda \in \Lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$  κι έτσι, από Παρατήρηση 3.1.13(γ), το  $\{\lambda \in \Lambda : p_\lambda \in U\}$  είναι ομοτελικό, δηλαδή το  $x$  είναι οριακό σημείο.

**Θεώρημα 3.1.17.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος,  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ . Το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $(p_\lambda)$  αν και μόνο αν υπάρχει υποδίκτυο του  $(p_\lambda)$  που συγκλίνει στο  $x$ .

Απόδειξη. ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $x$  οριακό σημείο. Θέτουμε:

$$M = \{(U, \lambda) : U \in \mathfrak{N}_x, \lambda \in \Lambda \text{ και } p_\lambda \in U\}$$

Ορίζουμε τη σχέση  $\prec$  στο  $M$  ως εξής:

$$(U_1, \lambda_1) \prec (U_2, \lambda_2) \iff U_1 \supseteq U_2 \text{ και } \lambda_1 \leq \lambda_2$$

- Η  $\prec$  είναι μια προδιάταξη στο  $M$  (γιατί;).
- Το  $(M, \prec)$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Πράγματι, αν  $(U_1, \lambda_1), (U_2, \lambda_2) \in M$ , θέτουμε  $U_3 = U_1 \cap U_2$  και επιλέγουμε  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $\lambda_0 \geq \lambda_1$  και  $\lambda_0 \geq \lambda_2$ . Αφού το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $(p_\lambda)$ , υπάρχει  $\lambda_3 \in \Lambda$  με  $\lambda_3 \geq \lambda_0$  και  $p_{\lambda_3} \in U$ . Τότε  $(U_3, \lambda_3) \in M$  και έχουμε  $(U_3, \lambda_3) \succ (U_1, \lambda_1)$  και  $(U_3, \lambda_3) \succ (U_2, \lambda_2)$ .
- Ορίζουμε  $\phi : M \rightarrow \Lambda$  με  $\phi(U, \lambda) = \lambda$ . Τότε η  $\phi$  είναι αύξουσα (από τον ορισμό της  $\prec$ ) και  $\phi(M)$  ομοτελικό στο  $\Lambda$  (αφού για κάθε  $\lambda$  ισχύει  $\phi(X, \lambda) = \lambda$ ).

Έτσι, το  $p \circ \phi$  είναι υποδίκτυο του  $(p_\lambda)$ . Θα δείξουμε ότι το  $p \circ \phi$  συγκλίνει στο  $x$ . Έστω  $U_0 \in \mathfrak{N}_x$ . Αφού το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $p_\lambda$ , υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_{\lambda_0} \in U_0$ . Τότε  $(U_0, \lambda_0) \in M$  και για κάθε  $(U, \lambda) \in M$  με  $(U, \lambda) \succ (U_0, \lambda_0)$  έχουμε  $p_\lambda \in U$  (ορισμός του  $M$ ) οπότε

$$(p \circ \phi)(U, \lambda) = p(\phi(U, \lambda)) = p(\lambda) = p_\lambda \in U \subseteq U_0.$$

Επομένως, το  $p \circ \phi$  συγκλίνει στο  $x$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $q = (p_{\phi(\mu)})_{\mu \in M}$  υποδίκτυο του  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  με  $p_{\phi(\mu)} \rightarrow x$ . Έστω  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε υπάρχει  $\mu_0 \in M$  ώστε  $p_{\phi(\mu_0)} \in U$  για κάθε  $\mu \succ \mu_0$ , δηλαδή:

$$\{\lambda \in \Lambda : p_\lambda \in U\} \supseteq \{\phi(\mu) : \mu \succ \mu_0\}.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το  $\{\phi(\mu) : \mu \succ \mu_0\}$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ .

Έστω  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $\mu \in M$ ,  $\mu \succ \mu_0$  με  $\phi(\mu) \geq \lambda_0$ . Αφού το  $\phi(M)$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ , υπάρχει  $\mu_1 \in M$  με  $\phi(\mu_1) \geq \lambda_0$ . Ακόμη, αφού το  $M$  είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει  $\mu \in M$  ώστε  $\mu \succ \mu_0$  και  $\mu \succ \mu_1$ . Τότε  $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_1) \geq \lambda_0$ , άρα  $\phi(\mu) \geq \lambda_0$ . Άρα το  $\{\phi(\mu) : \mu \succ \mu_0\}$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ .  $\square$

## 3.2 Συνέχεια

Προχωρούμε στη μελέτη συνεχών συναρτήσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων. Θα δούμε ότι οι χαρακτηρισμοί της συνέχειας είναι ανάλογοι με αυτούς που είδαμε κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων.

**Ορισμός 3.2.1.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $x_0 \in X$ . Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  θα λέμε ότι είναι *συνεχής* στο  $x_0$ , αν για κάθε  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$  υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$  ώστε  $f(U) \subseteq V$ . Η  $f$  καλείται *συνεχής*, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $X$ .

**Παρατηρήσεις 3.2.2.** (α) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 \iff$  για κάθε  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$  ισχύει  $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$ . Πράγματι,

( $\Rightarrow$ ) Έστω  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ . Τότε υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$  ώστε  $f(U) \subseteq V$ . Άρα  $U \subseteq f^{-1}(V)$  και επομένως  $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$ .



- ( $\Leftarrow$ ) Έστω  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ . Τότε το  $U = f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$  και προφανώς  $f(U) \subseteq V$ .
- (β) Στον Ορισμό 3.2.1 μπορούμε να θεωρήσουμε βάσεις περιοχών των  $f(x_0)$  και  $x_0$ , αντί για τα  $\mathfrak{N}_{f(x_0)}$  και  $\mathfrak{N}_{x_0}$  αντίστοιχα. Άρα στην περίπτωση των μετρικών χώρων, ο ορισμός αυτός συμπίπτει με το γνωστό.
- (γ) Αν η  $f$  είναι σταθερή, τότε είναι συνεχής (παίρνουμε  $U = X$ ).
- (δ) Αν ο  $X$  έχει τη διακριτή τοπολογία, τότε η  $f$  είναι αυτόματα συνεχής (παίρνουμε  $U = \{x_0\}$ )

**Θεώρημα 3.2.3.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η  $f$  είναι συνεχής.
- (ii) Για κάθε  $G \subseteq Y$  ανοικτό, το  $f^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $X$ .
- (iii) Για κάθε  $F \subseteq Y$  κλειστό, το  $f^{-1}(F)$  είναι κλειστό στο  $X$ .
- (iv) Για κάθε  $A \subseteq X$ ,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- (v) Για κάθε  $B \subseteq Y$ ,  $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ .
- (vi) Για κάθε  $B \subseteq Y$ ,  $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ .

*Απόδειξη.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $G \subseteq Y$  ανοικτό και  $x \in f^{-1}(G)$ . Τότε  $f(x) \in G$  και  $G \in \mathfrak{N}_{f(x)}$ . Αφού  $f$  συνεχής, έπεται ότι  $f^{-1}(G) \in \mathfrak{N}_x$  (Παρατήρηση 3.2.2(α)). Συνεπώς το  $f^{-1}(G)$  είναι περιοχή κάθε σημείου του, άρα  $f^{-1}(G)$  είναι ανοικτό.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω  $F \subseteq Y$  κλειστό. Τότε το  $Y \setminus F$  είναι ανοικτό και, από το (ii), έπεται ότι το  $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$  είναι ανοικτό. Δηλαδή το  $f^{-1}(F)$  είναι κλειστό.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Έστω  $A \subseteq X$ . Από το (iii) για το κλειστό  $F = \overline{f(A)}$  έχουμε ότι το  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  είναι κλειστό στο  $X$ . Επιπλέον,  $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$  όπως ελέγχεται άμεσα, άρα  $A \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}$ . Άρα, από τον ορισμό της κλειστής θήκης,  $\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}$  και συνεπώς  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (v) Έστω  $B \subseteq Y$ . Από το (iv) για το  $A = f^{-1}(B)$  έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))}.$$

Ακόμη,  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$  όπως ελέγχεται άμεσα, άρα  $\overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$ . Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \\ \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

(v)  $\Rightarrow$  (vi) Έστω  $B \subseteq Y$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} X \setminus (f^{-1}(B))^\circ &= \overline{X \setminus f^{-1}(B)} \\ &= \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &\subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \quad (\text{από το (v)}) \\ &= f^{-1}(Y \setminus B^\circ) \\ &= X \setminus f^{-1}(B^\circ) \end{aligned}$$

Άρα  $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ .

(vi)  $\Rightarrow$  (i) Έστω  $x \in X$  και  $V \in \mathfrak{N}_{f(x)}$ . Τότε  $f(x) \in V^\circ$ , δηλαδή  $x \in f^{-1}(V^\circ)$ . Αλλά  $f^{-1}(V^\circ) \subseteq (f^{-1}(V))^\circ$  (από το (vi)) πράγμα που σημαίνει ότι  $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_x$ . Επομένως η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ . Αφού το  $x \in X$  ήταν τυχόν, η  $f$  είναι συνεχής.  $\square$

**Παρατηρήσεις 3.2.4.** (α) Έστω  $(X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{S})$  τοπολογικοί χώροι,  $\mathcal{B}$  μία βάση για την  $\mathfrak{S}$  και συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Τότε η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{T}$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ . Πράγματι:

( $\Rightarrow$ ) Είναι προφανές, αφού  $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{S}$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $G \in \mathfrak{S}$ . Τότε  $G = \bigcup_{i \in I} B_i$  για κάποια υποοικογένεια  $(B_i)_{i \in I}$  της  $\mathcal{B}$ . Άρα  $f^{-1}(G) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathfrak{T}$ , ως ένωση ανοικτών. Άρα η  $f$  είναι συνεχής.

(β) Η προηγούμενη Παρατήρηση ισχύει αν η  $\mathcal{B}$  είναι υποβάση για την  $\mathfrak{S}$ , κι όχι κατ' ανάγκη βάση (γιατί;).

**Παράδειγμα 3.2.5.** Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}_S$  με  $f(x) = -x$  δεν είναι συνεχής. Πράγματι, ενώ το σύνολο  $(0, 1]$  είναι ανοικτό στον  $\mathbb{R}_S$ , το  $f^{-1}((0, 1]) = [-1, 0)$  δεν είναι ανοικτό στον  $\mathbb{R}_S$  (γιατί;).

**Πρόταση 3.2.6.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι,  $x_0 \in X$  και συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  αν και μόνο αν, για κάθε  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  με  $p_\lambda \rightarrow x_0$ , ισχύει  $f(p_\lambda) \rightarrow f(x_0)$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . Έστω  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  με  $p_\lambda \rightarrow x_0$ . Έστω  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ . Από τη συνέχεια της  $f$  στο  $x_0$ , έπεται ότι  $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$ . Αφού  $p_\lambda \rightarrow x_0$ , υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in f^{-1}(V)$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ . Τότε  $f(p_\lambda) \in V$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ . Επομένως  $f(p_\lambda) \rightarrow f(x_0)$ .

( $\Leftarrow$ ) Υποθέτουμε ότι για κάθε  $(p_\lambda)$  με  $p_\lambda \rightarrow x_0$ , ισχύει  $f(p_\lambda) \rightarrow f(x_0)$  κι έστω, προς άτοπο, ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ . Τότε υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$  ώστε για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$  να ισχύει  $f(U) \not\subseteq V$ . Επομένως για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$  μπορούμε να επιλέξουμε  $p_U \in U$ , ώστε  $f(p_U) \notin V$ . Έτσι, το  $(p_U)_{U \in \mathfrak{N}_{x_0}}$  είναι δίκτυο με  $p_U \rightarrow x_0$ . Αφού όμως,  $f(p_U) \notin V$  και  $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ , έπεται ότι  $f(p_U) \not\rightarrow f(x_0)$ , πράγμα άτοπο.  $\square$

**Πόρισμα 3.2.7.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Τότε η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε  $x \in X$  και για κάθε  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  με  $p_\lambda \rightarrow x$ , ισχύει  $f(p_\lambda) \rightarrow f(x)$ .

**Παρατήρηση 3.2.8.** Η Πρόταση 3.2.6 και το Πόρισμα 3.2.7 δεν ισχύουν αν τα δίκτυα αντικατασταθούν με ακολουθίες. Για παράδειγμα, έστω  $\text{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\text{id}(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\mathfrak{T}$  η συναριθμήσιμη τοπολογία. Αν  $(x_n)$  είναι ακολουθία στο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$  και  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε  $x_n \rightarrow x$ , τότε η  $(x_n)$  είναι τελικά σταθερή και ίση με  $x$  κι επομένως  $\text{id}(x_n) \rightarrow x = \text{id}(x)$  ως προς τη συνήθη τοπολογία. Όμως, αν  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , τότε το  $(a, b)$  είναι ανοικτό στο  $\mathbb{R}$ , ενώ  $\text{id}^{-1}((a, b)) = (a, b) \notin \mathfrak{T}$ . Άρα η  $\text{id}$  δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο.

Είδαμε ότι οι ακολουθίες δεν επαρκούν για να χαρακτηρίσουν τη συνέχεια συναρτήσεων. Η γενίκευση από τις ακολουθίες στα δίκτυα περιγράφει το μέτρο γενίκευσης από τους μετρικούς χώρους στους τοπολογικούς χώρους.

**Πρόταση 3.2.9.** Έστω  $X, Y, Z$  τοπολογικοί χώροι,  $x_0 \in X$  και συναρτήσεις  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η  $g \circ f : X \rightarrow Z$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . Άρα αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς, τότε και η  $g \circ f$  είναι συνεχής.

*Απόδειξη.* Έστω  $(p_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  με  $p_\lambda \rightarrow x_0$ .

Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , ισχύει ότι  $f(p_\lambda) \rightarrow f(x_0)$  Πρόταση 3.2.6).

Αφού η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , από την ίδια Πρόταση έχουμε ότι

$g(f(p_\lambda)) \rightarrow g(f(x_0))$ . Δηλαδή  $(g \circ f)(p_\lambda) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ . Άρα, από την Πρόταση 3.2.6, η  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .  $\square$

### 3.2.1 Ανοικτές και κλειστές συναρτήσεις, Ομοιομορφισμοί

**Ορισμός 3.2.10.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  καλείται *ανοικτή*, αν για κάθε  $A \subseteq X$  ανοικτό το  $f(A)$  είναι ανοικτό στο  $Y$ . Η  $f$  καλείται *κλειστή*, αν για κάθε  $A \subseteq X$  κλειστό το  $f(A)$  είναι κλειστό στο  $Y$ .

**Παρατηρήσεις 3.2.11.** (α) Αν  $\mathcal{B}$  είναι βάση του τοπολογικού χώρου  $X$ , τότε η  $f$  είναι ανοικτή αν και μόνο αν για κάθε  $B \in \mathcal{B}$  το  $f(B)$  είναι ανοικτό στο  $Y$ . Πράγματι,

( $\Rightarrow$ ) Είναι προφανές, αφού κάθε  $B \in \mathcal{B}$  είναι ανοικτό.

( $\Leftarrow$ ) Αν  $A \subseteq X$  ανοικτό, τότε  $A = \bigcup_{i \in I} B_i$  όπου  $(B_i)_{i \in I}$  υποοικογένεια της  $\mathcal{B}$ . Άρα το  $f(A) = \bigcup_{i \in I} f(B_i)$  είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών. Επομένως η  $f$  είναι ανοικτή.

(β) Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι 1-1 και επί, τότε, αφού  $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$  για κάθε  $A \subseteq Y$ , έχουμε:

$$f \text{ ανοικτή} \iff f^{-1} : Y \rightarrow X \text{ συνεχής} \iff f \text{ κλειστή.}$$

(γ) Έστω  $\mathfrak{T}_1$  και  $\mathfrak{T}_2$  δύο τοπολογίες στο  $X$  και  $\text{id} : (X, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (X, \mathfrak{T}_2)$  με  $\text{id}(x) = x$  για κάθε  $x \in X$ . Τότε:

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2 \iff \text{id} \text{ ανοικτή} \iff \text{id}^{-1} \text{ συνεχής} \iff \text{id} \text{ κλειστή.}$$

**Παράδειγμα 3.2.12.** Η προβολή  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\pi_1(x, y) = x$  είναι ανοικτή, αλλά όχι κλειστή. Πράγματι,

- Για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  και  $\varepsilon > 0$ ,  $\pi_1(B((x, y), \varepsilon)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  ανοικτό, άρα από Παρατήρηση 3.2.11(α), η  $\pi_1$  είναι ανοικτή.
- Αν  $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$ , τότε το  $F$  είναι κλειστό στο  $\mathbb{R}^2$  (γιατί;), ενώ η εικόνα  $\pi_1(F) = (0, +\infty)$  δεν είναι κλειστό στο  $\mathbb{R}$ .

**Πρόταση 3.2.13.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Η  $f$  είναι ανοικτή αν και μόνο αν  $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ , για κάθε  $A \subseteq X$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $A \subseteq X$ . Τότε το  $A^\circ$  είναι ανοικτό στο  $X$ , άρα και το  $f(A^\circ)$  είναι ανοικτό στο  $Y$ . Αφού  $f(A^\circ) \subseteq f(A)$ , από τον ορισμό του εσωτερικού, έπεται ότι  $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $A \subseteq X$  ανοικτό (άρα  $A^\circ = A$ ). Τότε, από την υπόθεση, έπεται ότι  $f(A) = f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ . Δηλαδή  $f(A) \subseteq (f(A))^\circ$  (κι έτσι,  $f(A) = (f(A))^\circ$ ). Επομένως το  $f(A)$  είναι ανοικτό. Συνεπώς η  $f$  είναι ανοικτή.  $\square$

**Πρόταση 3.2.14.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ . Η  $f$  είναι κλειστή αν και μόνο αν  $f(\bar{A}) \supseteq \bar{f(A)}$ , για κάθε  $A \subseteq X$ .

*Απόδειξη.* Αφήνεται ως άσκηση (εργαστείτε ανάλογα με την Απόδειξη της Πρότασης 3.2.13).  $\square$

**Ορισμός 3.2.15.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι. Μια 1-1 και επί συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ , ώστε η  $f$  και η  $f^{-1}$  να είναι συνεχείς, καλείται *ομοιομορφισμός* των τοπολογικών χώρων  $X$  και  $Y$ . Όταν υπάρχει  $f : X \rightarrow Y$  ομοιομορφισμός, λέμε ότι οι  $X$  και  $Y$  είναι *ομοιομορφικοί* και το συμβολίζουμε αυτό με  $X \sim Y$ .

**Παρατήρηση 3.2.16.** Η σχέση “ $\sim$ ” είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων. Κατά συνέπεια η κλάση των τοπολογικών χώρων διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Δύο τοπολογικοί χώροι που ανήκουν στην ίδια κλάση, από τοπολογικής άποψης, ταυτίζονται.

**Πρόταση 3.2.17.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $f : X \rightarrow Y$  μια  $1-1$  και επί συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i)  $H f$  είναι ομοιομορφισμός.
- (ii)  $H f$  είναι συνεχής και ανοικτή.
- (iii)  $H f$  είναι συνεχής και κλειστή.
- (iv) Για κάθε  $A \subseteq X$  ισχύει  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

*Απόδειξη.* Η ισοδυναμία των (i), (ii) και (iii) έπεται από την Παρατήρηση 3.2.11(β). Η ισοδυναμία των (iii) και (iv) έπεται από την Πρόταση 3.2.14 και το Θεώρημα 3.2.3.  $\square$

**Παραδείγματα 3.2.18.** (α)  $\mathbb{R} \sim (-1, 1)$ . Πράγματι, π.χ. η  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  με  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  είναι συνεχής,  $1-1$ , επί και η  $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(y) = \frac{y}{1-|y|}$  είναι συνεχής.

(β) Η ταυτοτική συνάρτηση  $\text{id} : \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\text{id}(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}_S$  είναι βεβαίως  $1-1$  και επί, και είναι συνεχής (αφού για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ ,  $\text{id}^{-1}((a, b)) = (a, b) \in \mathfrak{T}_S$ ). Όμως η  $\text{id}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_S$  δεν είναι συνεχής, αφού για το  $(a, b] \in \mathfrak{T}_S$ , έχουμε  $(\text{id}^{-1})^{-1}((a, b]) = (a, b]$  που δεν είναι ανοικτό στο  $\mathbb{R}$ .

(γ) Έστω  $X$  σύνολο,  $x_1, x_2 \in X$  με  $x_1 \neq x_2$  και  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$  οι τοπολογίες των ιδιαίτερων σημείων  $x_1, x_2$  αντίστοιχα. Τότε η  $f : (X, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (X, \mathfrak{T}_2)$  με

$$f(x) = \begin{cases} x_2, & \text{αν } x = x_1 \\ x_1, & \text{αν } x = x_2 \\ x, & \text{αν } x \neq x_1, x_2 \end{cases}$$

είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, η  $f$  είναι προφανώς  $1-1$  και επί. Έστω  $G \in \mathfrak{T}_2$ . Αν  $G \neq \emptyset$ , τότε  $x_2 \in G$ , άρα  $x_1 \in f^{-1}(G)$  κι επομένως  $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}_1$ . Άρα η  $f$  είναι συνεχής. Ανάλογα, η  $f^{-1}$  είναι συνεχής.

(δ) Δύο διακριτοί τοπολογικοί  $X, Y$  είναι ομοιομορφικοί, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  που είναι  $1-1$  και επί (αφού κάθε συνάρτηση ορισμένη σε διακριτό τοπολογικό χώρο είναι συνεχής).

### 3.3 Σύγκλιση κατά Υπερφίλτρο

<sup>3</sup> Έστω  $(x_n)$  μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα θέλαμε να ορίσουμε μια γενικότερη έννοια ορίου της  $(x_n)$ , το οποίο όριο θα συμβολίζουμε με  $\lim^* x_n$ . Φυσιολογική απαίτησή μας θα ήταν αυτή η έννοια ορίου να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Συμβατότητα: Αν το (σύνθετος) όριο της  $\lim_n x_n$  υπάρχει, τότε  $\lim_n x_n = \lim^* x_n$ .

<sup>3</sup> (Συμπλήρωμα από τον Μ. Γεραπετρίτη. Δεν διδάχθηκε)

- **Γραμμικότητα:** Αν  $(y_n)$  είναι μια ακόμη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , τότε  $\lim^*(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 \lim^* x_n + c_2 \lim^* y_n$ .
- **Θετικότητα:** Αν  $x_n \geq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $\lim^* x_n \geq 0$ .

Εύκολα ελέγχει κανείς, ότι με δεδομένη τη γραμμικότητα και τη συμβατότητα, η θετικότητα της υποψήφιας έννοιας ορίου είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη επιθυμητή ιδιότητα:

- Αν  $|x_n| \leq A$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $|\lim^* x_n| \leq A$ .

Αξίζει, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι ο συνήθης ορισμός του ορίου για μια (φραγμένη) ακολουθία  $(x_n)$  μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

$$\lim_n x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, |\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : |x_n - l| < \varepsilon\}| < \infty \quad (3.1)$$

(δηλαδή, το  $l$  είναι το όριο της  $(x_n)$  αν και μόνο αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  μόνο πεπερασμένοι στο πλήθος τους, όροι της  $(x_n)$  απέχουν από το  $l$  απόσταση μεγαλύτερη από  $\varepsilon$ ). Αφού κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο περιέχει όλα τα συμπεπερασμένα σύνολα, η ακόλουθη προσέγγιση φαίνεται φυσιολογική.

**Ορισμός 3.3.1** (όριο Banach). Έστω μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(x_n)$ ,  $l \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$ . Ορίζουμε το σύνολο

$$U(l, \varepsilon) = U(l, \varepsilon)[(x_n)] = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - l| < \varepsilon\}$$

Αν  $\mathcal{F}$  είναι ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο του  $\mathbb{N}$ , ορίζουμε

$$\lim_{\mathcal{F}}^* x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, U(l, \varepsilon) \in \mathcal{F}.$$

**Παρατήρηση 3.3.2.** Το όριο Banach μιας φραγμένης ακολουθίας εξαρτάται από την επιλογή του μη τετριμμένου υπερφίλτρου.

**Θεώρημα 3.3.3.** Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μοναδικό όριο Banach. Επίσης το όριο Banach είναι συμβατό, γραμμικό και θετικό (κατά τον τρόπο που ορίστηκαν αυτές οι έννοιες στην αρχή της Παραγράφου).

**Απόδειξη.** Έστω  $(x_n), (y_n)$  φραγμένες ακολουθίες και  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Δείχνουμε διαδοχικά:

**Υπαρξη** Έστω  $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$  και θέτουμε  $I_0 = [-L, L]$ . Διαιρούμε το  $I_0$  στα ξένα διαστήματα  $I_1^0 = [-L, 0)$ ,  $I_1^1 = [0, L]$ . Ακριβώς ένα από τα σύνολα  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_1^0\}, \{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_1^1\}$  ανήκει στο  $\mathcal{F}$ . Έστω, λοιπόν  $I_1$  το διάστημα με αυτή την ιδιότητα. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων  $I_0, I_1, \dots$  με την ιδιότητα, για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  το μήκος του  $I_k$  να είναι  $2L/2^k$  και  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_k\} \in \mathcal{F}$ . Κατά συνέπεια,  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{l\}$  για κάποιο  $l \in \mathbb{R}$  κι ακόμη, για κάθε  $\varepsilon > 0$ ,  $U(l, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ .

**Μοναδικότητα** Για  $l \neq l'$  και  $\varepsilon < |l - l'|/2$ , τα σύνολα  $U(l, \varepsilon)$  και  $U(l', \varepsilon)$  είναι ξένα και κατά συνέπεια, το πολύ ένα από αυτά ανήκει στο  $\mathcal{F}$ .

**Συμβατότητα** Άμεσο, από την (3.1).

**Γραμμικότητα** Έστω ότι  $\lim_{\mathcal{F}}^* x_n = l_1$ ,  $\lim_{\mathcal{F}}^* y_n = l_2$  κι έστω ένα  $\varepsilon$  θετικό. Αρχικά υποθέτουμε ότι  $c_1, c_2 \neq 0$ . Έχουμε ότι τα σύνολα  $U(l_1, \varepsilon/2c_1)[(x_n)]$ ,  $U(l_2, \varepsilon/2c_2)[(y_n)]$  ανήκουν στο  $\mathcal{F}$ , άρα και η τομή τους. Για κάθε  $n$  στην τομή έχουμε ότι  $|x_n - l_1| < \varepsilon/2c_1$  και  $|y_n - l_2| < \varepsilon/2c_2$ . Συνεπώς, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι

$$|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 l_1 + c_2 l_2)| < \varepsilon.$$

Άρα  $U(c_1 l_1 + c_2 l_2, \varepsilon)[(c_1 x_n + c_2 y_n)] \in \mathcal{F}$ . Για την περίπτωση που κάποιο από τα  $c_1, c_2$  είναι ίσο με 0, η ίδια απόδειξη λειτουργεί (με τις προφανείς τροποποιήσεις).

**Θετικότητα** Έστω ότι  $x_n \geq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  κι έστω ένα  $l < 0$ . Τότε, αν  $\varepsilon = |l|/2 > 0$ , έχουμε ότι το  $U(l, \varepsilon)$  είναι πεπερασμένο και συνεπώς δεν ανήκει στο  $\mathcal{F}$ . Άρα δεν μπορεί  $\lim_{\mathcal{F}}^* x_n = l$ .  $\square$

Η ακόλουθη Πρόταση περιγράφει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα του χώρου  $\Sigma$  που ορίσαμε στο Παράδειγμα 2.2.12, η οποία θα φανεί χρήσιμη κατά την περιγραφή της Stone-Čech συμπαγοποίησης του συνόλου των φυσικών αριθμών.

**Πρόταση 3.3.4.** Έστω  $\mathcal{U}$  ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο σύνολο  $\mathbb{N}$  και έστω ο τοπολογικός χώρος  $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U}\}$ . Για κάθε  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (συνεχή) φραγμένη συνάρτηση (δηλαδή, φραγμένη ακολουθία), υπάρχει μία συνεχής επέκταση  $\hat{a}_{\mathcal{U}} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  (δηλαδή  $\hat{a}_{\mathcal{U}}$  συνεχής και  $\hat{a}_{\mathcal{U}}|_{\mathbb{N}} = a$ ).

*Απόδειξη.* Έστω  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την  $\hat{a}_{\mathcal{U}} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής:

$$\hat{a}_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{αν } x \in \mathbb{N} \\ \ell = \lim_{\mathcal{U}}^* a_n & \text{αν } x = \mathcal{U} \end{cases}$$

Η  $\hat{a}_{\mathcal{U}}$  προφανώς επεκτείνει την  $a$  και είναι φραγμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο  $\mathcal{U}$ . Έστω  $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  βασική περιοχή του  $\ell$ . Τότε, αφού  $\ell = \lim_{\mathcal{U}}^* a_n$ , έχουμε ότι  $U(\ell, \varepsilon) \in \mathcal{U}$ . Άρα, το  $U(\ell, \varepsilon) \cup \{\mathcal{U}\}$  είναι βασική περιοχή του  $\mathcal{U}$  και προφανώς  $\hat{a}_{\mathcal{U}}(U(\ell, \varepsilon) \cup \{\mathcal{U}\}) \subseteq (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ . Επομένως η  $\hat{a}_{\mathcal{U}}$  είναι συνεχής.  $\square$

**Παρατήρηση 3.3.5.** Μια διαφορετική προσέγγιση στη γενίκευση του ορίου μιας φραγμένης ακολουθίας μπορεί να γίνει μέσω Συναρτησιακής Ανάλυσης και είναι αυτή που έγινε από τον ίδιο τον Banach στο βιβλίο του, *Théorie des opérations linéaires*. Ο χώρος  $\ell^\infty$  των φραγμένων ακολουθιών είναι ένας γραμμικός χώρος που εφοδιάζεται με τη νόρμα  $\|(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ . Το σύνολο των συγκλίνουσων ακολουθιών  $\mathcal{C}$ , συνιστά έναν υπόχωρο του  $\ell^\infty$ . Ακόμη, η απεικόνιση  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , που απεικονίζει κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο όριό της, είναι γραμμική και έχει νόρμα τελεστή ίση με 1. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, η  $f$  επεκτείνεται σε έναν τελεστή  $\tilde{f} : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , που έχει επίσης νόρμα τελεστή 1. Έτσι, θα ορίζουμε ως όριο Banach μίας ακολουθίας  $(x_n) \in \ell^\infty$  την τιμή  $\tilde{f}((x_n))$ . Εύκολα ελέγχει κανείς ότι αυτή η έννοια ορίου ικανοποιεί τις απαιτήσεις που θέσαμε στην αρχή της Παραγράφου.



## Κεφάλαιο 4

# Κατασκευή νέων τοπολογικών χώρων

Στα πρώτα κεφάλαια εξετάσαμε κάποια παραδείγματα τοπολογικών χώρων, καθώς και κάποιες μεθόδους ορισμού μιας τοπολογίας μέσω «εσωτερικών» εννοιών, όπως της βάσης και του συστήματος περιοχών (Θεώρημα 1.1.15, Πρόταση 1.1.18, Θεώρημα 2.1.4, Θεώρημα 2.1.9). Η Θεωρία μας, όμως, αποδεικνύεται ουσιαστικά γονιμότερη. Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να περιγράψουμε μεθόδους κατασκευής νέων τοπολογικών χώρων από ήδη υπάρχοντες.

### 4.1 Υπόχωροι τοπολογικών χώρων

Η πρώτη και, μάλλον, φυσιολογικότερη κατασκευή ενός νέου χώρου από έναν ήδη υπάρχοντα είναι αυτή του υποχώρου, δηλαδή ο εφοδιασμός κάποιου τυχόντος υποσυνόλου του χώρου με τοπολογία. Έστω, λοιπόν,  $(X, \mathfrak{T})$  ένας τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$  τυχόν. Μια πρώτη ιδέα θα ήταν να εξετάσουμε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων του  $X$  που περιέχονται στο  $A$ ,  $\mathcal{S} = \{G \subseteq A : G \in \mathfrak{T}\}$  για υποψήφια τοπολογία του  $A$ . Όμως αυτή η οικογένεια αποτυγχάνει να είναι τοπολογία στη γενική περίπτωση (γιατί; δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη για το  $A$ , ώστε η  $\mathcal{S}$  να είναι τοπολογία στο  $A$ ). Μια πιο προσεκτική προσέγγιση μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 4.1.1.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Η οικογένεια  $\mathfrak{T}_A = \{A \cap G : G \in \mathfrak{T}\}$  είναι τοπολογία στο  $A$  (γιατί;) και καλείται η *σχετική τοπολογία του  $A$*  (ως προς την  $\mathfrak{T}$ ). Ο τοπολογικός χώρος  $(A, \mathfrak{T}_A)$  λέγεται *υπόχωρος του  $X$*  και τα στοιχεία της  $\mathfrak{T}_A$  λέγονται *ανοικτά σύνολα στο  $A$*  ή *σχετικώς ανοικτά*.

Σημειώνουμε ότι κάθε τοπολογική έννοια στο  $A$  αναφέρεται στην τοπολογία  $\mathfrak{T}_A$ . Για παράδειγμα, ένα  $F \subseteq A$  είναι κλειστό στο  $A$  αν είναι κλειστό ως προς την  $\mathfrak{T}_A$  (δηλαδή  $A \setminus F \in \mathfrak{T}_A$ ). Χάριν ευκολίας, για ένα  $B \subseteq A$ , θα συμβολίζουμε με  $cl_A B$  και  $\text{int}_A B$  τα  $cl_{\mathfrak{T}_A} B$  και  $\text{int}_{\mathfrak{T}_A} B$  αντίστοιχα. Επίσης θα συμβολίζουμε με  $\mathfrak{N}_x^A$  το  $\mathfrak{N}_x^{\mathfrak{T}_A}$ , για κάθε  $x \in A$ . Τέλος, ως παρατηρήσουμε ότι  $\mathfrak{T}_X = \mathfrak{T}$ .

**Πρόταση 4.1.2.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Αν  $\mathcal{B}$  είναι βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την  $\mathfrak{T}$ , τότε η  $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$  είναι βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την  $\mathfrak{T}_A$ .



*Απόδειξη.* Αφού  $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ , έχουμε ότι  $\mathcal{B}_A \subseteq \mathfrak{T}_A$ . Έστω τώρα  $U \in \mathfrak{T}_A$ . Τότε  $U = A \cap G$  για κάποιο  $G \in \mathfrak{T}$ . Αφού η  $\mathcal{B}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ , υπάρχει  $(B_i)_{i \in I}$  υποοικογένεια της  $\mathcal{B}$  ώστε  $G = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Άρα

$$U = A \cap \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

και η  $(A \cap B_i)_{i \in I}$  είναι υποοικογένεια της  $\mathcal{B}_A$ . Συνεπώς, η  $\mathcal{B}_A$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}_A$ . Η περίπτωση της υποβάσης αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Παραδείγματα 4.1.3.** (α) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε  $(\mathfrak{T}_\rho)_A = \mathfrak{T}_d$  όπου  $d = \rho|_{A \times A}$  η σχετική μετρική. Πράγματι, έχουμε:

$$B_\rho(x, \varepsilon) \cap A = B_d(x, \varepsilon) \quad \forall x \in A, \varepsilon > 0,$$

όπου η  $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in A, \varepsilon > 0\}$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}_d$  και η  $\{B_\rho(x, \varepsilon) : x \in A, \varepsilon > 0\}$  είναι βάση για την  $(\mathfrak{T}_\rho)_A$ . Αυτό διότι, αν  $G \cap A \in (\mathfrak{T}_\rho)_A$  και  $x \in G \cap A$ , τότε  $G \in \mathfrak{T}_\rho$  άρα υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε  $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$ , άρα  $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \subseteq G \cap A$ .

(β) Από την Πρόταση 4.1.2, ο υπόχωρος  $[0, 1]$  του  $\mathbb{R}$  έχει βάση την

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(a, b) \cap [0, 1] : a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a < b\} \\ &= \{(a, b) : 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0, b) : b \in [0, 1]\} \cup \{(a, 1] : a \in [0, 1]\} \cup \{[0, 1]\}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq B \subseteq X$ . Τότε  $(\mathfrak{T}_B)_A = \mathfrak{T}_A$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}_B)_A &= \{U \cap A : U \in \mathfrak{T}_B\} \\ &= \{(G \cap B) \cap A : G \in \mathfrak{T}\} \\ &= \{G \cap A : G \in \mathfrak{T}\} \\ &= \mathfrak{T}_A \end{aligned}$$

**Πρόταση 4.1.4.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ .

- (i) Αν  $F \subseteq A$ , τότε το  $F$  είναι κλειστό στο  $A$  αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο  $K$ , κλειστό στον  $(X, \mathfrak{T})$ , ώστε  $F = A \cap K$ .
- (ii) Για κάθε  $B \subseteq A$  ισχύει ότι  $\text{cl}_A B = (\text{cl}_X B) \cap A$ .
- (iii) Για κάθε  $x \in A$  ισχύει ότι  $\mathfrak{N}_x^A = \{U \cap A : U \in \mathfrak{N}_x\}$ .
- (iv) Αν  $(x_\lambda)$  δίκτυο στο  $A$  και  $x \in A$ , τότε  $x_\lambda \rightarrow x$  ως προς  $\mathfrak{T}_A \iff x_\lambda \rightarrow x$  ως προς  $\mathfrak{T}$ .

*Απόδειξη.* (i) Έστω ότι το  $F$  είναι κλειστό στο  $A$ . Άρα το  $A \setminus F$  είναι ανοικτό στο  $A$ , δηλαδή  $A \setminus F = A \cap G$  για κάποιο  $G \in \mathfrak{T}$ . Παίρνοντας συμπληρώματα ως προς  $A$  έχουμε:

$$F = A \setminus (A \cap G) = A \setminus G = A \cap G^c,$$

όπου το  $K := G^c$  είναι κλειστό στο  $X$ .

Αντίστροφα, έστω ότι  $F = A \cap K$ , όπου  $K$  κλειστό στο  $X$ . Παίρνοντας συμπληρώματα ως προς  $A$  έχουμε:

$$A \setminus F = A \setminus (A \cap K) = A \setminus K = A \cap K^c,$$

όπου το  $G := K^c$  είναι ανοικτό στο  $X$ . Άρα το  $A \setminus F \in \mathfrak{T}_A$  και επομένως το  $F$  είναι κλειστό στο  $A$ .

