Εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία των Πολλαπλοτήτων

Παραδόσεις 2023-24

Καθ: Παπατριανταφύλλου Μ.

ΕΚΠΑ, Τμ. Μαθηματικών

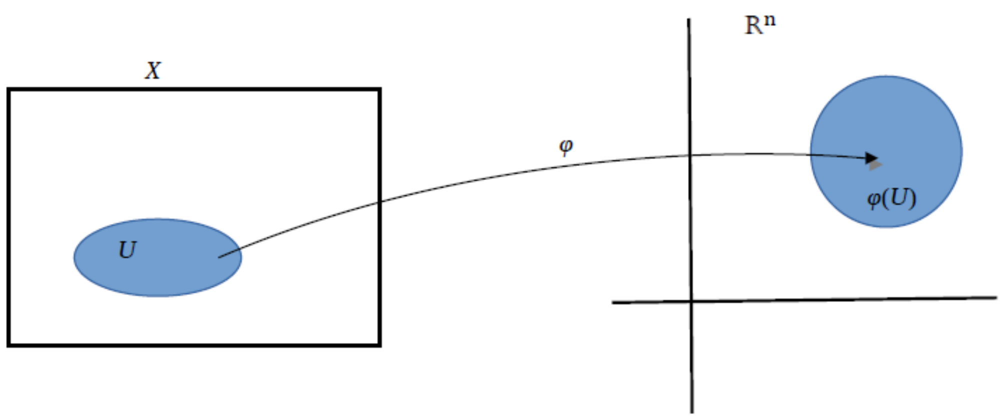
ΜΑΘΗΜΑ 01

1 Χάρτες

1.1 Ορισμός. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Ένας (n–**διάστατος**) **χάρτης επί του** M είναι ένα ζεύγος (U, ϕ), όπου $U \subseteq M$ και

$$\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι μια 1–1 απεικόνιση (επί του $\phi(U)$), με $\phi(U)$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$.



Αν U είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του M, το ζεύγος (U, ϕ) ονομάζεται **τοπικός** χάρτης, ενώ, αν $U = M$, ονομάζεται **ολικός** χάρτης.

Αν υπάρχει ένας ολικός χάρτης (M, ϕ), τότε το M ταυτίζεται, μέσω της ϕ, με το υποσύνολο $\phi(M)$ του $\mathbb{R}^n$, επομένως, με τετριμμένο τρόπο, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο πάνω στο οποίο μπορούν να οριστούν διαφορίσιμες απεικονίσεις. Στην γενική περίπτωση, ολικοί χάρτες δεν υπάρχουν. Συνήθως, ένας χάρτης θα είναι ένας τοπικός χάρτης.

Συχνά λέμε ότι ένας τοπικός χάρτης (U, ϕ) ορίζει ένα **τοπικό σύστημα συντεταγμένων**, αφού, για κάθε $x \in U$, μπορούμε να ορίσουμε τις **συντεταγμένες** (που γενικεύουν τις συνήθεις συντεταγμένες της Αναλυτικής Γεωμετρίας)

$$x_i(x) := pr_i(\phi(x)), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

όπου $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην i–συνταταγμένη.

1.2 Παραδείγματα. (Α) Τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα ανοιχτό $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ και το ζεύγος (A, id_A), και παρατηρούμε ότι η ταυτοτική $\mathrm{id}_A : A \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι 1–1 και η εικόνα της $\mathrm{id}_A(A) = A$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή το ζεύγος (A, id_A) είναι ένας n–διάστατος ολικός χάρτης του A.

(Β) Οι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι. Έστω V ένας n–διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. Το ζεύγος (V, ψ) είναι προφανώς ένας n–διάστατος ολικός χάρτης του V. Τα ανωτέρω ισχύουν ιδιαιτέρως για το χώρο $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ των $m \times n$ πραγματικών πινάκων.

(Γ) Οι κανονικές επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$. Στη Διαφορική Γεωμετρία των Επιφανειών συναντούμε τις έννοιες της κανονικής παραμέτρησης και της κανονικής επιφάνειας. Για διευκόλυνση του αναγνώστη υπενθυμίζουμε αυτές τις έννοιες εδώ: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο, έστω $r : U \to \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και έστω $W := r(U)$. Η τριάδα (U, r, W) ονομάζεται **κανονική παραμέτρηση**, αν ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:

(i) Αν $W \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία, $r : U \to W$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

(ii) Για κάθε $q \in U$, το διαφορικό $Dr(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι 1–1.

Ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **κανονική επιφάνεια**, αν υπάρχει μια οικογένεια $\mathcal{A} = \{(U_i, r_i, W_i)\}_{i\in I}$ από κανονικές παραμετρήσεις, έτσι ώστε $\{W_i\}_{i\in I}$ να είναι μια ανοιχτή κάλυψη του S.

Κάθε κανονική παραμέτρηση (U, r, W) μιας κανονικής επιφάνειας S ορίζει ένα 2–διάστατο χάρτη της S, τον (W, r^{-1}).

(Δ) Ο μοναδιαίος κύκλος. Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή το σύνολο

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Επάνω στον κύκλο θα ορίσουμε χάρτες με τρεις τρόπους:

(Δ1) Οι στερεογραφικές προβολές. Σταθεροποιούμε τα σημεία του κύκλου $N = (0,1)$ και $S = (0,-1)$ και θεωρούμε τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S), όπου $U_N = S^1 \setminus \{N\}$, $U_S = S^1 \setminus \{S\}$, και

$$\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \phi_N(x,y) := \frac{x}{1-y},$$
$$\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \phi_S(x,y) := \frac{x}{1+y},$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις ϕ_N και ϕ_S είναι 1–1 και επί του $\mathbb{R}$, με αντίστροφες τις απεικονίσεις

$$\phi_N^{-1}(a) = \left(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1}\right),$$
$$\phi_S^{-1}(a) = \left(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{1-a^2}{a^2+1}\right).$$

Άρα τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S) είναι 1–διάστατοι χάρτες του S^1.

(Δ2) Τα ημικύκλια. Ορίζουμε το σύνολα

$$U_y^+ := \{(x,y) \in S^1 : y > 0\},$$
$$U_y^- := \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}.$$

Δηλαδή, U_y^+ (αντίστ. U_y^-) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημικύκλιο πάνω (αντίστ. κάτω) από τον άξονα $x'Ox$. Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\phi_y^+ : U_y^+ \longrightarrow (-1,1) : (x,y) \mapsto x,$$
$$\phi_y^- : U_y^- \longrightarrow (-1,1) : (x,y) \mapsto x,$$

δηλαδή, ϕ_y^+, ϕ_y^- είναι οι προβολές των προηγούμενων ημικυκλίων στη διάμετρο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη (U_y^+, ϕ_y^+), (U_y^-, ϕ_y^-) είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις ϕ_y^+, ϕ_y^- είναι 1–1. Ακόμη είναι επί του $(-1,1)$ με

$$(\phi_y^+)^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$
$$(\phi_y^-)^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα οι εικόνες $\phi_y^+(U_y^+) := \phi_y^-(U_y^-) = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτές.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε τέσσερεις 1–διάστατους χάρτες $(U_i^\alpha\, \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y$ και $\alpha = +, -$ στο S^1.

(Δ3) **Το όρισμα.** Θεωρούμε πάλι τα υποσύνολα U_N και U_S του S^1 και ορίζουμε τις απεικονίσεις $\theta_i : U_i \to \mathbb{R},\ i = N, S$, που στέλνουν κάθε σημείο $A = (x, y) \in U_i$ στη γωνία $\theta_i(x, y)$ που σχηματίζεται μεταξύ OA και Ox και με την υπόθεση $\theta_N(x, y) \in (\pi/2, 5\pi/2)$ και $\theta_S(x, y) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$.

Είναι γνωστό ότι οι απεικονίσεις $\theta_i,\ i = N, S,$ είναι 1–1 και επί των αντίστοιχων διαστημάτων, που είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, επομένως τα ζεύγη $(U_N, \theta_N),\ (U_S, \theta_S)$ είναι 1–διάστατοι χάρτες του S^1.

(Ε) Η επιφάνεια της σφαίρας. Επάνω στην σφαίρα

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

θα ορίσουμε χάρτες με δύο τρόπους, ανάλογους των (Δ1) και (Δ2):

(Ε1) Η στερεογραφική προβολή. Θεωρούμε τα σημεία $N = (0, 0, 1)$ (βόρειος πόλος) και $S = (0, 0, -1)$ (νότιος πόλος) της σφαίρας, και θεωρούμε τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S), όπου $U_N = S^2 \setminus \{N\}$, $U_S = S^2 \setminus \{S\}$, και

$$\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to \phi_N(x, y, z) := \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$
$$\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to \phi_S(x, y, z) := \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right),$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε ότι η απεικόνιση ϕ_N είναι 1–1: Αν $(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2) \in U_N$ με

$$\phi_N(x_1, y_1, z_1) = \phi_N(x_2, y_2, z_2),$$

δηλαδή,

$$\left(\frac{x_1}{1-z_1}, \frac{y_1}{1-z_1}\right) = \left(\frac{x_2}{1-z_2}, \frac{y_1}{1-z_1}\right)$$

τότε προσθέτοντας τα τετράγωνα των συντεταγμένων και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, έχουμε ότι $z_1 = z_2$, απ' όπου αμέσως συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$. Ανάλογα, δείχνουμε ότι και η ϕ_S είναι 1–1. Επίσης, παρατηρούμε ότι ϕ_N είναι επί του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$\phi_N^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\right).$$

Άρα $\phi_N(U_N) = \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Με ανάλογο τρόπο, επαληθεύουμε ότι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi_S^{-1}(a,b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2} \right),$$

δηλαδή, ϕ_S είναι επί του $\mathbb{R}^2$ και $\phi_S(U_S) = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό.

Έτσι έχουμε δείξει ότι (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S) είναι 2–διάστατοι χάρτες της S^2.

(Ε2) Τα ημισφαίρια. Ορίζουμε το σύνολα

$$\begin{aligned} U_z^+ &:= \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\}, \\ U_z^- &:= \{(x,y,z) \in S^2 : z < 0\}, \\ D_z &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, U_z^+ (αντίστ. U_z^-) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημισφαίριο πάνω (αντίστ. κάτω) από το επίπεδο των x, y, χωρίς τον ισημερινό, ενώ D_z είναι ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 1 στο επίπεδο των x, y. Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \phi_z^+ &: U_z^+ \to D_z : (x,y,z) \to (x,y), \\ \phi_z^- &: U_z^- \to D_z : (x,y,z) \to (x,y), \end{aligned}$$

δηλαδή, ϕ_z^+, ϕ_z^- είναι οι προβολές των προηγούμενων ημισφαιρίων στο δίσκο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη (U_z^+, ϕ_z^+), (U_z^-, ϕ_z^-) είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις ϕ_z^+, ϕ_z^- είναι 1–1. Ακόμη είναι επί του D_z με

$$\begin{aligned} (\phi_z^+)^{-1}(x,y) &= (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \\ (\phi_z^-)^{-1}(x,y) &= (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y) \in D_z$. Άρα $\phi_z^+(U_z^+) := \phi_z^-(U_z^-) = D_z \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτά.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε έξι 2-διάστατους χάρτες $(U_i^\alpha\, \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y, z$ και $\alpha = +, -$ στο S^2.

(Ζ) Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ και ορίζουμε στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ τη σχέση

$$\begin{gathered} (x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ y_i = \lambda x_i, \quad \forall\, i = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η ανωτέρω σχέση είναι μια ισοδυναμία και συμβολίζουμε με $[(x_1, x_2, x_3)]$ την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Το σύνολο των ανωτέρω κλάσεων, δηλαδή το σύνολο-πηλίκο

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\sim,$$

καλείται **προβολικός χώρος**.

Θεωρούμε $U_i = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$ $(i = 1, 2, 3)$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\phi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$
$$\phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right),$$
$$\phi_3 : U_3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Αποδεικνύουμε ότι (U_1, ϕ_1) είναι 2–διάστατος χάρτης του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$: πρώτα παρατηρούμε ότι ϕ_1 είναι 1–1, διότι, αν $\phi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \phi_1([(y_1, y_2, y_3)])$, τότε

$$\frac{x_i}{x_1} = \frac{y_i}{y_1},$$

για $i = 2, 3$, δηλαδή

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_1}{x_1} = \lambda \neq 0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $[(x_1, x_2, x_3)] = [(y_1, y_2, y_3)]$. Ακόμη $\phi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$. Πράγματι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι

$$\phi_1([(1, a, b)]) = (a, b),$$

δηλαδή η απεικόνιση ϕ_1 είναι επί. Άρα, $\phi_1(U_1)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και (U_1, ϕ_1) είναι χάρτης. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι τα ζεύγη (U_2, ϕ_2) και (U_3, ϕ_3) είναι 2–διάστατοι χάρτες.

2 Συμβιβαστότητα χαρτών

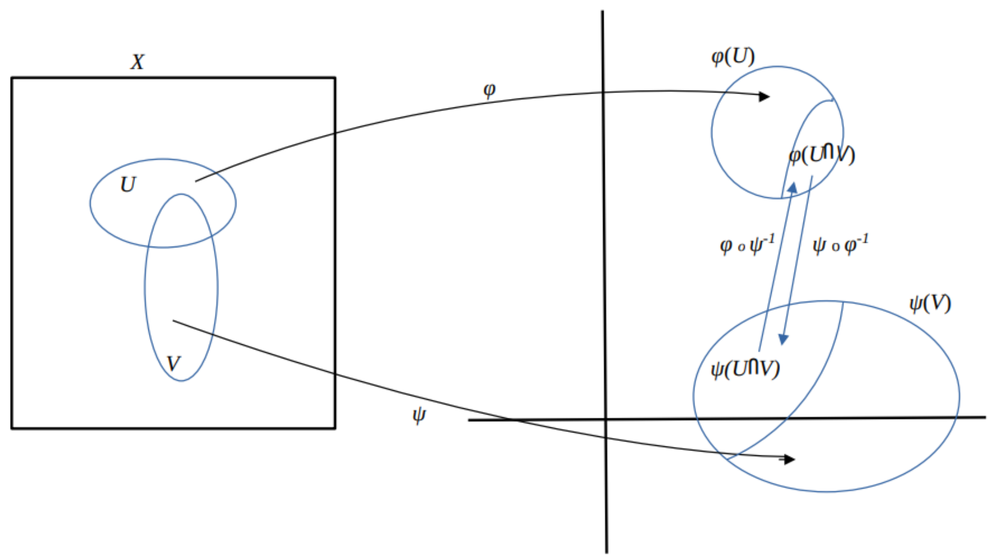
2.1 Ορισμός. Έστω (U, ϕ) και (V, ψ) χάρτες του M. Λέμε ότι (U, ϕ) και (V, ψ) είναι $\mathcal{C}^k$**–συμβιβαστοί** ($k = 0, 1, \ldots, \infty$) σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις:

(1) $U \cap V = \emptyset$.

(2) $U \cap V \neq \emptyset,\ \phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$ και οι **απεικονίσεις μεταφοράς** ή **αλλαγής των συντεταγμένων**

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} &\colon\ \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \\ \phi \circ \psi^{-1} &\colon\ \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V), \end{aligned} \tag{1}$$

είναι $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμες (σε κάθε σημείο των πεδίων ορισμού τους).



Επειδή οι απεικονίσεις (1) είναι αντίστροφες η μια της άλλης, η προηγούμενη συνθήκη διαφορισιμότητας συνεπάγεται ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι $\mathcal{C}^k$-αμφιδιαφορίσεις.

Για $k = 0$, οι απεικονίσεις $\psi \circ \phi^{-1}$ και $\phi \circ \psi^{-1}$ είναι μόνον συνεχείς (επομένως ομοιομορφισμοί).

Στην τελευταία περίπτωση, οι χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) λέγονται **τοπολογικά συμβιβαστοί**. Αν $k = \infty$, οι χάρτες λέγονται **διαφορικά συμβιβαστοί**.

Προφανώς, η διαφορική συμβιβαστότητα των χαρτών συνεπάγεται την $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστότητά τους, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και η τελευταία, με τη σειρά της, συνεπάγεται την τοπολογική τους συμβιβαστότητα.

Αν κάποιος θέλει να είναι τυπικός, οι απεικονίσεις (1) έπρεπε να γράφονται $\psi \circ (\phi^{-1}|_{\phi(U\cap V)})$ και $\phi \circ (\psi^{-1}|_{\psi(U\cap V)})$. Όμως, χάριν απλότητας, δεν θα γράφουμε τον περιορισμό όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

2.2 Παρατήρηση. Η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα δύο τεμνόμενων χαρτών συνεπάγεται ότι οι χάρτες έχουν την *ίδια διάσταση*. Πράγματι, έστω ότι (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί χάρτες διάστασης m και n, αντίστοιχα, με $U \cap V \neq \emptyset$. Αν $k \geq 1$, η απεικόνιση μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι μια $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφόριση, έτσι, για κάθε $x \in U \cap V$, το διαφορικό $D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ υπάρχει και είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, επομένως $m = n$. Αν $k = 0$, τα ανοιχτά σύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ στους χώρους $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικά και η ισότητα των διαστάσεων είναι ένα αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Brawer (Invariance of domain) της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Μη τεμνόμενοι χάρτες (του ίδιου χώρου M), δεν είναι κατ' ανάγκη της ίδιας διάστασης.

2.3 Παραδείγματα. Παρακάτω αναφερόμαστε στους χάρτες των Παραδειγμάτων 1.2.

(Α-Β) Στα Παραδείγματα (Α) και (Β) ο χώρος M έχει ολικό χάρτη. Εν προκειμένω, ισχύει ότι *κάθε χάρτης είναι διαφορικά συμβιβαστός με τον εαυτό του*. Πράγματι: Έστω (U,ϕ) ένας n-διάστατος χάρτης ενός συνόλου M. Τότε

$$\phi(U \cap U) = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτό, από τον ορισμό του χάρτη, και

$$\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$-αμφιδιαφόριση.

(Γ) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια, τότε κάθε ζεύγος κανονικών παραμετρήσεων (U_i, r_i, W_i) και (U_j, r_j, W_j) ορίζει ζεύγος χαρτών (W_i, r_i^{-1}) και (W_j, r_j^{-1}) που είναι διαφορικά συμβιβαστοί: αν $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, τότε $r_i^{-1}(W_i \cap W_j)$ και $r_j^{-1}(W_i \cap W_j)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^2$, διότι $W_i \cap W_j$ είναι η τομή δύο ανοιχτών υποσυνόλων του S και r_i, r_j είναι ομοιομορφισμοί. Η διαφορισιμότητα της απεικόνισης μεταφοράς $r_j^{-1} \circ (r_i^{-1})^{-1} = r_j^{-1} \circ r_i$ είναι συνέπεια της τοπικής σύμπτωσης κάθε κανονικής παραμέτρησης με ένα γράφημα (παραμέτρηση Monge).

(Δ1–Δ2) Για την απόδειξη ότι οι χάρτες του Παραδείγματος 1.2(Δ1) (αντ. (Δ2)) είναι διαφορικά συμβιβαστοί παραπέμπουμε στην απόδειξη της διαφορικής συμβιβαστότητας των αντίστοιχων χαρτών της μοναδιαίας σφαίρας.

(Δ3) Για την συμβιβαστότητα των χαρτών (U_N, θ_N) και (U_S, θ_S) παρατηρούμε ότι $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$ και

$$\begin{aligned} \theta_N(U_N \cap U_S) &= (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2), \\ \theta_S(U_N \cap U_S) &= (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ενώ η απεικόνιση μεταφοράς

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1} : \theta_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \theta_S(U_N \cap U_S)$$

δίνεται από τον τύπο

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1}(t) = \begin{cases} t, & t \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ t + 2\pi, & t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases}$$

είναι επομένως $\mathcal{C}^\infty$–αμφιδιαφόριση και οι εν λόγω χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(Ε1) Θεωρούμε τους δύο χάρτες των στερεογραφικών προβολών (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S). Παρατηρούμε ότι πάλι $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$, επομένως

$$\begin{aligned} \phi_N(U_N \cap U_S) &= \phi_N(U_N \setminus \{S\}) = \phi_N(U_N) \setminus \{\phi_N(S)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \phi_S(U_N \cap U_S) &= \phi_S(U_S \setminus \{N\}) = \phi_S(U_S) \setminus \{\phi_S(N)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνες

$$\phi_N(U_N \cap U_N) = \phi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτές. Ακόμη, οι απεικονίσεις

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1},\ \phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

δίνονται από τον τύπο

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(a,b) = \phi_N \circ \phi_S^{-1}(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right),$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, δηλαδή είναι $\mathcal{C}^\infty$–απεικονίσεις. Άρα, οι χάρτες (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S) είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(Ε2) Θεωρούμε τους έξι χάρτες $(U_i^\alpha\ \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y, z$ και $\alpha = +, -$ και τους τρεις δίσκους $D_i,\ i = x, y, z$. Αποδεικνύουμε τη συμβιβαστότητα των $(U_x^+\ \phi_x^+)$ και $(U_y^-\ \phi_y^-)$. Έχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^- = \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0,\ y < 0\},$$

επομένως

$$U_x^+ \cap U_y^- \ni (x, y, z) \longmapsto \phi_x^+(x, y, z) = (y, z) \in D_x,$$

με $y < 0$, δηλαδή

$$\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = D_x \cap \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Άρα, $\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$ είναι το εσωτερικό του μισού του δίσκου D_x και είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Όμοια,

$$\phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-) = D_y \cap \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτό.

Για τη διαφορισιμότητα των απεικονίσεων μεταφοράς, παρατηρούμε ότι, για κάθε $(y, z) \in \phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλαδή για κάθε $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ με $y^2 + z^2 < 1$ και $y < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1})(y, z) &= \phi_y^-(\sqrt{1 - y^2 - z^2},\ y,\ z)\\ &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2},\ z),\end{aligned}$$

επομένως η απεικόνιση $\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της, και, για κάθε $(x, z) \in \phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλαδή, για κάθε $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2 + z^2 < 1$ και $x > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1})(x, z) &= \phi_x^+(x,\ -\sqrt{1 - x^2 - z^2},\ z)\\ &= (-\sqrt{1 - x^2 - z^2},\ z),\end{aligned}$$

σαν αποτέλεσμα, $\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε τη συμβιβαστότητα κάθε άλλου ζεύγους από τους ανωτέρω χάρτες.

(Ζ) Δείχνουμε ότι οι χάρτες (U_i, ϕ_i), με $i = 1, 2, 3$, είναι διαφορικά συμβιβαστοί. Ας θεωρήσουμε τους (U_1, ϕ_1) και (U_2, ϕ_2):

$$U_1 \cap U_2 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\},$$

επομένως, αν $[(x_1, x_2, x_3)] \in U_1 \cap U_2$, τότε

$$\phi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

και αν $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ τότε $[(1, a, b)] \in U_1 \cap U_2$ με $\phi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$, δηλαδή $\phi_1(U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ που είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Για τις απεικονίσεις μεταφοράς παρατηρούμε ότι

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto \left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right),$$

δηλαδή είναι $\mathcal{C}^\infty$–απεικονίσεις. Όμοια δείχνουμε την διαφορική συμβιβαστότητα των άλλων ζευγών χαρτών.

ΜΑΘΗΜΑ 02

1 Άτλαντες

1.1 Ορισμός. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

μια οικογένεια από χάρτες του M. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται $\mathcal{C}^k$–**άτλαντας του** M, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1) $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μια κάλυψη του M, και

2) γιά κάθε $i, j \in I$, οι χάρτες $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί.

Ένας $\mathcal{C}^0$–άτλαντας του M θα λέγεται **τοπολογικός άτλαντας**, ενώ ένας $\mathcal{C}^\infty$–άτλαντας θα λέγεται **διαφορικός άτλαντας**.

Αν όλοι οι χάρτες ενός άτλαντα $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση $m \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{A}$ ονομάζεται m–**διάστατος**.

1.2 Παραδείγματα. Παρακάτω αναφερόμαστε πάλι στα Παραδείγματα 1.2 του Μαθήματος 01.

(Α) Για κάθε ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^m$, το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} = \{(A, \mathrm{id}_A)\}$$

είναι ένας m–διάστατος διαφορικός άτλαντας του A.

(Β) Έστω V ένας n–διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} := \{(V, \psi)\}$$

είναι ένας n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του V.

(Γ) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια και $\{(U_i, r_i, W_i) : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κανονικές παραμετρήσεις της S, έτσι ώστε $\{W_i\}_{i\in I}$ να είναι μια ανοιχτή κάλυψη της S, τότε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(W_i, r_i^{-1}) \ : \ i \in I\}$$

είναι ένας 2–διάστατος διαφορικός άτλαντας της S.

(Δ) Οι οικογένειες

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},\\
\mathcal{B} &:= \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y\},\\
\mathcal{C} &:= \{(U_N, \theta_N),\ (U_S, \theta_S)\}
\end{aligned}$$

είναι 1–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες του μοναδιαίου κύκλου.

(Ε) Αντίστοιχα με τον κύκλο, οι οικογένειες

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},\\
\mathcal{B} &:= \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y, z\}
\end{aligned}$$

είναι 2–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες της μοναδιαίας σφαίρας.

(Ζ) Το σύνολο

$$\mathcal{A} := \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2, 3\}$$

είναι 2–διάστατος διαφορικός άτλαντας του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{A}_m^k(M)$ το σύνολο όλων των m–διάστατων $\mathcal{C}^k$–ατλάντων επί ενός συνόλου $M \neq \emptyset$.

1.3 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{A}$ είναι **μικρότερος** του $\mathcal{B}$ και θα γράφουμε $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, αν ο $\mathcal{A}$ περιέχεται (συνολοθεωρητικά) στον $\mathcal{B}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}. \tag{1}$$

Είναι φανερό ότι

η σχέση (1) ορίζει μιά μερική διάταξη στο $\mathfrak{A}_m^k(M)$.

1.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M)$. Θα λέμε ότι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι **$\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί** και θα γράφουμε $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}$, αν η οικογένεια $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας, δηλαδή,

$$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B} \quad \iff \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M). \tag{2}$$

Η ένωση δύο $\mathcal{C}^k$–ατλάντων είναι πάντοτε μια κάλυψη του M. Από την άλλη μεριά, αν $(U,\phi),(V,\psi)\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, τότε είτε οι δύο χάρτες ανήκουν στον ίδιο άτλαντα, ή ο ένας ανήκει στον $\mathcal{A}$ και ο άλλος ανήκει στον $\mathcal{B}$. Στην πρώτη περίπτωση, η συμβιβαστότητά τους εξασφαλίζεται από τον Ορισμό 1.1, επομένως αρκεί να ελέγξουμε την συμβιβαστότητα στην δεύτερη περίπτωση. Άρα,

> $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{B}$, *αν και μόνον αν, κάθε χάρτης του* $\mathcal{A}$ *είναι* $\mathcal{C}^k$*–συμβιβαστός με κάθε χάρτη του* $\mathcal{B}$.

Ακόμη σημειώνουμε ότι αν $\mathcal{A}\le\mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}=\mathcal{B}\in\mathfrak{A}^k_m(M)$, δηλαδή,

> *η σχέση διάταξης* (1) *συνεπάγεται την σχέση συμβιβαστότητας* (2).

1.5 Πρόταση. *Στο σύνολο* $\mathfrak{A}^k_m(M)$, *η σχέση (2) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η σχέση $\overset{k}{\sim}$ είναι προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική. Έστω τώρα $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\in\mathfrak{A}^k_m(M)$ με $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}\overset{k}{\sim}\mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι η σχέση (2) είναι μεταβατική, δηλαδή, $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{C}$.

Έστω $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ και $(W,\chi)\in\mathcal{C}$ με $U\cap W\neq\emptyset$.

Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι $\phi(U\cap W),\chi(U\cap W)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Για να δείξουμε ότι $\phi(U\cap W)$ είναι ανοιχτό, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a\in\phi(U\cap W)$, υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο B του $\mathbb{R}^m$, με

$$a\in B\subseteq\phi(U\cap W).$$

Θεωρούμε λοιπόν ένα $a\in\phi(U\cap W)$ και θέτουμε $x:=\phi^{-1}(a)\in U\cap W$. Επειδή οι χάρτες του $\mathcal{B}$ καλύπτουν το M, υπάρχει $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $x\in V$, επομένως $x\in A:=U\cap V\cap W$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\phi(A)=\phi(U\cap V\cap W)&=(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(U\cap V\cap W))=\\&=(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(U\cap V)\cap\psi(V\cap W)).\end{aligned}$$

Οι χάρτες (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί από την υπόθεση, επομένως το $\psi(U\cap V)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Όμοια, το $\psi(V\cap W)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, λόγω της συμβιβαστότητας των (V,ψ) και (W,χ). Επομένως, $\phi(A)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, ως εικόνα του ανοιχτού $\psi(U \cap V) \cap \psi(V \cap W)$ μέσω του ομοιομορφισμού $\phi \circ \psi^{-1}$. Επειδή ισχύει $a \in \phi(A) \subseteq \phi(U \cap W)$, θέτοντας $B := \phi(A)$, έχουμε την ζητούμενη σχέση, επομένως $\phi(U \cap W)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Ανάλογα, δείχνουμε ότι $\chi(U \cap W)$ είναι επίσης ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Κατόπιν πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς

$$\chi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W) \tag{5}$$
$$\phi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \phi(U \cap W) \tag{6}$$

είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμες. Δείχνουμε την διαφορισιμότητα της πρώτης (με ανάλογο τρόπο δείχνουμε και την διαφορισιμότητα της δεύτερης). Επειδή η διαφορισιμότητα είναι μια τοπική ιδιότητα, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a \in \phi(U \cap V)$, υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο B του $\phi(U \cap V)$, τέτοιο ώστε $a \in B$ και ο περιορισμός της $\psi \circ \phi^{-1}$ στο B, δηλαδή η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1}|_B$, είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη.

Όπως πριν, θεωρούμε τον χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x := \phi^{-1}(a) \in V$ και την τομή $A := U \cap V \cap W \ni x$. Δείξαμε πριν ότι οι εικόνες $\phi(A)$ και $\chi(A) = \chi(U \cap W) \cap \chi(V \cap W)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Από την άλλη μεριά, η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών $(U, \phi), (V, \psi)$ και $(V, \psi), (W, \chi)$ συνεπάγεται την $\mathcal{C}^k$–διαφορισιμότητα των απεικονίσεων

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} \quad &: \quad \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V), \\ \chi \circ \psi^{-1} \quad &: \quad \psi(V \cap W) \to \chi(V \cap W). \end{aligned}$$

Σαν αποτέλεσμα, οι περιορισμοί των προηγούμενων απεικονίσεων στα $\phi(A)$, $\psi(A)$ αντίστοιχα, είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμες απεικονίσεις της μορφής

$$\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)} : \phi(A) \to \psi(A), \quad \chi \circ \psi^{-1}|_{\psi(A)} : \psi(A) \to \chi(A).$$

Επομένως, η σύνθεσή τους

$$\chi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)} = (\chi \circ \psi^{-1}|_{\psi(A)}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)})$$

είναι $\mathcal{C}^k$–απεικόνιση. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι η $\chi \circ \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη στην περιοχή $B = \phi(A)$ του a, που σημαίνει ότι η (5) είναι επίσης $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη.

Άρα έχουμε αποδείξει την $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών (U, ϕ), (V, ψ), επομένως και την $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των ατλάντων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{C}$. $\square$

2 Πολλαπλότητες

2.1 Ορισμός. Ένας (m–διάστατος) $\mathcal{C}^k$–άτλαντας $\mathcal{A}$ επί του M ονομάζεται **μέγιστος**, αν είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathfrak{A}^k_m(M)$, ως προς την διάταξη (1), δηλαδή, αν

$$\mathcal{B} \in \mathfrak{A}^k_m(M),\ \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ είναι μέγιστος και ότι (U, ϕ) είναι ένας (m-διάστατος) χάρτης επί του M, που είναι $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$. Τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, επομένως από τον ορισμό του μέγιστου άτλαντα, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$, δηλαδή $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}$ περιέχει κάθε χάρτη συμβιβαστό με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$, και έστω $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$. Τότε, αφού $\mathcal{B}$ είναι ένας άτλαντας, κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με κάθε άλλο χάρτη του $\mathcal{B}$, επομένως με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$, οπότε, από την υπόθεση, κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ ανήκει στον $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, και τελικά $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Έχουμε έτσι αποδείξει ότι

> *Ένας άτλαντας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ είναι μέγιστος, αν και μόνον αν, για κάθε χάρτη (U, ϕ) του M, που είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$, έχουμε ότι $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.*

Έστω τώρα ένας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ και η κλάση $[\mathcal{A}]$ ως προς την σχέση ισοδυναμίας (2). Θεωρούμε την ένωση $\mathcal{A}^*$ όλων των ατλάντων $\mathcal{B}$ που είναι ισοδύναμοι (: $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί) με τον $\mathcal{A}$, δηλ.

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B}. \tag{7}$$

Τότε:

(1) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι άτλαντας.* Πράγματι, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ και ο $\mathcal{A}$ είναι κάλυψη του M, άρα και ο $\mathcal{A}^*$ είναι κάλυψη. Έστω $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}^*$. Τότε υπάρχουν άτλαντες $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in [\mathcal{A}]$, με $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{B}_1$ και $(U_2, \phi_2) \in \mathcal{B}_2$. Επειδή $\mathcal{B}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}_2$, από την μεταβατικότητα της $\overset{k}{\sim}$, έχουμε $\mathcal{B}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{B}_2$ και οι (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί. Άρα ο $\mathcal{A}^*$ είναι ένας m–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας επί του M.

(2) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι μεγαλύτερος του $\mathcal{A}$.* Είναι προφανές, αφού $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$, προκύπτει ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ (άρα και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}^*$, δηλ. $\mathcal{A}^* \in [\mathcal{A}]$).

(3) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι μέγιστος.* Πράγματι, έστω $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}^k_m$ με $\mathcal{A}^* \leq \mathcal{C}$. Τότε $\mathcal{C} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}^* \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$, δηλ. $\mathcal{C} \in [\mathcal{A}]$ και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^*$. Άρα $\mathcal{C} = \mathcal{A}^*$.

(4) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι ο μοναδικός μέγιστος άτλαντας στο $\mathfrak{A}^k_m$ που περιέχει τον $\mathcal{A}$.* Πράγματι: Έστω $\mathcal{D}$ ένας μέγιστος άτλαντας, με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. Τότε $\mathcal{D} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{D} \in [\mathcal{A}]$ και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}^*$. Όμως $\mathcal{D}$ μέγιστος, και ο τελευταίος εγκλεισμός μας δίνει $\mathcal{D} = \mathcal{A}^*$.

Τα ανωτέρω έχουν αποδείξει το επόμενο

2.2 Θεώρημα. *Για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, υπάρχει ένα μοναδικός μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.* □

Αξίζει να δούμε και μια δεύτερη περιγραφή του μέγιστου που περιέχει ένα δεδομένο άτλαντα $\mathcal{A}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}'$ το σύνολο όλων των m–διάστατων χαρτών του M, που είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$. Προφανώς $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}'$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας. Είναι άμεσο ότι οι χάρτες του αποτελούν κάλυψη του M. Γιά την συμβιβαστότητα των χαρτών του, θεωρούμε δύο τυχαίους χάρτες $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}'$. Επειδή αυτοί οι χάρτες είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$, οι οικογένειες $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$ και $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A} \cup \{(V, \psi)\}$ ανήκουν στο $\mathfrak{A}^k_m(M)$, και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_1$, όπως και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_2$. Λόγω της μεταβατικότητας της $\overset{k}{\sim}$, έχουμε $\mathcal{A}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_2$, επομένως οι χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) του $\mathcal{A}'$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί και ο $\mathcal{A}'$ είναι ένας m–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας.

Θα δείξουμε τώρα, ότι $\mathcal{A}'$ είναι μέγιστος. Πράγματι, αν (U, ϕ) είναι χάρτης του M, $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με τους χάρτες του $\mathcal{A}'$, τότε (U, ϕ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με τους χάρτες του $\mathcal{A}$ (αφού $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$), επομένως, σύμφωνα με το ορισμό του $\mathcal{A}'$, έχουμε ότι $(U, \phi) \in \mathcal{A}'$, δηλαδή $\mathcal{A}'$ είναι μέγιστος.

Η μοναδικότητα του μέγιστου που περιέχει τον $\mathcal{A}$, από το Θεώρημα 2.2, μας εξασφαλίζει ότι

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}^*. \tag{8}$$

Επίσης, από τον ορισμό του άτλαντα $\mathcal{A}^*$, έχουμε ότι για κάθε $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$, ισχύει

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*.$$

Αντίστροφα, αν $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, τότε οι χάρτες του $\mathcal{A}$ και οι χάρτες του $\mathcal{B}$ ανήκουν στον ίδιο άτλαντα $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, δηλαδή, είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί μεταξύ τους. Αρα,

$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*. \tag{9}$$

2.3 Ορισμός. Λέμε ότι ένας μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ ορίζει μια $\mathcal{C}^k$–**διαφορική δομή επί του** M, και ότι το ζεύγος $(M, \mathcal{A})$ είναι μια $\mathcal{C}^k$–**πολλαπλότητα**. Αν όλοι οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση m, λέμε ότι η m είναι **η διάσταση της πολλαπλότητας** και ότι το χώρος $\mathbb{R}^m$ είναι το **μοντέλο της πολλαπλότητας**.

Ιδιαιτέρως, αν $k = 0$, λέμε ότι η $(M, \mathcal{A})$ είναι μια **τοπολογική πολλαπλότητα**· αν $k = \infty$, λέμε ότι είναι μια **διαφορική πολλαπλότητα**.

Αν είναι σαφές ποιός άτλαντας ορίζει τη διαφορική δομή, λέμε (και γράφουμε) "η πολλαπλότητα M".

2.4 Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ είναι n–διάστατος ολικός χάρτης του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ είναι n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του $\mathbb{R}^n$. Άρα θεωρώντας τον αντίστοιχο μέγιστο $\mathcal{A}^*$ παίρνουμε μια διαφορική πολλαπλότητα $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}^*)$. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως την *συνήθη διαφορική δομή του* $\mathbb{R}^n$.

2.5 Παρατήρηση. Η σημασία του Θεωρήματος 2.2 είναι προφανής. Για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο M είναι πολλαπλότητα (δηλαδή, αν έχει ένα μέγιστο άτλαντα), αρκεί να βρούμε ένα (μη μέγιστο) άτλαντα· τότε ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας ορίζει τη ζητούμενη δομή πολλαπλότητας.

2.6 Παρατήρηση. (1) Είναι αποτέλεσμα της Διαφορικής Τοπολογίας, ότι αν ένας χώρος M έχει ένα $\mathcal{C}^k$-άτλαντα, $k \geq 1$, τότε έχει επίσης και ένα $\mathcal{C}^{k+1}$-άτλαντα. Αυτό δεν αληθεύει γιά $k = 0$, δηλαδή αν ο αρχικός άτλαντας είναι τοπολογικός.

(2) Ένας μέγιστος τοπολογικός άτλαντας μπορεί να περιέχει πολλούς μέγιστους διαφορικούς άτλαντες.

2.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ δέχεται τη δομή μιας $(m+n)$-διάστατης $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{C} := \{(U \times V,\ \phi \times \psi) : (U, \phi) \in \mathcal{A},\ (V, \psi) \in \mathcal{B}\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του $M \times N$, διάστασης $m+n$.

Πράγματι, κάθε $(U \times V,\, \phi \times \psi)$ είναι ένας χάρτης του $M \times N$, διότι η απεικόνιση

$$\phi \times \psi : U \times V \to \phi(U) \times \psi(V) : (x,y) \mapsto (\phi(x), \psi(y))$$

είναι 1–1 σαν καρτεσιανό γινόμενο 1–1 απεικονίσεων και η εικόνα της $\phi(U) \times \psi(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ σαν ένα καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών συνόλων.

Ακόμη, οι χάρτες του $\mathcal{C}$ καλύπτουν το $M \times N$: αν $(x,y) \in M \times N$, τότε υπάρχουν $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y \in V$, επομένως $(x,y) \in U \times V$.

Τέλος, κάθε δύο χάρτες του $\mathcal{C}$ είναι συμβιβαστοί: πράγματι, αν

$$(U_1 \times V_1, \phi_1 \times \psi_1),\ (U_2 \times V_2,\ \phi_2 \times \psi_2) \in \mathcal{C},$$

με $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$, τότε $U_1 \cap U_2,\ V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ και

$$\begin{aligned}(\phi_1 \times \psi_1)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) =\\ = \phi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(\phi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) =\\ = \phi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2)\end{aligned} \tag{10'}$$

είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών συνόλων και η απεικόνιση μεταφοράς

$$(\phi_2 \times \psi_2) \circ (\phi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})\ \times\ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$$

που στέλνει το σύνολο (10) στο σύνολο (10′) είναι $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφόριση, σαν καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφορίσεων.

Άρα ο $\mathcal{C}$ είναι $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του $M \times N$ και ο αντίστοιχος μέγιστος $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}'$ ορίζει στο $M \times N$ δομή $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητας. □

ΜΑΘΗΜΑ 03

1 Η κανονική τοπολογία μιας πολλαπλότητας

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε πολλαπλότητα είναι τοπολογικός χώρος και τότε θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της τοπολογίας της. Για το ορισμό μιας τοπολογίας χρειαζόμαστε μόνον την ύπαρξη ενός τοπολογικού άτλαντα, έτσι, σε όλη αυτή την παράγραφο, *οι θεωρούμενες πολλαπλότητες είναι τοπολογικές*.

1.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ ένας m-διάστατος τοπολογικός άτλαντας επί του M (όχι κατ' ανάγκη μέγιστος). Ένα υποσύνολο A του M θα λέγεται **ανοιχτό** αν, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Αν $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι το σύνολο όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του M που ορίζονται από τον $\mathcal{A}$, ως ανωτέρω, τότε ισχύει η επόμενη πρόταση.

1.2 Πρόταση. *Το σύνολο $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι μια τοπολογία επί του M.*

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$. Ακόμη, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$,

$$\phi(M \cap U) = \phi(U)$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, από τον ορισμό του χάρτη, που αποδεικνύει ότι $M \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Έστω τώρα $A, B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι $A \cap B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πράγματι, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$

$$\phi((A \cap B) \cap U) = \phi((A \cap U) \cap (B \cap U)) = \phi(A \cap U) \cap \phi(B \cap U).$$

Επειδή $\phi(A \cap U)$, $\phi(B \cap U)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^m$, το $\phi((A \cap B) \cap U)$ είναι ανοιχτό, σαν τομή ανοιχτών του $\mathbb{R}^m$.

Έστω τέλος $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια, με $A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$, για κάθε $i \in I$. Θα δείξουμε ότι $A := \cup_{i \in I} A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πράγματι, για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$,

$$A \cap U = (\cup_{i \in I} A_i) \cap U = \cup_{i \in I}(A_i \cap U),$$

επομένως

$$\phi(A \cap U) = \phi((\cup_{i \in I} A_i) \cap U) = \cup_{i \in I} \phi(A_i \cap U)$$

είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, σαν ένωση ανοιχτών, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

1.3 Πρόταση. *Αν $\mathcal{A}$ είναι ένας m-διάστατος τοπολογικός άτλαντας επί του M και $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι η τοπολογία που ορίζεται από τον $\mathcal{A}$, τότε, για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, έχουμε:*
i) $U \in \tau_{\mathcal{A}}$.
ii) Η απεικόνιση $\phi : U \to \phi(U)$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών του $\mathcal{A}$, $\psi(V \cap U)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m$, επομένως η i) ισχύει.

Όσον αφορά στην ii), πρέπει να δείξουμε ότι οι ϕ, ϕ^{-1} είναι συνεχείς. Σημειώνουμε ότι τα σύνολα U, $\phi(U)$ είναι τοπολογικοί χώροι με τη σχετική τοπολογία που ορίζεται από την τοπολογία των M, $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Επομένως, (βλ. Παράρτημα Β) ένα σύνολο A είναι ανοιχτό για την σχετική τοπολογία του U, αν και μόνον αν είναι ανοιχτό στην $\tau_{\mathcal{A}}$ και $A \subseteq U$, και ένα σύνολο B είναι ανοιχτό για την σχετική τοπολογία του $\phi(U)$, αν και μόνον αν είναι ανοιχτό στην (συνήθη) τοπολογία του $\mathbb{R}^m$ και $B \subseteq \phi(U)$.