(ii) Έστω  $B \subseteq A$ . Από το (i), το  $(\text{cl}_X B) \cap A$  είναι κλειστό στο  $A$  και προφανώς περιέχει το  $B$ . Άρα  $(\text{cl}_X B) \cap A \supseteq \text{cl}_A B$ . Αρκεί να δείξουμε ότι αν  $F$  είναι ένα κλειστό σύνολο στο  $A$  και  $F \supseteq B$ , τότε  $F \supseteq (\text{cl}_X B) \cap A$ . Πράγματι, από το (i),  $F = A \cap K$  για κάποιο  $K$  κλειστό στο  $X$ . Έχουμε

$$B \subseteq F \subseteq K \implies \text{cl}_X B \subseteq K \implies (\text{cl}_X B) \cap A \subseteq K \cap A = F.$$

(iii) Έστω  $x \in A$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε  $x \in U^\circ \cap A \subseteq U \cap A$ , όπου  $U^\circ \cap A \in \mathfrak{T}_A$ . Επομένως  $U \cap A \in \mathfrak{N}_x^A$ . Άρα  $\mathfrak{N}_x^A \supseteq \{U \cap A : U \in \mathfrak{N}_x\}$ .

Αντίστροφα, έστω  $V \in \mathfrak{N}_x^A$ . Τότε  $x \in \text{int}_A V = A \cap G$  για κάποιο  $G \in \mathfrak{T}$ . Θέτουμε  $U = G \cup V$ . Τότε  $U \in \mathfrak{N}_x$  (αφού  $x \in G \subseteq U$  και  $G \in \mathfrak{T}$ ) και

$$U \cap A = (G \cap A) \cup (V \cap A) = (\text{int}_A V) \cup V = V.$$

Άρα  $\mathfrak{N}_x^A \subseteq \{U \cap A : U \in \mathfrak{N}_x\}$ . Συνεπώς  $\mathfrak{N}_x^A = \{U \cap A : U \in \mathfrak{N}_x\}$ .

(iv) Έπεται άμεσα από το (iii). □

**Παρατηρήσεις 4.1.5.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και  $B \subseteq A \subseteq X$ .

(α)  $\text{int}_A B \supseteq (\text{int}_X B) \cap A$ , αφού το  $(\text{int}_X B) \cap A$  ανήκει στην  $\mathfrak{T}_A$  και περιέχεται στο  $B$ . Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει γενικά η ισότητα. Για παράδειγμα, έχουμε

$$\mathbb{Q} = \text{int}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \not\supseteq (\text{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

(β) Αν το  $A$  είναι ανοικτό στο  $X$ , τότε το  $B$  είναι ανοικτό στο  $A$  αν και μόνο αν  $B \in \mathfrak{T}$ . Πράγματι,

( $\implies$ )  $B = A \cap G$  για κάποιο  $G \in \mathfrak{T}$ . Άρα το  $B$  είναι ανοικτό στο  $X$ , ως τομή δύο ανοικτών.

( $\impliedby$ )  $B = A \cap B$ , άρα  $B$  ανοικτό στο  $A$ .

(γ) Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το  $A$  είναι κλειστό στο  $X$ , τότε το  $B$  είναι κλειστό στο  $A$  αν και μόνο αν το  $B$  είναι κλειστό στο  $X$ .

**Πρόταση 4.1.6.** Έστω  $(X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{S})$  τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ .

(i) Αν η  $f$  είναι συνεχής και  $A \subseteq X$ , τότε η  $f|_A : (A, \mathfrak{T}_A) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$  είναι συνεχής.

(ii) Αν  $f(X) \subseteq B \subseteq Y$ , τότε η  $f : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow (B, \mathfrak{S}_B)$  είναι συνεχής αν και μόνο αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι συνεχής.

(iii) Αν  $I$  είναι αυθαίρετο σύνολο και  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ , όπου τα  $A_i$  είναι ανοικτά στο  $X$  για  $i \in I$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν η  $f|_{A_i}$  είναι συνεχής για κάθε  $i \in I$ .

(iv) Αν  $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ , όπου τα  $F_i$  είναι κλειστά για  $i = 1, 2, \dots, n$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν η  $f|_{F_i}$  είναι συνεχής για  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Απόδειξη.* (i) Για κάθε  $G \subseteq Y$  ανοικτό,  $(f|_A)^{-1}(G) = A \cap f^{-1}(G)$ , όπου  $f^{-1}(G)$  ανοικτό στο  $X$ . Άρα, το  $(f|_A)^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $A$  κι επομένως η  $f|_A$  είναι συνεχής.

(ii) Έστω ότι η  $f : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow (B, \mathfrak{S}_B)$  είναι συνεχής. Για κάθε  $G \subseteq Y$  ανοικτό στο  $Y$  έχουμε  $f^{-1}(G) = f^{-1}(B \cap G)$ , αφού  $B \supseteq f(X)$ . Εφόσον  $B \cap G \in \mathfrak{S}_B$ , έπεται ότι  $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}$ . Άρα η  $f : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$  είναι συνεχής.

Αντίστροφα αν η  $f : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$  είναι συνεχής, τότε για κάθε  $V \in \mathfrak{S}_B$  υπάρχει  $G \in \mathfrak{S}$  ώστε  $V = B \cap G$ . Από την υπόθεση το  $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}$ . Όμως  $f^{-1}(V) = f^{-1}(B \cap G) = f^{-1}(G)$ . Δηλαδή η  $f : X \rightarrow B$  αντιστρέφει  $B$ -ανοικτά σε  $X$ -ανοικτά, άρα είναι συνεχής.

(iii) Δείχνουμε διαδοχικά:

( $\Rightarrow$ ) Προφανές, από (i).

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $G \subseteq Y$  ανοικτό. Τότε έχουμε:

$$f^{-1}(G) = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap f^{-1}(G) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap f^{-1}(G)) = \bigcup_{i \in I} (f|_{A_i})^{-1}(G),$$

όπου κάθε  $(f|_{A_i})^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $A_i$ , άρα και στο  $X$  (από την Παρατήρηση 4.1.5(β)). Άρα το  $f^{-1}(G)$  είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών. Συνεπώς η  $f$  είναι συνεχής.

(iv) Ομοίως με το (iii).  $\square$

**Πρόταση 4.1.7** (Λήμμα συγκόλλησης). Έστω  $(X, \mathfrak{T})$ ,  $(Y, \mathfrak{S})$  τοπολογικοί χώροι. Αν  $X = F_1 \cup F_2$  και  $f_i : F_i \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) συνεχείς συναρτήσεις ώστε  $f_1(x) = f_2(x)$  για κάθε  $x \in F_1 \cap F_2$ , τότε η συνάρτηση  $g : X \rightarrow Y$  με

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in F_1 \\ f_2(x) & \text{αν } x \in F_2 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

*Απόδειξη.* Η συνθήκη  $f_1(x) = f_2(x)$  για κάθε  $x \in F_1 \cap F_2$  είναι προφανώς αναγκαία ώστε να ορίζεται η συνάρτηση  $g$ . Παρατηρούμε όμως ότι η  $g$  ικανοποιεί  $g|_{F_i} = f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Επομένως, από το (iv) της προηγούμενης Πρότασης, είναι συνεχής.  $\square$

**Παρατήρηση 4.1.8.** Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε αν τα  $F_1, F_2$  υποτεθούν ανοικτά. Όμως το συμπέρασμα δεν ισχύει για αυθαίρετα σύνολα, όπως μπορεί κανείς να δει με εύκολα παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων, όπως πχ.

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{αν } x < 0 \\ x + 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

**Πρόταση 4.1.9.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subseteq X$  και  $\tau : A \rightarrow X$ , με  $\tau(x) = x$  για κάθε  $x \in A$ . Τότε:

(i) η  $\tau$  είναι συνεχής και

(ii) η  $\mathfrak{T}_A$  είναι η μικρότερη τοπολογία στο  $A$  ώστε η  $\tau$  να είναι συνεχής.

*Απόδειξη.* (i) Για κάθε  $G \in \mathfrak{T}$ ,  $\tau^{-1}(G) = G \cap A \in \mathfrak{T}_A$  κι επομένως η  $\tau$  είναι συνεχής.

(ii) Έστω  $\mathfrak{T}'$  τοπολογία στο  $A$ , ώστε η  $\tau$  να είναι συνεχής. Τότε για κάθε  $G \in \mathfrak{T}$ ,  $\tau^{-1}(G) = G \cap A \in \mathfrak{T}'$ . Επομένως  $\mathfrak{T}_A \subseteq \mathfrak{T}'$ . Άρα η  $\mathfrak{T}_A$  είναι η μικρότερη τοπολογία ώστε η  $\tau$  να είναι συνεχής.  $\square$

## 4.2 Ασθενής τοπολογία ως προς μια οικογένεια συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο ξεκινούμε με ένα σύνολο  $X$ , το οποίο θέλουμε να εφοδιάσουμε με μια τοπολογία, τέτοια ώστε να καθίσταται συνεχής κάθε συνάρτηση μιας οικογένειας συναρτήσεων  $(f_i)_{i \in I}$  (οι  $f_i$  ορίζονται στο  $X$  και παίρνουν τιμές σε κάποιους τοπολογικούς χώρους  $X_i$ ). Αν το  $X$  εφοδιαστεί με μια αρκετά ισχυρή τοπολογία (όπως η διακριτή), τότε η ζητούμενη ιδιότητα θα ισχύει. Για το λόγο αυτό, φαίνεται ουσιαστικότερο να εστιάσουμε στη μικρότερη τοπολογία με την παραπάνω ιδιότητα.

**Ορισμός 4.2.1.** Έστω  $X$  σύνολο,  $(X_i, \mathfrak{T}_i)$  οικογένεια τοπολογικών χώρων και συναρτήσεις  $f_i : X \rightarrow X_i$ , για κάθε  $i \in I$ . Θέτουμε

$$\mathcal{C} = \{f_i^{-1}(G) : G \in \mathfrak{T}_i, i \in I\}$$

Η τοπολογία  $\mathfrak{T}$  που έχει υποβάση την  $\mathcal{C}$  καλείται *ασθενής τοπολογία ως προς την οικογένεια  $(f_i)_{i \in I}$* .

**Παρατηρήσεις 4.2.2.** (α) Η  $\mathfrak{T}$  είναι η μικρότερη τοπολογία στο  $X$  ώστε κάθε  $f_i$  να είναι συνεχής (αφού η  $\mathfrak{T}$  είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την  $\mathcal{C}$ ).

(β) Μια βάση για την  $\mathfrak{T}$  είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathfrak{T}_{i_k} \text{ για } k = 1, \dots, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Επίσης, αν  $\mathcal{B}_i$  είναι βάση για την  $\mathfrak{T}_i$  για κάθε  $i \in I$ , τότε η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathcal{B}_{i_k} \cup \{X_{i_k}\} \text{ για } k = 1, \dots, n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ . Πράγματι,  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$  και για κάθε στοιχείο  $B$  της  $\mathcal{B}$  και  $x \in B$  υπάρχει  $B' \in \mathcal{B}'$  ώστε  $x \in B' \subseteq B$ : Αν  $B = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k)$ , όπου  $G_k \in \mathfrak{T}_{i_k}$  για  $k = 1, 2, \dots, n$ , τότε  $f_{i_k}(x) \in G_k$  για κάθε  $k$ , άρα υπάρχει  $B_k \in \mathcal{B}_{i_k}$  ώστε  $f_{i_k}(x) \in B_k \subseteq G_k$  για κάθε  $k$ . Συνεπώς  $x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(B_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k)$ , όπου  $\bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(B_k) := B' \in \mathcal{B}'$ .

**Πρόταση 4.2.3.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος, ώστε η  $\mathfrak{T}$  να είναι η ασθενής τοπολογία ως προς μια οικογένεια συναρτήσεων  $f_i : X \rightarrow X_i, i \in I$ .

(i) Αν  $Z$  είναι τοπολογικός χώρος και  $g : Z \rightarrow X$ , τότε

$$g \text{ συνεχής} \iff f_i \circ g : Z \rightarrow X_i \text{ συνεχής για κάθε } i \in I.$$

(ii) Αν  $(x_\lambda)$  είναι δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ , τότε

$$x_\lambda \rightarrow x \text{ στην } \mathfrak{T} \iff f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x) \text{ στην τοπολογία του } X_i, \text{ για κάθε } i \in I.$$

(iii) Αν  $A \subseteq X$ , τότε η σχετική τοπολογία  $\mathfrak{T}_A$  συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία ως προς  $(f_i|_A)_{i \in I}$ .

*Απόδειξη.* (i) Έστω ότι η  $g$  είναι συνεχής. Τότε κάθε  $f_i \circ g$  είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών. Έστω αντίστροφα ότι κάθε  $f_i \circ g$  είναι συνεχής. Τότε για κάθε  $i \in I$  και  $G$  ανοικτό στο  $X_i$  το  $g^{-1}(f_i^{-1}(G)) = (f_i \circ g)^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $Z$ . Αφού η  $\mathcal{C} = \{f_i^{-1}(G) : G \subseteq X_i \text{ ανοικτό}, i \in I\}$  είναι υποβάση της  $\mathfrak{T}$ , έπεται από την Παρατήρηση 3.2.4(β) ότι η  $g$  είναι συνεχής.

(ii) Αν  $x_\lambda \rightarrow x$ , τότε  $f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x)$  για κάθε  $i \in I$ , αφού οι συναρτήσεις  $f_i$  είναι συνεχείς. Έστω αντίστροφα, ότι  $f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x)$  για κάθε  $i \in I$  κι έστω  $G$  ανοικτή περιοχή του  $x$ . Αφού η  $\mathcal{B}$  (της Παρατήρησης 4.4.2(β)) είναι βάση για την  $\mathfrak{T}$ , υπάρχουν  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$  και  $G_1 \subseteq X_{i_1}, G_2 \subseteq X_{i_2}, \dots, G_n \subseteq X_{i_n}$  ανοικτά, ώστε  $x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq G$ . Άρα  $f_{i_k}(x) \in G_k$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$ . Αφού  $f_{i_k}(x_\lambda) \rightarrow f_{i_k}(x)$  για  $k = 1, 2, \dots, n$ , έπεται ότι υπάρχει  $\lambda_k \in \Lambda$  ώστε  $f_{i_k}(x_\lambda) \in G_k$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_k$  για  $k = 1, 2, \dots, n$ . Επιλέγουμε  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε  $\lambda_0 \geq \lambda_1, \lambda_0 \geq \lambda_2, \dots, \lambda_0 \geq \lambda_n$ . Τότε για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$  έχουμε  $f_{i_k}(x_\lambda) \in G_k$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$ , δηλαδή  $x_\lambda \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq G$ . Επομένως  $x_\lambda \rightarrow x$ .

(iii) Για κάθε  $i \in I$  και  $G \in \mathfrak{T}_i$  έχουμε  $f_i^{-1}(G) \cap A = (f_i|_A)^{-1}(G)$ . Αλλά η οικογένεια  $\{f_i^{-1}(G) \cap A : i \in I, G_i \subseteq X_i \text{ ανοικτό}\}$  είναι υποβάση για την  $\mathfrak{T}_A$  και η οικογένεια  $\{(f_i|_A)^{-1}(G) : i \in I, G_i \subseteq X_i \text{ ανοικτό}\}$  είναι υποβάση της ασθενούς τοπολογίας ως προς την οικογένεια συναρτήσεων  $(f_i|_A)_{i \in I}$ .  $\square$

### 4.3 Τοπολογία γινόμενο

Αν  $(X, \mathfrak{T})$  και  $(Y, \mathfrak{T}')$  είναι δύο τοπολογικοί χώροι, αναμενόμενο είναι να οδηγηθεί κανείς στην αναζήτηση μιας τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο  $X \times Y$ , η οποία θα είναι, κατά μία έννοια, συμβατή με τις τοπολογίες των συνόλων  $X$  και  $Y$ . Μία υποψήφια έννοια συμβατότητας είναι η απαίτηση να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις προβολής στις συντεταγμένες κάθε σημείου. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε τα ανοικτά σύνολα του καρτεσιανού γινομένου  $X \times Y$  να παράγονται από τα γινόμενα των ανοικτών συνόλων των  $X$  και  $Y$  (δηλαδή η οικογένεια  $\{U \times V : U \in \mathfrak{T}, V \in \mathfrak{T}'\}$  να είναι βάση για την τοπολογία γινόμενο). Στην περίπτωση αυτή, η γενικότερα στην περίπτωση πεπερασμένου πλήθους τοπολογικών χώρων, δεν υπάρχει διαφορά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όντως παρουσιάζεται στην απόδοση τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο, όχι δύο τοπολογικών χώρων, αλλά μιας αυθαίρετα μεγάλης οικογένειας τοπολογικών χώρων. Στη γενική αυτή περίπτωση καρτεσιανού γινομένου θα απαιτήσουμε την πρώτη έννοια συμβατότητας, όπως θα φανεί στον Ορισμό 4.3.1. Θα πρέπει δε να σημειωθεί, ότι η κατασκευή της τοπολογίας γινόμενο είναι μια κατασκευή εξέχουσας σημασίας για τη Γενική Τοπολογία.

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $n \in \mathbb{N}$  και  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι σύνολα, το καρτεσιανό γινόμενο των  $X_i$  περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n X_i &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\} \\ &= \left\{ x : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n X_i : x(i) \in X_i \text{ για } i = 1, 2, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

**Ορισμός 4.3.1.** Έστω  $I$  αυθαίρετο σύνολο και  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια συνόλων. Τότε

το σύνολο

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ με } x(i) \in X_i \text{ για κάθε } i \in I \right\}$$

καλείται *καρτεσιανό γινόμενο* της οικογένειας  $(X_i)_{i \in I}$ . Τα στοιχεία του  $\prod_{i \in I} X_i$  συμβολίζονται με  $x = (x_i)_{i \in I}$ , όπου  $x_i = x(i)$  για κάθε  $i \in I$ . Τα  $x_i$  λέγονται *συντεταγμένες* του  $x$ . Η συνάρτηση  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  με  $\pi_i(x) = x_i$  για κάθε  $x \in X$  καλείται *προβολή  $i$ -τάξης*. Το *Αξίωμα της Επιλογής* εξασφαλίζει ότι αν  $X_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in I$ , τότε  $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ . Αν  $X_i = Y$  για κάθε  $i \in I$ , τότε το  $\prod_{i \in I} X_i$  συμβολίζεται με  $Y^I$  και καλείται *δύναμη του  $Y$* .

**Ορισμός 4.3.2.** Έστω  $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in I}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων, όπου  $I$  αυθαίρετο σύνολο. Η ασθενής τοπολογία του  $X = \prod_{i \in I} X_i$  ως προς την οικογένεια  $(\pi_i)_{i \in I}$  των προβολών, καλείται *καρτεσιανή τοπολογία* ή *τοπολογία γινόμενο* και ο τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *χώρος γινόμενο* της οικογένειας  $(X_i)_{i \in I}$ .

Ας εξειδικεύσουμε όσα έχουμε αναφέρει για την ασθενή τοπολογία στην ειδική περίπτωση της καρτεσιανής τοπολογίας. Η καρτεσιανή τοπολογία  $\mathfrak{T}$  είναι η μικρότερη τοπολογία στο  $X$  ώστε κάθε προβολή  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  να είναι συνεχής. Μια υποβάση για την  $\mathfrak{T}$  είναι η

$$\mathcal{C} = \{\pi_i^{-1}(G) : G \in \mathfrak{T}_i, i \in I\}.$$

Μια βάση για την  $\mathfrak{T}$  είναι η

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathfrak{T}_{i_k}, k = 1, 2, \dots, n \text{ και } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{i \in I} G_i : G_i \in \mathfrak{T}_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } |\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty \right\} \end{aligned}$$

(δηλ.  $G_i = X_i$  εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών  $i$ ) διότι

$$\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(G_k) = \prod_{i \in I} G_i, \text{ όπου } G_i = \begin{cases} G_k, & \text{αν } i = i_k, k = 1, 2, \dots, n \\ X_i, & \text{αν } i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \end{cases}.$$

Η  $\mathcal{B}$  καλείται *κανονική βάση* για την  $\mathfrak{T}$ . Ακόμη, αν  $\mathcal{B}_i$  είναι μια βάση για την  $\mathfrak{T}_i$  για κάθε  $i \in I$ , τότε βάση για την  $\mathfrak{T}$  αποτελεί και η

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \left\{ \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(G_k) : i_k \in I, G_k \in \mathcal{B}_{i_k} \cup \{X_{i_k}\}, k = 1, 2, \dots, n \text{ και } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{i \in I} G_i : G_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\} \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } |\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty \right\}. \end{aligned}$$

**Πρόταση 4.3.3.** Έστω  $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in I}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων και  $X = \prod_{i \in I} X_i$  με την καρτεσιανή τοπολογία  $\mathfrak{T}$ .

(i) Αν  $Z$  είναι τοπολογικός χώρος και  $f : Z \rightarrow X$ , τότε

$$f \text{ συνεχής} \iff \pi_i \circ f : Z \rightarrow X_i \text{ συνεχής για κάθε } i \in I.$$

(ii) Αν  $(x_\lambda)$  είναι δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ , τότε

$$x_\lambda \rightarrow x \iff \pi_i(x_\lambda) \rightarrow \pi_i(x) \text{ για κάθε } i \in I.$$

(iii) Αν  $A_i \subseteq X_i$  για κάθε  $i \in I$  και  $A = \prod_{i \in I} A_i$ , τότε η σχετική τοπολογία  $\mathfrak{T}_A$  του  $A$  ως προς  $\mathfrak{T}$  συμπίπτει με την καρτεσιανή τοπολογία του  $A$  όταν κάθε  $A_i$  έχει τη σχετική τοπολογία ως προς  $\mathfrak{T}_i$ . Επιπλέον  $\overline{A} = \overline{(\prod_{i \in I} A_i)} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ .

(iv) Για κάθε  $i \in I$  η προβολή  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  είναι ανοικτή, αλλά όχι αναγκαία κλειστή.

Απόδειξη. (i), (ii) Άμεσα, από Πρόταση 4.2.3(i), (ii) αντίστοιχα.

(iii) Από την Πρόταση 4.2.3(iii), έχουμε ότι η  $\mathfrak{T}_A$  συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια  $\pi_i|_A : A \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$ . Όμως, η τελευταία είναι ίση με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια  $\pi_i|_A : A \rightarrow A_i$ ,  $i \in I$  (γιατί;), δηλαδή είναι ίση με την καρτεσιανή τοπολογία του  $A$ .

Δείχνουμε ότι  $\overline{(\prod_{i \in I} A_i)} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ . Παρατηρούμε αρχικά ότι  $x \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$  αν και μόνο αν  $\pi_i(x) = x_i \in \overline{A_i}$ , όπου κάθε  $\pi_i^{-1}(\overline{A_i})$  είναι κλειστό (αφού κάθε  $\pi_i$  είναι συνεχής). Συνεπώς  $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\overline{A_i})$ , το οποίο είναι κλειστό, ως τομή κλειστών, άρα

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} \subseteq \prod_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Αντίστροφα, έστω  $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$  και  $B \in \mathcal{B}$ , όπου  $\mathcal{B}$  η κανονική βάση της  $\mathfrak{T}$ , με  $x \in B$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $B \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ . Έχουμε ότι  $B = \prod_{i \in I} G_i$ , όπου  $G_i \in \mathfrak{T}_i$  για κάθε  $i \in I$  και  $|\{i \in I : G_i \neq X_i\}| < \infty$ . Επίσης, για κάθε  $i \in I$ ,  $x_i \in \overline{A_i}$  (αφού  $x \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ ) και  $x_i \in G_i$  (αφού  $x \in \prod_{i \in I} G_i$ ). Επομένως  $A_i \cap G_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in I$  και έτσι,  $\prod_{i \in I} (A_i \cap G_i) \neq \emptyset$ , δηλαδή  $(\prod_{i \in I} A_i) \cap (\prod_{i \in I} G_i) \neq \emptyset$ . Άρα  $(\prod_{i \in I} A_i) \cap B \neq \emptyset$ .

(iv) Έστω  $B \in \mathcal{B}$  με  $B \neq \emptyset$ . Τότε  $B = \prod_{i \in I} G_i$ , όπου  $G_i \in \mathfrak{T}_i$  και  $G_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in I$ . Άρα  $\pi_i(B) = G_i$  ανοικτό στο  $X_i$ . Επομένως  $\pi_i$  ανοικτή.

Η  $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δεν είναι κλειστή (ως προς τις συνήθεις τοπολογίες). Πράγματι το  $F = \{(x, 1/x) : x > 0\}$  είναι κλειστό στο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ενώ το  $\pi_1(F) = (0, +\infty)$  δεν είναι κλειστό στο  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 4.3.4.** Αν  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  είναι μετρικοί χώροι, τότε ο χώρος γινόμενο των  $(X_1, \mathfrak{T}_{\rho_1})$  και  $(X_2, \mathfrak{T}_{\rho_2})$  με την καρτεσιανή τοπολογία  $\mathfrak{T}$  είναι μετρικοποιήσιμος, παραδείγματος χάριν με τη μετρική  $\rho((x, y), (x', y')) = \max\{\rho_1(x, x'), \rho_2(y, y')\}$ , αφού

$$B_\rho((x, y), \varepsilon) = B_{\rho_1}(x, \varepsilon) \times B_{\rho_2}(y, \varepsilon) \quad \forall (x, y) \in X_1 \times X_2, \varepsilon > 0$$

και οι οικογένειες  $\{B_\rho((x, y), \varepsilon) : (x, y) \in X_1 \times X_2, \varepsilon > 0\}$  και  $\{B_{\rho_1}(x, \varepsilon) \times B_{\rho_2}(y, \varepsilon) : x \in X_1, y \in X_2, \varepsilon > 0\}$  αποτελούν βάσεις για τις τοπολογίες  $\mathfrak{T}_\rho$  και  $\mathfrak{T}$  αντίστοιχα.

**Θεώρημα 4.3.5.** Έστω  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  αριθμήσιμη οικογένεια μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  με την καρτεσιανή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , έστω  $\rho_n$  μετρική στο  $X_n$  ώστε η  $\mathfrak{T}_{\rho_n}$  να είναι η τοπολογία του  $X_n$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\rho_n \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  (αντικαθιστώντας τη  $\rho_n$  με μια ισοδύναμη μετρική). Ορίζουμε  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n), \text{ για κάθε } x = (x_n), y = (y_n) \in X.$$

Η  $\rho$  είναι καλά ορισμένη μετρική στο  $X$  (γιατί;). Αρκεί να δείξουμε ότι  $\mathfrak{T}_\rho = \mathfrak{T}$ , όπου  $\mathfrak{T}$  η καρτεσιανή τοπολογία του  $X$ .

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $x, y \in X$  έχουμε  $\rho_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) = \rho_n(x_n, y_n) \leq 2^n \rho(x, y)$ . Επομένως η  $\pi_n : (X, \mathfrak{T}_\rho) \rightarrow X_n$  είναι συνεχής. Αφού η  $\mathfrak{T}$  είναι η ελάχιστη τοπολογία στο  $X$  ώστε κάθε  $\pi_n : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow X_n$  να είναι συνεχής, έπεται ότι  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_\rho$ .

Αντίστροφα, έστω  $G \in \mathfrak{T}_\rho$ . Για να δείξουμε ότι  $G \in \mathfrak{T}$ , αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  (όπου  $\mathcal{B}$  η κανονική βάση της  $\mathfrak{T}$ ) ώστε  $x \in B \subseteq G$  (διότι τότε το  $G$  θα είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$ , άρα  $G \in \mathfrak{T}$ ). Έστω  $x = (x_n) \in G$ . Αφού  $G \in \mathfrak{T}_\rho$ , υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , ώστε  $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$ . Θέτουμε  $B = \bigcap_{n=1}^k \pi_n^{-1}(B_{\rho_n}(x_n, \varepsilon/2))$ , όπου  $k$  αρκετά μεγάλο ώστε  $1/2^k < \varepsilon/2$ . Τότε  $B \in \mathcal{B}$ ,  $x \in B$  και για κάθε  $y = (y_n) \in B$  έχουμε

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα  $y \in B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$ . Συνεπώς  $B \subseteq G$ .  $\square$

**Πρόταση 4.3.6.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος ώστε η  $\mathfrak{T}$  να είναι η ασθενής τοπολογία ως προς μια οικογένεια συναρτήσεων  $f_i : X \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , που διαχωρίζει τα σημεία του  $X$  (δηλαδή, για κάθε  $x, y \in X$ , με  $x \neq y$ , υπάρχει  $i \in I$  ώστε  $f_i(x) \neq f_i(y)$ ). Θέτουμε  $\varphi : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  με  $\varphi(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ . Τότε η  $\varphi$  είναι (τοπολογική) εμφύτευση, δηλαδή η  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  είναι ομοιομορφισμός των  $X$  και  $\varphi(X)$ , όπου ο χώρος  $\varphi(X)$  έχει τη σχετική τοπολογία.

*Απόδειξη.* Αφού η οικογένεια  $(f_i)_{i \in I}$  διαχωρίζει τα σημεία του  $X$ , η  $\varphi$  είναι 1-1. Άρα η  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  είναι 1-1 και επί. Έστω  $(x_\lambda)$  δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ . Τότε:

$$\begin{aligned} x_\lambda \rightarrow x &\iff f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x) \text{ για κάθε } i \in I \text{ (από Πρόταση 4.2.3(ii))} \\ &\iff (f_i(x_\lambda))_{i \in I} \rightarrow (f_i(x))_{i \in I} \text{ στο } \varphi(X) \text{ (από Πρόταση 4.3.3(ii), (iii))} \\ &\iff \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) \text{ στο } \varphi(X). \end{aligned}$$

Από το χαρακτηρισμό της συνέχειας με δίκτυα, έπεται ότι η  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  και η  $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$  είναι συνεχείς.  $\square$

## 4.4 Τοπολογία πηλίκου

Στην Τοπολογία εμφανίζονται συχνά καταστάσεις κατά τις οποίες καλούμαστε να κατασκευάσουμε πολύπλοκα αντικείμενα από απλούστερα, χρησιμοποιώντας μεθόδους «συγκόλλησης». Αυτές οι καταστάσεις ενδέχεται με μια πρώτη ματιά να φαίνονται διαφορετικές, αλλά ουσιαστικά αποτελούν εκφάνσεις μιας γενικής κατασκευής. Η έννοια της τοπολογίας πηλίκου ουσιαστικά εμπεριέχει την τυπική περιγραφή αυτής της κατασκευής.

Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  ένας τοπολογικός χώρος και  $\sim$  μια σχέση ισοδυναμίας στο  $X$ . Έστω  $\tilde{X} = X / \sim$  το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την  $\sim$  (μπορούμε να



σκεφτόμαστε την κατασκευή του  $\tilde{X}$  ως μια «συγκόλληση» τμημάτων του  $X$ , συγκεκριμένα ταυτίζουμε τα στοιχεία του  $X$  που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας). Σκοπός μας είναι να εφοδιάσουμε το σύνολο  $\tilde{X}$  με μια τοπολογία, τέτοια ώστε η δημιουργία του  $\tilde{X}$  από το  $X$  να γίνεται «με συνεχή τρόπο». Ουσιαστικά, απαιτούμε να είναι συνεχής η κανονική προβολή  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$  με  $x \mapsto [x]$ , όπου  $[x]$  η κλάση ισοδυναμίας του  $x$ . Αν εφοδιάσουμε το  $\tilde{X}$  με την τετριμμένη τοπολογία, τότε προφανώς η  $\pi$  θα είναι συνεχής. Όμως μια τέτοια κατάσταση δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον και για το λόγο αυτό, θα πρέπει να αναζητήσουμε ισχυρότερες τοπολογίες στο  $\tilde{X}$ . Αν  $\mathfrak{T}_\pi$  είναι η επιθυμητή τοπολογία στο  $\tilde{X}$ , τότε, από τη συνέχεια της  $\pi$ , έχουμε ότι  $\mathfrak{T}_\pi \subseteq \{U \subseteq \tilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}\}$ . Αλλά μπορεί εύκολα κανείς να ελέγξει ότι η οικογένεια  $\{U \subseteq \tilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}\}$  είναι μια τοπολογία στο  $\tilde{X}$ . Καταλήγουμε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 4.4.1.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  ένας τοπολογικός χώρος,  $\sim$  μια σχέση ισοδυναμίας στο  $X$  και  $\tilde{X} = X/\sim$  το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την  $\sim$ . Η τοπολογία

$$\mathfrak{T}_\pi = \{U \subseteq \tilde{X} : \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}\}$$

του  $\tilde{X}$  (όπου  $\pi$  η κανονική προβολή του  $X$ ) καλείται *τοπολογία πηλίκου* και ο χώρος  $(\tilde{X}, \mathfrak{T}_\pi)$  είναι ένας *χώρος πηλίκου* του  $X$ .

**Παρατήρηση 4.4.2.** Η  $\mathfrak{T}_\pi$  είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο  $\tilde{X}$  ώστε η κανονική προβολή  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$  να είναι συνεχής.

**Πρόταση 4.4.3.** Έστω τοπολογικοί χώροι  $X, Y$  και  $\tilde{X}$  ένας χώρος πηλίκου του χώρου  $X$ . Τότε, μια συνάρτηση  $g : \tilde{X} \rightarrow Y$  είναι συνεχής αν και μόνο αν η  $g \circ \pi$  είναι συνεχής.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow^{g \circ \pi} & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Άμεσο, αφού η  $\pi$  είναι συνεχής.

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $U$  ένα ανοικτό υποσύνολο του  $Y$ . Τότε, από τη συνέχεια της  $g \circ \pi$ , το σύνολο  $(g \circ \pi)^{-1}(U)$  είναι ανοικτό στο  $X$ . Επομένως το  $\pi^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ \pi)^{-1}(U)$  είναι ανοικτό στο  $X$ . Δηλαδή (ορισμός της τοπολογίας πηλίκου) το  $g^{-1}(U)$  είναι ανοικτό στο  $\tilde{X}$ . Συνεπώς η  $g$  είναι συνεχής.  $\square$

**Πρόταση 4.4.4.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και μια συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  η οποία είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας της  $\sim$ . Τότε υπάρχει μοναδική  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$  με  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Δηλαδή υπάρχει μοναδική  $\tilde{f}$  έτσι ώστε το

ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

$H \tilde{f} : (\tilde{X}, \mathfrak{T}_\pi) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$  είναι συνεχής.

*Απόδειξη.* Για κάθε  $[x] \in \tilde{X}$  ορίζουμε  $\tilde{f}([x]) = f(x)$ . Τότε η  $f$  είναι καλά ορισμένη (γιατί;) και προφανώς  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Από την Πρόταση 4.4.3, η συνάρτηση  $\tilde{f}$  είναι συνεχής, αφού η  $\tilde{f} \circ \pi = f$  είναι συνεχής. Η μοναδικότητα αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

Με τον επόμενο ορισμό γίνεται κατανοητό πώς μπορούμε να αναγνωρίζουμε ένα χώρο πηλίκο.

**Ορισμός 4.4.5.** Έστω  $(X, \mathfrak{T})$ ,  $(Y, \mathfrak{S})$  τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση  $p : X \rightarrow Y$  καλείται *απεικόνιση πηλίκο* ή *συνάρτηση ταύτισης* αν υπάρχει σχέση ισοδυναμίας,  $\sim$ , στο  $X$  και ομοιομορφισμός  $\phi : (\tilde{X}, \mathfrak{T}_\pi) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$  έτσι ώστε  $p = \phi \circ \pi$ , δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

**Παρατήρηση 4.4.6.** Μια απεικόνιση πηλίκο  $p$  είναι προφανώς συνεχής και επί. Επιπλέον, ένα  $U \subseteq Y$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν το  $p^{-1}(U) \subseteq X$  είναι ανοικτό (γιατί;).

Η ακόλουθη Πρόταση κάνει φανερό το ότι οι παραπάνω ιδιότητες χαρακτηρίζουν τις απεικονίσεις πηλίκο.

**Πρόταση 4.4.7.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $p : X \rightarrow Y$  μία συνεχής και επί συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η  $p$  είναι απεικόνιση πηλίκο
- (β) Ένα  $U \subseteq Y$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν το  $p^{-1}(U) \subseteq X$  είναι ανοικτό.

*Απόδειξη.* Το ευθύ προκύπτει από την Παρατήρηση 4.4.6. Δείχνουμε το αντίστροφο. Ορίζουμε στο  $X$  τη σχέση: για  $x, y \in X$ ,  $x \sim y \iff p(x) = p(y)$ . Η  $\sim$  είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $X$  και από τον ορισμό της  $\sim$ , η  $p$  είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας. Από την Πρόταση 4.4.4, υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow Y$ , τέτοια ώστε  $p = \tilde{p} \circ \pi$ . Από την κατασκευή της, η  $\tilde{p}$  είναι 1-1 και επί. Μένει να δείξουμε ότι η  $\tilde{p}$  είναι ανοικτή. Έστω  $U \subseteq \tilde{X}$  ανοικτό. Από την υπόθεση, για

να δείξουμε ότι το  $\tilde{p}(U) \subseteq Y$  είναι ανοικτό, αρκεί να δείξουμε ότι το  $p^{-1}(\tilde{p}(U)) \subseteq X$  είναι ανοικτό. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} p^{-1}(\tilde{p}(U)) &= (\tilde{p} \circ \pi)^{-1}(\tilde{p}(U)) \\ &= \pi^{-1}(\tilde{p}^{-1}(\tilde{p}(U))) \\ &= \pi^{-1}(U) \quad (\text{αφού η } \tilde{p} \text{ είναι } 1-1) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ανοικτό, αφού η  $\pi$  είναι συνεχής.  $\square$

**Παρατήρηση 4.4.8.** Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $p : X \rightarrow Y$  μία συνεχής και επί συνάρτηση. Αν η  $p$  είναι ανοικτή (ή κλειστή) συνάρτηση, τότε, από το Πρόταση 4.4.7, είναι απεικόνιση ηλίκο. Γενικά, δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή υπάρχουν απεικονίσεις ηλίκο που δεν είναι ούτε ανοικτές ούτε κλειστές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, έστω  $X = \mathbb{R}$  με τη συνήθη τοπολογία,  $Y = \{0, 1\}$  με την τοπολογία  $\{Y, \emptyset, \{0\}\}$  και  $\phi = \chi_{[0, +\infty)}$ , η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $[0, +\infty)$ . Η  $\phi$  είναι απεικόνιση ηλίκο, αλλά δεν είναι ούτε ανοικτή, ούτε κλειστή, αφού  $\phi((0, +\infty)) = \{1\}$  όχι ανοικτό και  $\phi((-\infty, -1]) = \{0\}$  όχι κλειστό στο  $Y$ .