Για την συνέχεια της ϕ: Έστω B ένα τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$ (επομένως του $\mathbb{R}^m$). Θα δείξουμε ότι $\phi^{-1}(B)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του U (επομένως του M). Έστω $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Τότε, αφού $\phi^{-1}(B) \subseteq U$, είναι

$$\begin{aligned} \psi(\phi^{-1}(B) \cap V) &= \psi(\phi^{-1}(B) \cap U \cap V) \\ &= \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi(\phi^{-1}(B) \cap U \cap V) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1})(B \cap \phi(U \cap V)). \end{aligned} \tag{1}$$

Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ), το $\phi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$ και το $B \cap \phi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό σαν τομή ανοιχτών. Επειδή η $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός, μεταφέρει το ανοιχτό σύνολο $B \cap \phi(U \cap V)$ στο ανοιχτό σύνολο $(\psi \circ \phi^{-1})(B \cap \phi(U \cap V))$, άρα το σύνολο (1) είναι ανοιχτό στον R^m, που συνεπάγεται ότι το $\phi^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό στην $\tau_{\mathcal{A}}$.

Για τη συνέχεια της $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$, αρκεί να δείξουμε ότι, αν A είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του U, τότε $(\phi^{-1})^{-1}(A) = \phi(A)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U)$. Πράγματι, αν A είναι ανοιχτό στο U, είναι επίσης ανοιχτό στο M, επομένως σύμφωνα με το ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, η εικόνα $\phi(A) = \phi(A \cap U)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, επομένως επίσης και του $\phi(U)$. □

1.4 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί ενός συνόλου M και $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Τότε, για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$, το ζεύγος $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι ένας χάρτης του M που ανήκει στον $\mathcal{A}^*$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$. Τότε $\phi|_{U\cap A}$ είναι 1–1 σαν περιορισμός μιας 1–1 απεικόνισης και $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, αφού $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Δηλαδή, $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι χάρτης του M.

Για να δείξουμε ότι $(U \cap A, \phi|_{U\cap A}) \in \mathcal{A}^*$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε χάρτης $(V,\psi) \in \mathcal{A}$ είναι τοπολογικά συμβιβστός με τον $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$. Πράγματι, για $U \cap V \cap A \neq \emptyset$, έχουμε ότι $U \cap V \cap A \subseteq U \cap V$ είναι ανοιχτό, σαν τομή τριών ανοιχτών, επομένως οι ομοιομορφισμοί $\phi : U \to \phi(U)$ και $\psi : V \to \psi(V)$ το στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V \cap A)$ και $\psi(U \cap V \cap A)$ του $\mathbb{R}^m$. Μένει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\psi \circ (\phi|_{U\cap A})^{-1}$ και $(\phi|_{U\cap A}) \circ \psi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί. Όμως, λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U,ϕ), $(V,\psi) \in \mathcal{A}$, οι απεικονίσεις μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ και $\phi \circ \psi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί. Άρα

$$\psi \circ (\phi|_{U\cap A})^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(U\cap V\cap A)}$$

και

$$\phi|_{(U\cap A)} \circ \psi^{-1} = (\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U\cap V\cap A)}$$

είναι ομοιομορφισμοί σαν περιορισμοί ομοιομορφισμών. □

1.5 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας τοπολογικός άτλαντας επί του M και $\mathcal{A}^*$ ο αντίστοιχος μέγιστος. Τότε τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}^*$ ορίζουν μια βάση για την τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ και $x \in A$, υπάρχει $(U,\phi) \in \mathcal{A}^*$ με $x \in U \subseteq A$. Πράγματι, αφού οι χάρτες του $\mathcal{A}$ καλύπτουν το M, υπάρχει $(V,\psi) \in \mathcal{A}$, με $x \in V$. Θέτοντας $U := V \cap A$, $\phi := \psi|_U$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

1.6 Ορισμός. Η τοπολογία που ορίζεται επί μιας πολλαπλότητας από ένα μέγιστο άτλαντα ονομάζεται **κανονική** τοπολογία της πολλαπλότητας.

Σε όλα τα επόμενα, όταν αναφερόμαστε στην τοπολογία μιας πολλαπλότητας $(M, \mathcal{A})$, θα εννοούμε την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η ανωτέρω τοπολογία μπορεί να οριστεί από οποιονδήποτε άτλαντα περιέχεται στον δεδομένο μέγιστο.

1.7 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας του M και έστω $\mathcal{A}^*$ ο μοναδικός μέγιστος άτλαντας που περιέχει τον $\mathcal{A}$. Συμβολίζουμε με $\tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau_{\mathcal{A}^*}$ τις αντίστοιχες τοπολογίες επί του M. Τότε $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}^*}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο τοπολογίες έχουν την ίδια βάση. Πράγματι, από την Πρόταση 1.5, η $\tau_{\mathcal{A}}$ έχει βάση που αποτελείται από τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}^*$. Παρόμοια, η $\tau_{\mathcal{A}^*}$ έχει βάση που αποτελείται από τα πεδία ορισμού των χαρτών του $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^*$. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, δύο τοπολογικά συμβιβαστοί άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουν τον ίδιο μέγιστο $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, άρα ορίζουν επί του M την ίδια τοπολογία. Πράγματι,

$$\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}^*} = \tau_{\mathcal{B}^*} = \tau_{\mathcal{B}}.$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης:

1.8 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ άτλαντες επί του M, που ορίζουν επί του M την ίδια τοπολογία τ. Τότε $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι τοπολογικά συμβιβαστοί.*

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Τότε $U \cap V \in \tau$ και $\phi|_{U\cap V}$, $\psi|_{U\cap V}$ είναι ομοιομορφισμοί. Άρα $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά σαν εικόνες ανοιχτών συνόλων μέσω ομοιομορφισμών και $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός σαν σύνθεση ομοιομορφισμών. □

Συνδυάζοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα, παίρνουμε το επόμενο

1.9 Θεώρημα. *Οι άτλαντες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ επί του M είναι τοπολογικά συμβιβαστοί, αν και μόνον αν ορίζουν την ίδια τοπολογία επί του M.* □

Σε μερικές περιπτώσεις, εκτός από την κανονική τοπολογία, μια πολλαπλότητα M μπορεί επίσης να έχει μια άλλη τοπολογία τ (π.χ. η σφαίρα S^2 έχει τη σχετική τοπολογία, σαν υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$). Στην επόμενη πρόταση συγκρίνουμε τις δύο τοπολογίες $\tau_{\mathcal{A}}$ και τ.

1.10 Πρόταση. *Έστω (M, τ) ένας τοπολογικός χώρος, εφοδιασμένος με έναν άτλαντα $\mathcal{A}$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i) $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

ii) Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι $U \in \tau$ και $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός ως προς την τ (όπου U έχει τη σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου (M, τ), και το $\phi(U)$ έχει την σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$).

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $i) \Rightarrow ii)$ είναι γνωστή από την Πρόταση 1.3. Αποδεικνύουμε το αντίστροφο.

Έστω $A \in \tau$. Θα αποδείξουμε ότι $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θεωρούμε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Επειδή $U \in \tau$, παίρνουμε ότι $U \cap A \in \tau$, δηλαδή $U \cap A$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U (ως προς τ). Επομένως, ο ομοιομορφισμός (ως προς τ) ϕ στέλνει το $U \cap A$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$, το οποίο, με τη σειρά του, είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, σαν εικόνα χάρτη. Άρα, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $\phi(U \cap A) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό. Δηλαδή (βλ. Ορισμό 1.1), $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$.

Αντίστροφα, έστω $B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι $B \in \tau$. Θεωρούμε και $x \in B$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Από την υπόθεση, $U \in \tau$. Επειδή $B \in \tau_{\mathcal{A}}$, από τον ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, $\phi(B \cap U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, επομένως και του $\phi(U)$. Συνεπώς, ο ομοιομορφισμός ϕ^{-1} στέλνει το ανοιχτό υποσύνολο $\phi(B \cap U)$ του $\phi(U)$ στο ανοιχτό $B \cap U$ του U (ως προς τ). Έτσι έχουμε αποδείξει ότι, για κάθε $B \in \tau_{\mathcal{A}}$ και κάθε $x \in B$, υπάρχει $U \cap B \in \tau$ με $x \in U \cap B \subseteq B$. Άρα $B \in \tau$ και $\tau_{\mathcal{A}} \subseteq \tau$. □

Μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$, εφοδιασμένη με την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$, πάντοτε έχει ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα:

1.11 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί του M. Τότε $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ είναι ένας T_1-χώρος, τοπικά συμπαγής, τοπικά συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ είναι T_1: Έστω $x, y \in M$ με $x \neq y$. Υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Αν $y \notin U$, τότε $U \in \tau_{\mathcal{A}}$ είναι η ζητούμενη περιοχή. Αν $y \in U$, θεωρούμε το σημεία $\phi(x) \neq \phi(y) \in \phi(U)$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}^m$ (και ο $\phi(U)$) είναι T_1, υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq \phi(U)$, με $\phi(x) \in A$ και $\phi(y) \notin A$. Τότε $\phi^{-1}(A)$ είναι η ζητούμενη περιοχή.

Αποδεικνύουμε τώρα τις άλλες ιδιότητες: Έστω $x \in M$ και A ανοιχτή περιοχή του x. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $x \in U \cap A$ και $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\phi(x)$ στον $\mathbb{R}^m$. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon > 0$, με

$$\phi(x) \in \widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2) \subseteq B(\phi(x), \varepsilon) \subseteq \phi(U \cap A).$$

Παρατηρούμε ότι η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2)$ είναι μια συμπαγής, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική περιοχή του $\phi(x)$. Επειδή οι ομοιομορφισμοί διατηρούν τις προηγούμενες ιδιότητες, $\phi^{-1}(\widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2)) \subseteq U \cap A \subseteq A$ είναι η ζητούμενη συμπαγής, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική περιοχή του x. □

Οι προηγούμενες ιδιότητες της κανονικής τοπολογίας είναι τοπικές, δηλαδή αναφέρονται στις περιοχές ενός τυχαίου σημείου. Οι ισχυρότερες ιδιότητες (Hausdorff, συμπάγεια, συνεκτικότητα και κατά τόξα συνεκτικότητα) δεν εξασφαλίζονται σε μια πολλαπλότητα, όπως μπορεί κανείς να δει στα επόμενα Παραδείγματα.

1.12 Παραδείγματα.

(Α) Η κανονική τοπολογία του $(\mathbb{R}^m, \mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})\})$ είναι η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}^m$, που τον κάνει **μιά Hausdorff, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική, μη συμπαγή πολλαπλότητα.**

(Β) Η κανονική τοπολογία που ορίζεται στην μοναδιαία σφαίρα από τον άτλαντα των στερεογραφικών προβολών (ή αυτόν των ημισφαιρίων) είναι η σχετική τοπολογία που ορίζεται από συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^m$, και κάνει την S^2 μιά **Hausdorff, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική, συμπαγή πολλαπλότητα**.

(Γ) Οποιαδήποτε μη τεμνόμενα ανοιχτά $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ έχουν ένωση $A \cup B$ που είναι πολλαπαπλότητα, με άτλαντα αποτελούμενο από τον ολικό χάρτη $(A \cup B, \mathrm{id}_{A\cup B})$. Η κανονική της τοπολογία, που συμπίπτει με την σχετική τοπολογία, κάνει την $A \cup B$ μια **Hausdorff, μη συμπαγή, μη συνεκτική και μη κατά τόξα συνεκτική πολλαπλότητα.**

Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι ο χώρος $GL(n, \mathbb{R})$: Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων, που συμπίπτει με τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n^2}$ μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$\Phi : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2},$$

που στέλνει κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$ στο διάνυσμα της μορφής

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}).$$

Το ζεύγος $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\, \Phi)$ είναι ολικός χάρτης του $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \to \det(A)$$

είναι συνεχής, επομένως η **γενική γραμμική ομάδα**

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_*),$$

δηλαδή, το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων, είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Επομένως, το ζεύγος $(GL(n, \mathbb{R}),\, \Phi|_{GL(n,\mathbb{R})})$ είναι ένας n^2–διάστατος (ολικός) χάρτης του $GL(n, \mathbb{R})$, και

$$\mathcal{A} = \{(GL(n, \mathbb{R}),\, \Phi|_{GL(n,\mathbb{R})})\}$$

είναι ένας n^2-διάστατος διαφορικός άτλαντας. Θεωρούμε την $GL(n,\mathbb{R})$ εφοδιασμένη με τον αντίστοιχο μέγιστο άτλαντα. Ορίζουμε τα επόμενα υποσύνολα του $GL(n,\mathbb{R})$:

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det(A) > 0\},$$
$$GL^-(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det(A) < 0\}.$$

Προφανώς,

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(0,+\infty) \subseteq GL(n,\mathbb{R}),$$
$$GL^-(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(-\infty,0) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$$

είναι ανοιχτά και

$$GL^+(n,\mathbb{R}) \cap GL^-(n,\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Επομένως η $GL(n,\mathbb{R})$ καλύπτεται από δύο ανοιχτά, μη κενά, ξένα σύνολα. Δηλαδή, δεν είναι συνεκτικός χώρος. Πιό συγκεκριμένα, έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $GL^+(n,\mathbb{R})$ και $GL^-(n,\mathbb{R})$.

(Δ) **Μιά μη–Hausdorff πολλαπλότητα** (Reeb-Haefliger, 1957): Θεωρούμε το σύνολο

$$M := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}.$$

Ορίζουμε τα ζεύγη (U_1,ϕ_1) και (U_2,ϕ_2) με:

$$U_1 := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \phi_1 := pr_1|U_1 : U_1 \to \mathbb{R},$$
$$U_2 := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}_*\} \cup \{(0,1)\}, \quad \phi_2 := pr_1|U_2 : U_2 \to \mathbb{R},$$

όπου $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη. Προφανώς, ϕ_1, ϕ_2 είναι 1–1 απεικονίσεις με $\phi_1(U_1) = \phi_2(U_2) = \mathbb{R}$.

Άρα είναι χάρτες που καλύπτουν M. Ακόμη είναι διαφορικά συμβιβαστοί: Πράγματι, $U_1 \cap U_2 = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}_*\}$, επομένως

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}_* \subseteq \mathbb{R} \text{ (ανοιχτό)}.$$

Η απεικόνιση μεταφοράς

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} = id_{\mathbb{R}_*},$$

είναι μια $\mathcal{C}^\infty$–απεικόνιση. Σαν αποτέλεσμα, $\mathcal{A} = \{(U_1,\phi_1), (U_2,\phi_2)\}$ είναι ένας άτλαντας επί του M και $(M,\mathcal{A}^*)$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα.

Όμως ο τοπολογικός χώρος $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι Hausdorff. Για να δείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία στο M, που δεν έχουν μη τεμνόμενες ανοιχτές περιοχές. Πράγματι, θεωρούμε τα σημεία (0,0) και (0,1) και τυχαίες ανοιχτές (ως προς $\tau_{\mathcal{A}}$) περιοχές τους, A και B, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με το ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, $\phi_1(A \cap U_1)$ και $\phi_2(B \cap U_2)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επειδή $(0,0) \in A \cap U_1$ και $(0,1) \in B \cap U_2$, συμπεραίνουμε ότι $0 = \phi_1(0,0) = \phi_2(0,1) \in \phi_1(A \cap U_1) \cap \phi_2(B \cap U_2)$, που είναι ένα ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έτσι περιέχει κάποιο $t_o \neq 0$. Παρατηρούμε ότι $\phi_1(t_o, 0) = t_o \in \phi_1(A \cap U_1)$, άρα $(t_o, 0) \in A \cap U_1$. Ομοια $(t_o, 0) \in B \cap U_2$, άρα $(t_o, 0) \in A \cap B$. Δηλαδή, έχουμε αποδείξει ότι κάθε ζεύγος ανοιχτών περιοχών των (0,0) και (0,1) τέμνεται, επομένως το M δεν είναι χώρος Hausdorff.

Δίνουμε τώρα μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για τους χάρτες μιας πολλαπλότητας που εξασφαλίζει ότι ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff.

1.14 Πρόταση. *Μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ είναι χώρος Hausdorff, αν και μόνον αν, για κάθε $x \neq y \in M$, υπάρχουν (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, τέτοιοι ώστε:*

$$x \in U,\ y \in V \ \textit{ και }\ U \cap V = \emptyset.$$

Απόδειξη. Αν υπάρχουν τέτοιοι χάρτες, προφανώς το M είναι χώρος Hausdorff. Αντίστροφα, έστω M Hausdorff. Τότε, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα A και B, με $x \in A, y \in B$ και $A \cap B = \emptyset$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών ενός μέγιστου άτλαντα είναι βάση για την κανονική τοπολογία (βλ. Πρόταση 1.5) υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U \subseteq A$ και $y \in V \subseteq B$. Προφανώς $U \cap V = \emptyset$. □

Η συμπάγεια συνεπάγεται περιορισμούς στον άτλαντα μιας πολλαπλότητας, όπως μπορούμε να δούμε στην επόμενη

1.15 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί του M, τέτοιος ώστε $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ να είναι συμπαγής χώρος. Τότε ο $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον δύο χάρτες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνον ένας (ολικός) χάρτης (M, ϕ). Τότε $\phi(M)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$ (από τον ορισμό του χάρτη)· είναι επίσης συμπαγές (σαν εικόνα του συμπαγούς M μέσω της συνεχούς ϕ), δηλαδή είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή $\mathbb{R}^m$ είναι συνεκτικός, $\phi(M)$ είναι ή $\mathbb{R}^m$ ή $\emptyset$. Επειδή $\mathbb{R}^m$ δεν είναι φραγμένο, κατ' ανάγκη έχουν $\phi(M) = \emptyset$, άτοπο. □

Επειδή κάθε πολλαπλότητα είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτική, κάθε συνεκτική πολλαπλότητα είναι επίσης κατά τόξα συνεκτική. Μια άλλη ιδιότητα των συνεκτικών πολλαπλοτήτων είναι η σταθερή διάσταση, όπως φαίνεται στην επόμενη

1.16 Πρόταση. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι συνεκτικός χώρος ως προς την κανονική τοπολογία, τότε οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση.*

Απόδειξη. Έστω για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ το σύνολο όλων των n-διάστατων χαρτών του $\mathcal{A}$. Τότε τα σύνολα

$$M_n := \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}_n} U, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι ανοιχτά, μη τεμνόμενα υποσύνολα του M, και κάποια από αυτά είναι μη κενά. Επομένως, κάθε μη κενό M_n είναι μια συνεκτική συνιστώσα του M. Αν ο M είναι συνεκτικός, μόνο μια τέτοια υπάρχει, και όλοι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι τα ανοιχτά υποσύνολα μιάς πολλαπλότητας κληρονομούν τη δομή πολλαπλότητας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

1.17 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του M και $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{A}|_A := \{(U \cap A,\, \phi|_{U\cap A}) : (U,\phi) \in \mathcal{A} \text{ με } U \cap A \neq \emptyset\}$$

είναι ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του A. Ιδιαιτέρως, αν $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος, τότε $\mathcal{A}|_A$ είναι επίσης μέγιστος.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.4, τα στοιχεία του $\mathcal{A}|_A$ είναι χάρτες επί του M που ανήκουν στον $\mathcal{A}^*$. Προφανώς είναι επίσης χάρτες του A, καλύπτουν το A (αφού για κάθε $x \in A$ υπάρχει $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, επομένως $x \in A \cap U$) και είναι συμβιβαστοί μεταξύ τους (αφού ανήκουν στον ίδιο άτλαντα $\mathcal{A}^*$). Σαν αποτέλεσμα, ο $\mathcal{A}|_A$ είναι ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του A.

Έστω τώρα ότι ο $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος και έστω (V,ψ) ένας χάρτης του A συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}|_A$. Θα δείξουμε ότι $(V,\psi) \in \mathcal{A}|_A$. Έστω $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap V \neq \emptyset$. Επειδή (V,ψ) και $(U\cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι συμβιβαστοί, τα σύνολα $\phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V)$ και $\psi(U \cap A \cap V)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^n$ και οι απεικονίσεις

$$\psi \circ \phi|_{U\cap A}^{-1} : \phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap A \cap V),$$
$$\phi|_{U\cap A} \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap A \cap V) \longrightarrow \phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες. Όμως, αφού $A \cap V = V$,

$$\phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V) = \phi(U \cap A \cap V) = \phi(U \cap V),$$
$$\psi(U \cap A \cap V) = \psi(U \cap V)$$

και

$$\psi \circ \phi|_{U\cap A}^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(U\cap V)},$$
$$\phi|_{U\cap A} \circ \psi^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U\cap V)},$$

δηλαδή, οι χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) είναι συμβιβαστοί. Άρα $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, επομένως $(V \cap A,\, \psi|_{V\cap A}) = (V, \psi) \in \mathcal{A}|_A$. $\square$

Θα λέμε ότι η διαφορική πολλαπλότητα $(A, (\mathcal{A}|_A)^*)$ που ορίστηκε στην προηγούμενη πρόταση είναι μια **ανοιχτή υποπολλαπλότητα** του $(M, \mathcal{A}^*)$.

ΜΑΘΗΜΑ 04

1 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

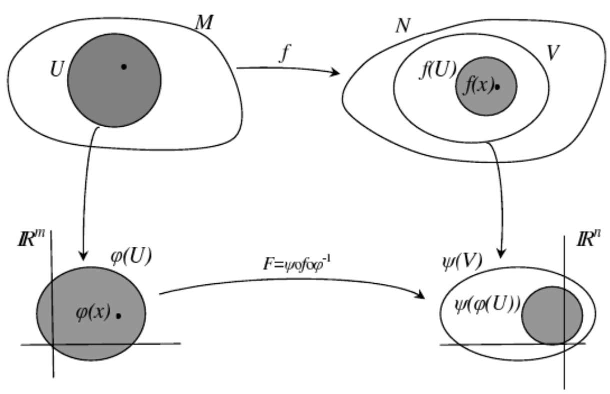
Θα ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων, γενικεύοντας έτσι τη συνήθη διαφορισιμότητα απεικονίσεων μεταξύ ευκλείδειων χώρων. Η αντίστοιχη έννοια της παραγώγου (ή του διαφορικού) θα ορισθεί αργότερα, πάνω σε κατάλληλους γραμμικούς χώρους (τους εφαπτόμενους χώρους), που είναι προσαρτημένοι στα σημεία της πολλαπλότητας.

Σε όλη την παρούσα Παράγραφο, υποθέτουμε ότι $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες με αντίστοιχες διαστάσεις m και n.

1.1 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : M \to N$ ονομάζεται $\mathcal{C}^k$**–διαφορίσιμη στο** $x \in M$, αν υπάρχουν $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι ώστε: $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ και η απεικόνιση

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ (σύμφωνα με τη συνήθη έννοια της διαφορισιμότητας σε ευκλείδειους χώρους). Ονομάζουμε την απεικόνιση F **τοπική παράσταση** της f μέσω των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ).



Μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ονομάζεται $\mathcal{C}^k$**–διαφορίσιμη**, αν είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, σε κάθε $x \in M$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^k(M, N)$ το σύνολο των $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ των πολλαπλοτήτων M και N.

Στα επόμενα, λέγοντας *διαφορίσιμη* απεικόνιση, εννοούμε $\mathcal{C}^\infty$*–διαφορίσιμη* απεικόνιση.

Είναι σημαντικό ότι η διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης δεν εξαρτάται από την επιλογή των χαρτών. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την

1.2 Πρόταση. *Έστω $f : M \to N$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Τότε, για κάθε ζεύγος από χάρτες $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ και $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{B}$ με $x \in U_1$, και $f(U_1) \subseteq V_1$, η τοπική παράσταση*

$$F_1 := \psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \to \psi_1(V_1)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi_1(x)$.

Απόδειξη. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο x, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες του ορισμού. Έστω $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ και $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{B}$ με $x \in U_1$ και $f(U_1) \subseteq V_1$. Θα δείξουμε ότι η τοπική παράσταση F_1 της f μέσω των (U_1, ϕ_1) και (V_1, ψ_1) είναι διαφορίσιμη στο $\phi_1(x)$. Αρκεί να βρούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του $\phi_1(U_1)$, τέτοιο ώστε $\phi_1(x) \in A$ και $F_1|_A$ να είναι $\mathcal{C}^\infty$-απεικόνιση στο $\phi_1(x)$.

Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, ϕ), (U_1, ϕ_1) και (V, ψ), (V_1, ψ_1), έχουμε ότι οι

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi_1^{-1} &: \phi_1(U_1 \cap U) \to \phi(U_1 \cap U), \\ \psi_1 \circ \psi^{-1} &: \psi(V \cap V_1) \to \psi(V \cap V_1) \end{aligned}$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$-απεικονίσεις (σε όλο το πεδίο ορισμού τους). Έστω $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ η τοπική παράσταση της f μέσω των (U, ϕ) και (V, ψ), που από την υπόθεση είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Επειδή το $\phi(U \cap U_1)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$, ο περιορισμός

$$F|_{\phi(U \cap U_1)} : \phi(U \cap U_1) \to \psi(V \cap V_1)$$

είναι διαφορίσιμος στο $\phi(x)$ (σαν περιορισμός μιας διαφορίσιμης απεικόνισης σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της). Επομένως, έχουμε το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\phi_1(U_1) \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[d, dashed, "F_1"'] & \phi_1(U \cap U_1) \arrow[r, "\phi \circ \phi_1^{-1}"] \arrow[d, "F_1|_{\phi_1(U \cap U_1)}"'] & \phi(U \cap U_1) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "F|_{\phi(U \cap U_1)}"] & \phi(U) \arrow[d, dashed, "F"] \\
\psi_1(V_1) \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \psi_1(V \cap V_1) & \psi(V \cap V_1) \arrow[l, "\psi_1 \circ \psi^{-1}"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \psi(V)
\end{tikzcd}$$

Άρα, βρίσκουμε ότι

$$F_1|_{\phi_1(U \cap U_1)} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ F|_{\phi(U \cap U_1)} \circ (\phi \circ \phi_1^{-1}),$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο σημείο $\phi_1(x)$, σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Θέτοντας $A := \phi_1(U \cap U_1)$ παίρνουμε το αποτέλεσμα. $\square$

1.3 Πρόταση. *Μια απεικόνιση $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ που είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, είναι συνεχής στο x.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ και

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Τότε η F, αφού είναι διαφορίσιμη, είναι επίσης συνεχής στο $\phi(x)$. Επειδή οι ϕ και ψ είναι ομοιομορφισμοί, η

$$f|_U = \psi^{-1} \circ F \circ \phi : U \to V$$

είναι συνεχής στο x. Επομένως η f είναι συνεχής στο x. $\square$

1.4 Παρατηρήσεις. (1) Ας υποθέσουμε ότι η διαφορική δομή του M (αντίστ. του N) ορίζεται από τον μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}'$ (αντίστ. $\mathcal{B}'$), που περιέχει τον δοθέντα άτλαντα $\mathcal{A}$ (αντίστ. $\mathcal{B}$) του M (αντίστ. του N). Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για να ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα μιας $f : M \to N$ στο $x \in M$, αρκεί να ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα της τοπικής παράστασης F, για δύο χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$. Δηλαδή, αρκεί να ελέξουμε τη διαφορισιμότητα της F για τους δεδομένους χάρτες που ανήκουν στους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.

Αυτό είναι ιδιαιτέρως χρήσιμο στην περίπτωση μιας πολλαπλότητας της οποίας η διαφορική δομή εισάγεται από συγκεκριμένους (βολικούς) άτλαντες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να περιοριστούμε στον άτλαντα $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$, στην περίπτωση της σφαίρα S^2 μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους δύο χάρτες της στερεογραφικής προβολής, κλπ.

(2) Στην Ανάλυση, η διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης έχει απόλυτη σημασία. Στο πλαίσιο των πολλαπλοτήτων, μια απεικόνιση μπορεί να είναι ή να μην είναι διαφορίσιμη, ανάλογα με την επιλογή της διαφορικής δομής (: μέγιστος άτλαντας) που θεωρείται. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A}$ είναι ο συνήθης μέγιστος άτλαντας στο $\mathbb{R}$, ο επαγόμενος από τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, και $\mathcal{B}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας ο επαγόμενος από τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \psi)$ (βλ. Άσκηση 8 από τις Ασκήσεις 01), τότε η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^{1/3}$$

δεν είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, αλλά είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

1.5 Θεώρημα. *(Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος I) Υποθέτουμε ότι οι $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ και $(Z, \mathcal{C})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες και ότι οι απεικονίσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ είναι διαφορίσιμες στα $x \in X$ και $f(x) \in Y$, αντίστοιχα. Τότε η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο x.*

Απόδειξη. Επειδή η g είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$, υπάρχουν χάρτες $(W, \chi) \in \mathcal{C}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $f(x) \in V$, $g(V) \subseteq W$ και η τοπική παράσταση

$$\chi \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \chi(W)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\psi(f(x))$. Η συνέχεια της f στο x συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq X$, με $x \in A$ και $f(A) \subseteq V$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών ενός μέγιστου άτλαντα σχηματίζουν μια βάση για την κανονική τοπολογία, υπάρχει ένας χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \subseteq A$. Τότε $f(U) \subseteq V$ και η αντίστοιχη τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ) του X και (W, χ) του Z. Τότε $x \in U$, $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, και η τοπική παράσταση

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \to \chi(W)$$

είναι διαφορίσιμη σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. □

Το Θεώρημα 1.5 είναι μέρος του κανόνα της αλυσίδας για απεικονίσεις που ορίζονται σε πολλαπλότητες. Η πλήρης μορφή του κανόνα της αλυσίδας θα δοθεί αργότερα, όταν θα αποδείξουμε ένα τύπο για το διαφορικό της σύνθεσης.

2 Παραδείγματα

Οι επόμενες προτάσεις παρέχουν μερικά παραδείγματα διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Αν οι ευκλείδειοι χώροι θεωρούνται σαν πολλαπλότητες με την συνήθη διαφορική δομή, τότε οι διαφορίσιμες απεικονίσεις με την έννοια του Ορισμού 1.1 συμπίπτουν με τις συνήθεις διαφορίσιμες απεικονίσεις του Απειροστικού Λογισμού:

2.1 Πρόταση. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f : A \to \mathbb{R}^m$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων $(A, \{(A, id_A)\}')$ και $(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}')$, αν και μόνον αν η f είναι διαφορίσιμη σαν (τοπικά ορισμένη) απεικόνιση μεταξύ ευκλείδειων χώρων.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι χάρτες (A, id_A) και $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ είναι κατάλληλοι για να θεωρήσουμε τοπική παράσταση της f σε κάθε σημείο $x \in A$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων, αν και μόνον αν η τοπική παράσταση

$$id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ (id_A)^{-1} : id_A(A) \to id_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n),$$

δηλαδή η απεικόνιση

$$f : A \to \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορίσιμη, με τη συνήθη έννοια. □

2.2 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Τότε η απεικόνιση $id_M\colon M\to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $x\in M$ και $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ με $x\in U$. Παρατηρούμε ότι $id_M(U)=U\subseteq U$, δηλαδή, υπάρχει τοπική παράσταση της id_M ως προς τους χάρτες (U,ϕ) και (U,ϕ)
$$\phi\circ id_M\circ\phi^{-1}=id_{\phi(U)}:\phi(U)\longrightarrow\phi(U)$$
που είναι διαφορίσιμη. □

2.3 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $(A,\mathcal{A}|_A)$ ανοιχτή υποπολλαπλότητά της. Τότε η κανονική εμφύτευση $i\colon A\to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $x\in A$ και $(U,\phi)\in\mathcal{A}|_A\subseteq\mathcal{A}$ με $x\in U$. Προφανώς, η τοπική παράσταση
$$\phi\circ i\circ\phi^{-1}=id_{\phi(U)}:\phi(U)\longrightarrow\phi(U)$$
της i ως προς τους χάρτες $(U,\phi)\in\mathcal{A}|_A$ και $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ υπάρχει και είναι διαφορίσιμη. □

2.4 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $M\times N$ εφοδιασμένο με τον διαφορικό άτλαντα $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})'$. Τότε οι κανονικές προβολές $p_M\colon M\times N\to M$ και $p_N\colon M\times N\to N$ είναι διαφορίσιμες.*

Απόδειξη. Έστω $(x,y)\in M\times N$ και έστω $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ με $x\in U$ και $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $y\in V$. Θεωρούμε το ζεύγος των χαρτών $(U\times V,\phi\times\psi)$ επί $M\times N$ και (U,ϕ) επί του M. Τότε $(x,y)\in U\times V$, $p_M(U\times V)=U$ και η τοπική παράσταση της p_M ως προς τους ανωτέρω χάρτες είναι η κανονική προβολή
$$\begin{gathered}\phi\circ p_M\circ(\phi\times\psi)^{-1}=P_{\phi(U)}:\phi(U)\times\psi(V)\longrightarrow\phi(U):\\(h,k)\longmapsto h,\end{gathered}$$
που είναι διαφορίσιμη. Ανάλογα δείχνουμε ότι η p_N είναι επίσης διαφορίσιμη. □

2.5 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $M\times N$ εφοδιασμένο με τον διαφορικό άτλαντα $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})'$. Έστω και ένα σταθεροποιημένο σημείο $(x_o,y_o)\in M\times N$. Τότε οι κανονικές εμφυτεύσεις*
$$\begin{gathered}i_M:M\longrightarrow M\times N:i_M(x)=(x,y_o)\\i_N:N\longrightarrow M\times N:i_N(y)=(x_0,y)\end{gathered}$$
είναι διαφορίσιμες.

Απόδειξη. Δείχνουμε την διαφορισιμότητα της i_M: Έστω $x \in M$. Υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y_o \in V$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ) και $(U \times V, \phi \times \psi)$. Τότε $x \in U$, $i_M(U) = U \times \{y_o\} \subseteq U \times V$ και η τοπική παράσταση της i_M μέσω των ανωτέρω χαρτών

$$(\phi \times \psi) \circ i_M \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \psi(V)$$
$$(\phi \times \psi) \circ i_M \circ \phi^{-1}(h) = (\phi \times \psi)(\phi^{-1}(h), y_o) = (h, \psi(y_o)), \quad \forall\, h \in \phi(U)$$

είναι διαφορίσιμη. □

Θα μελετήσουμε τώρα δύο ειδικές περιπτώσεις που εμφανίζονται συχνά στο πλαίσιό μας. Πρώτα θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα με τη συνήθη διαφορική δομή. Αν θεωρήσουμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ στο $\mathbb{R}$, τότε κάθε χάρτης (U, ϕ) επί του M έχει την ιδιότητα $f(U) \subseteq \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε χάρτη (U, ϕ) επί του M με $x \in U$, η τοπική παράσταση

$$f \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

ορίζεται. Παίρνουμε λοιπόν την

2.6 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια πραγματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, αν υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τέτοιος ώστε η (1) να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f : (M, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}\}$$

όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του M είναι μια μεταθετική, προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα.

Η δεύτερη περίπτωση είναι, πιο γενικά, μια διανυσματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}^n$. Αν $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι οι συνήθεις προβολές, ορίζονται οι απεικονίσεις

$$f_i := pr_i \circ f : M \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

η διαφορισιμότητα των οποίων περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση. Τότε, παίρνουμε

2.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια διανυσματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, αν και μόνον αν όλες οι πραγματικές απεικονίσεις (2) είναι διαφορίσιμες.*

Απόδειξη. Αν f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε κάθε f_i είναι διαφορίσιμη στο x, σαν σύνθεση της f με τη γραμμική απεικόνιση pr_i.

Αντίστροφα, έστω f_i διαφορίσιμη στο x, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έστω και (U, ϕ) ένας χάρτης επί του M με $x \in U$. Θεωρούμε την τοπική παράσταση

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, αν και μόνον αν οι συνιστώσες της

$$pr_i \circ (f \circ \phi^{-1}) = f_i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμες στο $\phi(x)$. Το τελευταίο ισχύει, αφού οι απεικονίσεις $pr_i \circ (f \circ \phi^{-1})$ είναι οι τοπικές παραστάσεις της f_i μέσω των χαρτών (U, ϕ) και $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$. □

3 Αμφιδιαφορίσεις

3.1 Ορισμός. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων ονομάζεται **αμφιδιαφόριση**, αν είναι αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι διαφορίσιμη.

3.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Τότε $\phi : U \to \phi(U)$ είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων U και $\phi(U)$ των M και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε U και $\phi(U)$ εφοδιασμένα με τους ολικούς χάρτες (U, ϕ) και $(\phi(U), \mathrm{id}_{\phi(U)})$. Οι τοπικές παραστάσεις των ϕ και ϕ^{-1} συμπίπτουν με την αμφιδιαφόριση

$$\mathrm{id}_{\phi(U)} = \mathrm{id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 2.5 και 3.2 έχουμε

3.3 Πόρισμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Τότε οι συντεταγμένες $x_i = pr_i \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες.*

Το αντίστροφο της Πρόταση 3.2 είναι επίσης αληθινό:

3.4 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω U και A ανοιχτά υποσύνολα των M και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Αν $\phi : U \to A$ είναι μια αμφιδιαφόριση (ως προς την δομή ανοιχτής υποπολλαπλότητας), τότε (U, ϕ) είναι ένας χάρτης του $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Επειδή η ϕ είναι αμφιμονοσήμαντη και $A = \phi(U)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, (U, ϕ) είναι ένας m-διάστατος χάρτης επί του M. Για να αποδείξουμε ότι $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι (U, ϕ) είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστός με κάθε χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.

Έστω $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Αν $U \cap V = \emptyset$, οι χάρτες είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί. Αν $U \cap V \neq \emptyset$, τότε $U \cap V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο των U και V, έτσι οι ομοιομορφισμοί ϕ και ψ το στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ των $\phi(U)$ και $\psi(V)$, επομένως του $\mathbb{R}^m$. Από την άλλη μεριά, αφού ϕ και ψ είναι αμφιδιαφορίσεις, το ίδιο είναι και οι περιορισμοί

$$\phi|_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow \phi(U \cap V) \quad \text{και} \quad \psi|_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

στο ανοιχτό υποσύνολο $U \cap V$ των πεδίων ορισμού τους. Σαν αποτέλεσμα, η σύνθεση

$$\psi \circ \phi^{-1} \equiv \psi|_{U\cap V} \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι αμφιδιαφόριση, που αποδεικνύει τη $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστότητα των (U, ϕ) και (V, ψ) και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στο επόμενο θεώρημα, δείχνουμε ότι η σύμπτωση δύο διαφορικών δομών επί ενός συνόλου M είναι ισοδύναμη με την αμφιδιαφορισιμότητα της ταυτοτικής απεικόνισης id_M ως προς αυτές τις δύο δομές. Πιό συγκεκριμένα, έχουμε

3.5 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο μέγιστοι διαφορικοί άτλαντες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, επί του συνόλου M. Τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Οι διαφορικές δομές συμπίπτουν, δηλαδή, $m = n$ και $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(ii) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_M : M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) $\Rightarrow$ (ii) είναι άμεση· αρκεί να ελέγξουμε την διαφορισιμότητα της id_M ως προς τους (U, ϕ) και (U, ϕ), για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (i): Θεωρούμε δύο τυχαίους χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $U \cap V \neq \emptyset$ και θα αποδείξτε ότι είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί. Επειδή $\mathrm{id}_M : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$ είναι μια αμφιδιαφόριση, είναι επίσης ομοιομορφισμός, έτσι στέλνει τα ανοιχτά σύνολα του $\tau_{\mathcal{A}}$ σε ανοιχτά σύνολα του $\tau_{\mathcal{B}}$ και αντιστρόφως. Δηλαδή, $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{B}} =: \tau$. Σαν αποτέλεσμα, $U \cap V \in \tau$, επομένως οι ομοιομορφισμοί ϕ και ψ τα στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ των $\phi(U)$ και $\psi(V)$, αντίστοιχα, που είναι ανοιχτά υποσύνολα ττων $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα. Επομένως, $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα των $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα.

Από την άλλη μεριά, $(U \cap V, \phi|_{U\cap V}) \in \mathcal{A}$ και $(U \cap V, \psi|_{U\cap V}) \in \mathcal{B}$ (βλ. Λήμμα 1.4 του Μαθήματος 03) και $\mathrm{id}_M(U \cap V) \subseteq U \cap V$, έτσι μπορούμε να θεωρούμε την τοπική παράσταση της id_M ως προς αυτούς τους δύο χάρτες

$$\psi|_{U\cap V} \circ \mathrm{id}_M \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

που είναι αμφιδιαφόριση, διότι id_M είναι αμφιδιαφόριση. Επειδή

$$\psi|_{U\cap V} \circ \mathrm{id}_M \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} = \psi \circ \phi^{-1},$$

παίρνουμε ότι (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^\infty$–συμβιβαστοί. Έτσι, κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–συμβιβαστός με κάθε χάρτη στον $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}$ είναι μέγιστος. Έπεται ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Αλλά $\mathcal{A}$ είναι επίσης μέγιστος, επομένως $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Τότε προφανώς επίσης $m = n$. $\square$

3.6 Παρατήρηση. Το Θεώρημα 3.5 επίσης ισχύει για τοπολογικές πολλαπλότητες. Σε αυτή την περίπτωση, η id_M είναι απλά ένας ομοιομορφισμός. Η απόδειξη δουλεύει όπως στην ανωτέρω διαφορική περίπτωση, αν οι ομοιομορφισμοί πάρουν την θέση των αμφιδιαφορίσεων.

4 Τοπική Διαφορισιμότητα

4.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Μια **τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του** M **στο** x είναι μια πραγματική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι μια ανοιχτή περιοχή του x στο M και f είναι διαφορίσιμη στο x ως προς τη δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας. Ανάλογα, μια **τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του** M είναι μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι μια ανοιχτή υποπολλαπλότητα του M.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτάσεων επί του M στο x. Σημειώνουμε ότι $f, g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ συνεπάγεται ότι $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις στα ανοιχτά σύνολα $A, B \subseteq M$ με $x \in A \cap B$, αλλά, γενικά, $A \neq B$.

4.2 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m, n, αντίστοιχα, και έστω $f : M \to N$ μια απεικόνιση. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Η απεικόνιση f είναι διαφορίσιμη.

(ii) Η απεικόνιση f είναι συνεχής και, για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση g επί του N, η απεικόνιση $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$, όπου A είναι το πεδίο ορισμού της g, είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε είναι συνεχής, λόγω της Πρότασης 1.3. Ακόμη, αν $g : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί της N, όπου $A \subseteq N$ ανοιχτό, τότε $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό και $f|_{f^{-1}(A)}$ είναι διαφορίσιμη σαν περιορισμός μιας διαφορίσιμης απεικόνισης σε ανοιχτό σύνολο. Επομένως, η $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$ είναι σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η **ii)** ισχύει. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε ένα τυχαίο σημείο $x \in M$. Έστω $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x) \in V$. Επειδή η f

είναι συνεχής, $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x, επομένως υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Τότε $f(U) \subseteq V$, δηλαδή, η τοπική παράσταση $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ της f μέσω (U, ϕ) και (V, ψ) ορίζεται. Αποδεικνύουμε ότι η $F : \phi(U) \to \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$: Η τελευταία, επειδή είναι διανυσματική απεικόνιση, είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν οι συνιστώσες $pr_j \circ F : \phi(U) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες, για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Επειδή $\psi : V \to \psi(V)$ είναι αμφιδιαφόριση με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, οι συνιστώσες $\psi_j := pr_j \circ \psi$ είναι διαφορίσιμες, για κάθε $j = 1, \ldots, n$, δηλαδή, κάθε $\psi_j : V \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του N. Από την υπόθεση, κάθε σύνθεση $\psi_j \circ f : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, που, με τη σειρά του, συνεπάγεται ότι η τοπική της παράσταση $\psi_j \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη. Το αποτέλεσμα τώρα ακολουθεί, από το γεγονός ότι $\psi_j \circ f \circ \phi^{-1}\phi(U) = pr_j \circ F$. $\square$

4.3 Σχόλιο. Το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων επί μιας πολλαπλότητας καθορίζει τη δομή πολλαπλότητας. Δηλαδή, αν αυτό το σύνολο είναι γνωστό, τότε ο μέγιστος άτλαντας είναι γνωστός. Για αυτό το λόγο, το σύνολο των τοπικά οριζόμενων διαφορίσιμων συναρτήσεων χρησιμοποιείται αντί ενός άτλαντα, για ένα ισοδύναμο ορισμό της πολλαπλότητας. Η απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας είναι πέραν του σκοπού αυτών των σημειώσεων.