Η Πρόταση 4.4.7 δεν αποτελεί μόνο μια μέθοδο για να εντοπίσουμε ένα χώρο ηλίκο του  $X$ , αλλά και μέσα από την απόδειξή της, αποκτούμε ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης την έννοιας του χώρου ηλίκο. Έστω  $Z$  ένα σύνολο και μια επί συνάρτηση  $\phi : X \rightarrow Z$ . Θα θέλαμε να εφοδιάσουμε το  $Z$  με τη μεγαλύτερη δυνατή τοπολογία  $\mathfrak{T}_\phi$ , έτσι ώστε η  $\phi$  να είναι συνεχής. Δουλεύοντας όπως ακριβώς και στην αρχή της παραγράφου, καταλήγουμε στην εξής τοπολογία:

$$\mathfrak{T}_\phi = \{U \subseteq Z : \phi^{-1}(U) \text{ ανοικτό στο } X\}.$$

Όμως, εύκολα ελέγχει κανείς ότι η τοπολογία  $\mathfrak{T}_\phi$  καθιστά τη  $\phi$  όχι μόνο συνεχής, αλλά και απεικόνιση ηλίκο, αφού ικανοποιεί την ισοδύναμη συνθήκη της Πρότασης 4.4.7. Δηλαδή, ο χώρος  $(Z, \mathfrak{T}_\phi)$  είναι ομοιομορφικός με ένα χώρο ηλίκο του  $X$ , ο οποίος περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.7. Για λόγους απλότητας, στο εξής θα λέμε ότι ο  $(Z, \mathfrak{T}_\phi)$  είναι ο χώρος ηλίκο του  $X$  που επάγεται από τη συνάρτηση  $\phi$ .

**Πρόταση 4.4.9.** Έστω  $X, Y, Z$  τοπολογικοί χώροι. Αν ο  $Y$  είναι χώρος ηλίκο του  $X$  και ο  $Z$  είναι χώρος ηλίκο του  $Y$ , τότε ο  $Z$  είναι χώρος ηλίκο του  $X$ . Συγκεκριμένα, αν η τοπολογία ηλίκο του  $Y$  επάγεται από μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  και η τοπολογία ηλίκο του  $Z$  επάγεται από μια συνάρτηση  $g : Y \rightarrow Z$ , τότε η  $g \circ f : X \rightarrow Z$  είναι απεικόνιση ηλίκο.

*Απόδειξη.* Για κάθε  $G \subseteq Z$  ισχύει η ισότητα  $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$ . Επομένως το  $G$  είναι ανοικτό  $\iff$  το  $g^{-1}(G) \subseteq Y$  είναι ανοικτό  $\iff$  το  $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G) \subseteq X$  είναι ανοικτό. Άρα η  $g \circ f$  είναι απεικόνιση ηλίκο.  $\square$

Έστω τώρα  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος,  $Y$  σύνολο και  $\phi : X \rightarrow Y$  μια συνάρτηση επί του  $Y$ . Σε ένα  $A \subseteq Y$  μπορούμε να ορίσουμε τις εξής τοπολογίες:

- τη σχετική τοπολογία  $(\mathfrak{T}_\phi)_A$ , του  $A$  ως προς την τοπολογία ηλίκο  $\mathfrak{T}_\phi$  του  $Y$  που επάγεται από τη συνάρτηση  $\phi$ .
- την τοπολογία ηλίκο  $\mathfrak{T}_\psi$  του  $A$  που επάγεται από τη συνάρτηση  $\psi := \phi|_{\phi^{-1}(A)} : \phi^{-1}(A) \rightarrow A$ .

Αφού η συνάρτηση  $\psi$  είναι συνεχής αν το  $A$  έχει εφοδιαστεί με τη σχετική τοπολογία και αφού η  $\mathfrak{T}_\psi$  είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο  $A$  ώστε η  $\psi$  να είναι συνεχής, έπεται ότι  $(\mathfrak{T}_\phi)_A \subseteq \mathfrak{T}_\psi$ . Γενικά, όμως δεν ισχύει ισότητα.<sup>1</sup>

**Πρόταση 4.4.10.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος,  $\phi : X \rightarrow Y$  μια συνάρτηση επί του συνόλου  $Y$  και  $A \subseteq Y$ . Αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) Το  $A$  είναι ανοικτό ή κλειστό στο  $Y$  (ως προς την τοπολογία πηλίκου  $\mathfrak{T}_\phi$ ),
- (ii) Η  $\phi : (X, \mathfrak{T}) \rightarrow (Y, \mathfrak{T}_\phi)$  είναι ανοικτή ή κλειστή,

τότε ισχύει ότι  $(\mathfrak{T}_\phi)_A = \mathfrak{T}_\psi$ .

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι  $(\mathfrak{T}_\phi)_A \supseteq \mathfrak{T}_\psi$ .

(i) Έστω ότι το  $A$  είναι ανοικτό. Έστω  $G \subseteq A$  με  $G \in \mathfrak{T}_\psi$ . Τότε το σύνολο  $\psi^{-1}(G) = \phi^{-1}(G) \cap \phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(G)$  είναι (σχετικά) ανοικτό στο  $\phi^{-1}(A)$  και αφού το  $\phi^{-1}(A)$  είναι ανοικτό στο  $X$ , από Παρατήρηση 4.1.5(β), το  $\phi^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $X$ . Συνεπώς,  $G \in \mathfrak{T}_\phi$  και εφόσον  $G \subseteq A$  έχουμε ότι  $G \in (\mathfrak{T}_\phi)_A$ . Άρα  $\mathfrak{T}_\psi \subseteq (\mathfrak{T}_\phi)_A$ .

Για την περίπτωση που το  $A$  είναι κλειστό εργαζόμαστε ανάλογα.

(ii) Έστω ότι η  $\phi$  είναι ανοικτή συνάρτηση. Έστω  $G \subseteq A$  με  $G \in \mathfrak{T}_\psi$ . Αφού το σύνολο  $\psi^{-1}(G) = \phi^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $\phi^{-1}(A)$ , υπάρχει  $U \subseteq X$  ανοικτό ώστε  $\phi^{-1}(G) = U \cap \phi^{-1}(A)$ . Τότε  $G = \phi(U) \cap A$ , και αφού η  $\phi$  είναι ανοικτή, το  $\phi(U)$  είναι ανοικτό στο  $Y$ . Άρα  $G \in (\mathfrak{T}_\phi)_A$  και συνεπώς  $\mathfrak{T}_\psi \subseteq (\mathfrak{T}_\phi)_A$ .

Για την περίπτωση που η  $\phi$  είναι κλειστή εργαζόμαστε ανάλογα. □

<sup>1</sup>Βλ. π.χ. Παράδειγμα 10.17 στο *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση των Νεγρεπόντη, Ζαχαριάδη, Καλαμίδα και Φαρμάκη*.



## Κεφάλαιο 5

# Διαχωριστικά Αξιώματα

Αν και μία τοπολογία ενδέχεται να περιέχει «πολλά» σύνολα, το πόσο ευνοϊκή είναι η δομή των ανοικτών συνόλων μπορεί να ποικίλλει. Μια ενδεχόμενη παθολογία, που μπορεί να εμφανίζεται, είναι η αδυναμία της τοπολογίας να διαχωρίσει δύο διακεκριμένα σημεία του χώρου (δηλαδή τα σημεία αυτά να περιέχονται στα ίδια ανοικτά σύνολα). Αυτή η παθολογία, όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, έχει ως συνέπεια την ταυτόχρονη σύγκλιση, και στα δύο σημεία, κάθε δικτύου που συγκλίνει σε ένα (τουλάχιστον) από τα σημεία αυτά. Δηλαδή, δεν μπορούμε να έχουμε την επιθυμητή ιδιότητα της μοναδικότητας του ορίου για τα συγκλίνοντα δίκτυα. Στο κεφάλαιο αυτό επιθυμούμε να εξετάσουμε μία σειρά συνθηκών, οι οποίες καθιστούν την τοπολογία ενός χώρου ικανότερη να διαχωρίζει διακεκριμένα σημεία και κλειστά υποσύνολα του χώρου.

Η ορολογία που θα εισαγάγουμε δεν έχει ως μοναδικό της σκοπό την κατάταξη των τοπολογικών χώρων ως προς τις συνθήκες-τα διαχωριστικά αξιώματα- που ικανοποιούν, αλλά και να μας υποδείξει ποιές είναι οι ιδιότητες που θα πρέπει να διαθέτει ένας τοπολογικός χώρος ώστε να είναι μετριοποιησιμος. Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός είναι σκόπιμο, με την εισαγωγή ενός νέου διαχωριστικού αξιώματος, να εξετάζεται η σχέση και η αλληλεπίδρασή του με όσα διαχωριστικά αξιώματα έχουν ήδη μελετηθεί, καθώς και να διερευνηθεί το κατά πόσο ικανοποιείται σε μια μετριοποιησιμη τοπολογία.

### 5.1 Χώροι $T_1$

Το πρώτο διαχωριστικό αξίωμα που εισάγουμε εξασφαλίζει την ύπαρξη «λεπτών» ανοικτών περιοχών για τα σημεία του χώρου, δηλαδή για κάθε στοιχείο του χώρου θα υπάρχει μια βάση περιοχών, τα στοιχεία της οποίας θα μπορούν να το απομονώσουν από κάθε άλλο στοιχείο του χώρου. Θα δούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι κλειστό σύνολο κάθε μονοσύνολο του χώρου. Ακόμη κι αυτή η ελάχιστη απαίτηση δεν ικανοποιείται από κάθε τοπολογικό χώρο.

**Ορισμός 5.1.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται χώρος  $T_1$  αν για κάθε  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , υπάρχει ανοικτό σύνολο  $G$  με  $x \in G$  και  $y \notin G$ .

**Πρόταση 5.1.2.** Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι  $T_1$ .

(ii) Κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό στο  $X$ .

(iii)  $\bigcap \mathfrak{N}_x = \{x\}$  για κάθε  $x \in X$ .

*Απόδειξη.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $x \in X$  και  $y \in X \setminus \{x\}$ . Τότε  $x \neq y$ , άρα από το (i), υπάρχει  $G$  ανοικτό ώστε  $y \in G$  και  $x \notin G$ . Άρα  $y \in G \subseteq X \setminus \{x\}$ , όπου  $G$  ανοικτό, επομένως το  $X \setminus \{x\}$  είναι περιοχή κάθε σημείου  $y \in X \setminus \{x\}$ . Συνεπώς το  $X \setminus \{x\}$  είναι ανοικτό και ισοδύναμα το  $\{x\}$  είναι κλειστό.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω  $x \in X$ . Προφανώς έχουμε ότι  $\{x\} \subseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$  (αφού  $x \in U$  για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$ ). Έστω  $y \in X$  με  $y \neq x$ . Τότε, από το (ii), το  $X \setminus \{y\}$  είναι ανοικτό και  $x \in X \setminus \{y\}$ . Άρα  $X \setminus \{y\} \in \mathfrak{N}_x$  και προφανώς  $y \notin X \setminus \{y\}$ . Επομένως,  $\bigcap \mathfrak{N}_x = \{x\}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Τότε, από το (iii),  $y \notin \bigcap \mathfrak{N}_x$ , άρα υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_x$  με  $y \notin U$ . Θέτοντας  $G = U^c$  έχουμε ότι το  $G$  είναι ανοικτό,  $x \in G$  και  $y \notin G$ . Συνεπώς ο  $X$  είναι χώρος  $T_1$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.1.3.** Στο (iii) της Πρότασης 5.1.2, το σύστημα περιοχών  $\mathfrak{N}_x$  μπορεί να αντικατασταθεί από μια βάση περιοχών  $\mathfrak{B}_x$  του  $x$ , αφού  $\bigcap \mathfrak{B}_x = \bigcap \mathfrak{N}_x$ . Πράγματι, από το ότι  $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  παίρνουμε ότι  $\bigcap \mathfrak{B}_x \supseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$ · αλλά, αφού για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  υπάρχει  $B \in \mathfrak{B}_x$  με  $B \subseteq U$ , έχουμε ότι  $\bigcap \mathfrak{B}_x \subseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$ .

**Παραδείγματα 5.1.4.** (α) Κάθε μετρικός χώρος είναι  $T_1$ , αφού σε κάθε μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι ένας  $T_1$  χώρος και  $\mathfrak{T}'$  είναι μια τοπολογία στο  $X$  με  $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{T}$ , τότε και ο χώρος  $(X, \mathfrak{T}')$  είναι  $T_1$ .

(γ) Έστω  $X$  ένα σύνολο και  $\mathfrak{T}$  η συμπεπερασμένη τοπολογία στο  $X$ . Τότε ο τοπολογικός χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  είναι  $T_1$ , αφού κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό.

(δ) Ένας τοπολογικός χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  είναι  $T_1$  αν και μόνο αν περιέχει τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Πράγματι,

( $\Rightarrow$ ) Από την Πρόταση 5.1.2, έπεται ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο σε έναν  $T_1$  χώρο είναι κλειστό. Άρα κάθε σύνολο με πεπερασμένο συμπλήρωμα είναι ανοικτό.

( $\Leftarrow$ ) Άμεσο, από τα (β) και (γ).

(ε) Έστω  $X$  σύνολο με δύο τουλάχιστον σημεία και  $x_0 \in X$ . Τότε ο  $X$  με την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου  $x_0$  δεν είναι  $T_1$  χώρος. Πράγματι, το  $\{x_0\}$  δεν είναι κλειστό, αφού  $x_0 \notin X \setminus \{x_0\}$ , δηλαδή το  $X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$  δεν είναι ανοικτό.

**Πρόταση 5.1.5.** Έστω  $X$  ένας χώρος  $T_1$  και  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνάρτηση  $g : Y \rightarrow X$  που είναι 1-1 και συνεχής, τότε ο  $Y$  είναι χώρος  $T_1$ . Ιδιαίτερα, αν ο  $Y$  είναι ομοιομορφικός με τον  $X$ , τότε είναι χώρος  $T_1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $y, y' \in Y$  με  $y \neq y'$  και  $x = g(y), x' = g(y') \in X$ . Αφού η  $g$  είναι 1-1, έχουμε  $x \neq x'$ . Αφού ο  $X$  είναι  $T_1$ , υπάρχει  $G \subseteq X$  ανοικτό ώστε  $x \in G$  και  $x' \notin G$ . Αφού η  $g$  είναι συνεχής, το σύνολο  $V := g^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $Y$  και έχουμε  $y \in V$  (γιατί  $x = g(y) \in G$ ) και  $y' \notin V$ .  $\square$

**Πρόταση 5.1.6.** Αν  $X$  είναι ένας  $T_1$  χώρος και  $A$  ένας υπόχωρός του, τότε και ο  $A$  είναι  $T_1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in A$ . Τότε έχουμε ότι  $\{x\} = \{x\} \cap A$ , όπου το  $\{x\}$  είναι κλειστό στο  $X$ . Άρα, από την Πρόταση 4.1.4(i), το  $\{x\}$  είναι κλειστό στο  $A$ . Επομένως, ο  $A$  είναι χώρος  $T_1$ .  $\square$

**Πρόταση 5.1.7.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια  $T_1$  τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι  $T_1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Τότε υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ . Αφού ο  $X_{i_0}$  είναι  $T_1$ , υπάρχει  $G$  ανοικτό στο  $X_{i_0}$ , ώστε  $x_{i_0} \in G$  και  $y_{i_0} \notin G$ . Τότε το  $\pi_{i_0}^{-1}(G)$  είναι ανοικτό στο  $X$  (αφού η  $\pi_{i_0}$  είναι συνεχής), με  $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G)$  και  $y \notin \pi_{i_0}^{-1}(G)$ . Επομένως ο  $X$  είναι  $T_1$  χώρος.  $\square$

## 5.2 Χώροι Hausdorff

Το διαχωριστικό αξίωμα που εισάγουμε σε αυτή την παράγραφο αφορά το διαχωρισμό διακεκριμένων σημείων μέσω ανοικτών συνόλων. Δηλαδή, αν έχουμε δύο διακεκριμένα στοιχεία του χώρου, εξασφαλίζεται η ύπαρξη ξένων περιοχών τους. Η ιδιότητα αυτή είναι μεγάλης σημασίας, καθώς ισοδυναμεί με τη μοναδικότητα του ορίου για τα συγκλίνοντα δίκτυα.

**Ορισμός 5.2.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *χώρος  $T_2$  ή χώρος Hausdorff* αν για κάθε  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , υπάρχουν ανοικτά σύνολα  $G_1, G_2$  με  $x \in G_1, y \in G_2$  και  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**Παρατήρηση 5.2.2.** Κάθε  $T_2$  χώρος είναι και  $T_1$ .

**Πρόταση 5.2.3.** Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι  $T_2$ .
- (ii) Για κάθε  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_x$  με  $y \notin \bar{U}$ .
- (iii)  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathfrak{N}_x\} = \{x\}$  για κάθε  $x \in X$ .

*Απόδειξη.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Από το (i), υπάρχουν  $U, V$  ανοικτά ώστε  $x \in U, y \in V$  και  $U \cap V = \emptyset$ . Τότε  $U \in \mathfrak{N}_x$  και  $y \notin \bar{U}$  (διότι υπάρχει  $V$  ανοικτό με  $y \in V$  και  $U \cap V = \emptyset$ ).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω  $x \in X$ . Προφανώς έχουμε ότι  $\{x\} \subseteq \bigcap \{\bar{U} : U \in \mathfrak{N}_x\}$ . Έστω  $y \in X$  με  $y \neq x$ . Τότε, από το (ii), υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_x$  με  $y \notin \bar{U}$ . Επομένως,  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathfrak{N}_x\} = \{x\}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Τότε, από το (iii),  $y \notin \bigcap \{\bar{U} : U \in \mathfrak{N}_x\}$ , άρα υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_x$  με  $y \notin \bar{U}$ . Θέτοντας  $G_1 = U^\circ$  και  $G_2 = X \setminus \bar{U}$ , έχουμε ότι τα  $G_1, G_2$  είναι ανοικτά,  $x \in G_1$  και  $y \in G_2$  και  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Συνεπώς ο  $X$  είναι  $T_2$  χώρος.  $\square$

**Παρατήρηση 5.2.4.** Στα (ii) και (iii) της Πρότασης 5.2.3, το σύστημα περιοχών  $\mathfrak{N}_x$  μπορεί να αντικατασταθεί από μια βάση περιοχών  $\mathfrak{B}_x$  του  $x$ .



**Παραδείγματα 5.2.5.** (α) Κάθε μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  είναι χώρος  $T_2$ . Πράγματι, έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Τότε για  $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(x, y) > 0$  έχουμε ότι  $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ ,  $x \in B(x, \varepsilon)$ ,  $y \in B(y, \varepsilon)$  και τα  $B(x, \varepsilon)$ ,  $B(y, \varepsilon)$  είναι ανοικτά.

(β) Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι ένας  $T_2$  χώρος και  $\mathfrak{T}'$  είναι μια τοπολογία στο  $X$  με  $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{T}$ , τότε και ο χώρος  $(X, \mathfrak{T}')$  είναι  $T_2$ .

(γ) Ο χώρος  $\mathbb{R}_S$  είναι  $T_2$ , αφού η τοπολογία του περιέχει τη συνήθη (μετρική) τοπολογία του  $\mathbb{R}$ .

(δ) Έστω  $X$  άπειρο σύνολο και  $\mathfrak{T}$  η συμπεπερασμένη τοπολογία στο  $X$ . Τότε ο  $(X, \mathfrak{T})$  είναι  $T_1$  χώρος (Παράδειγμα 5.1.4(γ)), αλλά δεν είναι  $T_2$  (διότι δεν υπάρχουν ξένα, μη κενά, ανοικτά υποσύνολα του  $X$ ).

**Θεώρημα 5.2.6.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε συγκλίνον δίκτυο στο  $X$  συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο (δηλαδή ισχύει η μοναδικότητα του ορίου).

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  δίκτυο στο  $X$  και  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , ώστε  $p_\lambda \rightarrow x$  και  $p_\lambda \rightarrow y$ . Αφού ο  $X$  είναι χώρος Hausdorff, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα  $G_1, G_2$  με  $x \in G_1$  και  $y \in G_2$ .

Αφού  $p_\lambda \rightarrow x$ , υπάρχει  $\lambda_1 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in G_1$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_1$ .

Αφού  $p_\lambda \rightarrow y$ , υπάρχει  $\lambda_2 \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in G_2$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_2$ .

Επιλέγοντας  $\lambda_0 \in \Lambda$  με  $\lambda_0 \geq \lambda_1$  και  $\lambda_0 \geq \lambda_2$ , έχουμε ότι  $p_{\lambda_0} \in G_1$  και  $p_{\lambda_0} \in G_2$ , πράγμα άτοπο, αφού  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι ο χώρος  $X$  δεν είναι Hausdorff. Τότε υπάρχουν  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , ώστε για κάθε  $U, V$  ανοικτά σύνολα με  $x \in U$  και  $y \in V$  να ισχύει  $U \cap V \neq \emptyset$ . Θετούμε  $\Lambda = \mathfrak{N}_x \times \mathfrak{N}_y = \{(U, V) : U \in \mathfrak{N}_x, V \in \mathfrak{N}_y\}$  και ορίζουμε τη σχέση προδιάταξης  $\leq$  στο  $\Lambda$  ως εξής:

$$(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) \iff U_2 \subseteq U_1 \text{ και } V_2 \subseteq V_1.$$

Τότε το  $(\Lambda, \leq)$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Για κάθε  $(U, V) \in \Lambda$  επιλέγουμε στοιχείο  $p_{(U, V)} \in U \cap V$ . Έτσι ορίζεται το δίκτυο  $(p_{(U, V)})_{(U, V) \in \Lambda}$  στο  $X$ . Τότε  $p_{(U, V)} \rightarrow x$ . Πράγματι, έστω  $U_0 \in \mathfrak{N}_x$ . Τότε  $(U_0, X) \in \Lambda$  και ακόμη για κάθε  $(U, V) \in \Lambda$  με  $(U, V) \geq (U_0, X)$  έχουμε  $p_{(U, V)} \in U \cap V \subseteq U \subseteq U_0$ . Επομένως  $p_{(U, V)} \rightarrow x$ . Όμοια δείχνει κανείς ότι  $p_{(U, V)} \rightarrow y$ , πράγμα άτοπο, αφού  $x \neq y$ .  $\square$

**Πρόταση 5.2.7.** Έστω  $X$  ένας χώρος  $T_2$  και  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνάρτηση  $g : Y \rightarrow X$  που είναι 1-1 και συνεχής, τότε ο  $Y$  είναι χώρος  $T_2$ . Ιδιαίτερα, αν ο  $Y$  είναι ομοιομορφικός με τον  $X$ , τότε είναι χώρος Hausdorff.

*Απόδειξη.* Έστω  $y, y' \in Y$  με  $y \neq y'$  και  $x = g(y), x' = g(y') \in X$ . Αφού η  $g$  είναι 1-1, έχουμε  $x \neq x'$ . Αφού ο  $X$  είναι  $T_2$ , υπάρχουν  $G_1, G_2$  ανοικτά και ξένα υποσύνολα του  $X$  ώστε  $x \in G_1$  και  $x' \in G_2$ . Αφού η  $g$  είναι συνεχής, τα σύνολα  $V_1 := g^{-1}(G_1)$  και  $V_2 := g^{-1}(G_2)$  είναι ανοικτά στο  $Y$  και ξένα. Έχουμε  $y \in V_1$  (γιατί  $x = g(y) \in G_1$ ) και  $y' \in V_2$ .  $\square$

**Πρόταση 5.2.8.** Αν  $X$  είναι ένας  $T_2$  χώρος και  $A$  ένας υπόχωρός του, τότε και ο  $A$  είναι  $T_2$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x, y \in A$ . Τότε, αφού ο  $X$  είναι  $T_2$ , υπάρχουν ξένα ανοικτά υποσύνολα  $G_1, G_2$  του  $X$  ώστε  $x \in G_1$  και  $y \in G_2$ . Έτσι έχουμε ότι τα σύνολα  $U = G_1 \cap A$  και  $V = G_2 \cap A$  είναι ξένα και ανοικτά στο  $A$ , με  $x \in U$  και  $y \in V$ . Επομένως ο  $A$  είναι χώρος  $T_2$ .  $\square$

**Πρόταση 5.2.9.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια  $T_2$  τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι  $T_2$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Τότε υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ . Αφού ο  $X_{i_0}$  είναι  $T_2$ , υπάρχουν  $G_1, G_2$  ξένα, ανοικτά σύνολα στο  $X_{i_0}$ , ώστε  $x_{i_0} \in G_1$  και  $y_{i_0} \in G_2$ . Τότε τα  $\pi_{i_0}^{-1}(G_1)$  και  $\pi_{i_0}^{-1}(G_2)$  είναι ξένα και ανοικτά στο  $X$  (αφού η  $\pi_{i_0}$  είναι συνεχής), με  $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G_1)$  και  $y \in \pi_{i_0}^{-1}(G_2)$ . Επομένως ο  $X$  είναι  $T_2$  χώρος.  $\square$

### 5.3 Κανονικοί Χώροι

Το τρίτο διαχωριστικό αξίωμα αφορά το διαχωρισμό κλειστού συνόλου και σημείου. Οι περισσότεροι τοπολογικοί χώροι που παρουσιάζουν ενδιαφέρον ικανοποιούν αυτό το αξίωμα, το οποίο ισοδυναμεί με την ύπαρξη βάσης περιοχών από κλειστά σύνολα, για κάθε σημείο του χώρου.

**Ορισμός 5.3.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *χώρος  $T_3$  ή κανονικός χώρος* αν για κάθε  $F \subseteq X$  κλειστό και  $x \in X \setminus F$ , υπάρχουν ανοικτά σύνολα  $G_1, G_2$  με  $x \in G_1$ ,  $F \subseteq G_2$  και  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**Παρατήρηση 5.3.2.** Κάθε  $T_3$  και  $T_1$  χώρος είναι  $T_2$  χώρος.

**Πρόταση 5.3.3.** Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι κανονικός.
- (ii) Για κάθε  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , υπάρχει  $U \in \mathfrak{N}_x$  με  $\overline{U} \cap F = \emptyset$ .
- (iii) Για κάθε  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ , υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  με  $\overline{V} \subseteq U$ .
- (iv) Για κάθε  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , υπάρχουν  $G_1, G_2$  ανοικτά σύνολα με  $x \in G_1$ ,  $F \subseteq G_2$  και  $\overline{G_1} \cap G_2 = \emptyset$ .

*Απόδειξη.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ . Αφού ο  $X$  είναι  $T_3$ , υπάρχουν  $U$  και  $V$  ανοικτά με  $x \in U$ ,  $F \subseteq V$  και  $U \cap V = \emptyset$ . Τότε  $U \in \mathfrak{N}_x$  και  $\overline{U} \cap F = \emptyset$  (διότι αν  $y \in F$ , τότε  $y \in V$ , το  $V$  είναι ανοικτό και  $U \cap V = \emptyset$ ).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ , δηλαδή  $x \in U^\circ$ . Αν  $F = X \setminus U^\circ$ , τότε  $x \notin F$  και προφανώς  $F$  κλειστό. Από το (ii), υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  ώστε  $\overline{V} \cap F = \emptyset$ , δηλαδή  $\overline{V} \subseteq U^\circ \subseteq U$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Έστω  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ . Τότε  $X \setminus F \in \mathfrak{N}_x$ . Από το (iii), υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  (και μπορώ να πάρω την  $V$  ανοικτή) ώστε  $\overline{V} \subseteq X \setminus F$ . Πάλι από το (iii), υπάρχει  $W \in \mathfrak{N}_x$  ώστε  $\overline{W} \subseteq V$ . Θέτουμε  $G_1 = W^\circ$  και  $G_2 = X \setminus \overline{V}$ . Τότε τα  $G_1, G_2$  είναι ανοικτά,  $x \in G_1$ ,  $F \subseteq G_2$  και  $\overline{G_1} \cap G_2 = \emptyset$  (διότι  $G_1 \subseteq W \Rightarrow \overline{G_1} \subseteq \overline{W}$  και ακόμη  $\overline{G_2} = \overline{X \setminus \overline{V}} = \overline{(X \setminus V)^\circ} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq X \setminus \overline{V}$ ).

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Είναι προφανές.  $\square$

**Παρατήρηση 5.3.4.** Στα (ii) και (iii) της Πρότασης 5.3.3, το σύστημα περιοχών  $\mathfrak{N}_x$  μπορεί να αντικατασταθεί από μια βάση περιοχών  $\mathfrak{B}_x$  του  $x$  και ειδικά από την  $\mathfrak{B}_x = \{U \subseteq X : U \text{ ανοικτό με } x \in U\}$ .

**Πόρισμα 5.3.5.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε  $x \in X$  έχει βάση περιοχών από κλειστά σύνολα.

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Για κάθε  $x \in X$  έστω  $\mathfrak{B}_x = \{\bar{U} : U \in \mathfrak{N}_x\}$ . Τότε  $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$  και από την Πρόταση 5.3.3(i) $\Rightarrow$ (iii), έπεται ότι η  $\mathfrak{B}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ .

( $\Leftarrow$ ) Έπεται από την Πρόταση 5.3.3(i) $\Leftarrow$ (iii), αφού ο  $X$  ικανοποιεί την (iii).  $\square$

**Παραδείγματα 5.3.6.** (α) Κάθε μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  είναι κανονικός, διότι αν  $x \in X$ , η οικογένεια των κλειστών μπαλών  $\{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$  από κλειστά σύνολα.

(β) Έστω  $X = \{a, b, c\}$  με την τοπολογία  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ . Ο χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  δεν είναι  $T_1$ , αφού το  $\{b\}$  δεν είναι κλειστό (επομένως δεν είναι ούτε  $T_2$ ), όμως είναι  $T_3$ , διότι τα κλειστά υποσύνολα του  $X$  είναι συγχρόνως και ανοικτά.

(γ) Έστω  $(X, \mathfrak{T})$  τοπολογικός χώρος και ένα μη κλειστό  $A \subseteq X$  με  $A^\circ = \emptyset$ . Αν  $\mathfrak{S}$  είναι η τοπολογία στο  $X$  με υποβάση την  $\mathfrak{T} \cup \{A^c\}$ , τότε ο χώρος  $(X, \mathfrak{S})$  δεν είναι  $T_3$ . Πράγματι: Αφού το  $A$  δεν είναι κλειστό στο  $X$  ως προς την  $\mathfrak{T}$ , υπάρχει στοιχείο  $x \in \text{cl}_{\mathfrak{T}} A \setminus A$ . Έχουμε ότι το  $A$  είναι κλειστό ως προς την  $\mathfrak{S}$  και  $x \notin A$ . Έστω  $U, V \in \mathfrak{S}$  με  $x \in U$  και  $A \subseteq V$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $U \cap V \neq \emptyset$  (διότι τότε τα  $x$  και  $A$  δε θα διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα της  $\mathfrak{S}$ ).

Μια βάση για την  $\mathfrak{S}$  είναι η  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T} \cup \{G \setminus A : G \in \mathfrak{T}\}$ , άρα

$$\mathfrak{S} = \{G_1 \cup (G_2 \setminus A) : G_1, G_2 \in \mathfrak{T}\}.$$

Υπάρχουν λοιπόν  $G_1, \dots, G_4 \in \mathfrak{T}$  ώστε  $U = G_1 \cup (G_2 \setminus A)$  και  $V = G_3 \cup (G_4 \setminus A)$ . Αφού  $A \subseteq V$ , έπεται ότι  $A \subseteq G_3$ . Αφού  $x \in U$ , έπεται ότι  $x \in G_1$  ή  $x \in G_2$ .

- Αν  $x \in G_1$ , τότε  $G_1 \cap A \neq \emptyset$ , αφού  $x \in \text{cl}_{\mathfrak{T}} A$ . Επομένως  $U \cap V \neq \emptyset$ .
- Αν  $x \in G_2$ , τότε  $G_2 \cap A \neq \emptyset$ , αφού  $x \in \text{cl}_{\mathfrak{T}} A$ . Αφού  $A \subseteq G_3$ , έπεται ότι  $G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$  και είναι προφανώς ανοικτό ως προς την  $\mathfrak{T}$ . Επομένως  $G_2 \cap G_3 \not\subseteq A$ , διότι  $\text{int}_{\mathfrak{T}} A = \emptyset$ . Άρα  $(G_2 \setminus A) \cap G_3 \neq \emptyset$ . Αφού  $G_2 \setminus A \subseteq U$  και  $G_3 \subseteq V$ , έπεται ότι  $U \cap V \neq \emptyset$ .

(δ) Έστω  $\mathfrak{T}$  η συνήθης τοπολογία του  $\mathbb{R}$  και  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Έστω  $\mathfrak{S}$  η τοπολογία του  $\mathbb{R}$  που έχει ως υποβάση την  $\mathfrak{T} \cup \{A^c\}$ . Τότε ο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{S})$  είναι  $T_2$  χώρος, αλλά όχι  $T_3$ . Πράγματι, ο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$  είναι  $T_2$  χώρος (ως μετριοποιήσιμος) και αφού  $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{T}$ , έπεται ότι ο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{S})$  είναι  $T_2$ . Το  $A$  δεν είναι κλειστό στο  $\mathbb{R}$  και  $\text{int}_{\mathfrak{T}} A = \emptyset$ . Άρα, από το Παράδειγμα (γ), ο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{S})$  δεν είναι  $T_3$  (συγκεκριμένα  $0 \notin A$ , το  $A$  είναι κλειστό ως προς την  $\mathfrak{S}$ , και τα  $0, A$  δε διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα της  $\mathfrak{S}$ ).

**Πρόταση 5.3.7.** Έστω  $Y$  ένας κανονικός τοπολογικός χώρος,  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $D$  ένας πυκνός υπόχωρος του  $X$ . Αν για μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  ισχύει ότι η  $f|_{D \cup \{x\}}$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in X$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής.

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in X$  και δίκτυο  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  στο  $X$  με  $x_\lambda \rightarrow x$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ . Έστω, προς άτοπο, ότι  $f(x_\lambda) \not\rightarrow f(x)$ . Τότε υπάρχει κλειστή (αφού ο  $Y$  είναι  $T_3$ ) περιοχή  $V$ , του  $f(x)$ , ώστε για κάθε  $\mu \in \Lambda$  να υπάρχει  $\mu' \in \Lambda$ ,  $\mu' \geq \mu$  με  $f(x_{\mu'}) \notin V$ .

Η  $f|_{D \cup \{x\}}$  είναι συνεχής, άρα υπάρχει  $U_0$  ανοικτή περιοχή του  $x$ , τέτοια ώστε

$$f(U_0 \cap (D \cup \{x\})) \subseteq V. \quad (1)$$

Αφού  $x_\lambda \rightarrow x$ , υπάρχει  $\lambda_0 \in \Lambda$  ώστε για κάθε  $\lambda \in \Lambda$  με  $\lambda \geq \lambda_0$  να ισχύει ότι  $x_\lambda \in U_0$ . Επιλέγουμε  $\lambda_1 \in \Lambda$  με  $\lambda_1 \geq \lambda_0$  ώστε  $f(x_{\lambda_1}) \notin V$ .

Το  $V^c$  είναι (ανοικτή) περιοχή του  $f(x_{\lambda_1})$  και η  $f|_{D \cup \{x_{\lambda_1}\}}$  είναι συνεχής, άρα υπάρχει  $U_1$  ανοικτή περιοχή του  $x_{\lambda_1}$ , τέτοια ώστε

$$f(U_1 \cap (D \cup \{x_{\lambda_1}\})) \subseteq V^c. \quad (2)$$

Όμως το σύνολο  $U_1 \cap U_0$  είναι ανοικτό και μη κενό (αφού  $x_{\lambda_1} \in U_1 \cap U_0$ ), άρα  $U_1 \cap U_0 \cap D \neq \emptyset$  (αφού το  $D$  είναι πυκνό στο  $X$ ). Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_0 \cap D \subseteq U_1 \cap D &\implies f(U_1 \cap U_0 \cap D) \subseteq V^c \\ U_1 \cap U_0 \cap D \subseteq U_0 \cap D &\implies f(U_1 \cap U_0 \cap D) \subseteq V \end{aligned}$$

από τις (1) και (2). Επομένως  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$  και κατά συνέπεια, η  $f$  είναι συνεχής.  $\square$

**Πρόταση 5.3.8.** *Αν  $X$  είναι ένας  $T_3$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  είναι ένας τοπολογικός χώρος, ομοιομορφικός με τον  $X$ , τότε και  $Y$  είναι  $T_3$  χώρος.*

*Απόδειξη.* Έστω  $\phi : X \rightarrow Y$  ένας ομοιομορφισμός των  $X$  και  $Y$ , καθώς και ένα  $y \in Y$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι  $T_3$ , το σημείο  $x = \phi^{-1}(y) \in X$  έχει μια βάση περιοχών  $\mathfrak{B}_x$  από κλειστά σύνολα. Αφού ο  $\phi$  είναι ομοιομορφισμός, η οικογένεια  $\{\phi(V) : V \in \mathfrak{B}_x\}$  είναι μια βάση περιοχών του  $y$  από κλειστά σύνολα. Επομένως ο χώρος  $Y$  είναι  $T_3$ .  $\square$

**Πρόταση 5.3.9.** *Αν  $X$  είναι ένας  $T_3$  χώρος και  $A$  ένας υπόχωρός του, τότε και ο  $A$  είναι  $T_3$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in A$  και  $F \subseteq A$ , κλειστό στο  $A$ , με  $x \notin F$ . Τότε υπάρχει  $K \subseteq X$  κλειστό (στο  $X$ ) ώστε  $F = K \cap A$ . Έχουμε ότι  $x \notin K$  και, αφού ο  $X$  είναι  $T_3$ , υπάρχουν  $G_1, G_2$  ξένα, ανοικτά σύνολα στο  $X$ , με  $x \in G_1$  και  $K \subseteq G_2$ . Τότε τα σύνολα  $U = G_1 \cap A$  και  $V = G_2 \cap A$  είναι ξένα και ανοικτά στο  $A$ , με  $x \in U$  και  $F = K \cap A \subseteq V$ . Άρα ο χώρος  $A$  είναι  $T_3$ .  $\square$

**Πρόταση 5.3.10.** *Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια  $T_3$  τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι  $T_3$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  ώστε  $\bar{V} \subseteq U$ . Έχουμε ότι  $x \in U^\circ$ , το οποίο είναι ανοικτό, άρα υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  (όπου  $\mathcal{B}$  η κανονική βάση για την τοπολογία γινόμενο) ώστε  $x \in B \subseteq U^\circ \subseteq U$ . Τότε  $B = \prod_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$ , όπου  $U_k \subseteq X_{i_k}$  ανοικτό, για  $k = 1, \dots, n$ . Αφού  $x \in B$ , έχουμε ότι  $x_{i_k} \in U_k$  για  $k = 1, \dots, n$ . Αφού οι χώροι  $X_{i_k}$  είναι  $T_3$ , για κάθε  $k$  υπάρχει ανοικτό  $V_k \subseteq X_{i_k}$ , ώστε  $x_{i_k} \in V_k$  και  $\bar{V}_k \subseteq U_k$ . Θέτουμε  $V = \prod_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$ . Τότε το  $V$  είναι ανοικτό και  $x \in V$ , δηλαδή  $V \in \mathfrak{N}_x$ . Επίσης

$$\bar{V} = \overline{\left( \prod_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_k) \right)} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i = \prod_{i \in I} \bar{A}_i = \prod_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(\bar{V}_k) \subseteq \prod_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k) = U$$

όπου  $A_i = \begin{cases} V_k, & \text{αν } i = i_k, k = 1, \dots, n \\ X_i, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

$\square$

## 5.4 Φυσιολογικοί Χώροι

Σε αυτή την παράγραφο μελετούμε τους φυσιολογικούς χώρους, δηλαδή τους τοπολογικούς χώρους στους οποίους είναι εφικτός ο διαχωρισμός ξένων, κλειστών συνόλων από ξένα ανοικτά σύνολα. Στους φυσιολογικούς χώρους ισχύουν βασικά θεωρήματα όπως το Λήμμα του Urysohn και το Θεώρημα επέκτασης του Tietze, αλλά κατά μία έννοια οι φυσιολογικοί χώροι δε συμπεριφέρονται όσο καλά θα περίμενε κανείς (για παράδειγμα, το γινόμενο δύο φυσιολογικών χώρων δεν είναι κατ' ανάγκη φυσιολογικός χώρος). Αφού ολοκληρώσουμε τη συνήθη διερεύνηση και γι' αυτό το διαχωριστικό αξίωμα, θα προχωρήσουμε στην απόδειξη κάποιων ιδιαίτερα σημαντικών αποτελεσμάτων που ισχύουν σε φυσιολογικούς χώρους.