ΜΑΘΗΜΑ 05

1 Ο εφαπτόμενος χώρος

Η συνήθης έννοια της διαφορισιμότητας (στον Απειροστικό Λογισμό) στοχεύει στην τοπική προσέγγιση μιας απεικόνισης $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που είναι διαφορίσιμη στο $x \in U$ με μια γραμμική απεικόνιση $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, που ονομάζεται διαφορικό. Για να πάρουμε την ανάλογη προσέγγιση στις πολλαπλότητες, χρειάζεται πρώτα να προσαρτήσουμε στα σημεία της πολλαπλότητας γραμμικούς χώρους, που είναι τα πεδία ορισμού και τιμών του διαφορικού. Ενώ στην Ανάλυση τα διαφορικά ορίζονται μεταξύ των σταθερών χώρων $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, στις πολλαπλότητες αυτοί οι χώροι αλλάζουν με το σημείο x.

Σε όλα τα επόμενα, θεωρούμε μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$.

1.1 Ορισμός. Μιά **διαφορίσιμη καμπύλη** της πολλαπλότητας M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha : J \to M$, όπου J είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ με $0 \in J$ (όπου J είναι εφοδιασμένο με τη δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}$).

Σε πολλές περιπτώσεις, για ευκολία, θεωρούμε το J σαν συμμετρικό διάστημα της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Επίσης λέμε ότι η καμπύλη α **περνά από το σημείο** $x \in M$, αν $\alpha(0) = x$.

1.2 Ορισμός. Έστω α, β διαφορίσιμες καμπύλες επί του M που περνούν από το $x \in M$. Θα λέμε ότι α, β **εφάπτονται στο** x, ή ότι **είναι ισοδύναμες στο** x, αν υπάρχει ένα χάρτης (U, ϕ) επί του M με $x \in U$ και

(1) $$D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0).$$

1.3 Παρατηρήσεις. 1) Για το ορισμό της επαφής δύο καμπυλών, αρκεί να είναι $\mathcal{C}^1$–διαφορίσιμες, αφού δεν απαιτείται η ύπαρξη των διαφορικών ανώτερης τάξης.

2) Επειδή $D(\phi \circ \alpha)(0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, έχουμε ότι

$$[D(\phi \circ \alpha)(0)](\lambda) = \lambda[D(\phi \circ \alpha)(0)](1),$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι η συνθήκη (1) του ορισμού είναι ισοδύναμη με την ισότητα $D(\phi \circ \alpha)(0)](1) = [D(\phi \circ \beta)(0)](1)$, δηλαδή την ισότητα

(2) $$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0),$$

που, με τη σειρά της, είναι ισοδύναμη με

(3) $$(x_i \circ \alpha)'(0) = (x_i \circ \beta)'(0), \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,$$

όπου $x_i = u_i \circ \phi$, $i = 1, \ldots, m$ είναι οι τοπικές συντεταγμένες του χάρτη (U, ϕ).

Η επαφή των καμπυλών που ορίστηκε ανωτέρω, είναι ανεξάρτητη του χάρτης (U, ϕ). Πράγματι, ισχύει η επόμενη πρόταση:

1.4 Πρόταση. *Αν α, β είναι εφαπτόμενες στο $x \in M$, τότε, για κάθε χάρτη (V, ψ) επί του M με $x \in V$ έχουμε $D(\psi \circ \alpha)(0) = D(\psi \circ \beta)(0)$.*

Απόδειξη. Επειδή α, β είναι εφαπτόμενες στο $x = \alpha(0) = \beta(0)$, υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) με $x \in U$ και $D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0)$. Αν (V, ψ) είναι ένας άλλος χάρτης με $x \in V$, τότε

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \alpha)(0) &= D((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))(0) \\ &= D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \alpha)(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0) \\ &= D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \beta)(0)) \circ D(\phi \circ \beta)(0) \\ &= D((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \beta))(0) \\ &= D(\psi \circ \beta)(0). \end{aligned}$$ □

1.5 Πόρισμα. *Η επαφή των καμπυλών σε ένα σημείο $x \in M$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Λόγω του προηγούμενη πορίσματος, το σύνολο των διαφορίσιμων καμπυλών που περνούν από το $x \in M$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $[(\alpha, x)]$ την κλάση μιας τέτοιας καμπύλης α.

1.6 Ορισμός. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας όλων των διαφορίσιμων καμπυλών επί του M που περνούν από το x θα λέγεται **ο εφαπτόμενος χώρος του** M **στο** x και θα συμβολίζεται με T_xM. Τα στοιχεία του T_xM θα λέγονται **εφαπτόμενα διανύσματα στο** x και συνήθως θα συμβολίζονται με u, v, w, κλπ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο T_xM μπορεί να εφοδιαστεί με δομή διανυσματικού χώρου.

1.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Ακόμη, έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε η απεικόνιση*

$$\bar{\phi} : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^m : [(\alpha, x)] \mapsto [D(\phi \circ \alpha)(0)](1) = (\phi \circ \alpha)'(0)$$

είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη. (ι) Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\bar{\phi}$ είναι καλά ορισμένη, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης α που ορίζει την κλάση $[(\alpha, x)]$. Πράγματι, έστω $\beta \in [(\alpha, x)]$· δηλαδή, έστω β μια διαφορίσιμη καμπύλη επί του M, εφαπτόμενη στην α. Από τον ορισμό της επαφής, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, που είναι η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Αποδεικνύουμε ότι $\bar{\phi}$ είναι 1–1: Έστω $[(\alpha, x)], [(\beta, x)] \in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = \bar{\phi}([(\beta, x)])$. Τότε, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, δηλαδή, α και β είναι εφαπτόμενες στο x και $[(\alpha, x)] = [(\beta, x)]$.

(iii) Τέλος δείχνουμε ότι $\bar{\phi}$ είναι επί: Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m : t \mapsto \phi(x) + th.$$

Τότε ε είναι διαφορίσιμη με $\varepsilon(0) = \phi(x)$ και $\varepsilon'(0) = h$. Επειδή ε είναι συνεχής, και $\phi(U)$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $\phi(x) = \varepsilon(0)$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα J που περιέχει το 0, με $\varepsilon(J) \subseteq \phi(U)$, έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση $\alpha := \phi^{-1} \circ \varepsilon|_J : J \to U \subseteq M$. Τότε α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη επί του M με $\alpha(0) = x$ και

$$\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \varepsilon'(0) = h. \qquad \square$$

1.8 Πόρισμα. *Για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\phi}^{-1}(h) = [(\alpha, x)]$, όπου*

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(x) + th),$$

με t σε ένα κατάλληλο διάστημα J.

Η απεικόνιση $\bar{\phi}$ ταυτίζει τα σύνολα T_xM και $\mathbb{R}^m$. Επομένως, μπορούμε να μεταφέρουμε την αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^m$ στο T_xM, θέτοντας

$$\begin{aligned} u+v &:= \bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(u)+\bar{\phi}(v)) \\ \lambda u &:= \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)) \end{aligned} \tag{4}$$

για κάθε $u, v \in T_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η άλγεβική δομή του T_xM μπορεί να οριστεί μέσω της σχέσης

$$\lambda u + \mu v := \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)+\mu\bar{\phi}(v)),$$

επομένως παίρνουμε την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, θέτοντας $u+v := 1u+1v$ και $\lambda u := \lambda u + 0u$.

Προφανώς έχουμε το επόμενο

1.9 Θεώρημα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε οι πράξεις (4) ορίζουν στον T_xM δομή διανυσματικού χώρου, έτσι ώστε $\bar{\phi}$ να γίνεται ένας γραμμικός ισομορφισμός.*

Αν $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε υπάρχουν δύο απεικονίσεις

$$\bar{\phi}, \bar{\psi} : T_xM \to \mathbb{R}^m.$$

Γενικά, $\bar{\phi} \neq \bar{\psi}$. Όμως, ορίζουν την ίδια δομή διανυσματικού χώρου (: τις ίδιες πράξεις) επί του M: Δηλαδή, αν

$$\lambda \circ u \oplus \mu \circ v := \bar{\psi}^{-1}(\lambda\bar{\psi}(u)+\mu\bar{\psi}(v)),$$

τότε

$$\lambda \circ u \oplus \mu \circ v = \lambda u + \mu v,$$

η, ισοδύναμα,

$$\bar{\psi}^{-1}(\lambda\bar{\psi}(u)+\mu\bar{\psi}(v)) = \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)+\mu\bar{\phi}(v)). \tag{5}$$

Για να αποδείξουμε την ανωτέρω ισότητα, πρώτα χρειαζόμαστε το επόμενο

1.10 Λήμμα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε*

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))$$

Απόδειξη. Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Επειδή $\bar{\phi}$ είναι ένας ισομορφισμός, υπάρχει ένα μοναδικό $[(\alpha, x)] \in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = h$. Επομένως,

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([(\alpha, x)]) = [D(\psi \circ \alpha)(0)](1)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)(0)](1)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi \circ \alpha(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0)](1)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))]((\phi \circ \alpha)'(0))\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](h),\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

1.11 Παρατήρηση. Στην προηγούμενη απόδειξη, ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[(\alpha, x)]$ είναι η καμπύλη $\phi^{-1} \circ \varepsilon|_J$, όπου $\varepsilon(t) = \phi(x) + th$. Χρησιμοποιώντας αυτή την συγκεκριμένη καμπύλη, έχουμε

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([(\phi^{-1} \circ \varepsilon|_J, x)])\\ &= (\psi \circ \phi^{-1} \circ \varepsilon)'(0)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \varepsilon)(0)](1)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\varepsilon(0)) \circ D(\varepsilon)(0)](1)\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](\varepsilon'(0))\\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](h).\end{aligned}$$

1.12 Θεώρημα. *Η δομή διανυσματικού χώρου του T_xM δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη (U, ϕ) που την οριζει.*

Απόδειξη. Αν (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε (5) είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda\bar{\psi}(u) + \mu\bar{\psi}(v) = (\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(\lambda\bar{\phi}(u) + \mu\bar{\phi}(v)),$$

που είναι προφανής, αφού $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. □

1.13 Ορισμός. Θεωρούμε ένα χάρτη (U, ϕ) και $x \in U$. Αν $\{e_i\}_{i=1,\ldots,m}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$, τότε το σύνολο $\{\bar{\phi}^{-1}(e_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ είναι μια βάση του T_xM, ονομαζόμενη **κανονική βάση του** T_xM **ως προς τον** (U, ϕ). Τα διανύσματα $\bar{\phi}^{-1}(e_i)$ λέγονται **κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του** T_xM **ως προς τον** (U, ϕ) και συμβολίζονται με

(6) $$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := \bar{\phi}^{-1}(e_i)\,, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Στην ειδική περίπτωση της τετριμμένης 1–διάστατης πολλαπλότητας $\mathbb{R}$, το κανονικό βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα στον $T_t\mathbb{R}$, ως προς το χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ συμβολίζεται με

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t := (\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(1). \tag{7}$$

Επομένως, κάθε $u \in T_xM$ μπορεί να πάρει την μορφή

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x . \tag{8}$$

Εφαρμόζοντας την $\bar{\phi}$ στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε

$$\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\phi}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι

$$\bar{\phi}(u) = (\phi \circ \alpha)'(0) = ((x_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (x_m \circ \alpha)'(0)),$$

όπου $x_i = pr_i \circ \phi$ οι συντεταγμένες του χάρτη (U, ϕ), βρίσκουμε για τους συντελεστές λ_i ότι

$$\lambda_i = (x_i \circ \alpha)'(0), \qquad i = 1, \dots, m, \tag{9}$$

και για το διάνυσμα u ότι

$$u = \sum_{i=1}^{m} (x_i \circ \alpha)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x . \tag{10}$$

ΜΑΘΗΜΑ 06

1 Σημειακό Διαφορικό

1.1 Ορισμός. Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων και $x \in M$. Ονομάζουμε **διαφορικό της** f **στο** x ή **παράγωγο της** f **στο** x την απεικόνιση

$$T_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N : [(\alpha, x)] \mapsto [(f \circ \alpha, f(x))].$$

1.2 Λήμμα. *Το διαφορικό $T_x f$ μιας διαφορίσιμης απεικόνισης f σε ένα σημείο x είναι καλά ορισμένο.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι $[(f \circ \alpha, f(x))] \in T_{f(x)} N$, αφού $f \circ \alpha$ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη στην N που περνά από το $f(\alpha(0)) = f(x)$, για κάθε $[(\alpha, x)] \in T_x M$.

Αποδεικνύουμε ότι $[(f \circ \alpha, f(x))]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης α: Αν β είναι άλλη διαφορίσιμη καμπύλη στην κλάση $[(\alpha, x)]$, τότε $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, ή, ισοδύναμα,

$$D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0),$$

για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U$. Επειδή f είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$, $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη. Έτσι, για τις διαφορίσιμες καμπύλες $f \circ \alpha$ και $f \circ \beta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
D(\psi \circ (f \circ \alpha))(0) &= D((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))(0) \\
&= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \alpha)(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0) \\
&= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \beta)(0)) \circ D(\phi \circ \beta)(0) \\
&= D((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \beta))(0) \\
&= D(\psi \circ (f \circ \beta))(0),
\end{aligned}$$

δηλαδή, $[(f \circ \alpha, f(x))] = [(f \circ \beta, f(x))]$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Θα δείξουμε τώρα ότι το διαφορικό $T_x f$ είναι γραμμική απεικόνιση. Πρώτα χρειαζόμαστε το

1.3 Λήμμα. *Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Αν (U, ϕ), (V, ψ) είναι χάρτες επί των M, N, αντίστοιχα, με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$, και $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f, τότε*

$$\bar{\psi} \circ T_x f = DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi}, \tag{1}$$

δηλαδή, το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "T_x f"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x)} N \arrow[d, "\bar{\psi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "DF(\phi(x))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Λόγω της διαφορισιμότητας της f στο x, η τοπική παράσταση F είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, έτσι το σύνηθες διαφορικό $DF(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ορίζεται. Θεωρούμε τους γραμμικούς ισομορφισμούς $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{\psi} : T_{f(x)} N \to \mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε ότι η (1) ισχύει: Έστω $[(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε

$$\begin{aligned} (DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi})([(\alpha, x)]) &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha(0)))](\bar{\phi}([(\alpha, x)])) \\ &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha(0)))]([D(\phi \circ \alpha)(0)](1)) \\ &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ (f \circ \alpha))(0)](1) \\ &= \bar{\psi}([(f \circ \alpha, f(x))]) = (\bar{\psi} \circ T_x f)([(\alpha, x)]) \end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. □

1.4 Πρόταση. *Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Τότε το διαφορικό $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ της f στο x είναι μια γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Λόγω του (1),

$$T_x f = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi},$$

δηλαδή, $T_x f$ είναι σύνθεση τριών γραμμικών απεικονίσεων. □

1.5 Παραδείγματα. (1) Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ είναι σταθερή, τότε η f είναι διαφορίσιμη και $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$. Πράγματι, έστω ένα $x \in M$ και έστω $y_o \in N$ η σταθερή τιμή της f. Υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $y_o \in V$. Έστω και ένας τυχαίος χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $f(U) = \{y_o\} \subseteq V$ και οι ανωτέρω χάρτες δίνουν τοπική παράσταση της f

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

που είναι σταθερή και ίση με $\psi(y_o)$, άρα διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα και η f είναι διαφορίσιμη, και για κάθε $u \in T_x M$, ισχύει

$$T_x f(u) = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(u) = \bar{\psi}^{-1}(0) = 0,$$

αφού $DF(h) = 0$, για κάθε $h \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, σαν διαφορικό σταθερής και $\bar{\psi}^{-1}(0) = 0$, επειδή η $\bar{\psi}^{-1}$ είναι γραμμική.

(2) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του σημειακού διαφορικού στην ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_M : M \to M$, παίρνουμε για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$, ότι

$$T_x \mathrm{id}_M(u) = [(\mathrm{id}_M \circ \alpha, \mathrm{id}_M(x))] = [(\alpha, x)] = u,$$

δηλ.

$$T_x \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_x M}, \tag{2}$$

για κάθε $x \in M$.

(3) Υποθέτουμε ότι $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Η απεικόνιση $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, αφού είναι διαφορίσιμη, έχει ένα διαφορικό $T_x \phi : T_x M \to T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ στο $\mathbb{R}^m$. Τότε $T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^m$ είναι ισόμορφοι, μέσω της $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}$. Υπολογίζουμε την σύνθεση $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi(u) &= \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}([(\phi \circ \alpha, \phi(x))]) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) \\ &= \bar{\phi}(u),\end{aligned}$$

δηλ.

$$\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi = \bar{\phi}. \tag{3}$$

και (ισοδύναμα) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "T_x\phi"] \arrow[dr, "\bar{\phi}"'] & T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Βλέπουμε συχνά στην βιβλιογραφία την ισότητα (3) γραμμένη σαν

$$T_x\phi \equiv \bar{\phi}$$

με τον ισομορφισμό $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}$ να παραλείπεται.

1.6 Θεώρημα. *(Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος II) Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ και $g : (N, \mathcal{B}) \to (P, \mathcal{C})$ είναι διαφορίσιμες στο $x \in M$ και $f(x) \in N$, αντίστοιχα, τότε*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf. \tag{4}$$

Απόδειξη. Έστω $[(\alpha, x)] \in T_xM$. Τότε

$$\begin{aligned} (T_x(g \circ f))([(\alpha, x)]) &= [((g \circ f) \circ \alpha, (g \circ f)(x))] \\ &= [(g \circ (f \circ \alpha), g(f(x)))] \\ &= T_{f(x)}g([(f \circ \alpha, f(x))]) \\ &= T_{f(x)}g(T_xf([(\alpha, x)])) \\ &= (T_{f(x)}g \circ T_xf)([(\alpha, x)]) \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Αποδεικνύουμε τώρα το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

1.7 Θεώρημα. *(Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν το διαφορικό της f σε ένα σημείο $x_o \in M$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε η f είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση στο x_o· δηλαδή, υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα $U_o \subseteq M$ και $V_o \subseteq N$, τέτοια ώστε $x_o \in U_o$, $f(U_o) = V_o$ και $f|_{U_o} : U_o \to V_o$ να είναι μια αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Ας υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις των M και N είναι m και n, αντίστοιχα. Επειδή f είναι διαφορίσιμη στο x_o, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $x_o \in U_o$, $f(U_o) \subseteq V_o$ και η τοπική παράσταση

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x_o)$, δηλαδή, υπάρχει το γραμμικό διαφορικό

$$DF(\phi(x_o)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Λόγω της ισότητας (1), παίρνουμε ότι

$$DF(\phi(x_o)) = \bar{\psi} \circ T_{x_o} f \circ \bar{\phi}^{-1},$$

που μας δίνει ότι $DF(\phi(x_o))$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, σαν σύνθεση τριών γραμμικών ισομορφισμών, και, κατ' ανάγκη, $m = n$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης του Απειροστικού Λογισμού, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subseteq \phi(U)$ και $B \subseteq \psi(V)$ με $\phi(x_o) \in A$, $F(A) = B$ και $F|_A : A \to B$ αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $U_o := \phi^{-1}(A) \subseteq U$ και $V_o := \psi^{-1}(B) \subseteq V$. Τότε U_o και V_o είναι ανοιχτά υποσύνολα των U και V, σαν αντίστροφες εικόνες των ανοιχτών συνόλων A και B μέσω των συνεχών απεικονίσεων ϕ και ψ, αντίστοιχα, $x_o \in U_o$,

$$\begin{aligned} f(U_o) &= \psi^{-1} \circ F \circ \phi(U_o) \\ &= \psi^{-1} \circ F(A) \\ &= \psi^{-1}(B) = V_o \end{aligned}$$

και $f|_{U_o} = \psi^{-1}|_B \circ F|_A \circ \phi|_{U_o}$ είναι αμφιδιαφόριση σαν σύνθεση τριών αμφιδιαφορίσεων. □

1.8 Πόρισμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν f είναι αμφιμονοσήμαντη και $T_x f$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, για κάθε $x \in M$, τότε η f είναι αμφιδιαφόριση.*

2 Υπόχωροι και Χώροι-γινόμενα ...

Δύο χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν εφαπτόμενους χώρους δίνονται στις επόμενες δύο προτάσεις.

2.1 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω $A \subseteq M$ ανοιχτό και $x \in A$. Αν A θεωρείται σαν ανοιχτή υποπολλαπλότητα του M, τότε υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\Phi : T_xA \longrightarrow T_xM.$$

Σημείωση. Γνωρίζουμε ότι οι T_xA και T_xM είναι m-διάστατοι διανυσματικοί χώροι, άρα είναι ισόμορφοι μεταξύ τους (και με το $\mathbb{R}^m$). Για δύο m-διάστατους διανυσματικούς χώρους X και Y μπορούμε να φτιάξουμε ένα ισομορφισμό f μεταξύ τους, θεωρώντας μια βάση $\{x_1, \ldots, x_m\}$ του X, μια βάση $\{y_1, \ldots, y_m\}$ του Y, θέτοντας $f(x_i) = y_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο ισομορφισμός που βρίσκουμε αλλάζει αν αλλάξουμε τις χρησιμοποιούμενες βάσεις. Η λέξη «φυσικός» στην ανωτέρω εκφώνηση σημαίνει οτι υπάρχει ισομορφισμός που ορίζεται χωρίς την χρήση βάσεων, άρα χωρίς να εξαρτάται από θεωρούμενους χάρτες.