**Ορισμός 5.4.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *φυσιολογικός* ή *χώρος  $T_4$* , αν για κάθε ζεύγος κλειστών συνόλων  $F_1, F_2 \subseteq X$  με  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  υπάρχουν ανοικτά σύνολα  $G_1, G_2 \subseteq X$  ώστε  $F_1 \subseteq G_1$ ,  $F_2 \subseteq G_2$  και  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**Παρατήρηση 5.4.2.** Κάθε  $T_4$  και  $T_1$  χώρος είναι  $T_3$  χώρος.

**Πρόταση 5.4.3.** Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι φυσιολογικός.
- (ii) Για κάθε  $F_1, F_2 \subseteq X$  κλειστά με  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , υπάρχει  $U \subseteq X$  ανοικτό με  $F_1 \subseteq U$  και  $\bar{U} \cap F_2 = \emptyset$ .
- (iii) Για κάθε  $F \subseteq X$  κλειστό και  $G \subseteq X$  ανοικτό με  $F \subseteq G$ , υπάρχει  $U \subseteq X$  ανοικτό με  $F \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq G$ .
- (iv) Για κάθε  $F_1, F_2 \subseteq X$  κλειστά με  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , υπάρχουν  $G_1, G_2$  ανοικτά σύνολα με  $F_1 \subseteq G_1$ ,  $F_2 \subseteq G_2$  και  $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της Πρότασης 5.3.3 και για το λόγο αυτό αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Πρόταση 5.4.4.** Αν σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$  κάθε κλειστό σύνολο  $F$  είναι της μορφής  $F = \{x \in X : f(x) = 0\}$  για κάποια συνεχή συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε ο  $X$  είναι φυσιολογικός. Ιδιαίτερα, κάθε μετριοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι φυσιολογικός.

*Απόδειξη.* Έστω  $F_1, F_2 \subseteq X$  κλειστά με  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $F_1 = f_1^{-1}(\{0\})$  και  $F_2 = f_2^{-1}(\{0\})$ . Ορίζουμε

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \phi(x) = \frac{|f_1(x)|}{|f_1(x)| + |f_2(x)|}.$$

Η  $\phi$  είναι καλά ορισμένη (διότι αν  $|f_1(x)| + |f_2(x)|$  τότε  $x \in F_1 \cap F_2$ ) και συνεχής με  $\phi(x) = 0$  για κάθε  $x \in F_1$  και  $\phi(x) = 1$  για κάθε  $x \in F_2$ . Θέτουμε  $U = \phi^{-1}((-\infty, 1/2))$  και  $V = \phi^{-1}((1/2, +\infty))$ . Τότε τα  $U, V$  είναι ξένα, ανοικτά (διότι η  $\phi$  είναι συνεχής) και  $F_1 \subseteq U$ ,  $F_2 \subseteq V$ . Επομένως ο χώρος  $X$  είναι  $T_4$ .

Αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι ένας μετριοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, υπάρχει μετρική  $\rho$  στο  $X$  ώστε  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\rho$ . Έστω  $F \subseteq X$  κλειστό. Ορίζουμε τη συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = d(x, F)$  (η απόσταση του σημείου  $x$  από το σύνολο  $F$ ). Τότε η  $f$  είναι συνεχής ( $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) \forall x, y \in X$ ) και για κάθε  $x \in X$  ισχύει

$$f(x) = 0 \iff d(x, F) = 0 \iff x \in \bar{F} = F,$$

δηλαδή  $F = f^{-1}(\{0\})$ . Επομένως ο  $X$  είναι  $T_4$ .  $\square$

**Πρόταση 5.4.5.** Έστω  $X$  ένας φυσιολογικός χώρος και  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  του  $X$ , ώστε  $\bar{V}_k \subseteq U_k$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Το κάλυμμα  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  καλείται *συρρίκνωση* του  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ .

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο  $V_1 \subseteq X$  ώστε  $\bar{V}_1 \subseteq U_1$  και  $V_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n = X$ , διότι τότε το συμπέρασμα έπεται με επαγωγή. Παρατηρούμε ότι  $X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_n) \subseteq U_1$ . Αφού το σύνολο  $X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_n)$  είναι κλειστό, το  $U_1$  είναι ανοικτό και ο χώρος  $X$  είναι  $T_4$ , από την Πρόταση 5.4.3(iii), έπεται ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο  $V_1$  ώστε

$$X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_n) \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1.$$

Επομένως  $X = V_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n$  και  $\bar{V}_1 \subseteq U_1$ .  $\square$

**Παραδείγματα 5.4.6.** (α) Έστω  $X = \{a, b, c\}$  (όπου  $a, b, c$  διαφορετικά σημεία) με την τοπολογία

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

Όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 5.3.6(β), ο χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  δεν είναι  $T_1$  (ούτε  $T_2$ ) αλλά είναι  $T_4$  (και  $T_3$ ), αφού τα κλειστά σύνολα του  $X$  συμπίπτουν με τα ανοικτά.

(β) Έστω  $X = \{a, b, c\}$  (όπου  $a, b, c$  διαφορετικά σημεία) με την τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου  $c$ ,

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}.$$

Ο χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  είναι  $T_4$ . Πράγματι, τα κλειστά σύνολα του  $X$  είναι τα  $X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$ . Άρα αν  $F_1, F_2 \subseteq X$  είναι κλειστά και ξένα, τότε τουλάχιστον ένα από τα  $F_1, F_2$  είναι κενό και έστω ότι αυτό είναι το  $F_1$ . Τότε τα  $F_1, F_2$  διαχωρίζονται από τα  $G_1 = \emptyset$  και  $G_2 = X$ . Ο  $(X, \mathfrak{T})$  δεν είναι  $T_3$ . Πράγματι, για το κλειστό σύνολο  $F = \{c\}$ , έχουμε ότι  $a \notin F$  και το μοναδικό ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $F$  είναι το  $X$ . Άρα τα  $a$  και  $F$  δεν διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Γενικότερα, αν  $(X, \mathfrak{T})$  είναι ένας τοπολογικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία και  $\mathfrak{T}$  είναι η τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου  $x_0$ , τότε ο χώρος  $(X, \mathfrak{T})$  είναι  $T_4$  και όχι  $T_3$ .

(γ) Ο τοπολογικός χώρος  $\mathbb{R}_S$  είναι  $T_4$ . Έστω  $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}_S$  ξένα κλειστά σύνολα. Τότε  $F_1 \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_2$ , με το  $\mathbb{R}_S \setminus F_2$  να είναι ανοικτό στον  $\mathbb{R}_S$ . Αφού για κάθε  $x \in X$ , η οικογένεια  $\{(a, x] : a \in \mathbb{R}, a < x\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$ , για κάθε  $x \in F_1$  υπάρχει  $a_x < x$  ώστε  $(a_x, x] \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_2$ . Ανάλογα  $F_2 \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$ , άρα για κάθε  $y \in F_2$  υπάρχει  $b_y < y$  ώστε  $(b_y, y] \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$ . Θέτουμε

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} (a_x, x] \quad \text{και} \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} (b_y, y].$$

Τότε τα  $G_1, G_2$  είναι ανοικτά στον  $\mathbb{R}_S$ ,  $F_1 \subseteq G_1$  και  $F_2 \subseteq G_2$ . Έστω, προς άτοπο, ότι  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ . Τότε υπάρχουν  $x \in F_1$  και  $y \in F_2$  ώστε  $(a_x, x] \cap (b_y, y] \neq \emptyset$ . Τότε  $x < y$  ή  $y < x$  (αφού  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ). Αν  $x < y$ , τότε  $x \in (b_y, y]$  (αφού  $(a_x, x] \cap (b_y, y] \neq \emptyset$ ) και  $(b_y, y] \subseteq G_2 \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$ , άρα  $x \in \mathbb{R}_S \setminus F_1$ , πράγμα άτοπο. Όμοια για  $y < x$ . Άρα  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**Πρόταση 5.4.7.** Αν  $X$  είναι ένας  $T_4$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  είναι ένας τοπολογικός χώρος, ομοιομορφικός με τον  $X$ , τότε και  $Y$  είναι  $T_4$  χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $\phi : X \rightarrow Y$  ένας ομοιομορφισμός των  $X, Y$  και ξένα, κλειστά σύνολα  $F_1, F_2 \subseteq Y$ . Τότε τα σύνολα  $\phi^{-1}(F_1), \phi^{-1}(F_2)$  είναι ξένα και κλειστά (αφού η  $\phi$  είναι συνεχής). Ο χώρος  $X$  είναι  $T_4$ , συνεπώς υπάρχουν  $G_1, G_2 \subseteq X$  ξένα, ανοικτά ώστε  $\phi^{-1}(F_1) \subseteq G_1$  και  $\phi^{-1}(F_2) \subseteq G_2$ . Τότε  $F_1 \subseteq \phi(G_1)$  και  $F_2 \subseteq \phi(G_2)$  (αφού η  $\phi$  είναι επί), όπου τα  $\phi(G_1), \phi(G_2)$  είναι ανοικτά στο  $Y$  ( $\phi$  ανοικτή) και ξένα (η  $\phi$  είναι 1-1). Επομένως ο χώρος  $Y$  είναι  $T_4$ .  $\square$

**Πρόταση 5.4.8.** *Αν  $X$  είναι ένας  $T_4$  χώρος και  $A$  ένας κλειστός υπόχωρος του, τότε και ο  $A$  είναι  $T_4$ .*

*Απόδειξη.* Έστω σύνολα  $F_1, F_2 \subseteq A$  ξένα και κλειστά στον  $A$ . Αφού ο  $A$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $X$ , τα  $F_1, F_2$  είναι κλειστά στο  $X$ . Άρα υπάρχουν ξένα, ανοικτά (στο  $X$ ) σύνολα  $G_1, G_2$  με  $F_1 \subseteq G_1$  και  $F_2 \subseteq G_2$ . Τότε τα σύνολα  $G_1 \cap A, G_2 \cap A$  είναι ανοικτά στο  $A$  και ξένα, με  $F_1 \subseteq G_1 \cap A$  και  $F_2 \subseteq G_2 \cap A$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.4.9.** Η Πρόταση 5.4.8 δεν είναι γενικά αληθής αν ο  $A$  είναι ένας τυχών υπόχωρος του  $X$ . Υπάρχουν φυσιολογικοί τοπολογικοί χώροι, των οποίων οι υπόχωροι δεν είναι κατ' ανάγκη φυσιολογικοί.

**Παράδειγμα 5.4.10** (ο χώρος του Sorgenfrey). Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο  $\mathbb{R}_S$ . Ο χώρος του Sorgenfrey είναι ο χώρος  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  με την καρτεσιανή τοπολογία. Ο χώρος του Sorgenfrey δεν είναι φυσιολογικός (κατά συνέπεια το γινόμενο φυσιολογικών χώρων δεν είναι πάντα φυσιολογικός χώρος).

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε αρχικά ότι το «αντιδιαγώνιο» σύνολο

$$A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ , αφού το  $A$  είναι κλειστό στο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  και η τοπολογία του  $\mathbb{R}_S$  είναι ισχυρότερη από την τοπολογία του  $\mathbb{R}$ . Ακόμη, η σχετική τοπολογία του  $A$  (ως προς την τοπολογία του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  είναι η διακριτή, αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $\{(x, -x)\} = ((x-1, x] \times (-x-1, -x]) \cap A$ . Συνεπώς κάθε υποσύνολο του  $A$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ . Θέτουμε

$$F_1 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\} \text{ και } F_2 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, τα  $F_1, F_2$  είναι κλειστά (και προφανώς ξένα) υποσύνολα του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ . Θα δείξουμε ότι τα σύνολα  $F_1, F_2$  δεν διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Θεωρούμε λοιπόν ανοικτά σύνολα  $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ , ώστε  $F_1 \subseteq G_1$  και  $F_2 \subseteq G_2$  και θα δείξουμε ότι  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $B_x$ , στοιχείο της κανονικής βάσης του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ , ώστε  $(x, -x) \in B_x \subseteq G_2$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο  $B_x$  είναι της μορφής  $(x - \frac{1}{n_x}, x] \times (-x - \frac{1}{n_x}, -x]$ , για κάποιο  $n_x \in \mathbb{N}$  (γιατί:). Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  υπάρχει  $n_x \in \mathbb{N}$ , ώστε

$$(x, -x) \in \left(x - \frac{1}{n_x}, x\right] \times \left(-x - \frac{1}{n_x}, -x\right] \subseteq G_2.$$

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , θέτουμε  $A_n = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : n_x = n\}$  και παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ και } \mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right).$$

Από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire για τον πλήρη μετρικό χώρο  $\mathbb{R}$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $n_0$ , ώστε  $(\overline{A_{n_0}})^\circ \neq \emptyset$  (όπου η κλειστή θήκη και το εσωτερικό λαμβάνονται ως προς τη συνήθη τοπολογία του  $\mathbb{R}$ ). Άρα υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ , ώστε  $(a, b) \subseteq \overline{A_{n_0}}$ . Επιλέγουμε ένα ρητό αριθμό  $q$  στο διάστημα  $(a, b)$ .

Εφόσον  $(q, -q) \in F_1 \subseteq G_1$ , υπάρχει ένα  $\delta > 0$  ώστε

$$(q, -q) \in V := (q - \delta, q] \times (-q - \delta, -q] \subseteq G_1$$

και μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\delta < \frac{1}{n_0}$ .

Αφού  $q \in \overline{A_{n_0}}$ , υπάρχει  $t \in A_{n_0}$  με  $|q - t| < \frac{\delta}{3}$ . Τότε όμως τα διαστήματα  $(q - \delta, q]$  και  $(t - \delta, t]$  τέμνονται (αν  $q < t$  τότε  $q \in (t - \delta, t]$  και αν  $t < q$  τότε  $t \in (q - \delta, q]$ ). Έστω  $x \in (q - \delta, q] \cap (t - \delta, t]$ . Ομοίως υπάρχει  $y \in (-q - \delta, -q] \cap (-t - \delta, -t]$ .

Τότε, το σημείο  $(x, y)$  ανήκει βέβαια στην  $V$ , ανήκει όμως και στην περιοχή  $W := (t - \frac{1}{n_0}, t] \times (-t - \frac{1}{n_0}, -t]$  του  $(t, -t)$ , γιατί

$$t - \frac{1}{n_0} < t - \delta < x \leq t \quad \text{και} \quad -t - \frac{1}{n_0} < -t - \delta < y \leq -t.$$

Αλλά εφόσον  $t \in A_{n_0}$  έχουμε  $W \subseteq G_2$  (ορισμός του  $A_{n_0}$ ), οπότε τελικά  $(x, y) \in V \cap W \subseteq G_1 \cap G_2$  άρα  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.4.11.** Ο τοπολογικός χώρος  $\mathbb{R}_S$  δεν είναι μετριοποιήσιμος. Πράγματι, αν ο  $\mathbb{R}_S$  ήταν μετριοποιήσιμος, τότε μετριοποιήσιμος θα ήταν και ο χώρος  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  και κατά συνέπεια θα ήταν φυσιολογικός, πράγμα που δεν ισχύει.

Άλλη απόδειξη (ανεξάρτητη από το προηγούμενο Παράδειγμα). Έστω, προς άτοπο, ότι ο  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  είναι μετριοποιήσιμος χώρος. Παρατηρούμε ότι το σύνολο  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  είναι αριθμήσιμο και πυκνό, άρα ο  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Γνωρίζουμε όμως από την Πραγματική Ανάλυση ότι κάθε υπόχωρος διαχωρίσιμου μετρικού χώρου είναι διαχωρίσιμος χώρος. Επομένως το «αντιδιαγώνιο» σύνολο

$$A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

είναι διαχωρίσιμος χώρος. Όμως, η σχετική τοπολογία του  $A$  (ως προς την τοπολογία του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ ) είναι η διακριτή, δηλαδή τα μονοσύνολα είναι ανοικτά, αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $\{(x, -x)\} = (x - 1, x] \times (-x - 1, -x] \cap A$ . Αλλά το  $A$  είναι υπεραριθμήσιμο, επομένως δεν μπορεί να περιέχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο, άτοπο.

### 5.4.1 Βασικά Θεωρήματα σε Φυσιολογικούς Χώρους

Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ένα ισχυρό αποτέλεσμα για τους φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους, αλλά και ευρύτερα για τη συνολοθεωρητική τοπολογία. Το Λήμμα του Urysohn, όπως συχνά καλείται το αποτέλεσμα αυτό, εξασφαλίζει την ύπαρξη πληθώρας συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε ένα φυσιολογικό τοπολογικό χώρο. Επιπλέον, αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο για την απόδειξη αρκετών σημαντικών θεωρημάτων.

**Θεώρημα 5.4.12** (Λήμμα Urysohn). Έστω  $X$  ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και  $A, B$  ξένα και κλειστά υποσύνολα του  $X$ . Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  ώστε  $f(a) = 0$  για κάθε  $a \in A$  και  $f(b) = 1$  για κάθε  $b \in B$ .



*Απόδειξη.* Το πρώτο τμήμα της απόδειξης αφορά την κατασκευή (με χρήση της φυσιολογικότητας του  $X$ ) μιας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ , με δείκτες σε ένα πυκνό (αριθμήσιμο) υποσύνολο του  $[0, 1]$ . Το σύνολο δεικτών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το σύνολο των δυαδικών ρητών του διαστήματος  $[0, 1]$ :

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n, \text{ όπου } \Delta_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots$$

Έχουμε ότι  $\Delta_0 = \{0, 1\}$ ,  $\Delta_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\} = \Delta_0 \cup \{\frac{1}{2}\}$ , ... και παρατηρούμε ότι η ακολουθία  $(\Delta_n)_{n \geq 0}$  είναι αύξουσα με

$$\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n = \left\{ \frac{k}{2^{n+1}} : k \text{ περιττός}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1}\} \right\}.$$

Επιθυμούμε να ορίσουμε ένα ανοικτό σύνολο  $U(d)$  για κάθε  $d \in \Delta$ , έτσι ώστε αν για δύο στοιχεία  $a, b \in \Delta$  ισχύει  $a < b$ , τότε να έχουμε ότι  $\overline{U(a)} \subseteq U(b)$ . Με αυτόν τον τρόπο, τα σύνολα  $U(d)$  θα διατάσσονται από τη σχέση του περιέχεσθαι, όπως ακριβώς διατάσσονται οι δείκτες τους από τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Επιλέξαμε ένα αριθμήσιμο σύνολο δεικτών για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα  $U(d)$  με επαγωγή. Ακριβολογώντας, θα ορίσουμε τα ανοικτά σύνολα  $U(d)$  για  $d \in \Delta_n$ , με επαγωγή ως προς το  $n$ , έτσι ώστε

- (i)  $A \subseteq U(d) \subseteq B^c$ , για κάθε  $d \in \Delta$ .
- (ii) Αν  $d, d' \in \Delta$  με  $d < d'$ , τότε  $\overline{U(d)} \subseteq U(d')$ .

Για  $n = 0$  καλούμαστε να ορίσουμε τα  $U(0), U(1)$ . Θέτουμε  $U(1) = B^c$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι φυσιολογικός, μπορούμε να επιλέξουμε ανοικτό σύνολο  $U(0)$  ώστε

$$A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1).$$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σύνολα  $U(d)$  για  $d \in \Delta_n$ . Αρκεί να ορίσουμε τα  $U(d)$  για  $d \in \Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$ . Έστω λοιπόν  $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1}\}$  περιττός. Έχουμε  $\frac{k-1}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^{n+1}}$  όπου και οι δύο δείκτες ανήκουν στο  $\Delta_n$ , άρα από την επαγωγική υπόθεση,  $\overline{U(\frac{k-1}{2^{n+1}})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^{n+1}})$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι φυσιολογικός, υπάρχει ανοικτό σύνολο  $U(\frac{k}{2^{n+1}})$ , ώστε

$$\overline{U(\frac{k-1}{2^{n+1}})} \subseteq U(\frac{k}{2^{n+1}}) \subseteq \overline{U(\frac{k}{2^{n+1}})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^{n+1}}).$$

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων που ορίσαμε, θέτοντας  $U(d) = X$  για κάθε  $d \in (1, +\infty)$ . Συνεπώς, έχουμε ορίσει ένα ανοικτό σύνολο  $U(d) \subseteq X$  για κάθε  $d \in D := \Delta \cup (1, +\infty)$ , έτσι ώστε αν  $d, d' \in D$  με  $d < d'$ , τότε  $\overline{U(d)} \subseteq U(d')$ . Ακόμη, το  $D$  είναι ένα πυκνό υποσύνολο του  $[0, +\infty)$ .

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να ορίσουμε την επιθυμητή συνάρτηση. Για κάθε  $x \in X$ , το σύνολο  $D(x) = \{d \in D : x \in U(d)\}$  είναι μη κενό και μάλιστα,  $(1, +\infty) \subseteq D(x) \subseteq [0, +\infty)$ . Επομένως, για κάθε  $x \in X$ , το σύνολο  $D(x)$  είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, με  $\inf D(x) \in [0, 1]$ . Συνεπώς, ορίζεται καλά η συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με

$$f(x) = \inf D(x) = \inf \{d \in D : x \in U(d)\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν  $x \in A$ , τότε  $x \in U(d)$  για κάθε  $d \in D$ , δηλαδή  $D(x) = D$ . Άρα  $f(x) = \inf D = 0$ . Επίσης, αν  $y \in B$ , τότε  $y \notin U(d)$  για κάθε  $d \in \Delta$  κι επομένως  $D(y) = (1, +\infty)$ . Άρα  $f(y) = 1$ .

Τελικός μας στόχος είναι να δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής. Ισχυριζόμαστε ότι:

(α)  $x \in \overline{U(d)} \Rightarrow f(x) \leq d$ . Πράγματι, αν  $x \in \overline{U(d)}$ , τότε  $x \in U(r)$  για κάθε  $r \in D$  με  $r > d$ . Συνεπώς,  $D \cap (d, +\infty) \subseteq D(x)$ , άρα από τον ορισμό της  $f$ ,  $f(x) = \inf D(x) \leq d$ .

(β)  $x \notin U(d) \Rightarrow f(x) \geq d$ . Πράγματι, αν  $x \notin U(d)$ , τότε  $x \notin U(r)$  για κάθε  $r \in D$  με  $r < d$ . Συνεπώς,  $D(x) \subseteq (d, +\infty)$ , άρα από τον ορισμό της  $f$ ,  $f(x) = \inf D(x) \geq d$ .

Έστω  $x_0 \in X$  και  $\varepsilon > 0$ . Αναζητούμε μια περιοχή  $U$  του  $x_0$ , τέτοια ώστε

$$f(U) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Από την πυκνότητα του συνόλου  $D$  στο  $[0, +\infty)$ , υπάρχουν  $d_1, d_2 \in D$  ώστε

$$f(x_0) - \varepsilon < d_1 < f(x_0) < d_2 < f(x_0) + \varepsilon.$$

Θέτουμε  $U = U(d_2) \setminus \overline{U(d_1)}$ . Το  $U$  είναι ανοικτό σύνολο και  $x_0 \in U$ . Πράγματι: εφόσον  $f(x_0) < d_2$ , από το (β) έχουμε ότι  $x_0 \in U(d_2)$  και εφόσον  $f(x_0) > d_1$ , από το (α) έχουμε  $x_0 \notin \overline{U(d_1)}$ , άρα  $x_0 \in U$ . Έστω  $x \in U$ . Τότε  $x \in U(d_2) \subseteq \overline{U(d_2)}$  άρα, από το (α),  $f(x) \leq d_2$ . Ακόμη,  $x \notin \overline{U(d_1)}$  άρα, από το (β),  $f(x) \geq d_1$ . Επομένως,

$$f(x) \in [d_1, d_2] \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Συμπεραίνουμε ότι  $f(U) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ . Δείξαμε, λοιπόν, ότι η  $f$  είναι συνεχής. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.  $\square$

**Παρατήρηση 5.4.13.** Στο Λήμμα Urysohn το διάστημα  $[0, 1]$  μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε διάστημα  $[a, b]$ , όπου  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ , απλά αντικαθιστώντας τη συνάρτηση  $f$ , του Θεωρήματος, με την  $g = a + (b - a)f$ .

Μια άμεση συνέπεια του Λήμματος του Urysohn είναι ένα άλλο ιδιαίτερα χρήσιμο Θεώρημα, το Θεώρημα επέκτασης του Tietze.

**Θεώρημα 5.4.14** (επέκτασης του Tietze). Έστω  $X$  ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και ένα κλειστό  $F \subseteq X$ .

(i) Αν  $f : F \rightarrow [a, b]$  (όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $g : X \rightarrow [a, b]$  ώστε  $g|_F = f$  (δηλαδή η  $g$  επεκτείνει την  $f$ ).

(ii) Αν  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $g|_F = f$ .

*Απόδειξη.* Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι η κατασκευή μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων, οι οποίες θα ορίζονται σε όλο το χώρο  $X$  και ο περιορισμός τους στο σύνολο  $F$  θα προσεγγίζει ομοιόμορφα τη συνάρτηση  $f$ .

Το πρώτο στάδιο της απόδειξης αφορά την κατασκευή μιας συνάρτησης  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία δεν θα παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές, και επίσης θα προσεγγίζει την  $f$  στο σύνολο  $F$  με έναν ικανό βαθμό ακρίβειας. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-r, r]$  (για ένα  $r > 0$ ). Θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας συνάρτησης  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , έτσι ώστε

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}r \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |g(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3}r \text{ για κάθε } y \in F.$$

Χωρίζουμε το διάστημα  $[-r, r]$  σε τρία ίσα διαστήματα μήκους  $\frac{2}{3}r$  και θέτουμε:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \quad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

Τα σύνολα  $A = f^{-1}(I_1)$ ,  $B = f^{-1}(I_3)$  είναι ξένα και κλειστά υποσύνολα του  $F$ , αφού η  $f$  είναι συνεχής. Άρα τα  $A$ ,  $B$  είναι ξένα και κλειστά στο χώρο  $X$ . Από το Λήμμα του Urysohn (και την Παρατήρηση 5.4.13), υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ , τέτοια ώστε  $g(a) = -\frac{1}{3}r$  για κάθε  $a \in A$  και  $g(b) = \frac{1}{3}r$  για κάθε  $b \in B$ . Έτσι έχουμε ότι  $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$  για κάθε  $x \in X$ . Μένει να ελέγξουμε ότι για κάθε  $y \in F$  ισχύει ότι  $|g(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3}r$ . Ελέγχουμε διαδοχικά τις περιπτώσεις:

- Αν  $y \in A$ , τότε τα  $f(y), g(y) \in I_1$ , άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με  $\frac{2}{3}r$ .
- Αν  $y \in B$ , τότε τα  $f(y), g(y) \in I_3$ , άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με  $\frac{2}{3}r$ .
- Αν  $y \notin A \cup B$ , τότε τα  $f(y), g(y) \in I_2$ , άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με  $\frac{2}{3}r$ .

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι  $|g(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3}r$ . Έτσι κατασκευάσαμε την επιθυμητή συνάρτηση  $g$ .

(i) Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάστημα  $[a, b]$  ταυτίζεται με το διάστημα  $[-1, 1]$ . Έστω  $f : F \rightarrow [-1, 1]$  συνεχής συνάρτηση. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή (για  $r = 1$ ), υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3} \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |g_1(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3} \text{ για κάθε } y \in F.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση  $f - g_1$ , η οποία απεικονίζει το σύνολο  $F$  στο  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ . Άρα, εφαρμόζοντας την κατασκευή για τη συνάρτηση  $f - g_1$  (και  $r = \frac{2}{3}$ ) λαμβάνουμε μια συνάρτηση  $g_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |f(y) - g_1(y) - g_2(y)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ για κάθε } y \in F.$$

Συνεχίζουμε την κατασκευή της ακολουθίας συναρτήσεων  $(g_n)$  επαγωγικά. Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις  $g_1, g_2, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $|g_k(y)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$  και  $|f(y) - \sum_{k=1}^n g_k(y)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  για κάθε  $y \in F$ . Πάλι, εφαρμόζοντας την κατασκευή για τη συνάρτηση  $f - g_1 - g_2 - \dots - g_n$  (και  $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ) λαμβάνουμε μια συνάρτηση  $g_{n+1} : X \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in X \text{ και } \left|f(y) - \sum_{k=1}^{n+1} g_k(y)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \forall y \in F.$$

Αφού για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε ότι  $\sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 < \infty,$$

από το κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η συνάρτηση

$$g : X \rightarrow [-1, 1] \text{ με } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

ορίζεται καλά ( $|\sum_{k=1}^n g_k(x)| \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ) και είναι συνεχής (αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη). Επιπλέον, για κάθε  $y \in F$  έχουμε ότι

$$\left| f(y) - \sum_{k=1}^n g_k(y) \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα, παίρνοντας το όριο για  $n \rightarrow \infty$ , έπεται ότι  $f(y) = g(y)$ . Επομένως  $g|_F = f$ .

(ii) Αφού το διάστημα  $(-1, 1)$  είναι ομοιομορφικό με το  $\mathbb{R}$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση  $f$  παίρνει τιμές στο  $(-1, 1)$ . Από το (i) έχουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $h : X \rightarrow [-1, 1]$  η οποία επεκτείνει την  $f$ . Σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε μια συνεχή συνάρτηση  $g : X \rightarrow (-1, 1)$  που να επεκτείνει την  $f$ . Θεωρούμε το σύνολο  $K = h^{-1}(\{-1, 1\}) \subseteq X$ . Το  $K$  είναι κλειστό (αφού η  $h$  είναι συνεχής) και  $F \cap K = \emptyset$  (αφού  $h(F) = f(F) \subseteq (-1, 1)$ ). Από το Λήμμα του Urysohn έπεται ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $\phi : X \rightarrow [0, 1]$  με  $\phi(x) = 0$  για κάθε  $x \in F$  και  $\phi(y) = 1$  για κάθε  $y \in K$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g = h\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Η  $g$  είναι συνεχής και για κάθε  $x \in F$  έχουμε ότι

$$g(x) = h(x)\phi(x) = h(x) \cdot 0 = 0 = f(x).$$

Συνεπώς η  $g$  επεκτείνει την  $f$ . Μένει να ελέγξουμε ότι  $g(X) \subseteq (-1, 1)$ . Για  $x \in K$  έχουμε ότι  $g(x) = h(x) \cdot 1 = h(x) = f(x)$ . Αν  $x \notin K$ , τότε  $|g(x)| \leq |h(x)| < 1$ . Σε κάθε περίπτωση,  $g(x) \in (-1, 1)$ .  $\square$

**Ορισμός 5.4.15.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$  και  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων  $\phi_i : X \rightarrow [0, 1]$ , για  $i = 1, 2, \dots, n$ , καλείται (πεπερασμένη) διαμέριση της μονάδας, επαγόμενη από το κάλυμμα  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ , αν

- (i)  $\overline{\{x \in X : \phi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- (ii)  $\phi_1(x) + \phi_2(x) + \dots + \phi_n(x) = 1$  για κάθε  $x \in X$ .

**Θεώρημα 5.4.16** (Υπαρξη πεπερασμένων διαμερίσεων της μονάδας). Έστω  $X$  ένας φυσιολογικός χώρος και  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας που επαγεται από το  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ .

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 5.4.5, υπάρχει συρρίκνωση  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  του καλύμματος  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ . Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει συρρίκνωση  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  του  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ . Δηλαδή το  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  είναι ανοικτό κάλυμμα του  $X$  και  $\overline{W_k} \subseteq V_k$ ,  $\overline{V_k} \subseteq U_k$  για κάθε  $k$ . Από το Λήμμα του Urysohn υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow [0, 1]$ , τέτοιες ώστε  $f(\overline{W_k}) \subseteq \{1\}$  και  $f(X \setminus V_k) \subseteq \{0\}$  για κάθε  $k = 1, \dots, n$ . Αφού το  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  είναι (ανοικτό) κάλυμμα του  $X$ , έπεται ότι  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) > 0$  για κάθε  $x \in X$ . Συνεπώς για κάθε  $k$  ορίζεται καλά η συνάρτηση

$$\phi_k : X \rightarrow [0, 1] \text{ με } \phi_k = \frac{f_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}.$$

Αφού  $f_k^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq V_k$ , έχουμε ότι  $\overline{\{x \in X : \phi_k(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V_k} \subseteq U_k$ , άρα και  $\overline{\{x \in X : \phi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_k$  για κάθε  $k = 1, \dots, n$ . Εύκολα ελέγχει τώρα κανείς ότι οι συναρτήσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  αποτελούν διαμέριση της μονάδας.  $\square$

**Πρόταση 5.4.17.** Έστω  $X$  ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με  $A = f^{-1}\{0\}$  αν και μόνο αν το  $A$  είναι κλειστό  $G_\delta$  υποσύνολο του  $X$  (δηλ. αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ ).

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με  $A = f^{-1}\{0\}$ . Τότε το  $A$  είναι κλειστό, αφού η  $f$  είναι συνεχής. Επίσης, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  το σύνολο

$$\left\{ x \in X : f(x) < \frac{1}{n} \right\} = f^{-1} \left( \left( -\infty, \frac{1}{n} \right) \right)$$

είναι ανοικτό και  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\}$ . Επομένως το  $A$  είναι σύνολο  $G_\delta$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω ότι το  $A$  είναι κλειστό,  $G_\delta$  υποσύνολο του  $X$ . Τότε  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ , όπου τα  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι ανοικτά υποσύνολα του  $X$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots$ . Τότε τα σύνολα  $A$  και  $U_n^c$  είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους, άρα από το Λήμμα του Urysohn έχουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  με  $f_n|_A = 0$  και  $f_n|_{U_n^c} = 1$ . Θέτουμε

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}.$$

Η  $f$  είναι καλά ορισμένη στο  $X$  και συνεχής, από το κριτήριο του Weierstrass. Επιπλέον  $f|_A = 0$  και αν  $x \notin A$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $x \notin U_{n_0}$ . Συνεπώς  $f_{n_0}(x) = 1$  και έτσι  $f(x) > 0$ . Επομένως  $A = f^{-1}(\{0\})$ .  $\square$

## 5.5 Τελείως Κανονικοί Χώροι

Το Λήμμα του Urysohn υποδεικνύει μια διαφορετική έννοια διαχωρισμού σημείων από κλειστά σύνολα, μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης. Αποτελεί φυσιολογικό ερώτημα, αν είναι εφικτή η ίδια μέθοδος διαχωρισμού και σε κανονικούς χώρους, δηλαδή αν ισχύει ένα αντίστοιχο «Λήμμα Urysohn», ή αν απαιτείται ένα «ενδιάμεσο» διαχωριστικό αξίωμα.

Μια πρώτη προσέγγιση είναι να ανατρέξουμε στην απόδειξη του Λήμματος Urysohn και να προσπαθήσουμε να την τροποποιήσουμε ώστε να εφαρμόζεται σε κανονικούς χώρους. Με μια πρόχειρη ματιά, όλα φαίνονται να λειτουργούν. Έστω ένας κανονικός τοπολογικός χώρος  $X$ , ένα  $B \subseteq X$  κλειστό και  $x \in B^c$ . Ορίζουμε, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος Urysohn,  $U(1) = B^c$  και επιλέγουμε ένα  $U(0)$  ανοικτό, ώστε  $x \in U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$  (με χρήση της κανονικότητας του  $X$ ). Όμως, στο αμέσως επόμενο βήμα, εμφανίζεται πρόβλημα. Θα θέλαμε να ορίσουμε ένα ανοικτό σύνολο  $U(\frac{1}{2})$ , τέτοιο ώστε

$$\overline{U(0)} \subseteq U(\frac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\frac{1}{2})} \subseteq U(1).$$

Για το βήμα αυτό, η κανονικότητα του  $X$  δεν επαρκεί.

Αυτό οδηγεί στην εισαγωγή ενός νέου διαχωριστικού αξιώματος.

**Ορισμός 5.5.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *τελείως κανονικός* ή *χώρος  $T_{3\frac{1}{2}}$*  αν για κάθε  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με  $f(x) = 0$  και  $f(y) = 1$  για κάθε  $y \in F$ .

**Παρατηρήσεις 5.5.2.** (α) Κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός, αφού για κάθε  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , αν  $f : X \rightarrow [0, 1]$  είναι μια συνεχής συνάρτηση με  $f(x) = 0$  και  $f(y) = 1$  για κάθε  $y \in F$ , τότε  $x \in f^{-1}((-\infty, 1/2))$  και  $F \subseteq f^{-1}((1/2, +\infty))$  και τα σύνολα  $f^{-1}((-\infty, 1/2))$ ,  $f^{-1}((1/2, +\infty))$  είναι ανοικτά και ξένα.

(β) Κάθε φυσιολογικός  $T_1$  τοπολογικός χώρος  $X$  είναι τελείως κανονικός. Πράγματι, αν ένα  $F \subseteq X$  είναι κλειστό και  $x \in X \setminus F$ , τότε το  $\{x\}$  είναι κλειστό στο  $X$  (και προφανώς  $\{x\} \cap F = \emptyset$ ). Άρα, από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , με  $f(x) = 0$  και  $f(y) = 1$  για κάθε  $y \in F$ . Επομένως ο  $X$  είναι τελείως κανονικός.

(γ) Το διάστημα  $[0, 1]$  στον ορισμό δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε κλειστό διάστημα  $[a, b]$ . Πράγματι, αν  $a, b \in \mathbb{R}$ , αντικαθιστώντας την  $f$  με την  $g = (b-a)f+a$ , τότε λαμβάνουμε μια συνεχή συνάρτηση  $g : X \rightarrow [a, b]$  με  $g(x) = a$  και  $g(y) = b$  για κάθε  $y \in F$ .

**Πρόταση 5.5.3.** Αν  $X$  είναι ένας  $T_{3\frac{1}{2}}$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  είναι ένας τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός με τον  $X$ , τότε και ο  $Y$  είναι χώρος  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $y \in Y$  και  $F \subseteq Y$  κλειστό με  $y \notin F$ . Αν  $\phi : X \rightarrow Y$  είναι ένας ομοιομορφισμός των  $X, Y$  και  $f : X \rightarrow [0, 1]$  η συνεχής συνάρτηση που διαχωρίζει τα  $\phi^{-1}(y)$  και  $\phi^{-1}(F)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ \phi^{-1} : Y \rightarrow [0, 1]$  έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.  $\square$

**Πρόταση 5.5.4.** Αν  $X$  είναι ένας  $T_{3\frac{1}{2}}$  χώρος και  $A$  ένας υπόχωρός του, τότε και ο  $A$  είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in A$  και  $F \subseteq A$  κλειστό στο  $A$  με  $x \notin F$ . Υπάρχει  $K$ , κλειστό υποσύνολο του  $X$  ώστε  $F = K \cap A$ . Αφού ο  $X$  είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ , υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με  $f(x) = 0$  και  $f(y) = 1$  για κάθε  $y \in K$ . Τότε ο περιορισμός  $f|_A : A \rightarrow [0, 1]$  έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.  $\square$

**Πρόταση 5.5.5.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια  $T_{3\frac{1}{2}}$  τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ . Τότε το  $x$  ανήκει στο ανοικτό  $F^c$ . Άρα υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$ , όπου  $V_k \subseteq X_{i_k}$  ανοικτό για κάθε  $k$ , ώστε  $x \in \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_k) \subseteq F^c$ . Έχουμε  $\pi_{i_k}(x) = x_{i_k} \in V_k$  άρα  $x_{i_k} \notin V_k^c$ , το οποίο είναι κλειστό στο  $X_{i_k}$  για κάθε  $k$ . Αφού οι χώροι  $X_{i_k}$  είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ , υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις  $f_k : X_{i_k} \rightarrow [0, 1]$  ώστε  $f_k(x_{i_k}) = 0$  και  $f(V_k^c) \subseteq \{1\}$ . Οι συναρτήσεις  $f_k \circ \pi_{i_k} : X \rightarrow [0, 1]$ , για  $k = 1, \dots, n$ , είναι συνεχείς, άρα η  $f : X \rightarrow [0, 1]$  με  $f(y) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(\pi_{i_k}(y))$  είναι συνεχής και ισχύουν τα εξής:

- $f(x) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(\pi_{i_k}(x)) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(x_{i_k}) = 0$ , αφού  $f_k(x_{i_k}) = 0$  για κάθε  $k = 1, \dots, n$ .
- Αν  $y \in F$ , τότε  $y \notin \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$ , άρα υπάρχει  $k_0 \in \{1, \dots, n\}$  τέτοιο ώστε  $y_{i_{k_0}} = \pi_{i_{k_0}}(y) \notin V_{k_0}$ , δηλαδή  $y_{i_{k_0}} \in V_{k_0}^c$ , επομένως  $f_{k_0}(y_{i_{k_0}}) = 1$ . Άρα  $f(y) = 1$ .

$\square$

**Παραδείγματα 5.5.6.** (α) Ο χώρος  $\mathbb{R}_S$  είναι  $T_4$  και  $T_1$ , επομένως είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

(β) Κάθε μετρικός χώρος είναι  $T_4$  και  $T_1$ , επομένως είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

(γ) Ο χώρος του Sorgenfrey  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ , ως γινόμενο  $T_{3\frac{1}{2}}$  χώρων, αλλά δεν είναι  $T_4$ .

Δεν έχουμε δώσει απάντηση στο ερώτημα αν η κλάση των χώρων  $T_{3\frac{1}{2}}$  είναι γνήσια μεγαλύτερη της κλάσης των χώρων  $T_3$ . Αν εξετάσει κανείς τους χώρους  $T_3$  που έχουμε ορίσει μέχρι τώρα δε θα καταφέρει να βρει κάποιο αντιπαράδειγμα. Η κατασκευή ενός κανονικού χώρου που δεν είναι  $T_{3\frac{1}{2}}$ , δεν είναι καθόλου απλή. Τέτοιοι χώροι όμως υπάρχουν.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Παράδειγμα μπορεί κανείς να βρει στο L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology* (Springer, 1978) 90. Tychonoff Corkscrew.

# Κεφάλαιο 6

## Συνεκτικότητα

### 6.1 Συνεκτικοί Χώροι

Ο ορισμός της συνεκτικότητας είναι, μάλλον, φυσιολογικός. Θα έλεγε κανείς ότι ένας τοπολογικός χώρος διασπάται, αν μπορεί να εκφραστεί ως ξένη ένωση δύο ανοικτών συνόλων. Αν αυτό είναι αδύνατο, ο χώρος θα χαρακτηρίζεται από μια ισχυρή έννοια «συνοχής». Από αυτή την απλή ιδέα καταλήγει κανείς στον τυπικό ορισμό.

**Ορισμός 6.1.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *συνεκτικός* αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ανοικτά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα  $A, B$  του  $X$ , ώστε  $X = A \cup B$ . Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου καλείται *συνεκτικό*, αν είναι συνεκτικός χώρος με τη σχετική τοπολογία.

**Παρατήρηση 6.1.2.** Είναι σαφές ότι ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, κλειστά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα  $A, B$  του  $X$ , ώστε  $X = A \cup B$ .

Παρότι ο ορισμός δίνει μια καλή διασιθητική προσέγγιση της έννοιας, συχνά δεν είναι εύχρηστος για να ελέγξει κανείς τη συνεκτικότητα ενός τοπολογικού χώρου. Η ακόλουθη Πρόταση μας προσφέρει κάποια επιπλέον κριτήρια.

**Πρόταση 6.1.3.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι συνεκτικός χώρος.
- (ii) Τα μόνα υποσύνολα του  $X$  που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά είναι τα  $\emptyset$ ,  $X$ .
- (iii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  (όπου το  $\{0, 1\}$  είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία). Με άλλα λόγια, κάθε συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  είναι σταθερή.

*Απόδειξη.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω ένα  $A \subseteq X$  το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Τότε  $X = A^c \cup A$ , όπου τα  $A, A^c$  είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους. Όμως ο  $X$  είναι συνεκτικός, άρα πρέπει  $A = \emptyset$  ή  $A^c = \emptyset$ . Επομένως  $A = \emptyset$  ή  $A = X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Αν υπάρχει  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  συνεχής και επί συνάρτηση, τότε το σύνολο  $A = f^{-1}(\{0\})$  είναι ανοικτό και κλειστό. Αφού η  $f$  είναι επί, έχουμε ότι  $A \neq \emptyset$  και  $A \neq X$ , πράγμα άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση  $f$ .



(iii)  $\Rightarrow$  (i) Αν ο χώρος  $X$  δεν είναι συνεκτικός, υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα  $A, B \subseteq X$ , ώστε  $X = A \cup B$ . Τότε, η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $A$ ,  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ , είναι συνεχής και επί (γιατί;), πράγμα άτοπο. Άρα ο  $X$  είναι συνεκτικός.  $\square$

**Παραδείγματα 6.1.4.** (α) Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , αφού  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, a)) \cup (\mathbb{Q} \cap (a, +\infty))$  για κάθε  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

(β) Ο χώρος του Sierpinski (Παράδειγμα 1.1.5(γ)) είναι συνεκτικός, αφού δεν υπάρχουν μη κενά, ξένα, ανοικτά υποσύνολα που η ένωσή τους να ισούται με το χώρο.

(γ) Ο χώρος  $\mathbb{R}_S$  δεν είναι συνεκτικός, αφού το σύνολο  $(-\infty, a]$  είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό, για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

**Θεώρημα 6.1.5.** Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ , με  $a \leq b$ , το κλειστό διάστημα  $[a, b]$  (με τη συνηθισμένη τοπολογία) είναι συνεκτικό σύνολο.

*Απόδειξη.* Αν  $a = b$ , τότε το διάστημα  $[a, b]$  είναι μονοσύνολο, το οποίο είναι προφανώς συνεκτικό. Έστω ότι  $a < b$ . Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι το  $[a, b]$  δεν είναι συνεκτικό σύνολο, δηλαδή ότι υπάρχουν μη κενά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα  $A, B \subseteq [a, b]$ , ώστε  $[a, b] = A \cup B$ . Το σύνολο  $A$  είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο, επομένως υπάρχει το  $s = \sup A$  ( $a \leq s \leq b$ ) και  $s \in A$ . Αν υποθέσουμε ότι  $s \neq b$ , αφού το  $A$  είναι συγχρόνως (σχετικά) ανοικτό υποσύνολο του  $[a, b]$ , υπάρχει ένα  $\varepsilon > 0$ , ώστε  $[s, s + \varepsilon) \subseteq A$  (επιλέγοντας το  $\varepsilon$  ώστε  $s + \varepsilon \leq b$ ). Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού τότε θα είχαμε ότι  $s < s + \frac{\varepsilon}{2} \in A$ . Άρα  $s = b \in A$ . Εντελώς ανάλογα, δείχνει κανείς ότι αν  $s_2 := \sup B$  τότε  $s_2 \in B$  και  $s_2 = b$ . Έπεται ότι  $b \in A \cap B$ , πράγμα άτοπο. Επομένως το σύνολο  $[a, b]$  είναι συνεκτικό.  $\square$

**Πρόταση 6.1.6.** Η ένωση κάθε οικογένειας συνεκτικών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου  $X$ , με μη κενή τομή, είναι συνεκτικό σύνολο. Δηλαδή, αν κάθε  $A_i \subseteq X$  είναι συνεκτικό σύνολο, για  $i \in I$ , και  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , τότε το σύνολο  $\bigcup_{i \in I} A_i$  είναι συνεκτικό.

*Απόδειξη.* Αφού  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , υπάρχει  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$ . Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$ . Αφού κάθε  $A_i$  είναι συνεκτικό σύνολο, κάθε  $f|_{A_i}$  είναι σταθερή και ίση με  $f(x_0)$  (αφού  $x_0 \in A_i$ , για κάθε  $i \in I$ ). Άρα  $f(x) = f(x_0)$  για κάθε  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$  και κατά συνέπεια η  $f$  δεν είναι επί. Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεχής, επί συνάρτηση  $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$ . Επομένως το σύνολο  $\bigcup_{i \in I} A_i$  είναι συνεκτικό.  $\square$

Ως πόρισμα των παραπάνω έχουμε τον χαρακτηρισμό των συνεκτικών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$  (με τη συνήθη τοπολογία).

**Πόρισμα 6.1.7.** Ο τοπολογικός χώρος  $\mathbb{R}$  είναι συνεκτικός. Επιπλέον τα συνεκτικά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  είναι ακριβώς τα διαστήματα (με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Υπενθυμίζουμε ότι ένα  $I$ , υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , καλείται *διάστημα* αν για κάθε  $x, y \in I$ , με  $x \leq y$ , και  $z \in \mathbb{R}$ , με  $x < z < y$ , έπεται ότι  $z \in I$ . Αποτελεί απλή άσκηση να ελέγξει κανείς ότι τα διαστήματα του  $\mathbb{R}$  είναι τα σύνολα της μορφής:  $[a, a] = \{a\}$  για  $a \in \mathbb{R}$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$  για  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  για  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$  για  $b \in \mathbb{R}$  και το  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

*Απόδειξη.* Ο χώρος  $\mathbb{R}$  είναι συνεκτικός, αφού  $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$  και  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1] \neq \emptyset$  (για τη συνεκτικότητα όλων των διαστημάτων του  $\mathbb{R}$  εργάζεται κανείς ανάλογα). Έστω ένα  $A \subseteq \mathbb{R}$ , το οποίο δεν είναι διάστημα, δηλαδή υπάρχουν  $x, y \in A$  με  $x < y$  και  $z \in \mathbb{R}$  με  $x < z < y$ , ώστε  $z \notin A$ . Τότε τα σύνολα  $A_1 = A \cap (-\infty, z)$ ,  $A_2 = A \cap (z, +\infty)$  είναι ανοικτά στο  $A$ , ξένα, μη κενά ( $x \in A_1$  και  $y \in A_2$ ) και  $A = A_1 \cup A_2$ . Άρα το σύνολο  $A$  δεν είναι συνεκτικό. Επομένως, κάθε συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  είναι διάστημα.  $\square$

Η ακόλουθη Πρόταση μας εξηγεί ότι αν σε ένα συνεκτικό σύνολο προσθέσουμε κάποια από τα οριακά του σημεία, το προκύπτον σύνολο εξακολουθεί να είναι συνεκτικό.

**Πρόταση 6.1.8.** Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $A, B \subseteq X$ .

- (i) Αν το  $A$  είναι συνεκτικό και  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , τότε και το  $B$  είναι συνεκτικό.
- (ii) Αν το  $A$  είναι συνεκτικό, τότε και το  $\bar{A}$  είναι συνεκτικό.

*Απόδειξη.* (i) Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ . Αφού το  $A$  είναι συνεκτικό, η  $f|_A$  είναι σταθερή. Επομένως, το  $f(A) \subseteq \{0, 1\}$  είναι μονοσύνολο. Άρα και το  $\overline{f(A)}$  είναι μονοσύνολο. Όμως η  $f$  είναι συνεχής, άρα  $f(B) \subseteq \overline{f(A)}$  (πράγματι, αν  $x \in B$  τότε  $x \in \bar{A}$  και συνεπώς υπάρχει δίκτυο  $(x_i)$  με  $x_i \in A$  για κάθε  $i$  και  $x_i \rightarrow x$ , οπότε  $f(x) = \lim_i f(x_i) \in \overline{f(A)}$ ). Συνεπώς, το  $f(B)$  είναι μονοσύνολο, δηλαδή η  $f$  δεν είναι επί. Άρα το  $B$  είναι συνεκτικό σύνολο.

(ii) Είναι άμεσο από το (i), για  $B = \bar{A}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 6.1.9.** Το αντίστροφο της Πρότασης 6.1.8(ii) δεν είναι αληθές, δηλαδή υπάρχει συνεκτικό σύνολο με πυκνό, μη συνεκτικό υποσύνολο. Ένα απλό παράδειγμα αποτελεί το μη συνεκτικό σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  ως υποσύνολο της (συνεκτικής) πραγματικής ευθείας.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων «σέβονται» τα συνεκτικά σύνολα. Ιδιαίτερα, αν ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συνεκτικός, τότε κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός προς τον  $X$  είναι συνεκτικός. Συνέπεια αυτής της ιδιότητας αποτελεί το **Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής**.

**Πρόταση 6.1.10.** Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι, με τον  $X$  να είναι συνεκτικός. Έστω συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής. Έστω  $g : f(X) \rightarrow \{0, 1\}$  συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση  $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$  είναι συνεχής και άρα σταθερή, εφόσον ο  $X$  είναι συνεκτικός. Άρα η  $g$  είναι σταθερή, και επομένως ο  $f(X)$  είναι συνεκτικός.  $\square$

**Πόρισμα 6.1.11** (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής). Έστω  $X$  συνεκτικός τοπολογικός χώρος και  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση. Η εικόνα  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  είναι διάστημα.

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 6.1.10, η εικόνα είναι συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , άρα είναι διάστημα (Πόρισμα 6.1.7).  $\square$

Είναι εμφανές ότι αν το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων  $(X_i)_{i \in I}$  είναι συνεκτικός χώρος, τότε κάθε χώρος  $X_i$  είναι συνεκτικός (αφού η αντίστοιχη προβολή  $\pi_i$  είναι συνεχής και επί συνάρτηση). Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές και αποτυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 6.1.12.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  μια οικογένεια μη κενών και συνεκτικών τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινόμενο  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι συνεκτικός.

*Απόδειξη.* Αρχικά θα δείξουμε το ζητούμενο υποθέτοντας ότι το  $I$  είναι πεπερασμένο σύνολο. Μάλιστα, αρκεί να το δείξουμε για  $|I| = 2$  (το ζητούμενο για κάθε πεπερασμένο  $I$  έπεται στη συνέχεια με επαγωγή). Έστω  $X$  και  $Y$  συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι και έστω ένα στοιχείο  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ . Για κάθε  $x \in X$  θεωρούμε το σύνολο

$$A_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\}).$$

Το  $A_x$  είναι συνεκτικό σύνολο, γιατί τα σύνολα  $\{x\} \times Y$ ,  $X \times \{y_0\}$  είναι συνεκτικά (ως συνεχείς εικόνες των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα) και η τομή τους είναι μη κενή: περιέχει το  $(x, y_0)$ . Ακόμη,  $(x_0, y_0) \in \bigcap_{x \in X} A_x$  και  $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$ . Άρα, ο χώρος  $X \times Y$  είναι συνεκτικός.

Για τη γενική περίπτωση, επιλέγουμε ένα στοιχείο  $z = (z_i)_{i \in I} \in X$  και για κάθε  $J \subseteq I$  πεπερασμένο, θεωρούμε το σύνολο

$$X_J = \{x = (x_i)_{i \in I} \in X : x_i = z_i \text{ για κάθε } i \in I \setminus J\}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο  $X_J$  είναι ομοιομορφικό με το σύνολο  $\prod_{i \in J} X_i$ , το οποίο είναι συνεκτικό, ως πεπερασμένο γινόμενο συνεκτικών χώρων. Δηλαδή, κάθε  $X_J$  είναι συνεκτικό. Επίσης, έχουμε ότι  $z \in X_J$  για κάθε πεπερασμένο  $J \subseteq I$ , άρα η τομή των συνόλων  $X_J$  είναι μη κενή. Επομένως το σύνολο

$$Y = \bigcup \{X_J : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι συνεκτικό. Αλλά το σύνολο  $Y$  είναι πυκνό στο  $X$  (γιατί;). Από την Πρόταση 6.1.8 έχουμε ότι ο  $X$  είναι συνεκτικός χώρος.  $\square$

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο κάνοντας αναφορά σε μια διαφορετική έννοια συνεκτικότητας, η οποία γενικεύει κατά ουσιαστικό τρόπο τη συνεκτικότητα των διαστημάτων του  $\mathbb{R}$ .

**Ορισμός 6.1.13.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$  και  $x, y \in X$ . Ένα μονοπάτι του χώρου  $X$ , από το  $x$  στο  $y$ , είναι μια συνεχής συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow X$ , όπου  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ , ώστε  $f(a) = x$  και  $f(b) = y$ . Πολλές φορές ταυτίζουμε το μονοπάτι  $f$  με το ίχνος του  $f([a, b])$ . Ο  $X$  καλείται κατά μονοπάτια συνεκτικός αν κάθε δύο σημεία του χώρου συνδέονται με κάποιο μονοπάτι στο  $X$ .

**Παρατηρήσεις 6.1.14.** (α) Αν ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε είναι και συνεκτικός. Πράγματι, έστω προς άτοπο, ότι υπάρχει μια διάσπαση του χώρου  $X = A \cup B$  (όπου τα  $A, B \subseteq X$  είναι ανοικτά με  $A \cap B = \emptyset$ ). Έστω ένα μονοπάτι στο  $X$ ,  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Το  $f([a, b])$  είναι συνεκτικό υποσύνολο του  $X$ , ως συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου, άρα περιέχεται εξ' ολοκλήρου είτε στο σύνολο  $A$ , είτε στο σύνολο  $B$  (γιατί;). Επομένως, δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει σημεία του  $A$  με σημεία του  $B$  (γιατί η εικόνα ενός μονοπατιού είναι συνεκτικό σύνολο), πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο χώρος είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός.

(β) Η εικόνα ενός κατά μονοπάτια συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Αυτό είναι άμεσο, καθώς η συνεχής εικόνα του ίχνους ενός μονοπατιού είναι ίχνος μονοπατιού (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

(γ) Ως πεδίο ορισμού ενός μονοπατιού μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα μας εξυπηρετεί (αφού όλα τα κλειστά διαστήματα του  $\mathbb{R}$  είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους).

**Παραδείγματα 6.1.15.** (α) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα  $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$  είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό σύνολο. Πράγματι, για  $x, y \in B^n$  ορίζουμε τη συνάρτηση <sup>2</sup>

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad f(t) = (1-t)x + ty.$$

Η  $f$  είναι συνεχής και για κάθε  $t \in [0, 1]$  έχουμε ότι  $\|f(t)\|_2 \leq (1-t)\|x\|_2 + t\|y\|_2 \leq 1$ , άρα  $f([0, 1]) \subseteq B^n$ . Επομένως η  $f$  είναι ένα μονοπάτι της  $B^n$  από το  $x$  στο  $y$ . Με ανάλογο επιχείρημα δείχνει κανείς ότι κάθε ανοικτή και κάθε κλειστή μπάλα του  $\mathbb{R}^n$  είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό σύνολο.

Επομένως, κάθε σημείο στον  $\mathbb{R}^n$  έχει μια βάση περιοχών από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα.

(β) (the topologist's sine curve) Ορίζουμε το υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ ,

$$S = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in (0, 1] \right\}.$$

Αφού το σύνολο  $S$  είναι συνεχής εικόνα του συνεκτικού συνόλου  $(0, 1]$ , είναι και το ίδιο συνεκτικό σύνολο. Επομένως, η κλειστή του θήκη,  $\bar{S} \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Μάλιστα, εύκολα ελέγχει κανείς ότι  $\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ . Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $\bar{S}$  δεν είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό, άρα το αντίστροφο της Παρατήρησης 6.1.14(α) δεν είναι αληθές.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ένα μονοπάτι  $f : [a, c] \rightarrow \bar{S}$  που να συνδέει την αρχή των αξόνων με ένα σημείο του  $S$ . Το σύνολο  $\{t \in [a, c] : f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\}$  είναι κλειστό και φραγμένο, συνεπώς διαθέτει ένα μέγιστο στοιχείο  $b$ , με  $b < c$  (γιατί;). Τότε, ο περιορισμός της  $f$  στο διάστημα  $[b, c]$  απεικονίζει το σημείο  $b$  σε ένα σημείο  $f(b)$  του συνόλου  $\{0\} \times [-1, 1]$ , ενώ  $f((b, c]) \subseteq S$ . Θεωρούμε την  $g : [0, 1] \rightarrow [b, c] \rightarrow \bar{S}$  με  $g(t) = f(tc + (1-t)b)$ , οπότε  $g(0) = f(b)$  και  $g((0, 1]) = f((b, c]) \subseteq S$ . Γράφουμε  $g(t) = (x(t), y(t))$ . Τότε  $x(0) = 0$ , ενώ για κάθε  $t > 0$  έχουμε  $x(t) > 0$  και  $y(t) = \sin\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ . Όμως, αν πάρει κανείς μια ακολουθία  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $t_n \rightarrow 0$  και  $y(t_n) = (-1)^n$  (κατασκευάστε μια τέτοια ακολουθία), θα έχουμε ότι η ακολουθία  $y(t_n)$  δεν συγκλίνει, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με τη συνέχεια της  $g$ .

## 6.2 Τοπικά συνεκτικοί χώροι και συνεκτικές συνιστώσες

Στην περίπτωση που έχουμε ένα μη συνεκτικό τοπολογικό χώρο  $X$ , υπάρχει ένας φυσιολογικός τρόπος να τον διασπάσουμε σε συνεκτικά (ή κατά μονοπάτια συνεκτικά) υποσύνολά του.

**Ορισμός 6.2.1.** Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε μια σχέση  $\sim$  στο  $X$  θέτοντας:

$$x \sim y \iff \text{υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος του } X \text{ που να περιέχει τα } x, y.$$

<sup>2</sup> Η συνάρτηση  $f$  παραμετρικοποιεί το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία  $x$  και  $y$ .

Η ‘ $\sim$ ’ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $X$  (γιατί;) και οι κλάσεις ισοδυναμίας της καλούνται *συνεκτικές συνιστώσες* του  $X$ .

Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου περιγράφονται καλύτερα από το ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 6.2.2.** *Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι ξένοι συνεκτικοί υπόχωροι του  $X$ . Η ένωσή τους είναι ο ίδιος ο χώρος  $X$ . Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του  $X$  τέμνει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα.*

*Απόδειξη.* Ως κλάσεις ισοδυναμίας, οι συνεκτικές συνιστώσες είναι ξένες και η ένωσή τους είναι ο χώρος  $X$ . Έστω ένα τυχόν συνεκτικό  $A \subseteq X$  (με  $A \neq \emptyset$ ). Τότε, για ένα  $x \in A$ , το  $A$  τέμνει τη συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το  $x$ . Έστω, προς άτοπο, ότι το  $A$  τέμνει δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, έστω  $C_1, C_2$ , και έστω σημεία  $x_1 \in A \cap C_1$  και  $x_2 \in A \cap C_2$ . Τότε από τον ορισμό της  $\sim$  έχουμε ότι  $x_1 \sim x_2$ . Συνεπώς  $C_1 = C_2$ . Δηλαδή, το συνεκτικό σύνολο  $A$  τέμνει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα του  $X$  (και άρα περιέχεται σ’ αυτήν).

Μένει να δείξουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του  $X$  είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω  $C$  μια συνεκτική συνιστώσα του  $X$  και  $x_0 \in C$ . Γνωρίζουμε ότι για κάθε  $x \in C$ ,  $x_0 \sim x$ , επομένως υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος  $A_x$  του  $X$  που να περιέχει τα  $x_0, x$ . Όμως κάθε  $A_x$  τέμνει μονάχα τη συνεκτική συνιστώσα  $C$ , άρα  $A_x \subseteq C$ . Έτσι έχουμε ότι  $C = \bigcup_{x \in C} A_x$ . Αφού τα σύνολα  $A_x$  είναι συνεκτικά και το  $x_0$  περιέχεται στην τομή τους, έχουμε ότι το  $C$  είναι συνεκτικό σύνολο.  $\square$

**Παρατηρήσεις 6.2.3.** (α) Το Θεώρημα 6.2.2 μας επιτρέπει να ορίσουμε ισοδύναμα τις συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου  $X$ , ως τα μεγιστικά συνεκτικά υποσύνολά του.

Δηλαδή ένα σύνολο  $C$  είναι συνεκτική συνιστώσα του  $X$  αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και για κάθε συνεκτικό σύνολο  $A$ , με  $C \subseteq A \subseteq X$ , έπεται ότι  $A = C$ .

(β) Αν ένας χώρος είναι συνεκτικός, τότε προφανώς αποτελείται από μία συνεκτική συνιστώσα.

Μια εντελώς ανάλογη κατασκευή μπορεί να ακολουθήσει κανείς για την τοπικά συνεκτική περίπτωση.

**Ορισμός 6.2.4.** Σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$  ορίζουμε μια σχέση θέτοντας  $x \sim_p y$  αν υπάρχει μονοπάτι στο  $X$ , από το  $x$  στο  $y$ . Η σχέση ‘ $\sim_p$ ’ είναι σχέση ισοδυναμίας και οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καλούνται *κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες* του  $X$ .

Ας δείξουμε ότι η σχέση  $\sim_p$  είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $X$ .

- $x \sim_p x$  για κάθε  $x \in X$ , αφού το μονοπάτι  $f : [0, 1] \rightarrow X$  με  $f(t) = x$  για κάθε  $t \in [0, 1]$  συνδέει το  $x$  με τον εαυτό του.
- Έστω  $x, y \in X$  με  $x \sim_p y$ . Τότε υπάρχει μονοπάτι  $f : [0, 1] \rightarrow X$  με  $f(a) = x$  και  $f(b) = y$ . Θέτουμε  $g : [0, 1] \rightarrow X$  με  $g(t) = f(1 - t)$ . Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η  $g$  είναι μονοπάτι στο  $X$ , από το  $y$  στο  $x$ . Επομένως  $y \sim_p x$ .
- Έστω  $x, y, z \in X$  με  $x \sim_p y$  και  $y \sim_p z$ . Τότε υπάρχουν αντίστοιχα μονοπάτια  $f_1 : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $f_2 : [1, 2] \rightarrow X$  με  $f_1(0) = x$ ,  $f_1(1) = y = f_2(1)$  και  $f_2(2) = z$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση  $g : [0, 2] \rightarrow X$  με

$$g(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{αν } t \in [0, 1] \\ f_2(t), & \text{αν } t \in (1, 2] \end{cases}.$$

Τότε η  $g$  είναι συνεχής (Πρόταση 4.1.6(iv)),  $g(0) = x$  και  $g(2) = z$ . Επομένως η  $g$  είναι μονοπάτι στο  $X$ , από το  $x$  στο  $z$ , και έτσι,  $x \sim_p z$ .

**Θεώρημα 6.2.5.** Οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι κατά μονοπάτια συνεκτικά, ξένα υποσύνολα του  $X$ . Η ένωσή τους είναι ο ίδιος ο χώρος  $X$ . Κάθε κατά μονοπάτια συνεκτικό υποσύνολο του  $X$  να τέμνει ακριβώς μία κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη. Είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 6.2.2 και αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Παρατήρηση 6.2.6.** Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι κλειστό σύνολο (αυτό έπεται από τη μεγιστικότητα των συνεκτικών συνιστωσών και το γεγονός ότι η κλειστή θήκη ενός συνεκτικού συνόλου είναι επίσης συνεκτικό σύνολο). Επιπλέον, αν ο  $X$  έχει πεπερασμένες στο πλήθος συνεκτικές συνιστώσες, τότε κάθε μία από αυτές είναι και ανοικτό σύνολο (γιατί;). Εν γένει, μια συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, στο σύνολο  $\mathbb{Q}$  (με την επαγόμενη από τη συνήθη τοπολογία του  $\mathbb{R}$ ) κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι μονοσύνολο, επομένως δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{Q}$ .

Με το ακόλουθο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι δεν ισχύουν ανάλογες καλές ιδιότητες για τις κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες. Δηλαδή, μια κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του ενός τοπολογικού χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη ούτε ανοικτό, αλλά ούτε και κλειστό σύνολο.

**Παράδειγμα 6.2.7.** Ο χώρος  $\bar{S}$  του παραδείγματος 6.1.15(β) είναι συνεκτικός αλλά όχι κατά μονοπάτια συνεκτικός. Οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα σύνολα  $\{0\} \times [-1, 1]$  και  $S$ . Το  $S$  είναι ανοικτό σύνολο στο  $\bar{S}$  αλλά όχι κλειστό, ενώ το  $\{0\} \times [-1, 1]$  είναι κλειστό αλλά όχι ανοικτό.

Η συνεκτικότητα είναι μια χρήσιμη ιδιότητα για έναν τοπολογικό χώρο, αλλά δεν είναι λίγες οι φορές που η ιδιότητα που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει είναι η ικανότητα του χώρου να διαθέτει οσοδήποτε «λεπτές» συνεκτικές περιοχές για τα σημεία του.

**Ορισμός 6.2.8.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$ . Ο  $X$  καλείται

- (i) τοπικά συνεκτικός στο  $x \in X$ , αν το  $x$  διαθέτει βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα.
- (ii) τοπικά συνεκτικός, αν είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο του.
- (iii) τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός στο  $x \in X$ , αν το  $x$  διαθέτει βάση περιοχών από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα.
- (iv) τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, αν είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σε κάθε σημείο του.

**Παραδείγματα 6.2.9.** (α) Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  είναι και τοπικά συνεκτικό σύνολο.

(β) Το σύνολο  $[-1, 0) \cup (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  είναι τοπικά συνεκτικό, αλλά όχι συνεκτικό.

(γ) Ο χώρος  $\bar{S}$  είναι συνεκτικός, αλλά όχι τοπικά συνεκτικός.

(δ) Το σύνολο  $\mathbb{Q}$  δεν είναι ούτε συνεκτικό, ούτε τοπικά συνεκτικό.

**Πρόταση 6.2.10.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο  $U \subseteq X$ , κάθε συνεκτική συνιστώσα του  $U$  είναι ανοικτό σύνολο στο  $X$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο  $X$  είναι τοπικά συνεκτικός και έστω ένα ανοικτό  $U \subseteq X$ . Αν  $C$  είναι μια συνεκτική συνιστώσα του  $U$  και  $x \in C$ , υπάρχει συνεκτική περιοχή  $V$  του  $x$ , με  $V \subseteq U$ . Αφού όμως το  $V$  είναι συνεκτικό σύνολο, πρέπει  $V \subseteq C$ . Επομένως η συνεκτική συνιστώσα  $C$  είναι ανοικτό σύνολο.

Αντίστροφα, έστω ότι οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε ανοικτού συνόλου είναι επίσης ανοικτά σύνολα. Έστω ένα  $x \in X$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Αν  $C$  είναι η συνεκτική συνιστώσα του  $U$  που περιέχει το  $x$ , τότε το  $C$  είναι συνεκτικό και ανοικτό (από την υπόθεση) σύνολο με  $x \in C \subseteq U$ . Επομένως το  $x$  διαθέτει βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα, δηλαδή ο  $X$  είναι τοπικά συνεκτικός χώρος στο  $x$ . Αφού το  $x \in X$  ήταν τυχόν, ο  $X$  είναι τοπικά συνεκτικός.  $\square$

Ανάλογα αποδεικνύει κανείς την ακόλουθη Πρόταση:

**Πρόταση 6.2.11.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο  $U \subseteq X$ , κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του  $U$  είναι ανοικτό σύνολο στο  $X$ .

Η σχέση μεταξύ συνεκτικότητας και κατά μονοπάτια συνεκτικότητας αποτυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα:

**Θεώρημα 6.2.12.** Σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$ , κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα περιέχεται σε μια συνεκτική συνιστώσα του  $X$ . Αν επιπλέον ο  $X$  είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες και οι κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες ταυτίζονται.

*Απόδειξη.* Έστω  $C$  μια συνεκτική συνιστώσα του  $X$  και έστω ένα  $x \in C$ . Αν  $P$  είναι η κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του  $X$  που περιέχει το  $x$ , αφού η  $P$  είναι συνεκτικό σύνολο, έπεται ότι  $P \subseteq C$ . Επιθυμούμε να δείξουμε ότι αν ο  $X$  είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε  $P = C$ . Έστω, προς άτοπο, ότι  $P \subsetneq C$ . Κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του  $X$  που τέμνει το  $C$  θα περιέχεται σε αυτό. Αν ονομάσουμε  $Q$  την ένωση όλων αυτών των κατά μονοπάτια συνεκτικών συνιστωσών του  $X$  (που περιέχονται στο  $C$ ) εκτός της  $P$ , θα έχουμε ότι  $C = P \cup Q$ . Αφού ο  $X$  είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, κάθε κατά μονοπάτια συνεκτική συνιστώσα του  $X$  είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως, η  $P$  (ως συνιστώσα) και το  $Q$  (ως ένωση κατά μονοπάτια συνεκτικών συνιστωσών) είναι ανοικτά σύνολα (και προφανώς ξένα). Άρα συνιστούν μια διάσπαση του  $C$ , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τη συνεκτικότητα του  $C$ . Συνεπώς,  $P = C$ .  $\square$

# Κεφάλαιο 7

## Συμπάγεια

### 7.1 Συμπαγείς Χώροι

Ήδη από τη μελέτη της τοπολογίας της ευθείας των πραγματικών αριθμών, είχε γίνει φανερό πως τα κλειστά διαστήματα είχαν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία ήταν ουσιαστική για την απόδειξη ισχυρών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού, όπως το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής<sup>1</sup> ή το Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας<sup>2</sup>. Όμως για πολύ καιρό δεν ήταν σαφές πώς αυτή η ιδιότητα θα μπορούσε να διατυπωθεί στο αφηρημένο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων. Μια αρχική προσέγγιση θα ήταν να εστιάσει κανείς σε μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των κλειστών διαστημάτων, η οποία είναι μάλιστα ισοδύναμη με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass<sup>3</sup>:

Κάθε άπειρο υποσύνολο ενός κλειστού διαστήματος έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.

Όμως αργά ή γρήγορα θα γίνει εμφανές πως δεν είναι αυτή η ιδιότητα που βρίσκεται στην «καρδιά του ζητήματος». Στην πραγματικότητα χρειάζεται μια ισχυρότερη ιδιότητα, η οποία περνά μέσα από την έννοια του ανοικτού καλύμματος.

**Ορισμός 7.1.1.** Ένας τοπολογικός χώρος καλείται *συμπαγής* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα  $\{U_i : i \in I\}$  του  $X$  (δηλαδή οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του  $X$  με  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ ) έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει  $J \subseteq I$  πεπερασμένο ώστε  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Ένα  $F \subseteq X$  καλείται *συμπαγές σύνολο*, αν ο υπόχωρος  $F$  είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

**Παρατηρήσεις 7.1.2.** (α) Κάθε πεπερασμένος τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής. Πράγματι, αν  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \bigcup_{i \in I} U_i$ , όπου κάθε  $U_i$  είναι ανοικτό, τότε για κάθε  $k = 1, 2, \dots, n$  υπάρχει  $i_k \in I$  ώστε  $x_k \in U_{i_k}$ . Τότε  $X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ .

(β) Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε *βασικό ανοικτό κάλυμμα* του  $X$  (δηλαδή κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $X$  που αποτελείται από βασικά ανοικτά σύνολα) έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (γιατί;).

<sup>1</sup>Κάθε συνεχής συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [a, b]$  τέτοια ώστε  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

<sup>2</sup>Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στα κλειστά και φραγμένα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

<sup>3</sup>Κάθε φραγμένη ακολουθία (πραγματικών αριθμών) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.



Το να εξετάσει κανείς κατά πόσο ένας τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής είναι μια διαδικασία εξαιρετικά δύσκολη, στη γενική περίπτωση. Για το λόγο αυτό, θα αποδείξουμε κάποιες αρχικές προτάσεις που μας δείχνουν πώς να κατασκευάσουμε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους από ήδη υπάρχοντες, αλλά και κάποια κεντρικά κριτήρια συμπαγείας ενός τοπολογικού χώρου.