Απόδειξη. Αν $\alpha\colon I \to A$ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη στο A, είναι επίσης μια διαφορίσιμη καμπύλη στο M. Ας συμβολίσουμε με $[(\alpha, x)]_A$ και $[(\alpha, x)]_M$ τις κλάσεις ισοδυναμίας της α στα A και M, αντίστοιχα. Θεωρώντας το διαφορικό της φυσικής εμφύτευσης $i_A\colon A \to M$ στο x, παίρνουμε

$$T_xi_A : T_xA \longrightarrow T_xM : [(\alpha, x)]_A \longmapsto [(i_A \circ \alpha, i_A(x))]_M = [(\alpha, x)]_M.$$

Ακόμη, έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $U \subseteq A$ και $x \in U$. Τότε $(U, \phi) \in \mathcal{A}|_A$. Συμβολίζουμε με $\bar{\phi}_M\colon T_xM \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{\phi}_A\colon T_xA \to \mathbb{R}^m$ τους αντίστοιχους ισομορφισμούς. Προφανώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_xA \arrow[rr, "T_xi"] \arrow[dr, "\bar{\phi}_A"'] & & T_xM \arrow[dl, "\bar{\phi}_M"] \\ & \mathbb{R}^m & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό: Για κάθε $[(\alpha, x)]_A \in T_xA$, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_M \circ T_xi_A([(\alpha, x)]_A) &= \bar{\phi}_M([(i_A \circ \alpha, i_A(x)]) = \bar{\phi}_M([(\alpha, x)]_M) \\ &= (\phi \circ \alpha)'(0) = \bar{\phi}_A([(\alpha, x)]_A). \end{aligned}$$

Έτσι, το ζητούμενος ισομορφισμός είναι

$$\Phi := T_xi = \bar{\phi}_M^{-1} \circ \bar{\phi}_A.$$

□

2.2 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων $m,n\in\mathbb{N}$, αντίστοιχα. Για κάθε $x\in M$ και $y\in N$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\Phi : T_{(x,y)}(M\times N)\longrightarrow T_xM\times T_yN.$$

Απόδειξη. Έστω $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ με $x\in U$ και $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $y\in V$. Θεωρούμε τον χάρτη $(U\times V,\phi\times\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ και τους ισομορφισμούς $\bar{\phi}:T_xM\to\mathbb{R}^m$, $\bar{\psi}:T_yN\to\mathbb{R}^n$ και $\overline{\phi\times\psi}:T_{(x,y)}(M\times N)\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. Ακόμη, θεωρούμε τις (διαφορίσιμες) προβολές $p_M\colon M\times N\to M$ και $p_N\colon M\times N\to N$, και τα διαφορικά τους

$$\begin{aligned}T_{(x,y)}p_M &: T_{(x,y)}(M\times N)\to T_xM\\ T_{(x,y)}p_N &: T_{(x,y)}(M\times N)\to T_yN.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : I\to M\times N$ που περνά από το (x,y), συνθέτοντας με τις προβολές παίρνουμε δύο διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha_M=p_M\circ\alpha : I\to M$ και $\alpha_N=p_N\circ\alpha : I\to N$. Θεωρώντας το αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα $[(\alpha,(x,y)]$, έχουμε

$$\begin{aligned}T_{(x,y)}p_M([(\alpha,(x,y))]) &= [(p_M\circ\alpha,p_M(x,y))]=[(\alpha_M,x)],\\ T_{(x,y)}p_N([(\alpha,(x,y))]) &= [(p_N\circ\alpha,p_N(x,y))]=[(\alpha_N,y)].\end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} T_{(x,y)}(M\times N) \arrow[rr, "{(T_{(x,y)}p_M,T_{(x,y)}p_N)}"] \arrow[dr, "\overline{\phi\times\psi}"'] & & T_xM\times T_yN \arrow[dl, "\bar{\phi}\times\bar{\psi}"] \\ & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Πράγματι, για κάθε $[(\alpha,(x,y))]\in T_{(x,y)}(M\times N)$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\bar{\phi}\times\bar{\psi})\circ(T_{(x,y)}p_M,T_{(x,y)}p_N)([(\alpha,(x,y))]) &= (\bar{\phi}\times\bar{\psi})([(\alpha_M,x)],[(\alpha_N,y)])\\ &= (\bar{\phi}([(\alpha_M,x)]),\bar{\psi}([(\alpha_N,y)])\\ &= ((\phi\circ\alpha_M)'(0),(\psi\circ\alpha_N)'(0))\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overline{\phi\times\psi}([(\alpha,(x,y))]) &= ((\phi\times\psi)\circ\alpha)'(0)\\ &= ((\phi\times\psi)\circ(\alpha_M,\alpha_N))'(0)\\ &= ((\phi\circ\alpha_M)'(0),(\psi\circ\alpha_N)'(0))\end{aligned}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ότι το ζεύγος

$$(T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N) = (\bar{\psi}^{-1} \times \bar{\phi}^{-1}) \circ \phi \bar{\times} \psi$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός σαν σύνθεση δύο τέτοιων, άρα ο ζητούμενος ισομορφισμός Φ είναι ο

$$\Phi := (T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N) : T_{(x,y)}(M \times N) \longrightarrow T_xM \times T_yN. \tag{5}$$ □

Με τις υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, συμβολίζουμε με

$$P_{T_xM} : T_xM \times T_yN \longrightarrow T_xM$$
$$P_{T_yN} : T_xM \times T_yN \longrightarrow T_yN$$

τις κανονικές προβολές. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$T_{(x,y)}p_M = P_{T_xM} \circ \Phi,$$
$$T_{(x,y)}p_N = P_{T_yN} \circ \Phi.$$

3 ... και λίγος Διαφορικός Λογισμός

3.1 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, $(P, \mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m, n και p, αντίστοιχα και $f : P \to M \times N$ μια απεικόνιση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν οι $f_M = pr_M \circ f : P \to M$ και $f_N = pr_N \circ f : P \to N$ είναι διαφορίσιμες. Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $p \in P$,*

$$\Phi \circ T_pf = (Tpf_M, T_pf_N), \tag{6}$$

όπου Φ ο ισομορφισμός (5).

Απόδειξη. Έστω f διαφορίσιμη. Τότε προφανώς οι f_M και f_N είναι διαφορίσιμες, σαν συνθέσεις διαφορίσιμων. Αντίστροφα, έστω f_M και f_N διαφορίσιμες. Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη. Παίρνουμε ένα τυχαίο $z \in P$ και δύο χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y \in V$. Επειδή οι διαφορίσιμες f_M και f_N είναι συνεχείς, οι αντίστροφες εικόνες $f_M^{-1}(U)$ και $f_N^{-1}(V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα της P, με $z \in f_M^{-1}(U) \cap f_N^{-1}(V)$. Οι χάρτες του μέγιστου άτλαντα $\mathcal{C}$ είναι βάση της τοπολογίας του P, άρα υπάρχει χάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{C}$

με $z \in W \subseteq f_M^{-1}(U) \cap f_N^{-1}(V)$, και $f(W) \subseteq f_M(W) \times f_N(W) \subseteq U \times V$. Δηλ. οι χάρτες (W, χ) και $(U \times V, \phi \times \psi)$ δίνουν τοπική παράσταση της $f = (f_M, f_N)$:

$$F = (\phi \times \psi) \circ f \circ \chi^{-1} : \chi(W) \longrightarrow \phi(U) \times \psi(V).$$

Εφαρμόζοντας την F σε ένα $h \in \chi(W) \subseteq \mathbb{R}^p$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(h) &= (\phi \times \psi) \circ f \circ \chi^{-1}(h) \\ &= (\phi \times \psi) \circ (f_M(\chi^{-1}(h)), f_N(\chi^{-1}(h))) \\ &= (\phi \circ f_M \circ \chi^{-1}(h), \psi \circ f_N \circ \chi^{-1}(h)) \end{aligned}$$

δηλ. η

$$F = (\phi \circ f_M \circ \chi^{-1}, \psi \circ f_N \circ \chi^{-1})$$

είναι διαφορίσιμη, αφού έχει παράγοντες τις τοπικές παραστάσεις των f_M, f_N, που είναι διαφορίσιμες.

Για την ισότητα (6), παρατηρούμε ότι για κάθε $u = [(\alpha, z)] \in T_z P$, ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi \circ T_z f(u) &= (T_{(x,y)} p_M, T_{(x,y)} p_N)([(f \circ \alpha, f(z))]) \\ &= (T_{(x,y)} p_M([(f \circ \alpha, f(z))]), T_{(x,y)} p_N([(f \circ \alpha, f(z))])) \\ &= ([(p_M \circ f \circ \alpha, p_M \circ f(z))], [(p_N \circ f \circ \alpha, p_N \circ f(z))]) \\ &= ([(f_M \circ \alpha, f_M(z))], [(f_N \circ \alpha, f_N(z))]) \\ &= (T_z f_M(u), T_z f_N(u)). \end{aligned}$$ □

Συχνά η ισότητα (6), με παράλειψη του ισομορφισμού Φ, γράφεται σαν ταύτιση

(7) $$T_p f \equiv (T p f_M, T_p f_N)$$

Έστω τώρα μια απεικόνιση $f : M \times N \to P$. Για ένα σταθεροποιημένο σημείο $(x_o, y_o) \in M \times N$, θεωρούμε τις **μερικές απεικονίσεις**

$$\begin{aligned} f_{x_o} &: N \longrightarrow P : y \mapsto f(x_o, y), \\ f_{y_o} &: M \longrightarrow P : x \mapsto f(x, y_o). \end{aligned}$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε f_{x_o} και f_{y_o} είναι διαφορίσιμες (βλ. Άσκ. 8, από τις Ασκήσεις 03). Έχουμε το επόμενο

3.2 Θεώρημα (Τύπος του Leibniz). *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, $(P, \mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \times N \to P$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ταύτιση του $T_{(x,y)}(M \times N)$ με το γινόμενο $T_xM \times T_yN$, για κάθε $(x, y) \in M \times N$, έχουμε*

$$T_{(x,y)}f(u, v) \equiv T_x f_y(u) + T_y f_x(v), \tag{8}$$

για κάθε $(u, v) \in T_xM \times T_yN$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $(x, y) \in M \times N$ και θεωρούμε ένα χάρτη $(W, \chi) \in \mathcal{C}$ με $f(x, y) \in W$. Επειδή η f είναι συνεχής, $f^{-1}(W)$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $(x, y) \in M \times N$, ως προς την τοπολογία-γινόμενο $\tau_{\mathcal{A}} \times \tau_{\mathcal{B}}$. Έτσι, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subseteq M$ και $B \subseteq N$ με $(x, y) \in A \times B \subseteq f^{-1}(V)$. Οι χάρτες ενός μέγιστου άτλαντα είναι ένα βάση για την κανονική τοπολογία, επομένως υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $(x, y) \in U \times V \subseteq A \times B \subseteq f^{-1}(W)$. Τότε το ζεύγος των χαρτών $(U \times V, \phi \times \psi)$, (W, χ) ορίζει τοπική παράσταση της f

$$F = \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1} : \phi(U) \times \psi(V) \longrightarrow \chi(W),$$

που είναι διαφορίσιμη στο $(\phi(x), \psi(y))$. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_xM \times T_yN \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\bar{\phi} \times \bar{\psi}"'] & T_{(x,y)}(M \times N) \arrow[r, "T_{(x,y)}f"] \arrow[d, "\overline{\phi \times \psi}"] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\
& \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "DF(\phi(x),\psi(y))"'] & \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

Έστω $w \in T_{(x,y)}(M \times N)$, που συμπίπτει με $(u, v) \in T_xM \times T_yN$ μέσω της ταύτισης (5). Τότε

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} \circ T_{(x,y)}f(w) &= [DF(\phi(x), \psi(y))] \circ [\overline{\phi \times \psi}](w) \\
&= [DF(\phi(x), \psi(y))] \circ (\bar{\phi} \times \bar{\psi})(u, v) = \\
&= [DF(\phi(x), \psi(y))](\bar{\phi}(u), \bar{\psi}(v)) = \\
&= [DF_{\psi(y)}(\phi(x))](\bar{\phi}(u)) + [DF_{\phi(x)}(\psi(y))](\bar{\psi}(v)).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
F_{\phi(x)}(k) &= \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1}(\phi(x), k) \\
&= \chi \circ f(x, \psi^{-1}(k)) \\
&= \chi \circ f_x \circ \psi^{-1}(k),
\end{aligned}$$

είναι η τοπική παράσταση της f_x μέσω (V, ψ) και (W, χ) και, παρόμοια,

$$F_{\psi(y)}(h) = \chi \circ f_y \circ \phi^{-1}(h),$$

είναι η τοπική παράσταση της f_y μέσω (U, ϕ) και (W, χ). Επομένως, έχουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "T_xf_y"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(\chi \circ f_y \circ \phi^{-1})(\phi(x))"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} T_yN \arrow[r, "T_yf_x"] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y))"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

από τα οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \circ T_{(x,y)}f(u, v) &= [D(\chi \circ f_y \circ \phi^{-1})(\phi(x))](\bar{\phi}(u)) \\ &\quad + [D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y))](\bar{\psi}(v)) \\ &= \bar{\chi} \circ T_xf_y(u) + \bar{\chi} \circ T_yf_x(v). \end{aligned}$$

Επειδή $\bar{\chi}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται τον ισχυρισμό. $\square$

3.3 Παραδείγματα. (Α) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και $x \in M$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ που οριζουν τοπική παράσταση $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1 \le i \le m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1 \le j \le n}$ του T_xM και $T_{f(x)}N$ ως προς τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ). Από τον ορισμό των κανονικών βάσεων, παίρνουμε ότι ο πίνακας του $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$ ως προς

$\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1\leq i\leq m}$ και $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ είναι ο I_m, ενώ ο πίνακας του $\bar{\psi} : T_{f(x)}N \to \mathbb{R}^n$ ως προς $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1\leq j\leq n}$ και $\{e_j\}_{1\leq j\leq n}$ είναι ο I_n. Έστω A ο πίνακας της $T_x f$ ως προς τις κανονικές βάσεις $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1\leq i\leq m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1\leq j\leq n}$. Η ισότητα (1) (βλ. Λήμμα 1.3) συνεπάγεται ότι

(9)
$$A = I_n \cdot A = J_{\phi(x)}F \cdot I_m = J_{\phi(x)}F.$$

(Β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_s\mathbb{R} \arrow[r, "T_s f"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}"'] & T_{f(s)}\mathbb{R} \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "D(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1})(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(s))"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, επομένως, εφαρμόζοντας το $T_s f$ στο $\frac{d}{dt}|_s$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T_s f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) &= ((\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1} \circ Df(s) \circ \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \\
&= ((\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1} \circ Df(s))(1) \\
&= (\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(f'(s)) \\
&= f'(s)(\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(1) \\
&= f'(s)\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(s)}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

(10)
$$T_s f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) = f'(s)\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(s)},$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

(Γ) Έστω $\alpha : I \to M$ μια διαφορίσιμη καμπύλη στο M και $s \in I$. Συμβολίζουμε με $\dot{\alpha}(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα

(11)
$$\dot{\alpha}(s) := T_s\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \in T_{\alpha(s)}M$$

και το ονομάζουμε **το εφαπτόμενο διάνυσμα της α στο** s.

ΜΑΘΗΜΑ 07

1 Παραγωγίσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια άποψη των εφαπτόμενων διανυσμάτων που εξηγεί γιατί χρησιμοποιείται το σύμβολο $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ για τα κανονικά βασικά διανύσματα ενός χάρτη.

Σε όλη την παράγραφο $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

Υπενθυμίζουμε ότι μια *τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της* M *στο* $x \in M$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq M$ ανοιχτό με $x \in A$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$ το σύνολο αυτών των συναρτήσεων.

Για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, ορίζεται το σημειακό διαφορικό

$$T_x f : T_x M \to T_{f(x)}\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, το ζεύγος των χαρτών (U, ϕ) και $(\mathbb{R}, \mathbf{id}_\mathbb{R})$ δίνει τοπική παράσταση της f στο x

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "T_x f"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x)}\mathbb{R} \arrow[d, "\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε η κοινή τιμή των $\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}} \circ T_x f$ και $D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}$ στο u ισούται με τον πραγματικό αριθμό

$$\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}(T_x f(u)) = \overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}([(f \circ \alpha, f(x))]) = (\mathbf{id}_\mathbb{R} \circ f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Θα μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται η ανωτέρω παράσταση *όταν κρατάμε σταθερό το u και μεταβάλλουμε την συνάρτηση f*. Θέτουμε

$$\delta_u : \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \delta_u(f) := (f \circ \alpha)'(0). \tag{1}$$

Από την συζήτηση που έχει προηγηθεί προκύπτει ότι

$$\delta_u(f) = \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}(T_x f(u)) = D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(u). \tag{2}$$

1.1 Παρατήρηση. Η ισότητα (2) δείχνει ότι η παράσταση $\delta_u(f)$ συμπίπτει με την κατευθυνόμενη παράγωγο της τοπικής παράστασης $f \circ \phi^{-1}$ στο σημείο $\phi(x)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\bar{\phi}(u)$ (βλ. Παράρτημα Α, Ορισμός 1.18).

1.2 Πρόταση. *Η συνάρτηση (1) είναι καλά ορισμένη, δηλ. είναι ανεξάρτητη της καμπύλης α που υλοποιεί το u.*

Απόδειξη. Προφανές, αφού

$$\delta_u(f) = \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}(T_x f(u)),$$

και οι συναρτήσεις $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ και $T_x f$ είναι καλά ορισμένες, δηλ. ανεξάρτητες της καμπύλης που υλοποιεί το διάνυσμα στο οποίο εφαρμόζονται. □

Παρατηρούμε τώρα ότι στο σύνολο $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ ορίζονται:

(1) Μια *πρόσθεση*: αν $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ τότε οι f και g ορίζονται σε ανοιχτές περιοχές A και B του x, αντίστοιχα. Θέτοντας

$$f + g : A \cap B \to \mathbb{R} : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

παίρνουμε $f + g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

(2) Ένα *βαθμωτό γινόμενο*: αν $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, θέτοντας

$$\lambda f : A \to \mathbb{R} : (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

παίρνουμε $\lambda f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

(3) Ένα *γινόμενο*: αν $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ όπως στο (1), θέτοντας

$$fg : A \cap B \to \mathbb{R} : (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

παίρνουμε $fg \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες*

$$\delta_u(f+g) = \delta_u(f) + \delta_u(g) \tag{3}$$

$$\delta_u(\lambda f) = \lambda \delta_u(f) \tag{4}$$

$$\delta_u(fg) = \delta_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta_u(g) \tag{5}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(f+g) \circ \alpha = (f \circ \alpha) + (g \circ \alpha) \\
&(\lambda f) \circ \alpha = \lambda (f \circ \alpha) \\
&(fg) \circ \alpha = (f \circ \alpha)(g \circ \alpha).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\delta_u(f+g) &= ((f+g) \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)'(0) + (g \circ \alpha)'(0) \\
&= \delta_u(f) + \delta_u(g), \\
\delta_u(\lambda f) &= ((\lambda f) \circ \alpha)'(0) = (\lambda (f \circ \alpha))'(0) = \lambda (f \circ \alpha)'(0) \\
&= \lambda \cdot \delta_u(f), \\
\delta_u(fg) &= ((fg) \circ \alpha)'(0) = ((f \circ \alpha)(g \circ \alpha))'(0) \\
&= (f \circ \alpha)'(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)'(0) \\
&= \delta_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta_u(g)
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Οι ισότητες (3) και (4) κάνουν την δ_u να μοιάζει γραμμική (όμως δεν είναι· γιατί;). Η (5) λέγεται **συνθήκη Leibniz**.

Στα επόμενα, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θα γράφουμε και $u(f)$ αντί του $\delta_u(f)$.

1.4 Παραδείγματα. (Α) Θεωρούμε την παραγώγηση την ορισμένη από ένα βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$. Για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση

f παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x &:= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x (f) \\ &= D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))\left(\bar{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right) \\ &= D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))(e_i) \\ &= \left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)}\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} \tag{6}$$

(Β) Εφαρμόζοντας την (6) στη συντεταγμένη x_j (του ίδιου χάρτη (U,ϕ)), παίρνουμε

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial(x_j\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} = \left.\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} = \delta_{ij}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

(Γ) Έστω $u = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_x \in T_xM$. Θεωρώντας και τα δύο μέρη της προηγούμενης ισότητας σαν στοιχεία του D_xM και εφαρμόζοντας στο x_j, παίρνουμε

$$u(x_j) = (\sum_i \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x)(x_j) = \sum \lambda_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_x = \sum_i \lambda_i\delta_{ij} = \lambda_j.$$

Σαν αποτέλεσμα έχουμε

$$u = \sum_i u(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x . \tag{7}$$

(Δ) Συνδυάζοντας τώρα (6) και (7) παίρνουμε

$$u(f) = \sum_i u(x_i) \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \sum_i u(x_i) \left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} .$$

(Ε) Από τον τρόπο που ορίστηκε η παραγώγιση δ_u, έχουμε για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$, την ισότητα

$$u(f) = \bar{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}(T_x f(u)).$$

Η ανωτέρω ισότητα είναι συνήθως γραμμένη σαν

$$u(f) = T_x f(u) \tag{8}$$

με την ταύτιση $\overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}$ να παραλείπεται. Σημειώνουμε ότι στην (8) το δεξιό μέλος είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα ενώ το αριστερό είναι ένας πραγματικός αριθμός.

(Ζ) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση, $x \in M$, $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$ και g μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της N στο $f(x)$. Τότε $T_x f(u) \in T_{f(x)} N$ ορίζει μια παραγώγηση της $\mathcal{C}_{f(x)}(N)$ και $[g]_{f(x)} \in \mathcal{C}_{f(x)}(N)$. Εφαρμόζοντας το $T_x f(u)$ στην g παίρνουμε

$$[T_x f(u)](g) = [(f \circ \alpha, f(x))](g) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0).$$

Από την άλλη μεριά, $g \circ f$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του M στο x και εφαρμόζοντας την παραγώγηση που ορίζεται από το u στην $g \circ f$, έχουμε

$$u(g \circ f) = ((g \circ f) \circ \alpha)'(0)$$

επομένως

$$[T_x f(u)](g) = u(g \circ f). \tag{9}$$

(Η) Τώρα περιοριζόμαστε στην περίπτωση $M = \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}^m, \overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^m})$ και τα αντίστοιχα κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$, $i = 1, \ldots, m$, σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^m$. Τότε για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του $\mathbb{R}^m$ στο x, έχουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial (f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\mathrm{id}(x)} = \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_x .$$

(Θ) Στην ειδική περίπτωση $M = \mathbb{R}$, ο ολικός χάρτης $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ ορίζει στο $t \in \mathbb{R}$ ένα κανονικό βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t := \overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}^{-1}(1) \in T_t \mathbb{R}.$$

Αυτό το εφαπτόμενο διάνυσμα, θεωρούμενο σαν παραγώγηση και εφαρμοσμένο σε μια κατάλληλη f δίνει

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t (f) = \left.\frac{df}{dt}\right|_t = f'(t).$$

1.5 Ορισμός. Μια απεικόνιση $d : \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (3), (4) και (5) θα λέμε ότι είναι μια (**σημειακή**) **παραγώγιση** του συνόλου $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Συμβολίζουμε με D_xM το σύνολο των παραγωγίσεων του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Αν $d, d_1 \in D_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις κατά σημείο πράξεις

$$(d + d_1)(f) := d(f) + d_1(f) \tag{10}$$

$$(\lambda d)(f) := \lambda \cdot d(f) \tag{11}$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Είναι άμεσο ότι $d + d_1$ και λd είναι παραγωγήσεις του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι επίσης φανερό.

1.6 Λήμμα. *Το σύνολο D_xM με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζονται κατά σημείο είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.* □

Πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε παραγώγιση μηδενίζεται στις σταθερές συναρτήσεις: πράγματι, για την συνάρτηση $c_1 : M \to \mathbb{R}$ που παίρνει σταθερά την τιμή 1, από την συνθήκη Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned} d(c_1) &= d(c_1 \cdot c_1) = d(c_1)c_1(x) + c_1(x)d(c_1) = \\ &= 2d(c_1) \end{aligned}$$

επομένως συμπεραίνουμε ότι $d(c_1) = 0$. Για μια τυχαία σταθερή $c : M \to \mathbb{R}$, έχουμε $c = c \cdot c_1$, έτσι από την (4) παίρνουμε

$$d(c) = d(c \cdot c_1) = c \cdot d(c_1) = 0.$$

1.7 Θεώρημα. *Η απεικόνιση*

$$\delta : T_xM \longrightarrow D_xM : u \mapsto \delta(u) := \delta_u \tag{12}$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 1.3, έχουμε ότι η απεικόνιση (12) είναι καλά ορισμένη. Είναι επίσης γραμμική: για κάθε $u, v \in T_xM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, και για ένα τυχαίο χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$, έχουμε (βλ. (2))

$$\begin{aligned} \delta(\lambda u + v)(f) &= D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(\lambda u + v) \\ &= \lambda D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(u) + \\ &\qquad D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(v) \\ &= (\lambda\delta(u) + \delta(v))(f) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\delta(\lambda u + v) = \lambda\delta(u) + \delta(v).$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι δ είναι μονομορφισμός: Πράγματι, έστω $u = [(\alpha, x)]$, $v = [(\beta, x)] \in T_xM$ με $\delta(u) = \delta(v)$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ έχουμε

$$\delta_u(f) = \delta_v(f). \tag{13}$$

Θεωρώντας πάλι ένα χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$, και εφαρμόζοντας την ανωτέρω ισότητα στις συντεταγμένες $x_i \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$, παίρνουμε

$$(x_i \circ \alpha)'(0) = (x_i \circ \beta)'(0), \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0),$$

που, από τον ορισμό, συνεπάγεται $\alpha \overset{x}{\sim} \beta$ και $u = v$.

Για την απόδειξη του επί της δ χρειαζόμαστε το επόμενο

1.8 Λήμμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\phi(x) = 0$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$, υπάρχει ένα ανοιχτό $U_o \subseteq U$ με $x \in U_o$ έτσι ώστε*

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} x_i(y) f_i(y); \quad \forall\, y \in U_o, \tag{14}$$

$$f_i(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Απόδειξη του επί της δ: Θεωρούμε μια τυχαία παραγώγιση $d \in D_x(M)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in T_xM$ με $\delta_u = d$, που ισοδυναμεί με την ισότητα

$$u(f) = \delta_u(f) = \delta(f),$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\phi(x) = 0$ και θέτουμε

$$u = \sum_{i=1}^{m} d(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$

Επαληθεύουμε ότι $\delta_u = d$. Έστω τυχαία $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$. Τότε, γράφοντας την f με την μορφή (14), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\delta_u(f) = u(f) = u\left(f(x) + \sum_{i=1}^m x_i f_i\right) &= u(f(x)) + u\left(\sum_{i=1}^m x_i f_i\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^m u(x_i f_i) = \sum_{i=1}^m \big(u(x_i) f_i(x) + x_i(x) u(f_i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^m u(x_i) f_i(x)
\end{aligned}$$

και με ανάλογο τρόπο,

$$\begin{aligned}
d(f) = d\left(f(x) + \sum_{i=1}^m x_i f_i\right) &= d(f(x)) + d\left(\sum_{i=1}^m x_i f_i\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^m d(x_i f_i) = \sum_{i=1}^m (d(x_i) f_i(x) + x_i(x) d(f_i))) \\
&= \sum_{i=1}^m d(x_i) f_i(x)
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του διανύσματος u, έχουμε $u(x_i) = d(x_i)$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Επομένως, $\delta_u(f) = d(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$, δηλ. $\delta_u = d$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

2 Σπέρματα Διαφορίσιμων Συναρτήσεων

Όπως σημειώσαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, το σύνολο $\mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ είναι εφοδιασμένο με τις τρεις πράξεις (3), (4) και (5), οι οποίες όμως δεν ορίζουν κάποια αλγεβρική δομή. Παρατηρείστε για παράδειγμα, ότι η πρόσθεση έχει πολλά μηδενικά στοιχεία: για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $A \subseteq M$, με $x \in A$, κάθε σταθερά μηδενική συνάρτηση $0_B : B \to \mathbb{R}$ με B ανοιχτό που περιέχει το A, μας δίνει $f + 0_B = f$. Μπορούμε όμως να πάρουμε μια δομή πραγματικής άλγεβρας ταυτίζοντας τα στοιχεία του $\mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ που έχουν ίσους περιορισμούς σε κάποια υποπεριοχή των πεδίων ορισμού τους. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

2.1 Ορισμός. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U, V του x με $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Λέμε ότι f και g είναι **ισοδύναμες** στο x και γράφουμε $f \overset{x}{\sim} g$, αν υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq U \cap V$ με $x \in A$ και $f|_A = g|_A$.

Είναι προφανές ότι η ανωτέρω 'ισοδυναμία' είναι, πράγματι, μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση της f στο x θα λέγεται **το σπέρμα της** f **στο** x και θα συμβολίζεται με $[f]_x$. Το σύνολο αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας θα λέγεται **η άλγεβρα των διαφορίσιμων σπερμάτων του** M **στο** x και θα συμβολίζεται με $A_x^\infty(M)$.

Υπενθυμίζουμε και τον επόμενο ορισμό:

2.2 Ορισμός. Ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με τρεις πράξεις

$$A \times A \longrightarrow A : (a, b) \longmapsto a + b \tag{16}$$

$$\mathbb{R} \times A \longrightarrow A : (\lambda, a) \longmapsto \lambda a \tag{17}$$

$$A \times A \longrightarrow A : (a, b) \longmapsto ab \tag{18}$$

λέγεται (**πραγματική**) **άλγεβρα**, αν:

(i) με τις (16) και (17) είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος,

(ii) με τις (16) και (18) είναι δακτύλιος, και

(iii) για κάθε $a, b \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Ιδιαιτέρως, μια άλγεβρα λέγεται **μεταθετική** (αντ. **μοναδιαία**), αν είναι μεταθετικός (αντ. μοναδιαίος) δακτύλιος.

2.3 Πρόταση. *Το σύνολο $A_x^\infty(M)$ είναι μια πραγματική, μοναδιαία, μεταθετική άλγεβρα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τις αλγεβρικές πράξεις μέσω των ισοτήτων

$$[f]_x + [g]_x := [f + g]_x \tag{19}$$

$$\lambda[f]_x := [\lambda f]_x \tag{20}$$

$$[f]_x \cdot [g]_x := [fg]_x \tag{21}$$

για κάθε $[f]_x, [g]_x \in A_x^\infty(M)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτές οι ισότητες είναι καλά ορισμένες, δηλ. δεν εξαρτώνται από την επιλογή των απεικονίσεων f και g που αντιπροσωπεύουν τις κλάσεις ισοδυναμίας $[f]_x$

και $[g]_x$. Πράγματι, αν $U, U_1, V, V_1 \in \mathcal{N}(x)$ και $f : U \to \mathbb{R}$, $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, $g_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες, $f \overset{x}{\sim} f_1$ και $g \overset{x}{\sim} g_1$, τότε υπάρχουν ανοιχτά $A \subseteq U \cap U_1$ και $B \subseteq V \cap V_1$ με $f|_A = f_1|_A$ και $g|_B = g_1|_B$. Στο σύνολο $C := A \cap B \in \mathcal{N}(x)$, έχουμε $(f+g)|_C = (f_1+g_1)|_C$, δηλαδή, $[f+g]_x = [f_1+g_1]_x$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι (20) και (21) είναι επίσης καλά ορισμένες.

Είναι τετριμμένο να ελέγξουμε ότι οι ανωτέρω πράξεις κάνουν το $A_x^\infty(M)$ μια άλγεβρα με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Σημειώνουμε ότι το μηδενικό στοιχείο και η μονάδα της $A_x^\infty(M)$ είναι οι κλάσεις των σταθερών απεικονίσεων ίσων με 0 και 1, αντίστοιχα. □

2.4 Ορισμός. Μια **παραγώγηση** της $A_x^\infty(M)$ είναι μια $\mathbb{R}$–γραμμική απεικόνιση

$$\delta : A_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

που ικανοποιεί την **συνθήκη Leibniz:**

$$\delta([f]_x[g]_x) = \delta([f]_x)g(x) + f(x)\delta([g]_x), \tag{22}$$

για κάθε $[f]_x, [g]_x \in A_x^\infty(M)$.

Είναι προφανές ότι η σχέση $f \overset{x}{\sim} g$ συνεπάγεται ότι $\delta_u(f) = \delta_u(g)$, για κάθε $u \in T_xM$, απ' όπου προκύπτει άμεσα η επόμενη

2.5 Πρόταση. *Για κάθε $u \in T_xM$, η απεικόνιση*

$$\delta_u : A_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} : [f]_x \longmapsto \delta_u([f]_x) = u(f)$$

είναι μια παραγώγηση της $A_x^\infty(M)$.

ΜΑΘΗΜΑ 08

1 Η εφαπτόμενη δέσμη

Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Θεωρούμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους T_xM, $x \in M$, και θέτουμε

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM \tag{1}$$

και

$$\pi(u) := x, \quad \text{αν } u \in T_xM. \tag{2}$$

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι TM είναι μια διαφορική πολλαπλότητα και ότι $\pi : TM \to M$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

1.1 Ορισμός. Το σύνολο TM ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** του M και η απεικόνιση π **προβολή** της TM επί του M.

Πιο τυπικά, και σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιείται για τις νηματικές δέσμες, η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι η τριάδα (TM, π, M). Η TM ονομάζεται **ολικός χώρος**, η π **προβολή** και η M **βάση** της δέσμης. Εμείς θα χρησιμοποιούμε την απλούστερη ορολογία του Ορισμού 1.1.

1.2 Λήμμα. *Η απεικόνιση $\pi : TM \to M$ είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $x \in M$. Ο εφαπτόμενος χώρος T_xM δεν είναι κενός· για κάθε $u \in T_xM$, έχουμε $\pi(u) = x$. □

1.3 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε TM εφοδιάζεται με δομή $2m$-διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$, όπου η απεικόνιση

$$\Phi : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_x M \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

ορίζεται από την ισότητα

$$\Phi(u) := (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)). \tag{3}$$

(1) Ισχυριζόμαστε ότι $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ είναι ένας $2m$–διάστατος χάρτης της TM.

(1α) *Η απεικόνιση Φ είναι 1-1*: Αν $u, v \in TM$ με $\Phi(u) = \Phi(v)$, τότε η (3) συνεπάγεται ότι $\phi(\pi(u)) = \phi(\pi(v))$. Επειδή ϕ είναι 1–1, $\pi(u) = \pi(v)$, δηλαδή, u και v ανήκουν στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο $T_x M$, με $x = \pi(u) = \pi(v)$. Ακόμη, $\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}(v)$ και $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$ είναι αμφιμονοσήμαντη, έτσι $u = v$.

(1β) *Η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$*: Θα δείξουμε ότι $\Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Επειδή, προφανώς, $\Phi(\pi^{-1}(U)) \subseteq \phi(U) \times \mathbb{R}^m$, αρκεί να αποδείξουμε ότι Φ είναι επί του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Έστω $(h, k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $x \in U$ με $\phi(x) = h$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$. Για το στοιχείο $k \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in T_x M$ με $\bar{\phi}(u) = k$. Επομένως,

$$\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (\phi(x), k) = (h, k),$$

και η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι το σύνολο $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, που είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.

(2) Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i) : (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}\}$$

από όλους τους χάρτες στην TM της προηγούμενης μορφής, και ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathcal{B}$ είναι ένας διαφορικός άτλαντας επί της TM.

(2α) *Οι χάρτες του $\mathcal{B}$ καλύπτουν την TM*, διότι

$$\bigcup_i \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\bigcup_i U_i) = \pi^{-1}(M) = TM.$$

(2β) *Οι χάρτες του $\mathcal{B}$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί*: Θεωρούμε δύο χάρτες (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j) του $\mathcal{A}$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, και τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i)$ και $(\pi^{-1}(U_j), \Phi_j)$ στον $\mathcal{B}$. Τότε

$$\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$$

και

$$\Phi_i(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, αφού $\phi_i(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, από την συμβιβαστότητα των (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j). Όμοια, η εικόνα

$$\Phi_j(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς

$$\begin{aligned}\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} &: \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m,\\ \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} &: \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμες. Για την πρώτη, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $(h,k) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$. Τότε $\Phi_i^{-1}(h,k) = u$, για ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ με $\phi_i(\pi(u)) = h$ και $\bar{\phi}(u) = k$. Αρα,

$$\begin{aligned}\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(h,k) &= \Phi_j(u) = (\phi_j(\pi(u)),\, \bar{\phi}_j(u))\\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(\phi_i(\pi(u))),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(\bar{\phi}_i(u)))\\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(k))\\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, [D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h)](k)).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συντεταγμένη στην ανωτέρω έκφραση είναι διαφορίσιμη, διότι

$$(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ pr_1)(h,k).$$

Από την άλλη μεριά, η δεύτερη συντεταγμένη είναι διαφορίσιμη, διότι είναι η σύνθεση των διαφορίσιμων απεικονίσεων στο επόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}"] \arrow[dr] & L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "ev"] \\
 & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

όπου

$$(D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(h,k) = (D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h), k) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$$

για κάθε $(h,k) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$, και

$$ev(f,k) := f(k) \in \mathbb{R}^m,$$

για κάθε $f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ και $k \in \mathbb{R}^m$. Υπενθυμίζουμε ότι, αφού η

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

είναι διαφορίσιμη, η παράγωγος

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : U_i \cap U_j \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

είναι επίσης διαφορίσιμη και ότι η (εκτιμήτρια) ev είναι διαφορίσιμη αφού είναι διγραμμική. Έτσι $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφη $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$.

Σαν αποτέλεσμα, ο $\mathcal{B}$ είναι ένας $2m$-διάστατος διαφορικός άτλαντας της TM και ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας $\mathcal{B}'$ ορίζει μια διαφορική δομή στην TM. $\square$

1.4 Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα, υποθέτοντας ότι M είναι διαφορική πολλαπλότητα, δείχνουμε ότι TM είναι επίσης διαφορική πολλαπλότητα. Αν M είναι $\mathcal{C}^r$–πολλαπλότητα, με r πεπερασμένο, τότε η απεικόνιση μεταφοράς $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμη, αλλά η παράγωγός της

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : \phi(U_i \cap U_j) \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

είναι $\mathcal{C}^{r-1}$–διαφορίσιμη και η τάξη διαφορισιμότητας επί της TM είναι περιορισμένη κατά μια μονάδα.

1.5 Πρόταση. *Αν M είναι μια διαφορική πολλαπλότητα, η απεικόνιση $\pi : TM \to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $u \in TM$. Θα δείξουμε ότι η π είναι διαφορίσιμη στο u. Το u είναι διάνυσμα ενός εφαπτόμενου χώρου, έστω του T_xM, οπότε $\pi(u) = x$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο χάρτη $(\pi^{-1}(U), \Phi) \in \mathcal{B}$. Τότε $u \in \pi^{-1}(U)$ και $\pi(\pi^{-1}(U)) \subseteq U$, δηλ. το ζεύγος των χαρτών $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ και (U, ϕ) μας δίνουν τοπική παράσταση της π

$$\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi(U).$$

Έστω $(h,k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (h,k)$. Τότε

$$(\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1})(h,k) = \phi(\pi(u)) = h = pr_1(h,k)$$

δηλαδή, $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} = pr_1$ είναι διαφορίσιμη, σαν περιορισμός γραμμικής σε ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. $\square$

2 Ολικό Διαφορικό

2.1 Ορισμός. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Ονομάζουμε **εφαπτόμενη απεικόνιση** ή **παράγωγο** ή **ολικό διαφορικό της** f την απεικόνιση $Tf : TM \to TN$, που δίνεται από την σχέση

$$Tf := \bigcup_{x \in M} T_x f$$

ή, ισοδύναμα,

$$Tf|_{T_x M} = T_x f.$$

Δηλαδή, για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$,

$$Tf(u) = T_x f(u).$$

2.2 Παρατήρηση. Να σημειωθεί ότι Tf *δεν* είναι γραμμική απεικόνιση, παρ' όλο που οι περιορισμοί της στους εφαπτόμενους χώρους είναι γραμμικές.

2.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν π_M και π_N συμβολίζουν τις προβολές των εφαπτόμενων δεσμών TM και TN, αντίστοιχα, τότε $Tf : TM \to TN$ είναι διαφορίσιμη και το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την μεταθετικότητα του διαγράμματος: για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_N \circ Tf(u) &= \pi_N \circ T_x f([(\alpha, x)]) = \pi_N([(f \circ \alpha, f(x))]) = \\ &= f(x) = f \circ \pi_M([(\alpha, x)]) = f \circ \pi_M(u), \end{aligned}$$

δηλαδή, $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$ και το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι Tf είναι διαφορίσιμη σε ένα τυχαίο σημείο $u_o = [(\alpha, x_o)] \in TM$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x_o, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $x_o \in U$ και $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(U)$. Θεωρούμε τους χάρτες $(\pi_M^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi_N^{-1}(V), \Psi)$, αντίστοιχα. Τότε, $x_o \in U$ συνεπάγεται ότι $u_o \in \pi_M^{-1}(U)$ και η μεταθετικότητα του διαγράμματος συνεπάγεται ότι $Tf(\pi_M^{-1}(U)) \subseteq \pi_N^{-1}(V)$. Πράγματι, για κάθε $u \in \pi_M^{-1}(U)$, $\pi_N \circ Tf(u) = f \circ \pi_M(u) \in f(U) \subseteq V$, δηλαδή, $Tf(u) \in \pi_N^{-1}(V)$. Εφαρμόζουμε την τοπική παράσταση

$$\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

της Tf μέσω Φ και Ψ στο $(h, k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$: υπάρχει ένα μοναδικό $u = [(\alpha, x)] \in \pi_M^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(x), \bar{\phi}(u)) = (h, k)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h, k) &= \Psi \circ Tf(u) = (\psi \circ \pi_N \circ Tf(u), \bar{\psi} \circ Tf(u)) = \\
&= (\psi \circ f \circ \pi_M(u), \bar{\psi} \circ T_x f(\bar{\phi}^{-1}(k))) \\
&= (\psi \circ f(x), \bar{\psi} \circ T_x f \circ \bar{\phi}^{-1}(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\phi(x)), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(h)(k)).
\end{aligned}$$

Οι παράγοντες της $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h, k)$

$$\begin{aligned}
pr_1(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h, k)) &= \psi \circ f \circ \phi^{-1}(h) = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ pr_1(h, k), \\
pr_2(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h, k)) &= ev \circ (D(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(h, k),
\end{aligned}$$

όπου

$$ev : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n : (f, x) \mapsto f(x)$$

είναι η εκτιμήτρια απεικόνιση, είναι διαφορίσιμοι σαν συνθέσεις διαφορίσιμων απεικονίσεων, επομένως $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. $\square$

2.4 Παρατήρηση. Αν $f : M \to N$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, τότε $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, αλλά $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη, δηλαδή, Tf είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη.

ΜΑΘΗΜΑ 09

1 Διανυσματικά Πεδία

Σε όλη αυτή την παράγραφο, $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

1.1 Ορισμός. Ένα **διανυσματικό πεδίο επί της** M είναι μια τομή της εφαπτόμενης δέσμης, δηλαδή, μια απεικόνιση $\xi : M \to TM$, τέτοια ώστε $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$.

Ισοδύναμα, ένα διανυσματικό πεδίο ξ κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

1.2 Παρατηρήσεις. (1) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1, για ένα διανυσματικό πεδίο ξ έχουμε

$$\pi(\xi(x)) = (\pi \circ \xi)(x) = \mathrm{id}_M(x) = x,$$

για κάθε $x \in M$, δηλαδή, $\xi(x)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο x.

(2) Σαν αποτέλεσμα του (1), τα διανυσματικά πεδία είναι 1–1 απεικονίσεις.

(3) Για ευκολία, για τις τιμές ενός διανυσματικού πεδίου, συνήθως γράφουμε ξ_x αντί του $\xi(x)$.

(4) Μπορούμε να ορίζουμε διανυσματικά πεδία πάνω από οποιοδήποτε υποσύνολο A του M.

(5) Επειδή το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ενός διανυσματικού πεδίου $\xi : M \to TM$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες, μπορεί το ξ να είναι

διαφορίσιμο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων επί του M. Όμοια, γράφουμε $\mathcal{X}(A)$, για το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων των ορισμένων σε μια ανοιχτή υποπολλαπλότητα A.

(6) Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο επί του M και $x_o \in M$. Για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U$, ο (U,ϕ) και ο αντίστοιχος χάρτης $(\pi^{-1}(U),\Phi)$ στην εφαπτόμενη δέσμη TM ορίζουν τοπική παράσταση του ξ στο x_o. Πράγματι, για κάθε $x \in U$,

$$\xi_x \in T_xM \subseteq \pi^{-1}(U)$$

επομένως η τοπική παράσταση

$$\Phi \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$$

υπάρχει.