**Πρόταση 7.1.3.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $F \subseteq X$ . Τότε το  $F$  είναι συμπαγές σύνολο αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα  $\{U_i : i \in I\}$  του  $F$  στο  $X$  (δηλαδή κάθε οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  ανοικτών υποσυνόλων του  $X$  με  $F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ) έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση και αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Πρόταση 7.1.4.** Αν  $X$  είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και  $F \subseteq X$  κλειστό, τότε το  $F$  είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω  $(U_i)_{i \in I}$  ένα κάλυμμα του  $F$  από ανοικτά υποσύνολα του  $X$ . Η οικογένεια  $(U_i)_{i \in I} \cup \{X \setminus F\}$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του (συμπαγούς)  $X$ . Άρα υπάρχουν  $i_1, \dots, i_k \in I$  ώστε  $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus F)$ . Τότε  $F \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ , επομένως το  $F$  είναι συμπαγές σύνολο.  $\square$

Μπορούμε να διατυπώσουμε ένα διαφορετικό κριτήριο για τη συμπαγεία ενός τοπολογικού χώρου, το οποίο εστιάζει στα κλειστά σύνολα αντί των ανοικτών.

**Ορισμός 7.1.5.** Μια οικογένεια  $(F_i)_{i \in I}$  υποσυνόλων ενός συνόλου  $X \neq \emptyset$  έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε μη κενό πεπερασμένο  $J \subseteq I$  ισχύει  $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$ .

**Πρόταση 7.1.6.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια  $(F_i)_{i \in I}$  κλειστών υποσυνόλων του  $X$  με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει ότι  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ .

Απόδειξη. Ο  $X$  είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων  $(U_i)_{i \in I}$  του  $X$  με  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , υπάρχει πεπερασμένο  $J \subseteq I$  με  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Ισοδύναμα (θέτοντας  $F_i = U_i^c$  για κάθε  $i \in I$ ) για κάθε οικογένεια  $(F_i)_{i \in I}$  κλειστών υποσυνόλων του  $X$  με  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ , υπάρχει  $J \subseteq I$  πεπερασμένο με  $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ . Δηλαδή, για κάθε οικογένεια  $(F_i)_{i \in I}$  κλειστών υποσυνόλων του  $X$  με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, ισχύει ότι  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ .  $\square$

Κατά τη μελέτη της τοπολογίας μετρικών χώρων, μπορεί κανείς να αποδείξει ένα εύχρηστο κριτήριο συμπαγείας μέσω ακολουθιών. Συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία στο χώρο. Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί το ανάλογο του κριτηρίου αυτού στην κλάση των τοπολογικών χώρων.

**Πρόταση 7.1.7.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε δίκτυο στο  $X$  έχει οριακό σημείο (ή ισοδύναμα, κάθε δίκτυο στο  $X$  έχει συγκλίνον υποδίκτυο).

Απόδειξη. ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  δίκτυο στο  $X$ . Για κάθε  $\mu \in \Lambda$  ορίζουμε το κλειστό σύνολο  $F_\mu = \{x_\lambda : \lambda \geq \mu\}$ . Κάθε  $F_\mu$  είναι μη κενό και  $F_{\mu_1} \supseteq F_{\mu_2}$  αν  $\mu_2 \geq \mu_1$ . Επομένως, η οικογένεια  $(F_\mu)_{\mu \in \Lambda}$  έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, αφού αν  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \Lambda$ , υπάρχει  $\mu \in \Lambda$  με  $\mu \geq \mu_1, \dots, \mu_n$ , άρα  $F_\mu \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_{\mu_i}$ . Επειδή ο

$X$  είναι συμπαγής χώρος, από την Πρόταση 7.1.6 έχουμε ότι υπάρχει  $x \in \bigcap_{\mu \in \Lambda} F_\mu$ . Το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $(x_\lambda)$ . Πράγματι, αν  $U \in \mathfrak{N}_x$  και  $\mu \in \Lambda$ , τότε, αφού  $x \in F_\mu = \{x_\lambda : \lambda \geq \mu\}$ , έχουμε ότι  $U \cap \{x_\lambda : \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$ , δηλαδή υπάρχει  $\lambda \geq \mu$  ώστε  $x_\lambda \in U$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $(F_i)_{i \in I}$  οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του  $X$ , με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από την Πρόταση 7.1.6, αρκεί να δείξουμε ότι  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ . Για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $H \subseteq I$  έχουμε ότι υπάρχει  $x_H \in \bigcap_{i \in H} F_i$ . Θέτουμε  $\Lambda = \{H \subseteq I : H \text{ πεπερασμένο}\}$  και ορίζουμε στο  $\Lambda$  τη σχέση

$$H_1 \leq H_2 \iff H_1 \subseteq H_2.$$

Τότε, το  $(\Lambda, \leq)$  είναι κατευθυνόμενο σύνολο άρα το  $(x_H)_{H \in \Lambda}$  είναι δίκτυο στο  $X$ . Από την υπόθεση, υπάρχει  $x \in X$ , οριακό σημείο του  $(x_H)$ .

Έστω ένα  $i_0 \in I$  και  $U \in \mathfrak{N}_x$ . Αφού το  $x$  είναι οριακό σημείο του δικτύου  $(x_H)$ , υπάρχει πεπερασμένο σύνολο  $H \geq \{i_0\}$  ώστε  $x_H \in U$ . Έχουμε τότε ότι

$$x_H \in \bigcap_{i \in H} F_i \subseteq F_{i_0}.$$

Άρα,  $x_H \in F_{i_0} \cap U$  και επομένως  $F_{i_0} \cap U \neq \emptyset$ . Συνεπώς  $x \in \overline{F_{i_0}} = F_{i_0}$  (αφού το  $F_{i_0}$  είναι κλειστό). Όμως, αυτό ισχύει για κάθε  $i_0 \in I$ , άρα  $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$ . Δηλαδή,  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$  και έτσι ο  $X$  είναι συμπαγής χώρος.  $\square$

Ένα άμεσο πόρισμα της Πρότασης 7.1.7 είναι το ακόλουθο Πόρισμα, του οποίου η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

**Πόρισμα 7.1.8.** Έστω  $X$  ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ένα δίκτυο στο χώρο  $X$  με ακριβώς ένα οριακό σημείο. Τότε το δίκτυο  $(x_\lambda)$  συγκλίνει.

Στους Hausdorff τοπολογικούς χώρους τα συμπαγή υποσύνολα έχουν τις ίδιες διαχωριστικές ιδιότητες με τα σημεία, όπως γίνεται φανερό από την ακόλουθη Πρόταση.

**Πρόταση 7.1.9.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $K \subseteq X$  συμπαγής.

- (i) Αν  $F \subseteq X$  ώστε για κάθε  $x \in K$  τα  $x$  και  $F$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα, τότε τα  $K$  και  $F$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.
- (ii) Αν ο  $X$  είναι χώρος Hausdorff και ένα  $L \subseteq X$  είναι συμπαγές και ξένο με το  $K$ , τότε τα  $K$  και  $L$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.
- (iii) Αν ο  $X$  είναι κανονικός χώρος και ένα  $F \subseteq X$  είναι κλειστό και ξένο με το  $K$ , τότε τα  $K$  και  $F$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

*Απόδειξη.* (i) Έχουμε ότι για κάθε  $x \in K$  υπάρχουν ξένα, ανοικτά σύνολα  $U_x, V_x$  ώστε  $x \in U_x$  και  $F \subseteq V_x$ . Τότε η οικογένεια  $(U_x)_{x \in K}$  αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου  $K$ . Επομένως, υπάρχουν  $x_1, \dots, x_n \in K$  ώστε  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Θέτουμε:

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \quad \text{και} \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}.$$

Τότε τα  $U, V$  είναι ανοικτά,  $K \subseteq U$  και  $F \subseteq V$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $U \cap V = \emptyset$ . Αυτό όμως είναι φανερό, αφού αν  $x \in U$ , τότε υπάρχει  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ώστε  $x \in U_{x_i}$  και άρα  $x \notin V_{x_i}$ . Επομένως  $U \cap V = \emptyset$ .

(ii) Για κάθε  $x \in K$  και  $y \in L$  έχουμε  $x \neq y$  και, αφού ο  $X$  είναι χώρος Hausdorff, τα  $x, y$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Αφού το σύνολο  $L$  είναι συμπαγές, από το (i), έχουμε ότι για κάθε  $x \in K$ , τα  $x$  και  $L$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Αφού το  $K$  είναι συμπαγές, πάλι από το (i), έχουμε ότι τα  $K$  και  $L$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

(iii) Για κάθε  $x \in K$ , τα  $x$  και  $F$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα, αφού  $x \notin F$  και ο χώρος  $X$  είναι  $T_3$ . Συνεπώς, από το (i) έχουμε ότι τα  $K$  και  $F$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.  $\square$

**Πόρισμα 7.1.10.** Έστω  $X$  ένας χώρος Hausdorff.

- (i) Αν ο  $X$  είναι συμπαγής, τότε είναι φυσιολογικός.
- (ii) Κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $X$  είναι κλειστό.

*Απόδειξη.* (i) Έστω  $F_1, F_2 \subseteq X$  ξένα και κλειστά υποσύνολα του  $X$ . Τότε, τα  $F_1$  και  $F_2$  είναι συμπαγή (Πρόταση 7.1.4) και επομένως, από την Πρόταση 7.1.9(ii), έχουμε ότι τα  $F_1, F_2$  διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Άρα ο χώρος  $X$  είναι φυσιολογικός.

(ii) Έστω  $K \subseteq X$  συμπαγές και  $x \in X \setminus K$ . Τότε τα  $\{x\}$  και  $K$  είναι ξένα συμπαγή υποσύνολα του  $X$ . Άρα από την Πρόταση 7.1.9(ii), διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Δηλαδή, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα  $U$  και  $V$  ώστε  $x \in U$  και  $K \subseteq V$ , επομένως

$$x \in U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus K.$$

Έπεται ότι  $X \setminus K \in \mathfrak{N}_x$ , για κάθε  $x \in X \setminus K$ . Άρα το  $X \setminus K$  είναι ανοικτό σύνολο και κατά συνέπεια, το  $K$  είναι κλειστό σύνολο.  $\square$

**Παρατήρηση 7.1.11.** Από το Πόρισμα 7.1.10 και την Πρόταση 7.1.4 έπεται ότι σε ένα συμπαγή Hausdorff χώρο, τα συμπαγή υποσύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά υποσύνολα του χώρου.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους.

**Πρόταση 7.1.12.** Έστω  $X$  ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$ , τότε και ο χώρος  $Y$  είναι συμπαγής. Δηλαδή, η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου είναι συμπαγής χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $(V_i)_{i \in I}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $Y$ . Αφού η  $f$  είναι συνεχής, η οικογένεια  $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$  αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Ο  $X$  είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος, επομένως υπάρχουν  $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ , ώστε

$$X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup f^{-1}(V_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_k}).$$

Όμως η συνάρτηση  $f$  είναι επί, άρα  $Y = V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \dots \cup V_{i_k}$ . Συνεπώς, ο  $Y$  είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.  $\square$

Σημαντικές συνέπειες αυτής της Πρότασης είναι το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (Πόρισμα 7.1.13) αλλά και ένα κριτήριο, το οποίο μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μια απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων (Θεώρημα 7.1.14).

**Πόρισμα 7.1.13.** Έστω  $X$  συμπαγής τοπολογικός χώρος και μια συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε η  $f$  είναι φραγμένη και μάλιστα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 7.1.12, έπεται ότι το  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  είναι συμπαγές. Άρα το  $f(X)$  είναι φραγμένο κι επομένως, η συνάρτηση  $f$  είναι φραγμένη. Συνεπώς υπάρχει το  $\sup f(X) \in \mathbb{R}$  και  $\sup f(X) \in f(X)$ . Αφού όμως το  $f(X)$  είναι συμπαγές, είναι και κλειστό στο  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή  $\sup f(X) \in f(X) = \overline{f(X)}$  ( $\sup f(X) = \max f(X)$ ). Επομένως η  $f$  παίρνει μέγιστη τιμή. Για την ελάχιστη τιμή εργαζόμαστε ανάλογα.  $\square$

**Θεώρημα 7.1.14.** Έστω  $X$  ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και  $Y$  ένας χώρος Hausdorff. Αν  $f : X \rightarrow Y$  είναι μια συνεχής, 1-1 και επί συνάρτηση, τότε και η  $f^{-1}$  είναι συνεχής (επομένως η  $f$  είναι ομοιομορφισμός).

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι η  $f$  είναι κλειστή απεικόνιση. Έστω ένα  $F \subseteq X$  κλειστό. Αφού ο  $X$  είναι συμπαγής, θα είναι και το  $F$  συμπαγές. Από την Πρόταση 7.1.12, έχουμε ότι το  $f(F) \subseteq Y$  είναι συμπαγές και, αφού ο  $Y$  είναι χώρος Hausdorff, έχουμε ότι το  $f(F)$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $Y$ . Δηλαδή η  $f$  είναι κλειστή απεικόνιση.  $\square$

## 7.2 Καρτεσιανά γινόμενα συμπαγών χώρων

Τα καρτεσιανά γινόμενα συμπαγών χώρων παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όπως θα γίνει εμφανές παρακάτω. Πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε το εξαιρετικά εύρηστο Λήμμα του Σωλήνα και μέσω αυτού να συμπεράνουμε ότι το πεπερασμένο γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι επίσης συμπαγής τοπολογικός χώρος. Παράλληλα, θα εξάγουμε μερικά ακόμη ενδιαφέροντα Πορίσματα.

**Λήμμα 7.2.1** (Λήμμα του Σωλήνα). Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  συμπαγής τοπολογικός χώρος. Αν  $x_0 \in X$  και  $U$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του  $X \times Y$ , με  $\{x_0\} \times Y \subseteq U$ , τότε υπάρχει μια ανοικτή περιοχή  $V$  του  $x_0$  ώστε

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U.^4$$

*Απόδειξη.* Για κάθε  $y \in Y$ , έχουμε ότι  $(x_0, y) \in U$ , άρα υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $V_y \times W_y$  του  $X \times Y$  με  $(x_0, y) \in V_y \times W_y \subseteq U$ . Όμως ο χώρος  $\{x_0\} \times Y$  είναι συμπαγής, αφού είναι ομοιομορφικός με το χώρο  $Y$ , επομένως το ανοικτό κάλυμμα του,  $(V_y \times W_y)_{y \in Y}$ , έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή υπάρχουν  $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$  ώστε

$$\{x_0\} \times Y \subseteq (V_{y_1} \times W_{y_1}) \cup (V_{y_2} \times W_{y_2}) \cup \dots \cup (V_{y_k} \times W_{y_k}) \subseteq U.$$

Θέτουμε  $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k}$ . Έχουμε ότι το  $V$  είναι μια ανοικτή περιοχή του  $x_0$  και επιπλέον  $\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U$ . Πράγματι, αν  $(x, y) \in V \times Y$ , τότε υπάρχει  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  ώστε  $(x, y) \in V_{y_i} \times W_{y_i}$ . Συνεπώς

$$(x, y) \in V \times W_{y_i} \subseteq V_{y_i} \times W_{y_i} \subseteq U. \quad \square$$

<sup>4</sup>Το σύνολο  $V \times Y$  συχνά καλείται «σωλήνας» γύρω από το «νήμα»  $\{x_0\} \times Y$ .

**Παράδειγμα 7.2.2.** Είναι σαφές ότι το Λήμμα του Σωλήνα δεν αληθεύει κατ' ανάγκη αν ο χώρος  $Y$  δεν είναι συμπαγής. Για παράδειγμα, αν  $X = Y = \mathbb{R}$  και

$$N = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \frac{1}{y^2 + 1} \right\},$$

τότε το  $N$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  που περιέχει το «νήμα»  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , αλλά προφανώς δεν περιέχει κανένα «σωλήνα»  $V \times \mathbb{R}$  γύρω από το  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

Όπως είχαμε δει στην Πρόταση 4.3.3 (iv), αν  $(X_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και  $X = \prod_{i \in I} X_i$  με την καρτεσιανή τοπολογία, τότε η συνάρτηση προβολής στην  $i$ -συντεταγμένη είναι (συνεχής) ανοικτή απεικόνιση, αλλά όχι αναγκαία και κλειστή απεικόνιση. Η ακόλουθη Πρόταση μας δείχνει ότι στην περίπτωση του γινομένου δύο τοπολογικών χώρων, η συμπαγεια μπορεί να εξασφαλίσει την κλειστότητα των προβολών.

**Πρόταση 7.2.3.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  συμπαγής τοπολογικός χώρος. Η προβολή (στην πρώτη συντεταγμένη)  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  είναι κλειστή συνάρτηση.

*Απόδειξη.* Έστω  $F$  ένα κλειστό υποσύνολο του  $X \times Y$ . Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $\pi_1(F)$  είναι κλειστό, ή ισοδύναμα ότι το σύνολο  $X \setminus \pi_1(F)$  είναι ανοικτό. Έστω  $x \in X \setminus \pi_1(F)$ . Τότε  $(\{x\} \times Y) \cap F = \emptyset$ , δηλαδή  $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus F$ .

Το σύνολο  $(X \times Y) \setminus F$  είναι ανοικτό, επομένως από το Λήμμα του Σωλήνα, υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V$  του  $x$ , με

$$\{x\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus F.$$

Τότε  $x \in V \subseteq X \setminus \pi_1(F)$ . Άρα το  $X \setminus \pi_1(F)$  είναι ανοικτό σύνολο.  $\square$

**Πρόταση 7.2.4.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $Y$  ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  είναι συνεχής αν και μόνο αν το γράφημα

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

της  $f$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $X \times Y$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω ένα δίκτυο  $(x_\lambda, f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  από στοιχεία του  $\text{Gr}(f)$ , τέτοιο ώστε  $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \rightarrow (x, y) \in X \times Y$ . Τότε  $x_\lambda \rightarrow x$  και  $f(x_\lambda) \rightarrow y$ . Όμως η  $f$  είναι συνεχής, άρα  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ , και αφού ο  $Y$  είναι χώρος Hausdorff, έπεται ότι  $y = f(x)$ . Δηλαδή  $(x, y) = (x, f(x)) \in \text{Gr}(f)$ . Έτσι έχουμε ότι το  $\text{Gr}(f)$  είναι κλειστό σύνολο.<sup>5</sup>

( $\Leftarrow$ ) Έστω ότι το γράφημα  $\text{Gr}(f)$  της  $f$  είναι κλειστό σύνολο. Τότε αν  $F \subseteq Y$  είναι ένα κλειστό σύνολο, αφού η προβολή στη δεύτερη συντεταγμένη  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  είναι συνεχής απεικόνιση, έχουμε ότι το σύνολο  $\pi_2^{-1}(F)$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $X \times Y$ , άρα και το  $\text{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F)$  είναι κλειστό σύνολο. Τώρα, από την Πρόταση 7.2.3, η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη  $\pi_1$  είναι κλειστή απεικόνιση, άρα το σύνολο  $\pi_1(\text{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F))$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $X$ . Όμως εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι  $\pi_1(\text{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$  (ελέγξτε το). Επομένως η  $f$  αντιστρέφει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα, συνεπώς είναι συνεχής.  $\square$

<sup>5</sup> Παρατηρούμε ότι για αυτή την κατεύθυνση του ισχυρισμού δεν απαιτείται η υπόθεση της συμπαγείας του  $Y$ . Δηλαδή ισχύει γενικά ότι αν μια συνεχής συνάρτηση παίρνει τιμές σε ένα χώρο Hausdorff, το γράφημά της είναι κλειστό σύνολο.

**Πρόταση 7.2.5.** Έστω  $X, Y$  συμπαγείς χώροι. Τότε ο χώρος  $X \times Y$  με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συμπαγής χώρος. Επαγωγικά, το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συμπαγών χώρων, με την καρτεσιανή τοπολογία, είναι συμπαγής χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X \times Y$ . Για κάθε  $x \in X$ , έχουμε ότι το «νήμα»  $\{x\} \times Y$  είναι συμπαγής χώρος που καλύπτεται από το ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{U}$ , επομένως υπάρχει  $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$  πεπερασμένο που καλύπτει το «νήμα»  $\{x\} \times Y$ , δηλαδή  $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$ . Από το Λήμμα του Σωλήνα, υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V_x$  του  $x$ , ώστε

$$V_x \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x.$$

Έτσι, για κάθε  $x \in X$  έχουμε επιλέξει μια ανοικτή περιοχή  $V_x$  του  $x$ , τέτοια ώστε ο «σωλήνας»  $V_x \times Y$  να καλύπτεται από ένα πεπερασμένο  $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ .

Η οικογένεια  $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$  αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του χώρου  $X$ , ο οποίος είναι συμπαγής. Άρα η  $\mathcal{V}$  έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχουν  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ , τέτοια ώστε  $X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$ . Αφού τα  $\mathcal{U}_{x_1}, \mathcal{U}_{x_2}, \dots, \mathcal{U}_{x_k}$  είναι πεπερασμένα, η οικογένεια

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{x_k} \subseteq \mathcal{U}$$

είναι πεπερασμένη και αποτελεί κάλυμμα του  $X \times Y$ , αφού

$$X \times Y = \left( \bigcup_{i=1}^k V_{x_i} \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^k (V_{x_i} \times Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \left( \bigcup \mathcal{U}_{x_i} \right) = \bigcup \mathcal{U}_0.$$

Έτσι, το κάλυμμα  $\mathcal{U}$  έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα ο  $X \times Y$  είναι συμπαγής χώρος.  $\square$

*Δεύτερη Απόδειξη.* Έστω  $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ένα δίκτυο στον  $X \times Y$ . Θα δείξω ότι το  $(z_\lambda)$  έχει ένα υποδίκτυο που συγκλίνει. Αν  $(z_\lambda) = (x_\lambda, y_\lambda)$ , το  $(x_\lambda)$  είναι δίκτυο στον συμπαγή χώρο  $X$ , συνεπώς έχει ένα υποδίκτυο  $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in M}$  που συγκλίνει, έστω στο  $x \in X$ . Η ίδια συνάρτηση  $\phi : M \rightarrow \Lambda$  ορίζει ένα υποδίκτυο  $(y_{\phi(\mu)})_{\mu \in M}$  του  $(y_\lambda)$ . Αφού ο  $Y$  είναι συμπαγής, το  $(y_{\phi(\mu)})$  έχει ένα υποδίκτυο  $(y_{\phi(\psi(j))})_{j \in J}$  που συγκλίνει, έστω στο  $y \in Y$ . Το δίκτυο  $(z_{\phi(\psi(j))})_{j \in J} = (x_{\phi(\psi(j))}, y_{\phi(\psi(j))})_{j \in J}$  είναι υποδίκτυο του  $(z_\lambda)$  (γιατί η συνάρτηση  $\phi \circ \psi : J \rightarrow M \rightarrow \Lambda$  είναι αύξουσα και το  $\phi(\psi(J)) \subseteq \Lambda$  είναι ομοτελικό στο  $\Lambda$ ) και συγκλίνει στο  $(x, y) \in X \times Y$ , γιατί το  $(x_{\phi(\psi(j))})$  συγκλίνει στο  $x$  (αφού είναι υποδίκτυο του  $(x_{\phi(\mu)})$ ) και το  $(y_{\phi(\psi(j))})$  συγκλίνει στο  $y$ .  $\square$

Σε αυτό το σημείο είναι φυσιολογικό να αναρωτηθεί κανείς αν ισχύει το ανάλογο της Πρότασης 7.2.5 για άπειρες οικογένειες συμπαγών χώρων. Η απάντηση είναι καταφατική, αλλά η απόδειξη αυτού του εξαιρετικά σημαντικού αποτελέσματος δεν είναι εύκολη. Για την απόδειξη του ανάλογου αποτελέσματος για συνεκτικούς χώρους (Θεώρημα 6.1.12), η περίπτωση του αυθαίρετου γινομένου ανάγεται με ένα απλό επιχείρημα στο γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνεκτικών χώρων. Η τεχνική αυτή δεν εφαρμόζεται όμως στο πρόβλημα της συμπαγείας αυθαίρετου γινομένου συμπαγών χώρων, κι έτσι είναι αναγκαία η χρήση διαφορετικών μεθόδων. Μία τέτοια μέθοδος παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο.

### 7.3 Το Θεώρημα Tychonoff

**Παρατήρηση 7.3.1.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, τέτοια ώστε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  να είναι συμπαγής. Τότε κάθε χώρος  $X_i$  είναι συμπαγής (αφού η αντίστοιχη προβολή  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  είναι συνεχής και επί).

Αντίστροφα, αν ο  $X = \prod_{i \in I} X_i$  δεν είναι συμπαγής, τότε θα δείξουμε ότι κάποιος από τους  $X_i$  δεν είναι συμπαγής. Η μέθοδος απόδειξης είναι η εξής: Ο  $X$  έχει ανοικτά καλύμματα που δεν έχουν πεπερασμένο υποκάλυμμα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Zorn, θα δείξουμε ότι ανάμεσα σε αυτά υπάρχει ένα «μεγιστικό» ανοικτό κάλυμμα, έστω  $\mathcal{U}_0$ . Η μεγιστικότητα του καλύμματος αυτού επάγει μια ιδιότητα (δες το Λήμμα 7.3.2) μέσω της οποίας μπορούμε να βρούμε κάποιον από τους  $X_i$  στον οποίο το  $\mathcal{U}_0$  δημιουργεί ένα ανοικτό κάλυμμα χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

**Λήμμα 7.3.2.** Έστω  $X$  ένας μη συμπαγής τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{U}_0$  του  $X$ , χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, με την ιδιότητα

Αν  $n \in \mathbb{N}$  και  $V_0, V_1, \dots, V_n \subseteq X$  ανοικτά, ώστε  $\bigcap_{k=1}^n V_k \subseteq V_0$  και  $V_0 \in \mathcal{U}_0$ , τότε υπάρχει  $k \in \{1, \dots, n\}$  ώστε  $V_k \in \mathcal{U}_0$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma = \{ \mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ανοικτό κάλυμμα του } X \text{ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα} \}$$

Τότε  $\Sigma \neq \emptyset$ , αφού ο  $X$  δεν είναι συμπαγής. Το  $(\Sigma, \subseteq)$  είναι ένα διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η υπόθεση του Λήμματος του Zorn, δηλαδή ότι κάθε αλυσίδα (δηλ. ολικά διατεταγμένο υποσύνολο) του  $\Sigma$  έχει μέγιστο στοιχείο. Έστω μια μη κενή αλυσίδα  $\mathcal{C} = \{ \mathcal{U}_j : j \in J \} \subseteq \Sigma$ . Θέτουμε

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j = \{ U \subseteq X : \text{υπάρχει } j \in J \text{ με } U \in \mathcal{U}_j \}.$$

Τότε, προφανώς το  $\mathcal{U}$  είναι ένα άνω φράγμα της αλυσίδας, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι  $\mathcal{U} \in \Sigma$ .

Το  $\mathcal{U}$  είναι βεβαίως ανοικτό κάλυμμα του  $X$  κι επιπλέον αν  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$  τότε υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{U}_{j_0} \in \mathcal{C}$  με  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}_{j_0}$  (γιατί η  $\mathcal{C}$  είναι ολικά διατεταγμένη) και αφού  $\mathcal{U}_{j_0} \in \Sigma$ , έχουμε ότι το  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  δεν είναι ένα (πεπερασμένο) κάλυμμα του  $X$ . Άρα το ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{U}$  δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα κι επομένως  $\mathcal{U} \in \Sigma$ .

Έτσι, από το Λήμμα του Zorn προκύπτει ότι η οικογένεια  $\Sigma$  έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω  $\mathcal{U}_0$ .

**Ισχυρισμός.** Αν  $U \subseteq X$  ανοικτό και  $U \notin \mathcal{U}_0$ , τότε υπάρχει  $m \in \mathbb{N}$  και  $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}_0$  ώστε  $X = (U_1 \cup \dots \cup U_m) \cup U$ .

Πράγματι: Το  $\{U\} \cup \mathcal{U}_0$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ , γνήσια μεγαλύτερο από το  $\mathcal{U}_0$ . Από τη μεγιστικότητα του  $\mathcal{U}_0$ , έπεται ότι  $\{U\} \cup \mathcal{U}_0 \notin \Sigma$ , δηλαδή ότι το ανοικτό κάλυμμα  $\{U\} \cup \mathcal{U}_0$  έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς, υπάρχουν  $m \in \mathbb{N}$  και  $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}_0$  ώστε  $X = (U_1 \cup \dots \cup U_m) \cup U$ .

Δείχνουμε τώρα ότι το  $\mathcal{U}_0$  έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Έστω  $n \in \mathbb{N}$  και  $V_0, V_1, \dots, V_n \subseteq X$  ανοικτά σύνολα, με  $\bigcap_{k=1}^n V_k \subseteq V_0$ . Υποθέτουμε ότι  $V_k \notin \mathcal{U}_0$  για  $k = 1, \dots, n$  και θα αποδείξουμε ότι  $V_0 \notin \mathcal{U}_0$ . Αφού  $V_k \notin \mathcal{U}_0$ , από τον ισχυρισμό

έχουμε ότι υπάρχει  $n_k \in \mathbb{N}$  και  $U_1^k, \dots, U_{n_k}^k \in \mathcal{U}_0$ , ώστε  $X = (U_1^k \cup \dots \cup U_{n_k}^k) \cup V_k$ , για  $k = 1, \dots, n$ . Τότε (εξηγήστε γιατί):

$$X = \bigcup_{k=1}^n (U_1^k \cup \dots \cup U_{n_k}^k) \cup \left( \bigcap_{k=1}^n V_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (U_1^k \cup \dots \cup U_{n_k}^k) \cup V_0.$$

Αφού  $U_1^k, \dots, U_{n_k}^k \in \mathcal{U}_0$  για  $k = 1, \dots, n$ , και το ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{U}_0$  δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έπεται ότι  $V_0 \notin \mathcal{U}_0$ .  $\square$

**Λήμμα 7.3.3.** Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων κι έστω ότι ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει  $i_0 \in I$ , ώστε

$$X_{i_0} = \bigcup \{W \subseteq X_{i_0} : W \text{ ανοικτό στο } X_{i_0} \text{ και } \pi_{i_0}^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\},$$

όπου  $\mathcal{U}_0$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$  με την ιδιότητα του Λήμματος 7.3.2.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Τότε, για κάθε  $i \in I$ , υπάρχει ένα  $y_i \in X_i$  με

$$y_i \in X_i \setminus \bigcup \{W \subseteq X_i : W \text{ ανοικτό στο } X_i \text{ και } \pi_i^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\}.$$

Έτσι ορίζεται ένα στοιχείο  $y = (y_i)_{i \in I} \in X$ . Αφού το  $\mathcal{U}_0$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ , υπάρχει  $V \in \mathcal{U}_0$  με  $y \in V$ . Αφού το  $V$  είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $B$  (από την κανονική βάση της καρτεσιανής τοπολογίας), ώστε  $y \in B \subseteq V$ . Το  $B$  είναι της μορφής

$$B = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(W_k), \text{ όπου κάθε } W_k \text{ είναι ανοικτό στο } X_{i_k}, \text{ για } k = 1 \dots n,$$

άρα  $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(W_k) \subseteq V$ . Επιπλέον, τα σύνολα  $V$ ,  $\pi_{i_k}^{-1}(W_k)$  (για  $k = 1, \dots, n$ ), είναι ανοικτά στον  $X$  και  $V \in \mathcal{U}_0$ . Άρα από την επιλογή του καλύμματος  $\mathcal{U}_0$ , έπεται ότι υπάρχει ένα  $k \in \{1, \dots, n\}$  ώστε  $\pi_{i_k}^{-1}(W_k) \in \mathcal{U}_0$ . Αφού  $y \in B$ , έπεται ότι  $y \in \pi_{i_k}^{-1}(W_k)$  άρα  $y_{i_k} \in W_k$ , αντίθετα με την επιλογή του  $y_{i_k}$ .  $\square$

**Θεώρημα 7.3.4** (Tychonoff). Αν  $(X_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων, τότε ο χώρος  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι αν ο χώρος  $X$  δεν είναι συμπαγής, τότε υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε ο χώρος  $X_{i_0}$  να μην είναι συμπαγής.

Αφού ο  $X$  δεν είναι συμπαγής, από το Λήμμα 7.3.3, έχουμε ότι υπάρχει ένα  $i_0 \in I$ , ώστε η οικογένεια

$$\mathcal{W} = \{W \subseteq X_{i_0} : W \text{ ανοικτό στο } X_{i_0} \text{ και } \pi_{i_0}^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\}$$

να είναι ανοικτό κάλυμμα του  $X_{i_0}$ . Αν  $\{W_1, \dots, W_n\}$  είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο αυτού του καλύμματος, τότε  $\pi_{i_0}^{-1}(W_1), \dots, \pi_{i_0}^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_0$  κι επειδή το  $\mathcal{U}_0$  δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έχουμε ότι

$$X \neq \bigcup_{k=1}^n \pi_{i_0}^{-1}(W_k) = \pi_{i_0}^{-1} \left( \bigcup_{k=1}^n W_k \right).$$

Άρα  $\bigcup_{k=1}^n W_k \neq X_{i_0}$ , αφού  $\pi_{i_0}(X) = X_{i_0}$ . Επομένως το ανοικτό κάλυμμα  $\mathcal{W}$  δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, συνεπώς ο χώρος  $X_{i_0}$  δεν είναι συμπαγής.  $\square$





## Κεφάλαιο 8

# Συνθήκες Αριθμησιμότητας

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα που μπορεί να παρουσιάζει η τοπολογία ενός χώρου, είναι να αρχούν «λίγα» ανοικτά σύνολα για την πλήρη περιγραφή της. Για παράδειγμα, ο χώρος μπορεί να διαθέτει μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία ή αριθμήσιμες βάσεις περιοχών για κάθε σημείο του. Θα θέλαμε να εξετάσουμε πότε ένας τοπολογικός χώρος διαθέτει τέτοιες ιδιότητες. Για ακόμη μία φορά, αυτή η διερεύνηση δεν έχει ως μοναδικό σκοπό να περιγράψει τους τοπολογικούς χώρους με αυτές τις ιδιότητες, αλλά και να μας οδηγήσει στις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί ένας τοπολογικός χώρος για να είναι μετριοποιήσιμος. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε είναι ανάλογη με αυτήν του προηγούμενου κεφαλαίου.

### 8.1 Διαχωρίσιμοι Χώροι

Η διαχωρισιμότητα είναι μία έννοια που έχει εμφανιστεί και κατά τη μελέτη των μετρίκων χώρων και αφορά την ύπαρξη ενός πυκνού αριθμήσιμου συνόλου. Αρχικά από τα αποτελέσματα που είχαμε στην περίπτωση των μετρίκων χώρων συνεχίζουν να ισχύουν. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη συμπεριφορά της διαχωρισιμότητας ως προς την τοπολογία γινόμενο, αλλά και την αλληλεπίδραση που έχει με τη φυσιολογικότητα ενός τοπολογικού χώρου (Λήμμα Jones).

**Ορισμός 8.1.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει αριθμήσιμο  $D \subseteq X$  που να είναι πυκνό στο  $X$ .

**Παραδείγματα 8.1.2.** (α) Ο χώρος  $\mathbb{R}_S$  είναι διαχωρίσιμος, αφού το  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_S$  είναι αριθμήσιμο και πυκνό, διότι  $\mathbb{Q} \cap (a, b] \neq \emptyset$  για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

(β) Αν ο  $X$  είναι διακριτός υπεραριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, τότε ο  $X$  δεν είναι διαχωρίσιμος (αφού το μοναδικό πυκνό υποσύνολο του  $X$  είναι το ίδιο το  $X$ ).

**Πρόταση 8.1.3.** Έστω  $X$  ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε:

- (i) Κάθε ανοικτός υπόχωρος του  $X$  είναι διαχωρίσιμος.
- (ii) Κάθε συνεχής εικόνα του  $X$  είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

(i) Έστω  $U \subseteq X$  ανοικτό. Τότε το  $D \cap U$  είναι πυκνό στο  $U$  (γιατί κάθε μη κενό

σχετικά ανοικτό υποσύνολο του  $U$  είναι ανοικτό (στον  $X$ ) άρα τέμνει το  $D$  και αριθμήσιμο. Άρα ο υπόχωρος  $U$  είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Έστω  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος και  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής και επί συνάρτηση. Το  $f(D)$  είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του  $Y$  και, αφού η  $f$  είναι συνεχής και το  $D$  πυκνό στο  $X$ , ισχύει ότι

$$\overline{f(D)} \supseteq f(\overline{D}) = f(X) = Y.$$

Δηλαδή το  $f(D)$  είναι πυκνό στο  $Y$ , άρα ο  $Y$  είναι διαχωρίσιμος.  $\square$

**Παρατηρήσεις 8.1.4.** (α) Αν  $X$  είναι ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος και  $(V_i)_{i \in I}$  είναι οικογένεια ανοικτών, μη κενών, ξένων ανα δύο υποσυνόλων του  $X$ , τότε το  $I$  είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε  $i \in I$  το  $D \cap V_i$  δεν είναι κενό. Επιλέγουμε  $x_i \in D \cap V_i$  και ορίζουμε  $\phi : I \rightarrow D$  με  $\phi(i) = x_i$ . Τότε η  $\phi$  είναι 1-1 (διότι τα  $V_i$  είναι ξένα ανά δύο), άρα  $|I| \leq |D| \leq \omega$ . Επομένως το  $I$  είναι αριθμήσιμο.

(β) Αν  $X = \prod_{i \in I} X_i$  (όπου  $X_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in I$ ) είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος, τότε κάθε χώρος  $X_i$  είναι διαχωρίσιμος (από την Πρόταση 8.1.3, αφού η προβολή  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  είναι συνεχής και επί για κάθε  $i \in I$ ).

(γ) Αν  $X_1, X_2$  είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε ο  $X_1 \times X_2$  είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, έστω  $D_1 \subseteq X_1, D_2 \subseteq X_2$  αριθμήσιμα πυκνά. Τότε το  $D_1 \times D_2$  είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο  $X_1 \times X_2$ , διότι  $\overline{D_1 \times D_2} = \overline{D_1} \times \overline{D_2} = X_1 \times X_2$ . Επομένως ο  $X_1 \times X_2$  είναι διαχωρίσιμος. Γενικότερα, αν  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε ο  $\prod_{i=1}^n X_i$  είναι διαχωρίσιμος.

(δ) Αν  $X_n, n \in \mathbb{N}$  είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε και ο  $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έστω  $D_n \subseteq X_n$  αριθμήσιμο πυκνό. Σταθεροποιούμε ένα  $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n$ . Θέτουμε:

$$D = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n : \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq t_n\} \text{ είναι πεπερασμένο} \right\}$$

Τότε

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n : x_n = t_n, \text{ για κάθε } n > m \right\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left( \prod_{n=1}^m D_n \times \{t_{m+1}\} \times \{t_{m+2}\} \times \dots \right) \end{aligned}$$

είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Μένει να δείξουμε ότι  $D$  είναι πυκνό. Έστω  $U$  ένα βασικό ανοικτό, μη κενό σύνολο στο  $X$ . Το  $U$  είναι της μορφής  $U = \bigcap_{k=1}^m \pi_{n_k}^{-1}(U_k)$ , όπου  $U_k \subseteq X_{n_k}$  ανοικτό, μη κενό, για  $k = 1, \dots, m$ . Επιλέγουμε ένα στοιχείο  $a_{n_k} \in U_k \cap D_{n_k} \neq \emptyset$  για  $k = 1, \dots, m$  και κατασκευάζουμε μια ακολουθία  $x = (x_n) \in X$  ως εξής:

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{για } n \in \{n_1, \dots, n_m\} \\ t_n & \text{για } n \notin \{n_1, \dots, n_m\} \end{cases}$$

Τότε  $x \in U \cap D$ , άρα  $U \cap D \neq \emptyset$ . Επομένως το  $D$  είναι πυκνό στο  $X$ .

Ίσως μέχρι τώρα τα αποτελέσματα για τους διαχωρίσιμους χώρους να ήταν αναμενόμενα. Όμως το ακόλουθο Θεώρημα παρουσιάζει ένα μη τετριμμένο αποτέλεσμα. Επιτρέπει στο σύνολο δεικτών, στο γινόμενο διαχωρίσιμων χώρων, να είναι ουσιαστικά μεγαλύτερο και ο χώρος που προκύπτει να παραμένει διαχωρίσιμος. Στη συνέχεια, η Πρόταση 8.1.6 εξηγεί ότι εν γένει, δεν μπορούμε να ελπίζουμε να ισχύει το ίδιο αν το σύνολο δεικτών είναι ακόμη μεγαλύτερο.

**Θεώρημα 8.1.5.** *Αν  $(X_i)_{i \in I}$  είναι οικογένεια διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων, όπου  $|I| \leq c$ , τότε ο  $X = \prod_{i \in I} X_i$  είναι διαχωρίσιμος.*

*Απόδειξη.* Αφού  $|I| \leq c$ , υπάρχει 1-1 συνάρτηση  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $I \subseteq \mathbb{R}$  (ταυτίζοντας το  $I$  με το  $\phi(I)$ ). Επιλέγουμε ένα  $t = (t_i)_{i \in I} \in X$  και για κάθε  $i \in I$  ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο  $D_i = \{d_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$  του  $X_i$ . Σε κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , κάθε  $n$ -άδα  $(I_1, \dots, I_n)$  από ξένα ανά δύο διαστήματα του  $\mathbb{R}$  με ρητά άκρα και κάθε  $n$ -άδα  $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$  αντιστοιχούμε ένα σημείο  $x(n, I_1, \dots, I_n, m_1, \dots, m_n) = (x_i)_{i \in I} \in X$  ως εξής

$$x_i = \begin{cases} d_{i,m_k}, & \text{αν } i \in I_k \text{ για κάποιο } k \in \{1, \dots, n\} \\ t_i, & \text{αν } i \notin \bigcup_{k=1}^n I_k \end{cases}$$

(το οποίο είναι καλά ορισμένο, διότι το  $i$  ανήκει το πολύ σε ένα  $I_k$ , αφού τα  $I_k$  είναι ξένα ανά δύο). Τότε το σύνολο  $D$  όλων αυτών των σημείων είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του  $X$ . Αρκεί να δείξουμε ότι το  $D$  είναι πυκνό στο  $X$ . Έστω  $U = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$  ένα μη κενό, βασικό ανοικτό υποσύνολο του  $X$ , όπου  $i_1, \dots, i_n \in I$  διαφορετικά ανά δύο. Τότε υπάρχουν  $I_1, \dots, I_n$  ξένα διαστήματα με ρητά άκρα ώστε  $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, \dots, i_n \in I_n$ . Για κάθε  $k \in \{1, \dots, n\}$  έχουμε  $D_{i_k} \cap U_k \neq \emptyset$ , άρα υπάρχει  $m_k \in \mathbb{N}$  ώστε  $d_{i_k, m_k} \in U_k$ . Τότε το  $x = x(n, I_1, \dots, I_n, m_1, \dots, m_n)$  ανήκει στο  $D$  αλλά και στο  $U$ , αφού για κάθε  $k = 1, \dots, n$  ισχύει ότι  $i_k \in I_k$ , άρα (από τον ορισμό του  $x$ )  $x_{i_k} = d_{i_k, m_k} \in U_k$ . Συνεπώς  $D \cap U \neq \emptyset$  και άρα το  $D$  είναι πυκνό.  $\square$

**Πρόταση 8.1.6.** *Έστω  $(X_i)_{i \in I}$  οικογένεια χώρων Hausdorff με τουλάχιστον δύο σημεία, ώστε ο  $X = \prod_{i \in I} X_i$  να είναι διαχωρίσιμος. Τότε  $|I| \leq c$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε  $i \in I$  έστω  $U_i, V_i$  ξένα, μη κενά ανοικτά υποσύνολα του  $X_i$ . Ορίζουμε  $\phi : I \rightarrow \mathcal{P}(D)$  με  $\phi(i) = D \cap \pi_i^{-1}(U_i)$ , για κάθε  $i \in I$ . Τότε η  $\phi$  είναι 1-1. Πράγματι, έστω  $i, j \in I, i \neq j$ . Τότε

$$\begin{aligned} \phi(i) \setminus \phi(j) &= D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \setminus \pi_j^{-1}(U_j) \\ &\supseteq D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) \quad (\text{γιατί } U_j \cap V_j = \emptyset) \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

γιατί το σύνολο  $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j)$  είναι ανοικτό μη κενό και το  $D$  είναι πυκνό στο  $X$ . Άρα  $\phi(i) \neq \phi(j)$ . Αφού η  $\phi$  είναι 1-1, έχουμε ότι  $|I| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$ .  $\square$

**Παράδειγμα 8.1.7.** *Αν  $I$  σύνολο δεικτών, τότε ο χώρος  $\{0, 1\}^I$  (όπου  $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$  διακριτό) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν  $|I| \leq c$  (άμεσα, από Θεώρημα 8.1.5 και Πρόταση 8.1.6).*

**Λήμμα 8.1.8** (Jones). *Έστω  $X$  διαχωρίσιμος φυσιολογικός χώρος. Τότε κάθε κλειστός και διακριτός υπόχωρος  $F$  του  $X$  έχει πληθάρημο μικρότερο του συνεχούς.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι κάθε υποσύνολο του  $F$  είναι κλειστό στο  $F$  (αφού ο  $F$  είναι διακριτός) άρα και κλειστό στο  $X$  (αφού  $F$  κλειστό). Αφού ο  $X$  είναι φυσιολογικός, για κάθε  $A \subseteq F$  υπάρχουν  $U(A)$ ,  $V(A)$  ανοικτά και ξένα υποσύνολα του  $X$ , ώστε  $A \subseteq U(A)$  και  $F \setminus A \subseteq V(A)$  (αφού τα  $A$ ,  $F \setminus A$  είναι ξένα, κλειστά υποσύνολα του  $X$ ). Έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο πυκνό. Ορίζουμε

$$\phi : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(D) \text{ με } \phi(A) = D \cap U(A).$$

Τότε η  $\phi$  είναι 1-1. Πράγματι, έστω  $A, B \in \mathcal{P}(F)$  με  $A \neq B$ . Υποθέτουμε ότι  $A \setminus B \neq \emptyset$  και θα δείξουμε ότι  $\phi(A) \setminus \phi(B) \neq \emptyset$  (ομοίως αν  $B \setminus A \neq \emptyset$  προκύπτει ότι  $\phi(B) \setminus \phi(A) \neq \emptyset$ ). Έχουμε

$$\phi(A) \setminus \phi(B) = D \cap U(A) \setminus U(B) \supseteq D \cap U(A) \cap V(B).$$

Όμως το  $U(A) \cap V(B)$  είναι ανοικτό, και δεν είναι κενό διότι

$$U(A) \cap V(B) \supseteq A \cap (F \setminus B) = A \setminus B \neq \emptyset.$$

Αφού το  $D$  είναι πυκνό, έπεται ότι  $D \cap U(A) \cap V(B) \neq \emptyset$ . Επομένως  $\phi(A) \neq \phi(B)$ . Αφού η  $\phi$  είναι 1-1 και το  $D$  είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι

$$|\mathcal{P}(F)| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c.$$

Άρα  $|F| < c$ , αφού  $|F| < |\mathcal{P}(F)|$ . □

**Παράδειγμα 8.1.9.** Ο χώρος του Sorgenfrey δεν είναι φυσιολογικός. Πράγματι, ο  $\mathbb{R}_S$  είναι διαχωρίσιμος, άρα και ο χώρος του Sorgenfrey. Όπως εξηγήσαμε και στο Παράδειγμα 5.4.10, το αντιδιαγώνιο σύνολο  $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$  είναι κλειστό στον  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  και διακριτό. Όμως  $|A| = c$ , αφού η συνάρτηση  $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, -x) \in A$  είναι 1-1 και επί. Από το Λήμμα του Jones, ο  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  δεν είναι  $T_4$ .

**Παρατήρηση 8.1.10.** Ένας υπόχωρος διαχωρίσιμου τοπολογικού χώρου δεν είναι πάντα διαχωρίσιμος. Για παράδειγμα, ο χώρος του Sorgenfrey είναι διαχωρίσιμος, αλλά ο υπόχωρος  $A$  δεν είναι διαχωρίσιμος, αφού είναι διακριτό υπεραριθμήσιμο σύνολο.

## 8.2 Πρώτοι Αριθμήσιμοι Χώροι

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε τοπολογικούς χώρους που τοπικά μπορούν να περιγραφούν από «λίγα» ανοικτά σύνολα. Με άλλα λόγια, επιθυμούμε κάθε σημείο του χώρου να έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Η ιδιότητα αυτή είναι μεγάλης σημασίας, αφού επανακαθιστά τις ακολουθίες επαρκείς για τη μελέτη της τοπολογίας του χώρου (όπως στη περίπτωση των μετρικών χώρων).

**Ορισμός 8.2.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *πρώτος αριθμήσιμος* (ή λέμε ότι ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα αριθμησιμότητας) αν κάθε σημείο του  $X$  έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.

**Παρατηρήσεις 8.2.2.** (α) Κάθε υπόχωρος  $A$  ενός πρώτου αριθμήσιμου χώρου  $X$  είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν για κάθε  $x \in X$  η  $\mathfrak{B}_x$  είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$  στο  $X$ , τότε η  $\mathfrak{B}'_x = \{B \cap A : B \in \mathfrak{B}_x\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$  στο  $A$ , προφανώς αριθμήσιμη.

(β) Αν δύο τοπολογικοί χώροι  $X, Y$  είναι πρώτοι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος  $X \times Y$  είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, έστω  $(x, y) \in X \times Y$ . αν  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$  στο  $X$  και  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $y$  στο  $Y$ , τότε η  $\{U_n \times V_m : n, m \in \mathbb{N}\}$  είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $(x, y)$  στο  $X \times Y$ . Ανάλογα, μπορεί να δείξει κανείς ότι αν οι τοπολογικοί χώροι  $X_n$ , για  $n \in \mathbb{N}$  είναι πρώτοι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος  $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  είναι πρώτος αριθμήσιμος.

**Παραδείγματα 8.2.3.** (α) Έστω  $X$  διακριτός τοπολογικός χώρος. Τότε ο  $X$  είναι πρώτος αριθμήσιμος, διότι για κάθε  $x \in X$ , η  $\{\{x\}\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$ .

(β) Κάθε μετρικός χώρος είναι πρώτος αριθμήσιμος, διότι για κάθε  $x \in X$  η οικογένεια  $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$  είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$ .

**Πρόταση 8.2.4.** Έστω  $X$  ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ .

- (i) Αν  $A \subseteq X$ , τότε:  $x \in \bar{A} \iff$  υπάρχει ακολουθία  $(x_n)$  στο  $A$  ώστε  $x_n \rightarrow x$ .
- (ii) Αν  $f : X \rightarrow Y$  (όπου  $Y$  τοπολογικός χώρος) είναι μια συνάρτηση, τότε: η  $f$  είναι συνεχής στο  $x \iff$  για κάθε ακολουθία  $(x_n)$  στο  $X$  με  $x_n \rightarrow x$ , ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathfrak{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $B_n \supseteq B_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Παρατηρούμε ότι αν  $(x_n)$  είναι μια ακολουθία στο  $X$  ώστε  $x_n \in B_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $x_n \rightarrow x$ . Πράγματι, αν  $U \in \mathfrak{N}_x$  τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $B_{n_0} \subseteq U$  (αφού η  $\mathfrak{B}_x$  είναι βάση περιοχών του  $x$ ). Άρα για κάθε  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in B_n \subseteq B_{n_0} \subseteq U$  κι επομένως  $x_n \rightarrow x$ .

(i) Έστω ότι  $x \in \bar{A}$ . Έχουμε ότι  $A \cap B_n \neq \emptyset$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία  $(x_n)$  στο  $A$  με  $x_n \in A \cap B_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Αφού  $x_n \in B_n$  για κάθε  $n$  έχουμε ότι  $x_n \rightarrow x$ . Το αντίστροφο είναι άμεσο, αφού κάθε ακολουθία είναι δίκτυο.

(ii) Το ευθύ είναι άμεσο, αφού κάθε ακολουθία είναι δίκτυο. Έστω, αντίστροφα, ότι για κάθε ακολουθία  $(x_n)$  στο  $X$  με  $x_n \rightarrow x$ , ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x$ . Τότε υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_{f(x)}$  ώστε  $f^{-1}(V) \notin \mathfrak{N}_x$ . Άρα  $B_n \not\subseteq f^{-1}(V)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή  $B_n \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset$  για κάθε  $n$ . Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε  $x_n \in B_n \setminus f^{-1}(V)$  για κάθε  $n$ , και τότε η ακολουθία  $(x_n)$  θα συγχλίνει στο  $x$  (αφού  $x_n \in B_n \forall n \in \mathbb{N}$ ) ενώ η  $(f(x_n))$  δεν συγχλίνει στο  $f(x)$  (αφού  $f(x_n) \notin V \forall n \in \mathbb{N}$ ), πράγμα άτοπο.  $\square$

**Παράδειγμα 8.2.5.**<sup>1</sup> Ο χώρος  $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{U\}$  (όπου  $U$  είναι ένα μη τετριμμένο υπεφίλτρο του  $\mathbb{N}$ ) δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, από τον ορισμό των (βασικών) περιοχών του  $U$ , είναι σαφές ότι  $U \in \bar{\mathbb{N}}$ . Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία  $(x_n)$  από στοιχεία του  $\mathbb{N}$ , ώστε  $x_n \rightarrow U$ .

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία. Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $x_n \neq x_m$ , για  $n \neq m$  (γιατί;). Έστω  $A$  και  $B$  το σύνολο των περιττών και άρτιων όρων της ακολουθίας, αντίστοιχα. Δηλαδή

$$A = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ και } B = \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αφού  $x_n \rightarrow U$ , έπεται ότι  $x_{2n} \rightarrow U$  και  $x_{2n-1} \rightarrow U$ . Συνεπώς, για κάθε  $U \in \mathfrak{U}$  έχουμε ότι  $A \cap U \neq \emptyset \neq B \cap U$  (πάλι από τον ορισμό των περιοχών του  $U$ ). Άρα οι

<sup>1</sup>Εκτός ύλης

οικογένειες  $\mathcal{U} \cup \{A\}$ ,  $\mathcal{U} \cup \{B\}$  έχουν την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και, κατά συνέπεια, υπάρχουν υπερφίλτρα στο  $\mathbb{N}$  που να τα περιέχουν (Πρόταση 2.2.7). Αφού το  $\mathcal{U}$  είναι υπερφίλτρο, έπεται άμεσα ότι  $A, B \in \mathcal{U}$ . Άρα  $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{U}$ , πράγμα άτοπο. Έτσι, από την Πρόταση 8.2.4 έχουμε ότι ο  $\Sigma$  δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, επομένως ούτε μετριοποιήσιμος.

**Πόρισμα 8.2.6.** *Αν  $X$  είναι πρώτος αριθμήσιμος, διαχωρίσιμος χώρος Hausdorff, τότε  $|X| \leq c$ . Ιδιαίτερα, κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει πληθάρημο το πολύ ίσο με τον πληθάρημο του συνεχούς.*

*Απόδειξη.* Έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε  $x \in X$  επιλέγουμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $D$  ώστε  $x_n \rightarrow x$ , από την Πρόταση 8.2.4 (i). Ορίζουμε την απεικόνιση  $\phi : X \rightarrow D^{\mathbb{N}}$  με  $\phi(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Τότε η  $\phi$  είναι 1-1. Πράγματι, αν  $x, y \in X$  με  $\phi(x) = \phi(y) = (x_n)$ , τότε  $x_n \rightarrow x$  και  $x_n \rightarrow y$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι Hausdorff, έπεται ότι  $x = y$ . Επομένως,

$$|X| \leq |D^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c.$$

□

**Πρόταση 8.2.7.** *Έστω  $X$  ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος,  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος και  $f : X \rightarrow Y$  μια συνεχής, ανοικτή και επί συνάρτηση. Τότε ο  $Y$  είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος.*

*Απόδειξη.* Έστω  $y \in Y$  και  $x \in X$  τέτοιο ώστε  $f(x) = y$ . Έστω  $\mathfrak{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$  στο  $X$ . Αφού η  $f$  είναι ανοικτή, η οικογένεια συνόλων  $\mathfrak{B}_y = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\}$  αποτελείται από περιοχές του  $y$  και προφανώς είναι αριθμήσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι βάση περιοχών του  $y$ . Έστω  $U \subseteq Y$  μια περιοχή του  $y$ . Αφού η  $f$  είναι συνεχής, υπάρχει βασική περιοχή  $B_n \in \mathfrak{B}_x$  του  $x$ , ώστε  $f(B_n) \subseteq U$ . Όμως,  $f(B_n) \in \mathfrak{B}_y$ . Άρα η  $\mathfrak{B}_y$  είναι (αριθμήσιμη) βάση περιοχών του  $y$  και, κατά συνέπεια, ο  $Y$  είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος. □

**Παράδειγμα 8.2.8.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$  που δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος και έστω  $X_\delta$  το σύνολο  $X$  εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Ο  $X_\delta$  είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος και ο  $X$  είναι συνεχής εικόνα του  $X_\delta$  (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης), αλλά δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος. Κατά συνέπεια, η υπόθεση «ανοικτή» για την  $f$  στην Πρόταση 8.2.7 δεν μπορεί να παραλειφθεί.

### 8.3 Δεύτεροι Αριθμήσιμοι Χώροι

Μια ισχυρότερη συνθήκη αριθμησιμότητας που μπορεί κανείς να μελετήσει, είναι η ύπαρξη αριθμήσιμης βάσης για την τοπολογία του χώρου. Μάλιστα είναι τόσο ισχυρότερη, ώστε δεν ικανοποιείται από όλους τους μετρικούς χώρους. Όμως, το ενδιαφέρον που παρουσιάζει είναι αρκετά μεγάλο, αφού αρκετοί από τους γνωστούς χώρους την ικανοποιούν.

**Ορισμός 8.3.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *δεύτερος αριθμήσιμος* (ή λέμε ότι ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας) αν ο  $X$  έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

**Παρατηρήσεις 8.3.2.** (α) Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος  $X$  είναι και πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν  $\mathcal{B}$  είναι αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του  $X$  και  $x \in X$ , τότε η  $\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  είναι βάση περιοχών του  $x$  και είναι προφανώς αριθμήσιμη.

(β) Κάθε υπόχωρος  $A$  ενός δεύτερου αριθμήσιμου χώρου  $X$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν  $\mathcal{B}$  είναι αριθμήσιμη βάση του  $X$ , τότε η  $\mathcal{B}' = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$  είναι βάση για την τοπολογία του  $A$ , προφανώς αριθμήσιμη.

(γ) Αν δύο τοπολογικοί χώροι  $X, Y$  είναι δεύτεροι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος  $X \times Y$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας  $X$  και  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του  $Y$ , τότε η  $\{U_n \times V_m : n, m \in \mathbb{N}\}$  είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του  $X \times Y$ . Ανάλογα, μπορεί να δείξει κανείς ότι αν οι τοπολογικοί χώροι  $X_n$ , για  $n \in \mathbb{N}$  είναι δεύτεροι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος  $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

**Παραδείγματα 8.3.3.** (α) Αν ο  $X$  είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε ο  $X$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος αν και μόνο αν το σύνολο  $X$  είναι αριθμήσιμο, αφού κάθε βάση του  $X$  περιέχει τα μονοσύνολα. Ιδίαιτερα, κάθε υπεραριθμήσιμος διακριτός τοπολογικός χώρος είναι πρώτος αριθμήσιμος και όχι δεύτερος αριθμήσιμος.

(β) Ο τοπολογικός χώρος  $\mathbb{R}_S$  είναι διαχωρίσιμος, πρώτος αριθμήσιμος (αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}_S$ , η  $\{(a, x] : a \in \mathbb{Q}, a < x\}$  είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του  $x$ ) και δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν ο  $\mathbb{R}_S$  ήταν δεύτερος αριθμήσιμος, τότε θα ήταν και ο  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  δεύτερος αριθμήσιμος, άρα ο υπόχωρός του  $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$  θα ήταν δεύτερος αριθμήσιμος, πράγμα άτοπο, αφού ο  $A$  είναι διακριτός χώρος και υπεραριθμήσιμος.

**Πρόταση 8.3.4.** Έστω  $X$  ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος,  $Y$  ένας τοπολογικός χώρος και  $f : X \rightarrow Y$  μια συνεχής, ανοικτή και επί συνάρτηση. Τότε ο  $Y$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος.

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια αριθμήσιμη βάση του  $X$ . Αφού η  $f$  είναι ανοικτή, η οικογένεια συνόλων  $\mathcal{B}_Y = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\}$  αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του  $Y$  και προφανώς είναι αριθμήσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι βάση της τοπολογίας του  $Y$ . Έστω  $U \subseteq Y$  ανοικτό. Αφού η  $f$  είναι συνεχής, το σύνολο  $f^{-1}(U)$  είναι ανοικτό υποσύνολο του  $X$ , άρα υπάρχει  $I \subseteq \mathbb{N}$ , ώστε  $\bigcup_{i \in I} B_i = f^{-1}(U)$ . Όμως,

$$U \stackrel{f \text{ επί}}{=} f(f^{-1}(U)) = f\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(B_i)$$

και  $\{f(B_i) : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}_Y$ . Άρα η  $\mathcal{B}_Y$  είναι (αριθμήσιμη) βάση του  $Y$  και, κατά συνέπεια, ο  $Y$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος.  $\square$

**Παράδειγμα 8.3.5.**<sup>2</sup> Έστω ο χώρος  $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U}\}$  και  $\Sigma_\delta$  το σύνολο  $\Sigma$  εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Τότε ο  $\Sigma$  είναι συνεχής εικόνα του  $\Sigma_\delta$  (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης) αλλά δεν είναι πρώτος (άρα ούτε και δεύτερος) αριθμήσιμος χώρος. Κατά συνέπεια, η υπόθεση «ανοικτή» για την  $f$  στην Πρόταση 8.3.4 δεν μπορεί να παραλειφθεί.

**Πρόταση 8.3.6.** Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος  $X$  είναι διαχωρίσιμος.

<sup>2</sup>Εκτός ύλης



*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια αριθμήσιμη βάση του  $X$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $B_n \neq \emptyset$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επιλέγουμε στοιχείο  $x_n \in B_n$  για κάθε  $n$  και θέτουμε  $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Τότε το  $D$  είναι αριθμήσιμο και πυκνό. Πράγματι, αν  $U \subseteq X$  ανοικτό, μη κενό σύνολο, τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $B_{n_0} \subseteq U$ , άρα  $x_{n_0} \in U$ . Επομένως  $D \cap U \neq \emptyset$  και συνεπώς, ο χώρος  $X$  είναι διαχωρίσιμος.  $\square$

**Πρόταση 8.3.7.** Ένας μετρικός χώρος  $X$  είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω ότι ο μετρικός χώρος  $X$  είναι διαχωρίσιμος και έστω  $D \subseteq X$  αριθμήσιμο και πυκνό. Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in D \text{ και } \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}.$$

Τότε η  $\mathcal{B}$  είναι αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών συνόλων. Αρκεί να δείξουμε ότι η  $\mathcal{B}$  είναι βάση του  $X$ . Έστω  $U \subseteq X$  ανοικτό και  $x \in U$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B \subseteq U$ . Αφού το  $U$  είναι ανοικτό, υπάρχει  $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$  ώστε  $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Αφού το σύνολο  $D$  είναι πυκνό, υπάρχει  $y \in B(x, \varepsilon/2) \cap D$ . Τότε  $B(y, \varepsilon/2) \in \mathcal{B}$ ,  $x \in B(y, \varepsilon/2)$  και  $B(y, \varepsilon/2) \subseteq U$ , αφού αν  $z \in B(y, \varepsilon/2)$  τότε  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  (όπου  $\rho$  η μετρική του χώρου) άρα  $z \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Επομένως η  $\mathcal{B}$  είναι βάση του  $X$  και συνεπώς, ο χώρος  $X$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

( $\Leftarrow$ ) Είναι άμεσο, από την Πρόταση 8.3.6.  $\square$

**Πόρισμα 8.3.8.** Κάθε υπόχωρος  $A$  ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου  $X$  είναι διαχωρίσιμος.

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 8.3.7, ο  $X$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος, άρα και ο  $A$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος (μετρικός) χώρος (Παρατήρηση 8.3.2(β)). Επομένως ο  $A$  είναι διαχωρίσιμος.  $\square$

**Πρόταση 8.3.9.** Έστω  $X$  ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Αν  $(G_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ , τότε υπάρχει  $J \subseteq I$  αριθμήσιμο, ώστε  $\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in J} G_i$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $G = \bigcup_{i \in I} G_i$  και  $\mathcal{B}$  μια αριθμήσιμη βάση του  $X$ . Θέτουμε

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : \text{υπάρχει } i \in I \text{ με } B \subseteq G_i\}.$$

Τότε  $G = \bigcup \mathcal{B}'$ . Πράγματι, για κάθε  $B \in \mathcal{B}'$  υπάρχει  $i \in I$  ώστε  $B \subseteq G_i$  κι επομένως  $B \subseteq G$ . Άρα  $\bigcup \mathcal{B}' \subseteq G$ . Αντίστροφα, αν  $x \in G$  τότε υπάρχει  $i \in I$  ώστε  $x \in G_i$ . Άρα υπάρχει  $B \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B \subseteq G_i$ . Προφανώς  $B \in \mathcal{B}'$  και συνεπώς  $x \in \bigcup \mathcal{B}'$ . Επομένως  $G \subseteq \bigcup \mathcal{B}'$ . Για κάθε  $B \in \mathcal{B}'$  επιλέγουμε  $i_B \in I$  ώστε  $B \subseteq G_{i_B}$ . Τότε έχουμε ότι

$$\bigcup \mathcal{B}' \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} G_{i_B} \subseteq G$$

κι επομένως  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} G_{i_B}$ . Θέτουμε  $J = \{i_B : B \in \mathcal{B}'\}$ . Τότε το  $J$  είναι αριθμήσιμο (αφού το  $\mathcal{B}'$  είναι αριθμήσιμο) και  $G = \bigcup_{i \in J} G_i$ .  $\square$

**Πρόταση 8.3.10.** Έστω  $X$  δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{B}$  μια βάση για την τοπολογία του. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια της  $\mathcal{B}$  που είναι επίσης βάση για την τοπολογία του  $X$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μια αριθμήσιμη βάση του  $X$ . Κάθε  $B_n$  είναι ένωση στοιχείων της  $\mathcal{B}$  και από την Πρόταση 8.3.9 έπεται ότι  $B_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{n,m}$ , όπου  $C_{n,m} \in \mathcal{B}$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ . Τότε η  $\{C_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$  είναι αριθμήσιμη υποοικογένεια της  $\mathcal{B}$  και αποτελεί βάση για την τοπολογία του  $X$  (γιατί;).  $\square$

## 8.4 Χώροι Lindelöf

Η τελευταία συνθήκη που εισάγουμε είναι μια ασθενέστερη μορφή του δεύτερου αξιωματικού αριθμησιμότητας (η οποία επίσης δεν ικανοποιείται από κάθε μετρικό χώρο).

**Ορισμός 8.4.1.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  καλείται *χώρος Lindelöf* (ή λέμε ότι ο  $X$  ικανοποιεί την ιδιότητα Lindelöf) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $X$  έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα, δηλαδή αν για κάθε οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  ανοικτών υποσυνόλων του  $X$  ώστε  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , υπάρχει αριθμήσιμο  $J \subseteq I$  ώστε  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ .

**Παρατηρήσεις 8.4.2.** (α) Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  είναι Lindelöf αν και μόνο αν κάθε βασικό ανοικτό κάλυμμα του  $X$  έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

(β) Ένας διακριτός χώρος  $X$  είναι χώρος Lindelöf αν και μόνο αν το  $X$  είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(γ) Ένας υπόχωρος  $A$  ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι Lindelöf αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $A$  στο  $X$  έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα (δηλαδή για κάθε οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  ανοικτών υποσυνόλων του  $X$  με  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  υπάρχει  $J \subseteq I$  αριθμήσιμο ώστε  $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ ).

**Πρόταση 8.4.3.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος Lindelöf  $X$ .

- (i) Κάθε κλειστός υπόχωρος του  $X$  είναι χώρος Lindelöf.
- (ii) Αν  $Y$  είναι τοπολογικός χώρος και  $f : X \rightarrow Y$  είναι μια συνεχής και επί συνάρτηση, τότε ο  $Y$  είναι χώρος Lindelöf.

*Απόδειξη.* (i) Έστω  $F$  ένας κλειστός υπόχωρος του  $X$  και  $\{V_i : i \in I\}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $F$  στον  $X$ . Τότε, η οικογένεια  $\{V_i : i \in I\} \cup \{X \setminus F\}$  αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι Lindelöf, υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα, έστω  $\{V_{i_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus F\}$ . Τότε  $F \subseteq \bigcup \{V_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$  κι επομένως ο  $F$  είναι Lindelöf.

(ii) Έστω  $\{U_i : i \in I\}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $Y$ . Η οικογένεια  $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$  αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ , συνεπώς έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα, έστω  $\{f^{-1}(U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ . Τότε, αφού η  $f$  είναι επί, η οικογένεια  $\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$  είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του  $\{U_i : i \in I\}$  στον  $Y$ .  $\square$

**Πρόταση 8.4.4.** Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος είναι χώρος Lindelöf.

*Απόδειξη.* Είναι άμεσο από την Πρόταση 8.3.9.  $\square$

**Παράδειγμα 8.4.5.** Ο  $\mathbb{R}_S$  είναι χώρος Lindelöf.

*Απόδειξη.* Έστω  $\{(a_i, b_i) : i \in I\}$  ένα βασικό ανοικτό κάλυμμα του  $\mathbb{R}_S$ . Θέτουμε  $C = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ . Αφού ο  $\mathbb{R}$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος, από την Πρόταση

8.3.9 έπεται ότι υπάρχει  $J \subseteq I$  αριθμήσιμο ώστε  $C = \bigcup_{i \in J} (a_i, b_i)$ . Παρατηρούμε ότι αν  $x \in \mathbb{R}_S \setminus C$ , τότε υπάρχει  $i_x \in I$  ώστε  $x = b_{i_x}$ . Άρα

$$\mathbb{R}_S = C \cup (\mathbb{R}_S \setminus C) \subseteq \left( \bigcup_{i \in J} (a_i, b_i] \right) \cup \left( \bigcup_{x \in \mathbb{R}_S \setminus C} (a_{i_x}, b_{i_x}] \right).$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο  $\mathbb{R}_S \setminus C$  είναι αριθμήσιμο.

**Ισχυρισμός.** Η οικογένεια  $\mathcal{C} = \{(a_{i_x}, b_{i_x}] : x \in \mathbb{R}_S \setminus C\}$  αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $x, y \in \mathbb{R}_S \setminus C$  με  $x \neq y$  ώστε

$$(a_{i_x}, b_{i_x}] \cap (a_{i_y}, b_{i_y}] = (a_{i_x}, x] \cap (a_{i_y}, y] \neq \emptyset.$$

Αν  $x < y$ , τότε  $x > a_{i_y}$  και έτσι  $x \in (a_{i_y}, y) = (a_{i_y}, b_{i_y}) \subseteq C$ , σε αντίθεση με την υπόθεση ότι  $x \in \mathbb{R}_S \setminus C$ . Όμοια, καταλήγουμε σε άτοπο αν  $y < x$ .

Αφού τα στοιχεία της  $\mathcal{C}$  μη κενά και ανοικτά στον  $\mathbb{R}_S$  και ο  $\mathbb{R}_S$  είναι διαχωρίσιμος, έπεται από την Παρατήρηση 8.1.4(α) ότι το σύνολο  $\mathbb{R}_S \setminus C$  είναι αριθμήσιμο.

**Παρατήρηση 8.4.6.** Το γίνόμενο δύο χώρων Lindelöf δεν είναι αναγκαία χώρος Lindelöf. Πράγματι, ο  $\mathbb{R}_S$  είναι χώρος Lindelöf, αλλά ο χώρος του Sorgenfrey  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  δεν είναι Lindelöf, αφού το αντιδιαγώνιο σύνολο  $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$  και δεν είναι χώρος Lindelöf (διότι είναι διακριτός υπεραριθμήσιμος χώρος).

**Πρόταση 8.4.7.** Ένας μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος αν και μόνο αν είναι χώρος Lindelöf.

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Ισχύει γενικά, από την Πρόταση 8.4.4.

( $\Leftarrow$ ) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε ότι  $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{n})$  και αφού ο  $X$  είναι χώρος Lindelöf, υπάρχει  $A_n \subseteq X$  αριθμήσιμο ώστε  $X = \bigcup_{x \in A_n} B(x, \frac{1}{n})$ . Θέτουμε  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Τότε το  $D$  είναι αριθμήσιμο σύνολο και πυκνό στο  $X$ . Πράγματι, έστω  $y \in X$  και  $\varepsilon > 0$ . Τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Αφού  $X = \bigcup_{x \in A_{n_0}} B(x, \frac{1}{n_0})$ , υπάρχει  $x \in A_{n_0}$  ώστε  $y \in B(x, \frac{1}{n_0})$ . Τότε  $\rho(x, y) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$  και επομένως  $x \in B(y, \varepsilon)$ . Άρα  $B(y, \varepsilon) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$  και έτσι  $B(y, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ . Συνεπώς ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος και, κατά συνέπεια, δεύτερος αριθμήσιμος (Πρόταση 8.3.7).  $\square$

**Θεώρημα 8.4.8.** Κάθε κανονικός χώρος Lindelöf είναι φυσιολογικός.

*Απόδειξη.* Έστω  $A, B$  ξένα κλειστά υποσύνολα ενός κανονικού χωρου Lindelöf  $X$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι κανονικός, για κάθε  $x \in A$  υπάρχει  $U_x$  ανοικτό, ώστε  $x \in U_x$  και  $\bar{U}_x \cap B = \emptyset$ . Ανάλογα, για κάθε  $y \in B$  υπάρχει  $V_y$  ανοικτό, ώστε  $y \in V_y$  και  $\bar{V}_y \cap A = \emptyset$ . Τα  $A$  και  $B$  είναι χώροι Lindelöf, ως κλειστοί υπόχωροι του χώρου Lindelöf  $X$ . Αφού  $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$  και  $B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y$ , υπάρχουν  $x_n \in A$ ,  $y_n \in B$  για  $n \in \mathbb{N}$ , ώστε  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$  και  $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{y_n}$ . Θέτουμε:

$$U_n = U_{x_n} \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n \bar{V}_{y_k} \right) \text{ και } V_n = V_{y_n} \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n \bar{U}_{x_k} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε για τα σύνολα  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ,  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  έχουμε ότι

- Είναι ανοικτά (γιατί);

- $A \subseteq U$ : Αν  $x \in A$  τότε υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $x \in U_{x_n}$  και αφού  $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$  για κάθε  $y \in B$ , έπεται ότι  $x \in U_n \subseteq U$ .
- $B \subseteq V$ : ομοίως.
- $U \cap V = \emptyset$ : Πράγματι, αν  $m, n \in \mathbb{N}$  και  $m \leq n$  τότε  $U_n \subseteq X \setminus \overline{V}_{y_m} \subseteq X \setminus V_{y_m} \subseteq X \setminus V_m$  (αφού  $V_m \subseteq V_{y_m}$ ). Δηλαδή  $U_n \cap V_m = \emptyset$ . Όμοια αν  $n \leq m$ . Επομένως  $U \cap V = \bigcup_{n,m} (U_n \cap V_m) = \emptyset$ .

Επομένως, ο χώρος  $X$  είναι φυσιολογικός.  $\square$



## Κεφάλαιο 9

# Μετριοποιησιμότητα

Έχουμε αποκτήσει πλέον τα απαραίτητα εφόδια για να αποδείξουμε δύο ιδιαίτερα σημαντικά θεωρήματα για την Τοπολογία, το Θεώρημα Urysohn (που χαρακτηρίζει τους μετριοποιησίμους διαχωρίσιμους τοπολογικούς χώρους) και το ισχυρότατο Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing, το οποίο χαρακτηρίζει τους μετριοποιησίμους τοπολογικούς χώρους. Μέσα από τη διερεύνηση που έχουμε πραγματοποιήσει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, ίσως να έχουν αρχίσει να αποσαφηνίζονται οι ιδιότητες που είναι αναγκαίο να έχει ένας τοπολογικός χώρος για να είναι ομοιομορφικός με ένα μετρικό χώρο. Αυτές οι ιδιότητες θα έχουν κεντρικό ρόλο, όχι κατά τον ορισμό μιας μετρικής στον τοπολογικό χώρο (δεν θα είναι αυτός ο στόχος μας, τουλάχιστον όχι άμεσα), αλλά κατά την εμφύτευση του τοπολογικού χώρου σε ένα μετρικό χώρο. Μια τέτοια τοπολογική εμφύτευση έχει φυσικά ως συνέπεια τη μετριοποιησιμότητα του χώρου.

### 9.1 Το Θεώρημα μετριοποιησιμότητας Urysohn

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος μετριοποιησιμότητας Urysohn, πρέπει να αναπτύξουμε μια ισχυρή τεχνική τοπολογικής εμφύτευσης. Το Λήμμα εμφύτευσης (Θεώρημα 9.1.3) αποτελεί αυτή την τεχνική. Το Θεώρημα μετριοποιησιμότητας Urysohn, μπορεί να μην παρουσιάζει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των μετριοποιησίμων χώρων, αλλά διευκρινίζει σε μεγάλο βαθμό την πορεία που θα πρέπει να ακολουθήσουμε για την απόδειξη του λεπτότερου αποτελέσματος των Nagata-Smirnov-Bing.

**Ορισμός 9.1.1.** Έστω  $X, Y_i$  τοπολογικοί χώροι και  $f_i : X \rightarrow Y_i$  συναρτήσεις για κάθε  $i \in I$ . Λέμε ότι η οικογένεια  $(f_i)_{i \in I}$ :

- (i) διαχωρίζει τα σημεία του  $X$ , αν για κάθε  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ , υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$ .
- (ii) διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του  $X$ , αν για κάθε  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(F)}$ .

Η συνάρτηση  $e : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$  με  $e(x) = (f_i(x))_{i \in I}$  λέγεται *συνάρτηση εκτίμησης* ως προς την οικογένεια  $(f_i)_{i \in I}$ .

**Παρατήρηση 9.1.2.** Αν ο  $X$  είναι  $T_1$  τοπολογικός χώρος, τότε κάθε οικογένεια συναρτήσεων που διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του  $X$ , διαχωρίζει τα σημεία του  $X$ .

**Θεώρημα 9.1.3** (Λήμμα εμφύτευσης). Έστω  $X, Y_i$  τοπολογικοί χώροι,  $f_i : X \rightarrow Y_i$  συναρτήσεις για κάθε  $i \in I$  και  $e$  η συνάρτηση εκτίμησης ως προς  $(f_i)_{i \in I}$ . Τότε:

- (i)  $H e$  είναι συνεχής  $\iff$  η  $f_i$  είναι συνεχής για κάθε  $i \in I$ .
- (ii)  $H e$  είναι 1-1  $\iff$  η  $(f_i)_{i \in I}$  διαχωρίζει τα σημεία.
- (iii) Αν η  $(f_i)$  διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του  $X$ , τότε  $\eta e : X \rightarrow e(X)$  είναι ανοικτή.
- (iv) Αν η οικογένεια  $(f_i)$  αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει τα σημεία του  $X$  και διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του  $X$ , τότε  $\eta e : X \rightarrow e(X)$  είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή  $\eta e : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$  είναι τοπολογική εμφύτευση.

Απόδειξη. (i) Αν  $\pi_i : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow Y_i$  είναι η προβολή στην  $i$ -συντεταγμένη, για  $i \in I$ , τότε

$$e \text{ συνεχής} \iff \pi_i \circ e \text{ συνεχής} \forall i \in I \iff f_i \text{ συνεχής} \forall i \in I.$$

(ii) Άμεσο, από τον ορισμό της  $e$ .

(iii) Έστω  $U \subseteq X$  ανοικτό και  $x \in U$ . Αρκεί να δείξουμε ότι το  $e(U)$  είναι περιοχή του  $e(x)$  στον υπόχωρο  $e(X)$ , δηλαδή ότι υπάρχει  $V$  ανοικτό στο  $\prod_{i \in I} Y_i$  ώστε

$$e(x) \in V \cap e(X) \subseteq e(U)$$

(διότι τότε το  $e(U)$  θα είναι περιοχή κάθε σημείου του, στον υπόχωρο  $e(X)$ , άρα θα είναι ανοικτό στον  $e(X)$ ).

Έχουμε ότι  $x \notin U^c$ . Από την υπόθεση, υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε  $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(U^c)}$ , δηλαδή  $f_{i_0}(x) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$ . Θέτουμε  $V = \pi_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)})$ . Τότε το  $V$  είναι ανοικτό στο  $\prod_{i \in I} Y_i$ . Ακόμη, έχουμε ότι

$$\pi_{i_0}(e(x)) = f_{i_0}(x) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$$

και επομένως  $e(x) \in V$ , δηλαδή  $e(x) \in V \cap e(X)$ . Έστω ένα  $y \in V \cap e(X)$ . Αφού  $y \in e(X)$ , έπεται ότι  $y = e(z) = (f_i(z))$  για κάποιο  $z \in X$ . Αφού  $y \in V$ , έπεται ότι  $\pi_{i_0}(y) = f_{i_0}(z) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$ . Άρα  $f_{i_0}(z) \notin \overline{f_{i_0}(U^c)}$  και έτσι,  $z \notin U^c$ , δηλαδή  $z \in U$ . Επομένως  $y = e(z) \in e(U)$ . Συνεπώς,  $V \cap e(X) \subseteq e(U)$ . Συμπεραίνουμε ότι το  $V$  είναι το ζητούμενο ανοικτό σύνολο.

(iv) Έπεται από τα (i), (ii) και (iii). □

**Θεώρημα 9.1.4** (μερικοποιησιμότητας του Urysohn). Για ένα τοπολογικό χώρο  $X$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος μετρικοποιήσιμος.
- (ii) Ο  $X$  είναι  $T_1$ , κανονικός και δεύτερος αριθμήσιμος.
- (iii) Ο  $X$  είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο του  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ .<sup>1</sup>

Απόδειξη. (i)  $\implies$  (ii) Κάθε μετρικός χώρος είναι κανονικός και  $T_1$ . Επίσης κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

<sup>1</sup>Ο χώρος  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  καλείται κύβος του Hilbert.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Αφού ο  $X$  είναι δεύτερος αριθμήσιμος, είναι και χώρος Lindelöf (Πρόταση 8.4.4, από το οποίο έπεται (αφού ο  $X$  είναι επιπλέον κανονικός) ότι ο  $X$  είναι φυσιολογικός χώρος (8.4.8)). Έστω  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μια αριθμήσιμη βάση του  $X$ . Θέτουμε:

$$\mathcal{P} = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \overline{B_m} \subseteq B_n\}.$$

Για κάθε  $(m, n) \in \mathcal{P}$  τα  $\overline{B_m}$  και  $B_n^c$  είναι ξένα, κλειστά και αφού ο  $X$  είναι φυσιολογικός, από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f_{m,n} : X \rightarrow [0, 1]$  ώστε  $f_{m,n}(\overline{B_m}) \subseteq \{0\}$  και  $f_{m,n}(B_n^c) \subseteq \{1\}$ .

*Ισχυρισμός.* Η οικογένεια  $(f_{m,n})_{(m,n) \in \mathcal{P}}$  διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του  $X$  (άρα διαχωρίζει και τα σημεία του  $X$ , αφού ο  $X$  είναι  $T_1$ ).

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in X$  και  $F \subseteq X$  κλειστό με  $x \notin F$ , δηλαδή  $x \in F^c$ , το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $x \in B_{n_0} \subseteq F^c$ . Αφού ο  $X$  είναι κανονικός, υπάρχει  $m_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $x \in \overline{B_{m_0}} \subseteq B_{n_0}$ . Τότε,  $(m_0, n_0) \in \mathcal{P}$ ,  $f_{m_0, n_0}(x) = 0$  και  $f_{m_0, n_0}(F) \subseteq \{1\}$  (αφού  $x \in \overline{B_{m_0}}$  και  $F \subseteq B_{n_0}^c$ ), άρα  $f_{m_0, n_0}(x) \notin f_{m_0, n_0}(F)$ .   
συναλλοκισιπ

Αφού η οικογένεια  $(f_{m,n})_{(m,n) \in \mathcal{P}}$  αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, από το Λήμμα εμφύτευσης, έπεται ότι ο  $X$  είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του  $[0, 1]^{\mathcal{P}}$ , άρα και του  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , αφού το  $\mathcal{P}$  είναι αριθμήσιμο.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Ο  $X$  είναι μετριοποιήσιμος, αφού ο χώρος  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  είναι μετριοποιήσιμος (Θεώρημα 4.3.5). Επίσης, ο  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  είναι διαχωρίσιμος χώρος (Παρατήρηση 8.1.4(δ)). Άρα κάθε υπόχωρός του είναι διαχωρίσιμος (Πόρισμα 8.3.8) και επομένως ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος.  $\square$

## 9.2 Το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing

Το Θεώρημα μετριοποιησιμότητας του Urysohn αποτελεί ένα πρώτο, αλλά και ουσιαστικό βήμα προς τον χαρακτηρισμό των μετριοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Οι συνθήκες που επιβάλλει είναι βέβαια ικανές, αλλά όχι αναγκαίες για τη μετριοποιησιμότητα ενός τοπολογικού χώρου (εν γένει μη διαχωρίσιμου). Το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing παρουσιάζει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των μετριοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Καθώς η κανονικότητα ενός τοπολογικού χώρου είναι (εμφανώς) αναγκαία για τη μετριοποιησιμότητά του, το λεπτό σημείο του Θεωρήματος είναι η περιγραφή μιας ουσιαστικά ασθενέστερης συνθήκης από την ύπαρξη αριθμήσιμης βάσης, η οποία θα συνεχίζει να αναγκάζει ένα χώρο να είναι μετριοποιήσιμος, αλλά παράλληλα θα ικανοποιείται από κάθε μετρικό χώρο.

**Ορισμός 9.2.1.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{F}$  οικογένεια υποσυνόλων του  $X$ . Η  $\mathcal{F}$  καλείται:

- (i) *τοπικά πεπερασμένη*, αν για κάθε  $x \in X$  υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  που τέμνει το πολύ πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της  $\mathcal{F}$ .
- (ii) *διακριτή*, αν για κάθε  $x \in X$  υπάρχει  $V \in \mathfrak{N}_x$  που τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της  $\mathcal{F}$ .
- (iii)  *$\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη* (αντίστοιχα  *$\sigma$ -διακριτή*), αν υπάρχουν οικογένειες  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  τοπικά πεπερασμένες (αντίστοιχα διακριτές) ώστε  $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ .



**Παρατηρήσεις 9.2.2.** (α) Κάθε διακριτή οικογένεια είναι τοπικά πεπερασμένη και αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Άρα κάθε  $\sigma$ -διακριτή οικογένεια είναι  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη.

(β) Κάθε αριθμήσιμη οικογένεια είναι  $\sigma$ -διακριτή.

**Θεώρημα 9.2.3** (μετρικοποιησιμότητας Nagata-Smirnov-Bing). *Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- (i)  $O X$  είναι μετρικοποιήσιμος.
- (ii) (Bing)  $O X$  είναι  $T_1$ , κανονικός και έχει  $\sigma$ -διακριτή βάση για την τοπολογία του.
- (iii) (Nagata-Smirnov)  $O X$  είναι  $T_1$  κανονικός και έχει  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση για την τοπολογία του.

Το Θεώρημα 7.2.3 αποτελεί την ενοποίηση των Θεωρημάτων Nagata-Smirnov ((i)  $\Leftrightarrow$  (iii)) και Bing ((i)  $\Leftrightarrow$  (ii)). Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.2(α), η συνθήκη που επιβάλλει το Θεώρημα Bing για τη μετρικοποιησιμότητα ενός τοπολογικού χώρου είναι ισχυρότερη από την αντίστοιχη του Θεωρήματος Nagata-Smirnov (υπό την έννοια: (ii)  $\Rightarrow$  (iii) στο Θεώρημα 7.2.3). Επίσης, σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.2(β), το Θεώρημα Bing αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Urysohn.

Η απόδειξη του Θεωρήματος θα γίνει σε δύο μέρη ((i)  $\Rightarrow$  (ii), (iii)  $\Rightarrow$  (i)), σε κάθε ένα από τα οποία θα χρειαστούμε μία σειρά Λημμάτων. Το πρώτο από αυτά είναι μια Παρατήρηση, συνολοθεωρητικής φύσης, του Stone, για την απόδειξη της οποίας ουσιώδης είναι ο ρόλος του Αξιώματος της Επιλογής, με τη μορφή του Θεωρήματος της Καλής Διάταξης.

**Ορισμός 9.2.4.** Έστω ένας τοπολογικός χώρος  $X$  και  $\mathcal{A}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Ένα κάλυμμα  $\mathcal{B}$  καλείται *εκλέπτυνση* του  $\mathcal{A}$  αν για κάθε  $U \in \mathcal{B}$  υπάρχει  $V \in \mathcal{A}$  ώστε  $U \subseteq V$ .

**Λήμμα 9.2.5** (Stone). *Έστω μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  και  $\mathcal{A} = \{U_i : i \in I\}$  ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Τότε υπάρχει  $\sigma$ -διακριτή οικογένεια ανοικτών συνόλων  $\mathcal{E}$ , η οποία αποτελεί εκλέπτυνση του  $\mathcal{A}$ .*

*Απόδειξη.* Με χρήση του Θεωρήματος Καλής Διάταξης, επιλέγουμε μια καλή διάταξη  $\prec$  των στοιχείων του  $\mathcal{A}$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $U \in \mathcal{A}$ , ορίζουμε

$$S_n(U) = \{x \in X : B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U\}.$$

Έστω τώρα

$$T_n(U) = S_n(U) \setminus \bigcup_{V \prec U} V.$$

(1) Έστω  $V, W \in \mathcal{A}$  με  $V \neq W$ . Αν  $x \in T_n(V)$  και  $y \in T_n(W)$ , τότε  $\rho(x, y) \geq \frac{1}{n}$ .

*Πράγματι,* δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $V \prec W$ . Αφού  $x \in T_n(V)$ , έχουμε ότι  $x \in S_n(V)$ , άρα  $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$ . Επίσης, αφού  $y \in T_n(W)$  και  $V \prec W$ , έπεται ότι  $y \notin V$ , άρα και  $y \notin B(x, \frac{1}{n})$ . Επομένως  $\rho(x, y) \geq \frac{1}{n}$ .

Ορίζουμε ακόμη, για  $U \in \mathcal{A}$  και  $n \in \mathbb{N}$ :

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B(x, \frac{1}{3n})$$

(2) Έστω  $V, W \in \mathcal{A}$  με  $V \neq W$ . Αν  $x \in E_n(V)$  και  $y \in E_n(W)$ , τότε  $\rho(x, y) > \frac{1}{3n}$ .

Πράγματι, από τον ορισμό των  $E_n(V)$  και  $E_n(W)$ , υπάρχουν  $v \in T_n(V), w \in T_n(W)$ , ώστε  $\rho(x, v) < \frac{1}{3n}$  και  $\rho(y, w) < \frac{1}{3n}$ . Από το (1) γνωρίζουμε ότι  $\rho(v, w) \geq \frac{1}{n}$ . Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \rho(v, w) &\leq \rho(v, x) + \rho(x, y) + \rho(y, w) \iff \\ \rho(x, y) &\geq \rho(v, w) - \rho(v, x) - \rho(y, w) \\ &> \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} \\ &= \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

(3) Για κάθε  $U \in \mathcal{A}$ ,  $E_n(U) \subseteq U$ .

Πράγματι, αν  $y \in E_n(U)$ , τότε  $y \in B(x, \frac{1}{3n})$  για κάποιο  $x \in T_n(U)$ . Από τον ορισμό του  $T_n(U)$  έπεται ότι  $x \in S_n(U)$  και κατά συνέπεια  $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ . Αφού τώρα  $\rho(x, y) < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$ , έχουμε ότι  $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ . Άρα  $E_n(U) \subseteq U$ .

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την κατάλληλη οικογένεια συνόλων. Θέτουμε

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) : U \in \mathcal{A}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n.$$

(4) Η  $\mathcal{E}$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ .

Πράγματι, κάθε στοιχείο της  $\mathcal{E}$  είναι της μορφής  $E_n(U)$ , για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  και  $U \in \mathcal{A}$ , το οποίο είναι ανοικτό σύνολο (εμφανές από τον ορισμό του). Άρα η  $\mathcal{E}$  αποτελείται από ανοικτά σύνολα. Έστω τώρα ένα  $x \in X$  και  $U$  να είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $\mathcal{A}$  (σύμφωνα με την καλή διάταξη που επιλέξαμε) ώστε  $x \in U$  (τέτοιο στοιχείο υπάρχει, αφού το  $\mathcal{A}$  είναι κάλυμμα του  $X$ ). Αφού το  $U$  είναι ανοικτό, υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ . Αυτό σημαίνει ότι  $x \in S_n(U)$  και ότι  $x \notin V$  για κάθε  $V \prec U$ , σύμφωνα με την επιλογή του  $U$ . Επομένως,  $x \in T_n(U)$ . Έτσι, έχουμε ότι

$$x \in T_n(U) \subseteq E_n(U) \in \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E},$$

δηλαδή η  $\mathcal{E}$  καλύπτει το  $X$ .

(5) Η  $\mathcal{E}$  αποτελεί εκλέπτυνση του  $\mathcal{A}$ .

Πράγματι, κάθε στοιχείο της  $\mathcal{E}$  είναι της μορφής  $E_n(U)$ , για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  και  $U \in \mathcal{A}$ , και από το (3) έχουμε ότι  $E_n(U) \subseteq U$ .

(6) Κάθε  $\mathcal{E}_n$  είναι διακριτή οικογένεια, κατά συνέπεια η  $\mathcal{E}$  είναι  $\sigma$ -διακριτή οικογένεια.

Πράγματι, έστω  $n \in \mathbb{N}$  και ένα  $x \in X$ . Έστω ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο  $U \in \mathcal{A}$ , τέτοιο ώστε  $B(x, \frac{1}{6n}) \cap E_n(U) \neq \emptyset$ . Τότε υπάρχει ένα  $y \in E_n(U)$  ώστε  $\rho(x, y) < \frac{1}{6n}$ . Έστω τώρα ένα  $V \in \mathcal{A}$ , με  $V \neq U$ , και ένα  $z \in E_n(V)$ . Από το (2) έχουμε ότι  $\rho(y, z) > \frac{1}{3n}$ , συνεπώς

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &\geq \rho(y, z) - \rho(x, y) \\ &> \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n} = \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι  $z \notin B(x, \frac{1}{6n})$  και επομένως η ανοικτή περιοχή  $B(x, \frac{1}{6n})$  μπορεί να τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της  $\mathcal{E}_n$ . Άρα η  $\mathcal{E}_n$  είναι διακριτή οικογένεια.

Από τα (4),(5),(6) έπεται ότι η  $\mathcal{E}$  είναι η ζητούμενη οικογένεια συνόλων.  $\square$

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στον αρχικό μας σκοπό, να αποδείξουμε ότι κάθε μετρικός χώρος  $X$  έχει  $\sigma$ -διακριτή βάση. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  η οικογένεια συνόλων  $\mathcal{A}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$  είναι ανοικτό κάλυμμα του  $X$ , άρα από το Λήμμα του Stone έχει  $\sigma$ -διακριτή εκλέπτυνση από ανοικτά σύνολα

$$\mathcal{E}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_m^n.$$

**Παρατήρηση 9.2.6.** Αν  $A \in \mathcal{E}^n$  και  $a, b \in A$ , τότε  $\rho(a, b) < \frac{2}{n}$ . Πράγματι, αφού η  $\mathcal{E}^n$  είναι εκλέπτυνση του καλύμματος  $\mathcal{A}_n$ ,  $A \subseteq B(x, \frac{1}{n})$  για κάποιο  $x \in X$ . Επομένως  $a, b \in B(x, \frac{1}{n})$ , άρα

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Θέτουμε:

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^n = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_m^n.$$

Η  $\mathcal{E}$  είναι μια  $\sigma$ -διακριτή οικογένεια αφού είναι αριθμήσιμη ένωση των διακριτών οικογενειών  $\mathcal{E}_m^n$ . Μένει να δείξουμε ότι η  $\mathcal{E}$  είναι βάση του  $X$ . Έστω ένα ανοικτό σύνολο  $U \subseteq X$ . Αρχεί να δείξουμε ότι για κάθε  $x \in U$  υπάρχει  $E \in \mathcal{E}$  ώστε  $x \in E \subseteq U$ . Γνωρίζουμε ότι υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε  $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Επιλέγουμε ένα  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $\frac{2}{n} < \varepsilon$ . Αφού το  $\mathcal{E}^n$  είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $X$ , γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα  $E \in \mathcal{E}^n$  ώστε  $x \in E$ . Από την Παρατήρηση 7.2.6, αν  $y \in E$ , τότε  $\rho(x, y) < \frac{2}{n} < \varepsilon$ . Άρα,  $y \in B(x, \varepsilon)$  κι επομένως,  $x \in E \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Έτσι έχουμε ότι η  $\mathcal{E}$  είναι βάση του  $X$ . Υπενθυμίζοντας επιπλέον ότι κάθε μετρικός χώρος είναι κανονικός και  $T_1$ , έχουμε δείξει, λοιπόν, το ακόλουθο.

**Θεώρημα 9.2.7.** Έστω ένας μετρικός χώρος  $(X, \rho)$ . Ο  $X$  έχει  $\sigma$ -διακριτή βάση (επομένως ισχύει η κατεύθυνση (i)  $\Rightarrow$  (ii) του Θεωρήματος 7.2.3).

Μένει να δείξουμε ότι ένας  $T_1$  κανονικός χώρος  $X$  με  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση είναι μετριοποιήσιμος. Κεντρικός μας στόχος είναι να εμφυτεύσουμε τοπολογικά το  $X$  ένα μετρικό χώρο. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα Λήμματα:

**Λήμμα 9.2.8.** Έστω  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  μια  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου  $X$  και  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Τότε ισχύει ότι  $\overline{A} = \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i$ .

*Απόδειξη.* Για κάθε  $i \in I$  ισχύει ότι  $A_i \subseteq A \subseteq \overline{A}$ , άρα  $\overline{A}_i \subseteq \overline{A}$ . Επομένως

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i \subseteq \overline{A}^2$$

Αντίστροφα, έστω  $x \in \overline{A}$ . Αφού η  $\mathcal{A}$  είναι  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη, υπάρχει ανοικτή περιοχή  $U \in \mathfrak{N}_x$  η οποία να τέμνει πεπερασμένα στο πλήθος στοιχεία της  $\overline{A}$ , έστω τα  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Έστω, προς άτοπο, ότι το  $x$  δεν περιέχεται σε κανένα από τα  $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_k$ , δηλαδή  $x \notin \bigcup_{i=1}^k \overline{A}_i$ , το οποίο είναι κλειστό σύνολο. Τότε το σύνολο  $U \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{A}_i$  είναι ανοικτή περιοχή του  $x$ , ξένη προς κάθε στοιχείο της οικογένειας  $\overline{A}$ .

<sup>2</sup> Αυτό είναι γενικά αληθές για μια τυχούσα οικογένεια συνόλων σε ένα τοπολογικό χώρο.

Αυτό όμως έπεται ότι  $x \notin \bar{A}$ , πράγμα άτοπο. Συνεπώς το  $x$  ανήκει στο  $\bar{A}_i$  για κάποιο  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Επομένως,

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i.$$

Από τα παραπάνω, έπεται η επιθυμητή ισότητα.  $\square$

**Λήμμα 9.2.9.** *Αν ένας κανονικός χώρος  $X$  έχει μια  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση  $\mathcal{B}$ , τότε ο  $X$  είναι φυσιολογικός.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι η πληροφορία για τη μορφή των ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου εμπεριέχεται, σε ικανοποιητικό βαθμό, στη δομή μιας «λεπτής» βάσης του χώρου. Για το λόγο αυτό, αναμένουμε ότι η ύπαρξη μιας  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένης βάσης θα μας επιτρέψει να περιγράψουμε με ένα λειτουργικό τρόπο τα ανοικτά σύνολα του  $X$ . Αυτό διατυπώνεται τυπικά με τον ακόλουθο τρόπο:

*Ισχυρισμός.* Έστω ένα  $G \subseteq X$  ανοικτό. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , τέτοια ώστε

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n.$$

Πράγματι, αφού η  $\mathcal{B}$  είναι  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη, μπορούμε να γράψουμε  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ , όπου κάθε  $\mathcal{B}_n$  είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , έστω

$$\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{B}_n : \bar{B} \subseteq G\}$$

Τότε  $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ , άρα κάθε  $\mathcal{C}_n$  οφείλει να είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια. Ορίζουμε

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B.$$

Κάθε  $U_n$  είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών) και από το Λήμμα 7.2.8,  $\bar{U}_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \bar{B}$ , αφού η  $\mathcal{C}_n$  είναι τοπικά πεπερασμένη. Επίσης, αφού  $\bar{B} \subseteq G$  για κάθε  $B \in \mathcal{C}_n$ , έχουμε ότι  $\bar{U}_n \subseteq G$ . Επομένως

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n \subseteq G.$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι  $G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Έστω  $x \in G$ . Τότε το σύνολο  $G^c$  είναι κλειστό και  $x \notin G^c$ . Από την κανονικότητα του  $Q$ , υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα  $U$  και  $V$ , ώστε  $x \in U$  και  $G^c \subseteq V$ , δηλαδή

$$x \in U \subseteq V^c \subseteq G.$$

Για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ , υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $B \in \mathcal{B}_n$  ώστε  $x \in B \subseteq U \subseteq V^c$ . Αφού το  $V^c$  είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι  $\bar{B} \subseteq V^c \subseteq G$ , επομένως  $B \in \mathcal{C}_n$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$x \in B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B = U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Άρα  $G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .

Δείχνουμε τώρα ότι ο  $X$  είναι φυσιολογικός χώρος. Έστω  $A, B \subseteq X$  ξένα και κλειστά σύνολα. Τότε το σύνολο  $B^c$  είναι ανοικτό και, σύμφωνα με τον ισχυρισμό, υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ώστε  $B^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n$ . Προφανώς, κάθε  $\bar{U}_n$  είναι ξένο προς το  $B$  και  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Εντελώς ανάλογα,

υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που καλύπτουν το  $B$  με κάθε  $\bar{V}_n$  να είναι ξένο προς το  $A$ .

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάσαμε τα ανοικτά σύνολα  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  τα οποία περιέχουν τα  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Βέβαια, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι αυτά τα σύνολα είναι ξένα, γι' αυτό και κάνουμε μια πιο λεπτή κατασκευή. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ορίζουμε:

$$\tilde{U}_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i \quad \text{και} \quad \tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i.$$

Τα σύνολα  $\tilde{U}_n, \tilde{V}_n$  είναι προφανώς ανοικτά. Ορίζουμε τώρα τα σύνολα:

$$\tilde{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n \quad \text{και} \quad \tilde{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{V}_n$$

Τα  $\tilde{U}$  και  $\tilde{V}$  είναι προφανώς ανοικτά, ως ενώσεις ανοικτών συνόλων. Ισχυριζόμαστε ότι είναι ξένα και περιέχουν τα  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

- Έστω ένα  $x \in A$ . Τότε  $x \in U_n$  για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ , αφού  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Επιπλέον  $x \notin \bar{V}_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς

$$x \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i = \tilde{U}_n \subseteq \tilde{U}.$$

Άρα  $A \subseteq \tilde{U}$ . Ομοίως, δείχνει κανείς ότι  $B \subseteq \tilde{V}$ .

- Έστω, προς άτοπο, ότι  $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ . Έστω, λοιπόν, ένα  $x \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$ . Υπάρχουν  $m, n \in \mathbb{N}$  ώστε

$$x \in \tilde{U}_m = U_m \setminus \bigcup_{i=1}^m \bar{V}_i \quad \text{και} \quad x \in \tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i.$$

Έστω ότι  $m \leq n$ . Τότε  $x \in U_m$ , αλλά  $x \notin \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m, \dots, \bar{U}_n$ , το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως ερχόμαστε σε αντίφαση αν υποθέσουμε ότι  $n \leq m$ . Επομένως, τα  $\tilde{U}$  και  $\tilde{V}$  είναι ξένα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα ανοικτά σύνολα  $\tilde{U}$  και  $\tilde{V}$  είναι ξένα και περιέχουν τα  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Άρα ο χώρος  $X$  είναι φυσιολογικός.  $\square$

**Παρατήρηση 9.2.10.** Ο ισχυρισμός στο Λήμμα 7.2.9 έχει ως άμεση συνέπεια ότι κάθε ανοικτό σύνολο σε έναν κανονικό χώρο με  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση είναι  $F_\sigma$  σύνολο<sup>3</sup> και, ισοδύναμα, κάθε κλειστό σύνολο είναι  $G_\delta$ .

**Θεώρημα 9.2.11.** Έστω ένας  $T_1$  κανονικός τοπολογικός χώρος. Αν ο  $X$  έχει μια  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση  $\mathcal{B}$ , τότε ο  $X$  είναι μετρικοποιήσιμος (επομένως ισχύει η κατεύθυνση (iii) $\Rightarrow$ (i) του Θεωρήματος 7.2.3).

<sup>3</sup>Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου  $X$  καλείται  $F_\sigma$  σύνολο αν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο είναι  $F_\sigma$  αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι  $G_\delta$ .

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι ο χώρος  $X$  εμφυτεύεται τοπολογικά στο χώρο  $[0, 1]^{\mathcal{B}}$ , εφοδιασμένο με τη μετρική  $\rho(p, q) = \sup_{B \in \mathcal{B}} |p(B) - q(B)|$ , για  $p, q \in [0, 1]^{\mathcal{B}}$ . Προτού συνεχίσουμε, ελέγχουμε ότι η  $\rho$  είναι μετρική.

(i) Για κάθε  $B \in \mathcal{B}$  έχουμε  $|p(B) - q(B)| \geq 0$ . Επομένως  $\rho(p, q) \geq 0$ . Επίσης

$$\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow |p(B) - q(B)| = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow p(B) = q(B) \quad \forall B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow p = q.$$

(ii)  $\rho(p, q) = \sup_{B \in \mathcal{B}} |p(B) - q(B)| = \sup_{B \in \mathcal{B}} |q(B) - p(B)| = \rho(q, p)$ .

(iii) Έχουμε<sup>4</sup> διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \rho(p, r) &= \sup_{B \in \mathcal{B}} |p(B) - r(B)| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{B}} \{|p(B) - q(B)| + |q(B) - r(B)|\} \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{B}} |p(B) - q(B)| + \sup_{B \in \mathcal{B}} |q(B) - r(B)| \\ &= \rho(p, q) + \rho(q, r) \end{aligned}$$

Προχωρούμε με την κατασκευή της τοπολογικής εμφύτευσης. Έστω  $F \subseteq X$  κλειστό. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$  ώστε  $F = f^{-1}(\{0\})$ .

*Πράγματι*, από την Παρατήρηση 7.2.10, το  $F$  είναι κλειστό  $G_\delta$  σύνολο. Επίσης, από το Λήμμα 7.2.9, ο  $X$  είναι φυσιολογικός χώρος και κατά συνέπεια, από την Πρόταση 5.4.17, υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow [0, 1]$   $F = f^{-1}(\{0\})$ .

Σημειώνουμε ότι, περνώντας στο συμπλήρωμα του  $F$ , έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μιας γνήσια θετικής συνάρτησης από κάθε ανοικτό υποσύνολο του  $X$  στο  $[0, 1]$ . Επίσης, με μια κατάλληλη σύνθεση (ποια;), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η  $f$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (με  $a < b$ ). Αφού η  $\mathcal{B}$  είναι  $\sigma$ -τοπικά πεπερασμένη βάση, μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ , όπου κάθε  $\mathcal{B}_n$  είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια. Μάλιστα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$  για  $n \neq m$  (γιατί;). Επομένως για κάθε βασικό ανοικτό σύνολο  $B \in \mathcal{B}$  υπάρχει μοναδικό  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $B \in \mathcal{B}_n$  και από τα παραπάνω, υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f_B : X \rightarrow [0, \frac{1}{n}]$  ώστε  $f_B^{-1}(\{0\}) = B^c$ . Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\phi : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{B}} \quad \text{με} \quad \phi(x) = (f_B(x))_{B \in \mathcal{B}}.$$

• Η  $\phi$  είναι 1-1: Έστω  $x, y \in X$  με  $x \neq y$ . Αφού ο χώρος  $X$  είναι κανονικός και  $T_1$ , υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα  $U, V \subseteq X$  με  $x \in U$  και  $y \in V$ . Άρα, υπάρχει ένα βασικό ανοικτό σύνολο  $B \in \mathcal{B}$  ώστε  $x \in B \subseteq U \subseteq V^c$ . Κατά συνέπεια  $f_B(x) > 0$  και  $f_B(y) = 0$ , άρα  $\phi(x) \neq \phi(y)$ .

• Η  $\phi$  είναι συνεχής: Έστω  $x \in X$ . Για να δείξουμε τη συνέχεια της  $\phi$ , πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτή περιοχή του  $\phi(x)$  υπάρχει ανοικτή περιοχή  $U$  του  $x$  με  $\phi(U) \subseteq V$ . Συγκεκριμένα, για κάθε  $\varepsilon > 0$  ζητούμε ανοικτή περιοχή  $U$  του  $x$  με  $\phi(U) \subseteq B(\phi(x), \varepsilon)$ . Έστω ένα  $\varepsilon > 0$ . Για  $n \in \mathbb{N}$ , αφού η  $\mathcal{B}_n$  είναι τοπικά πεπερασμένη, υπάρχει ανοικτή περιοχή  $U_n$  του  $x$ , που να τέμνει πεπερασμένα στο πλήθος σύνολα της  $\mathcal{B}_n$ . Αν ένα  $B \in \mathcal{B}_n$  δεν τέμνει το  $U_n$ , τότε σαφώς δεν περιέχει το  $x$  και τότε  $f_B(x) = 0$ . Επιπλέον  $f_B(y) = 0$  για κάθε  $y \in U_n$ . Επομένως  $|f_B(x) - f_B(y)| = 0$ .

<sup>4</sup>Υπενθυμίζουμε ότι αν  $U, V \subseteq \mathbb{R}$ , τότε  $\sup U + \sup V = \sup(U + V)$  (όπου συμβολίζουμε  $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ ) και αν  $K \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$ , τότε  $\sup K \leq \sup L$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι  $B \cap U_n \neq \emptyset$ . Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $f_B : X \rightarrow [0, \frac{1}{n}]$  είναι συνεχής, συνεπώς για το ανοικτό σύνολο

$$(f_B(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f_B(x) + \frac{\varepsilon}{2}) \cap [0, \frac{1}{n}] \subseteq [0, \frac{1}{n}]$$

θα υπάρχει μια ανοικτή περιοχή  $W_n(B)$  του  $x$ , με

$$f_B(W_n(B)) \subseteq (f_B(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f_B(x) + \frac{\varepsilon}{2}) \cap [0, \frac{1}{n}].$$

Όμως υπάρχουν μόλις πεπερασμένα στο πλήθος τέτοια  $B$ , έστω  $B_1, \dots, B_k$ . Θέτουμε  $V_n = U_n \cap \bigcup_{i=1}^k W_n(B_i)$ , το οποίο είναι ανοικτή περιοχή του  $x$ . Τότε, για κάθε  $y \in V_n \subseteq W_n(B_i)$  έχουμε  $|f_{B_i}(x) - f_{B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι για κάθε  $y \in V_n$  έχουμε  $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , για κάθε  $B \in \mathcal{B}_n$ .

Τέλος, επιλέγουμε ένα  $N \in \mathbb{N}$  ώστε  $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Θέτουμε  $V = \bigcup_{i=1}^N V_i$ , το οποίο είναι ανοικτή περιοχή του  $x$ . Έστω  $y \in V$ . Τότε  $y \in V_1, \dots, V_N$ , άρα για κάθε  $n \leq N$  και  $B \in \mathcal{B}_n$  έχουμε  $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Για  $n > N$  και  $B \in \mathcal{B}_n$  γνωρίζουμε ότι  $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$  (αφού  $0 \leq f_B(z) \leq \frac{1}{n}$  για κάθε  $z \in X$ ). Επομένως για κάθε  $y \in V$ ,  $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ . Έτσι, δείξαμε ότι για κάθε  $y \in V$

$$\rho(\phi(x), \phi(y)) = \sup_{B \in \mathcal{B}} |f_B(x) - f_B(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

δηλαδή  $\phi(y) \in B(\phi(x), \varepsilon)$ . Άρα η  $\phi$  είναι συνεχής.

• Η  $\phi^{-1} : \phi(X) \rightarrow X$  είναι συνεχής: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $U \subseteq X$  ανοικτό και  $z \in \phi(U)$  υπάρχει σύνολο  $W$  ανοικτό στο  $\phi(X)$ , τέτοιο ώστε  $z \in W \subseteq \phi(U)$ . Αφού η  $\phi$  είναι 1-1, υπάρχει μοναδικό  $x \in U$  ώστε  $\phi(x) = z$ . Αφού το  $U$  είναι ανοικτό, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο  $B_0 \in \mathcal{B}$ , ώστε  $x \in B_0 \subseteq U$ . Επομένως  $f_{B_0}(x) > 0$  και  $f|_{B_0} = 0$ .

Έστω  $V = \{h : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] : h|_{B_0} > 0\} \subseteq [0, 1]^{\mathcal{B}}$ , για το παραπάνω  $B_0$ . Ισχυριζόμαστε ότι το  $V$  είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω  $h \in V$ . Θεωρώντας την ανοικτή σφαίρα  $B(h, h(B_0))$ , για κάθε  $g \in B(h, h(B_0))$

$$\begin{aligned} \rho(h, g) < h(B_0) &\implies |h(B) - g(B)| < h(B_0) \quad \forall B \in \mathcal{B} \\ &\implies |h(B_0) - g(B_0)| < h(B_0) \\ &\implies g(B_0) > 0. \end{aligned}$$

Επομένως  $g \in V$  και  $B(h, h(B_0)) \subseteq V$ . Άρα το  $V$  είναι ανοικτό.

Τώρα θεωρούμε το ανοικτό σύνολο στο  $\phi(X)$ ,  $W = V \cap \phi(X)$ . Από την επιλογή του  $B_0$ ,  $f_{B_0}(x) > 0$ . Άρα  $\phi(x) \in V$  κι επομένως  $g(x) \in W$ . Μένει να δείξουμε ότι  $W \subseteq \phi(U)$ . Έστω μια συνάρτηση  $p \in W$ . Τότε  $p = \phi(y)$  για μοναδικό  $y \in X$ . Αφού  $p \in W = V \cap \phi(X) \subseteq V$ ,  $f_{B_0}(y) = p(B_0) > 0$ . Αυτό όμως έπεται ότι  $y \in B_0 \subseteq U$ , δηλαδή  $p = \phi(y) \in \phi(U)$ . Συνεπώς  $W \subseteq \phi(U)$ , άρα το  $\phi(U)$  είναι ανοικτό. Δείξαμε, λοιπόν, ότι αν ένα  $U \subseteq X$  είναι ανοικτό, το  $\phi(U)$  είναι ανοικτό στο  $\phi(X)$ . Δηλαδή η  $\phi$  είναι ανοικτή στην εικόνα της και κατά συνέπεια, η  $\phi^{-1}$  είναι συνεχής.

Από τα παραπάνω έπεται ότι ο χώρος  $X$  είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο ενός μετρικού χώρου, άρα είναι μετριοποιήσιμος.  $\square$

Έχοντας δείξει τα Θεωρήματα 7.2.7 και 7.2.11 (συνυπολογίζοντας την Παρατήρηση 7.2.2(α)) έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος Nagata-Smirnov-Bing.