1.3 Παραδείγματα. (1) Η απεικόνιση

$$\Omega : M \longrightarrow TM : x \longmapsto \Omega(x) := 0_x \in T_xM,$$

όπου 0_x είναι το μηδενικό διάνυσμα στον T_xM, είναι ένα διανυσματικό πεδίο επί του M. Για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και $h = \phi(x) \in \phi(U)$, η τοπική παράσταση υπολογισμένη στο h είναι

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Omega \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi(\Omega_x) = (\phi(\pi(0_x)),\, \bar{\phi}(0_x)) = \\ &= (\phi(x),\, 0) = (h,0)\end{aligned}$$

δηλ. είναι διαφορίσιμη, έτσι $\Omega \in \mathcal{X}(M)$.

(2) Έστω $(U,\phi) \in \mathcal{A}$. Η απεικονίσεις

(1) $$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \longrightarrow TU : x \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \quad \forall\, i = 1,\dots,m$$

είναι διανυσματικά πεδία επί του U. Η τοπική παράσταση του $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ως προς τους (ολικούς) χάρτες (U,ϕ) και $(\pi^{-1}(U),\Phi)$ (των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων U της M και $\pi^{-1}(U)$ της TM)

$$\begin{aligned}\Phi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right) = \\ &= \left(\phi\left(\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right),\, \bar{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right) = \\ &= (\phi(x),\, e_i) = (h, e_i)\end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμη, δηλαδή, $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U)$. Η απεικονίσεις (1) λέγονται **βασικά διανυσματικά πεδία** ορισμένα από τον χάρτη (U, ϕ).

Επειδή κάθε τιμή ξ_x ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, μπορεί να θεωρείται σαν παραγώγιση του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Έτσι, αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, με πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή A του x, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\xi(f) : A \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi(f)(x) := \xi_x(f). \tag{2}$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, εφαρμόζοντας το ξ στις συντεταγμένες x_i, $i = 1, \dots, m$, παίρνουμε

$$\xi_i := \xi(x_i) : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi_x(x_i). \tag{3}$$

Η απεικονίσεις (3) λέγονται **συντεταγμένες του ξ ως προς τον χάρτη** (U, ϕ).

Από την άλλη μεριά, κάθε ξ_x παίρνει την μορφή

$$\xi_x = \sum_i \xi_x(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = (\sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})(x)$$

για κάθε $x \in U$, επομένως

$$\xi|_U = \sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Το επόμενο θεώρημα παρέχει ένα κριτήριο για τη διαφορισιμότητα ενός διανυσματικού πεδίου.

1.4 Θεώρημα. *Έστω $\xi : M \to TM$ ένα διαυνσματικό πεδίο. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, οι συντεταγμένες ξ_i, $i = 1, \dots, m$, είναι διαφορίσιμες.

(iii) Για κάθε $x \in M$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, έχουμε $\xi(f) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4), υπολογίζουμε την τοπική παράσταση του ξ ως προς τους (U, ϕ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ στο $h \in \phi(U)$:

αν $\phi^{-1}(h) = x$, τότε

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \xi \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi(\xi_x) = (\phi(\pi(\xi_x)),\, \bar{\phi}(\xi_x)) \\
&= (\phi(x),\, \bar{\phi}(\xi_x)) = \\
&= \left(h,\, \bar{\phi}\left(\sum_i \xi_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)\right) \\
&= \left(h,\, \sum_i \xi_i(x)\bar{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)\right) \\
&= \left(h,\, \sum_i \xi_i(x) e_i\right) \\
&= (h,\, \xi_1 \circ \phi^{-1}(h), \ldots, \xi_m \circ \phi^{-1}(h))
\end{aligned}$$

Όμως οι $\xi_i \circ \phi^{-1}$ είναι οι τοπικές παραστάσεις των συντεταγμένων ξ_i. Από την ανωτέρω η σχέση συμπεραίνουμε ότι (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω $x_o \in M$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Τότε $f : A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $A \subseteq M$ και $x_o \in A$. Υπάρχει χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U \subseteq A$. Για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(f)(x) = \xi_x(f) &= \left(\sum_i \xi_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)(f) \\
&= \sum_i \xi_i(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_x \\
&= \sum_i \xi_i(x)\, \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\bigg|_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

δηλαδή, $\xi(f)|_U$ είναι ένα άθροισμα γινομένων από διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής: το (ii) είναι ειδική περίπτωση του (iii), για $f = x_i$. $\square$

1.5 Παρατήρηση. Η συνθήκη (ii) του προηγούμενου θεωρήματος παρέχει έναν εύκολο τρόπο να αποδείξουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι διαφορίσιμο: Για παράδειγμα, το μηδενικό διανυσματικό πεδίο

$$\Omega = \sum_i 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

είναι διαφορίσιμο, αφού οι συντεταγμένες του είναι σταθερά μηδενικές. Επίσης, για κάθε χάρτη (U, ϕ), το βασικό διανυσματικό πεδίο

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}$$

έχει σταθερές συντεταγμένες.

1.6 Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ είναι ένα πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε πράξεις

$$\begin{gathered} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ \mathbb{R} \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \end{gathered}$$

κατά σημείο, δηλαδή, για κάθε ξ, $\eta \in \mathcal{X}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in M$, θέτουμε

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)_x &:= \xi_x + \eta_x, \\ (\lambda \xi)_x &:= \lambda \xi_x. \end{aligned}$$

Οι απεικονίσεις $\xi + \eta$ και $\lambda \cdot \xi$ είναι διανυσματικά πεδία. Ακόμη, είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, για κάθε χάρτη (U, ϕ) επί του M, οι συντεταγμένες τους δίνονται από

$$\begin{gathered} (\xi + \eta)_i = (\xi + \eta)(x_i) = \xi(x_i) + \eta(x_i) = \xi_i + \eta_i \\ (\lambda \xi)_i = (\lambda \xi)(x_i) = \lambda \xi(x_i) = \lambda \xi_i \end{gathered}$$

επομένως, είναι διαφορίσιμες. Τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου προφανώς ικανοποιούνται. $\square$

Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ έχει μια πρόσθετη δομή: Θέτουμε

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) := \{f : M \to \mathbb{R} : \text{διαφορίσιμη}\}.$$

Το $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ με τις (κατά σημείο) πράξεις που δίνονται από τις ισότητες

$$\begin{aligned} &(f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ &(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \\ &(fg)(x) = f(x) g(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in M$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι μια *πραγματική μεταθετική άλγεβρα με μονάδα.*

Για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ορίζουμε

$$f\xi : M \longrightarrow TM : x \longmapsto f(x)\xi_x.$$

Προφανώς, $f\xi$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο και οι συντεταγμένες ως προς ένα χάρτη (U, ϕ) σε ένα σημείο $x \in U$, δίνονται από

$$(f\xi)_i(x) = (f(x)\xi_x)(x_i) = f(x)\xi_x(x_i) = f(x)\xi_i(x) = (f\xi_i)(x)$$

ή αλλιώς

$$(f\xi)_i = f\xi_i,$$

δηλαδή, είναι διαφορίσιμες. Σαν αποτέλεσμα, υπάρχει ένας πολλαπλασιασμός

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\alpha, \xi) \longmapsto \alpha\xi.$$

Είναι άμεσο να αποδείξουμε την επόμενη

1.7 Πρόταση. *$\mathcal{X}(M)$ είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπο.*

2 Τα διανυσματικά πεδία σαν παραγωγίσεις

Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Θεωρούμε πάλι την άλγεβρα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ των (ολικά ορισμένων) διαφορίσιμων συναρτήσεων του M.

Σύμφωνα με την καθιερωμένη ορολογία, κάθε $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\delta : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

που ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz:

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g),$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, ονομάζεται **παραγώγιση** της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Απλοί υπολογισμοί μας δίνουν την επόμενη

2.1 Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{D}(M)$ όλων των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπο.*

Έστω τώρα $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Αφήνοντας την συνάρτηση f να διατρέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ παίρνουμε μια απεικόνιση

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : f \longmapsto \xi(f). \tag{5}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f+g)(x) &= \lambda\xi_x(f)+\xi_x(g) = \lambda\xi(f)(x)+\xi(g)(x)\\ &= (\lambda\xi(f)+\xi(g))(x)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\xi(fg)(x) &= \xi_x(fg) = \xi_x(f)g(x)+f(x)\xi_x(g)\\ &= \xi(f)(x)g(x)+f(x)\xi(g)(x)\\ &= (\xi(f)g+f\xi(g))(x),\end{aligned}$$

για κάθε $x \in M$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f+g) &= \lambda\xi(f)+\xi(g)\\ \xi(fg) &= \xi(f)g+f\xi(g),\end{aligned}$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η (5) είναι $\mathbb{R}$–γραμμική και ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz. Επομένως, έχουμε την επόμενη

2.2 Πρόταση. *Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ορίζει μια παραγώγιση της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.* □

Ανάλογα με την ταύτιση των σημειακών παραγωγίσεων με τα εφαπτόμενα διανύσματα, έχουμε και την ταύτιση των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ με τα διανυσματικά πεδία. Για να το αποδείξουμε αυτό, χρειαζόμαστε τα επόμενα βοηθητικά λήμματα.

2.3 Λήμμα. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $0 < a < b$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει διαφορίσιμη $\lambda : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ με $\lambda(h) = 1$, αν $\|h\| \leq a$ και $\lambda(h) = 0$, αν $\|h\| \geq b$.* □

2.4 Λήμμα. *Για κάθε χάρτη (U,ϕ) και κάθε $x_o \in U$, υπάρχουν ανοιχτά $W \subsetneqq V \subsetneqq U$ με $x_o \in W$ και διαφορίσιμη $\rho : M \to [0,1]$ με $\rho(x) = 1$, αν $x \in W$ και $\rho(x) = 0$, αν $x \notin V$.* □

2.5 Λήμμα. *Για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή A του x, υπάρχουν ένα ανοιχτό $B \subsetneqq A$ με $x \in B$ και μια $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ με $f|_B = \tilde{f}|_B$.* □

2.6 Λήμμα. *Έστω δ μια παραγώγιση της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $x \in M$, η απεικόνιση*

$$\delta_x : \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R}) : \delta_x(f) = \delta(\tilde{f})(x)$$

είναι σημειακή παραγώγιση του $\mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το επόμενο

2.7 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{D}(M)$ είναι ισόμορφα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Delta : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) : \xi \longmapsto \delta_\xi,$$

όπου $\delta_\xi \equiv \xi$ είναι η παραγώγιση (2).

(1) *Η Δ είναι $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-γραμμική:* Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\Delta(f\xi + \eta) = f\Delta(\xi) + \Delta(\eta).$$

Επειδή τα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας είναι παραγωγίσεις της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, ισχύει

$$[\Delta(f\xi + \eta)](h) = [f\Delta(\xi) + \Delta(\eta)](h) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Πράγματι, για κάθε $x \in M$, είναι

$$\begin{aligned}
[\Delta(f\xi + \eta)](h)(x) &= (f\xi + \eta)_x(h) = (f(x)\xi_x + \eta_x)(h) \\
&= f(x)\xi_x(h) + \eta_x(h) = f(x)\Delta(\xi)(h)(x) + \Delta(\eta)(h)(x) \\
&= [f\Delta(\xi)(h) + \Delta(\eta)(h)](x) \\
&= [f\Delta(\xi) + \Delta(\eta)](h)(x)
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(2) *Η Δ είναι 1-1:* Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ με $\Delta(\xi) = \Delta(\eta)$. Για να δείξουμε ότι $\xi = \eta$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in M$, $\xi_x = \eta_x \in T_xM$. Προς τούτο, θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, και θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των ξ_x και η_x ως προς την κανονική βάση που ορίζει ο (U, ϕ) είναι ίσες. Αρκεί δηλ. να δείξουμε ότι $\xi_x(x_i) = \eta_x(x_i)$. Από το Λήμμα 2.5, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, υπάρχει ένα ανοιχτό $B_i \subseteq U$ με $x \in B_i$ και μια διαφορίσιμη $\widetilde{x_i} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, με $x_i|_B = \widetilde{x_i}|_B$. Επειδή $\widetilde{x_i} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, από την υπόθεση $\xi(\widetilde{x_i}) = \eta(\widetilde{x_i}) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Εφαρμόζοντας στο x, παίρνουμε $\xi_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(\widetilde{x_i}i)$. Η τοπική σύμπτωση των $\widetilde{x_i}$ με τις συντεταγμένες x_i, μας δίνει

$$\xi_x(x_i) = \xi_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(x_i)$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα των διανυσμάτων $\xi_x = \eta_x$.

(3) *Η Δ είναι επί:* Έστω μια παραγώγιση $\delta \in \mathcal{D}(M)$. Για κάθε $x \in M$, ορίζεται η σημειακή παραγώγιση $\delta_x : \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα $u_x \in T_xM$. Η απεικόνιση $\xi : M \to TM$ με $\xi(x) = u_x \in T_xM$, για κάθε $x \in M$, είναι διανυσματικό πεδίο. Για να δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει διαφορίσιμες συντεταγμένες. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και ένα $x_o \in U$. Θα δείξουμε ότι οι $\xi_i = \xi(x_i)$ είναι διαφορίσιμες σε μια περιοχή του x_o. Όπως στο (2), θεωρούμε τα ανοιχτά $B_i \subseteq U$ και τις ολικά ορισμένες συναρτήσεις $\widetilde{x_i}$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in B_i$,

$$\xi_i(x) = \xi_x(x_i) = u_x(x_i) = u_x(\widetilde{x_i}) = \delta(\widetilde{x_i})(x),$$

δηλ

$$\xi_i|_{B_i} = \delta(\widetilde{x_i})|_{B_i},$$

που είναι διαφορίσιμη. $\square$

ΜΑΘΗΜΑ 10

1 Αγκύλη Lie

Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Επειδή $\xi(f), \eta(f) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, μπορούμε να ορίσουμε τα $\xi(\eta(f))$ και $\eta(\xi(f))$ που είναι επίσης στοιχεία του $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.1 Ορισμός. Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, η απεικόνιση

$$\begin{gathered}[\xi, \eta] : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : \\ [\xi, \eta](f) := \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))\end{gathered} \tag{1}$$

καλείται **αγκύλη Lie** των ξ και η.

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι η απεικόνιση (1) είναι μια παραγώγηση της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7 του Μαθήματος 09, είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Έτσι, η αγκύλη Lie μπορεί να θεωρηθεί σαν πράξη

$$[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\xi, \eta) \longmapsto [\xi, \eta] \tag{2}$$

1.2 Πρόταση. *Η αγκύλη Lie (2) έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

(i) Είναι $\mathbb{R}$-διγραμμική.

(ii) Είναι αντισυμμετρική, δηλαδή,

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi],$$

για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$.

(iii) Ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0$$

για κάθε $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με μια πράξη που ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iii) της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται **άλγεβρα Lie**.

1.3 Παρατήρηση. Η αγκύλη Lie είναι $\mathbb{R}$–διγραμμική, αλλά δεν είναι διγραμμική ως προς την δομή του $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$–προτύπου. Έτσι, αν $\xi,\eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned}
[f\xi, g\eta](h) &= f\xi(g\eta(h)) - g\eta(f\xi(h)) \\
&= f\xi(g)\eta(h) + f\xi(\eta(h))g - g\eta(f)\xi(h) - fg\eta(\xi(h)) \\
&= fg(\xi(\eta(h))) - fg(\eta(\xi(h))) + f\xi(g)\eta(h) - g\eta(f)\xi(h) \\
&= fg[\xi,\eta](h) + f\xi(g)\eta(h) - g\eta(f)\xi(h) \\
&= (fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi)(h)
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi.$$

2 Διανυσματικά πεδία κατά μήκος μιας απεικόνισης

2.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, και $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Μια απεικόνιση $\xi : M \to TN$ λέγεται **διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της** f, αν $\xi_x \in T_{f(x)}N$, για κάθε $x \in M$. Ισοδύναμα, αν

$$\pi_N \circ \xi = f,$$

δηλ. αν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσματικών πεδίων κατά μήκος μιας f με $\mathcal{X}(f)$.

2.2 Παρατηρήσεις. (1) Ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας f *δεν* είναι διανυσματικό πεδίο.

(2) Ένα διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της id_M.

2.3 Παράδειγμα. Για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : J \to M$, το **πεδίο ταχυτήτων της** α

$$\dot{\alpha} : J \longrightarrow TM : \dot{\alpha}(s) := T_s\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \in T_{\alpha(s)}M$$

είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της α.

Ας θεωρήσουμε ένα $\xi \in \mathcal{X}(f)$ και $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, $(V,\psi) \in \mathcal{B}$, με $f(U) \subseteq V$, και έστω $\{y_j\}_{j=1,\dots,n}$ οι συναρτήσεις συντεταγμένων του χάρτη ψ. Τότε, για κάθε $x \in U$, είναι $\xi_x \in T_{f(x)}N$, επομένως γράφεται ως προς την κανονική βάση του $T_{f(x)}N$ που ορίζεται από τον (V,ψ) σαν

$$\xi_x = \sum_{j=1}^{n} \xi_x(y_j) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)}, \tag{3}$$

όπου

$$\xi_j : U \longrightarrow \mathbb{R} : \xi_j(x) = \xi_x(y_j)$$

οι **συντεταγμένες του** ξ ως προς τον χάρτη (V,ψ).

2.4 Θεώρημα. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $\xi \in \mathcal{X}(f)$. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Για κάθε ζεύγος χαρτών $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ με $f(U) \subseteq V$, οι συντεταγμένες ξ_j, $j = 1,\dots,n$, είναι διαφορίσιμες.

(iii) Για κάθε $x \in M$ και $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N,\mathbb{R})$, έχουμε $\xi(g) \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος χαρτών $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ που δίνουν τοπική παράσταση της f, οι χάρτες (U,ϕ) και $(\pi_N^{-1}(V),\Psi)$ ορίζουν τοπική παράσταση του ξ. Πράγματι,

$$\pi_N \circ \xi(U) = f(U) \subseteq V \implies \xi(U) \subseteq \pi_N^{-1}(V).$$

Υπολογίζουμε την τοπική παράσταση

$$\Psi \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

σε ένα $h = \phi(x) \in \phi(U)$:

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \xi \circ \phi^{-1}(h) &= \Psi(\xi_x) = (\psi(\pi_N(\xi_x)), \bar{\psi}(\xi_x)) = (\psi(f(x)), \bar{\psi}(\xi_x)) = \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), \bar{\psi}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)}\right)\right) \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x)\bar{\psi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)}\right)\right) \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), \sum_{j=1}^{n} (\xi_j \circ \phi^{-1})(h) \cdot e_j\right) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}, \xi_1 \circ \phi^{-1}, \dots, \xi_n \circ \phi^{-1})(h)
\end{aligned}$$

Όμως οι $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ και $\xi_j \circ \phi^{-1}$ είναι οι τοπικές παραστάσεις της f και των συντεταγμένων ξ_j. Από την ανωτέρω η σχέση συμπεραίνουμε ότι (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω $x_o \in M$ και $g \in \mathcal{C}^{\infty}_{f(x_o)}(N, \mathbb{R})$. Η g είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $B \subseteq N$ με $f(x_o) \in B$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας του N, υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x_o) \in V \subseteq B$. Η f είναι συνεχής, σαν διαφορίσιμη, άρα αντιστρέφει τα ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά. Επομένως, $f^{-1}(V) \subseteq M$ είναι ανοιχτό που περιέχει το x_o, άρα υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U$ και $U \subseteq f^{-1}(V)$, δηλ. $f(U) \subseteq V$. Τότε, λόγω της ισότητας (3), το $\xi|_U$ παίρνει την μορφή

$$\xi|_U = \sum_{j=1}^{n} \xi(y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ f\right)$$

Εφαρμόζοντας την $\xi(g)$ σε ένα $x \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(g)(x) = \xi_x(g) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \xi(y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ f \right) \right)_x (g) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(x)} (g) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left. \frac{\partial (g \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \right|_{\psi \circ f(x)}
\end{aligned}$$

άρα η $\xi(g)|_U$ είναι διαφορίσιμη.

Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής: το (ii) είναι ειδική περίπτωση του (iii), για $g = y_j$. $\square$

Παρατηρούμε ότι στο σύνολο $\mathcal{X}(f)$ ορίζεται πρόσθεση, αριθμητικός πολλαπλασιασμός και πολλαπλασιασμός με τις συναρτήσεις της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, δηλ. το $\mathcal{X}(f)$ είναι $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπο. Επιπλέον, ορίζεται και η απεικόνιση

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : g \longmapsto \xi(g) \tag{4}$$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και ικανοποιεί μια παραλλαγή της συνθήκης του Leibniz:

$$\xi(gh)(x) = \xi_x(gh) = g(f(x))\xi_x(h) + h(f(x))\xi_x(g), \qquad x \in M,$$

δηλ.

$$\xi(gh) = (g \circ f) \cdot \xi(h) + (h \circ f) \cdot \xi(g).$$

3 Συσχετισμένα Διανυσματικά Πεδία

Σταθεροποιούμε δύο διαφορικές πολλαπλότητες $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$.

3.1 Ορισμός. Λέμε ότι το τα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι f–**συσχετισμένα**, αν

$$Tf \circ \xi = \eta \circ f,$$

δηλαδή, αν το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

3.2 Παρατήρηση. Για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ισχύει $Tf \circ \xi \in \mathcal{X}(f)$. Ομοίως, για κάθε $\eta \in \mathcal{X}(N)$, ισχύει $\eta \circ f \in \mathcal{X}(f)$. Επομένως, τα ξ και η είναι f-συσχετισμένα, αν ορίζουν το ίδιο πεδίο κατά μήκος της f.

Θεωρώντας τα διανυσματικά πεδία σαν ολικές παραγωγήσεις, παίρνουμε μια ισοδύναμη συνθήκη, που είναι επίσης ένα χρήσιμο κριτήριο για την f-συσχέτιση.

3.3 Πρόταση. *Τα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι f-συσχετισμένα, αν και μόνον αν, για κάθε $x \in M$ και $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$,*

(5)
$$\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f.$$

Απόδειξη. Ας σημειώσουμε πρώτα ότι αν $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, τότε $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, και κατά συνέπεια, $\xi(g \circ f) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Από την άλλη μεριά έχουμε $\eta(g) \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, επομένως $\eta(g) \circ f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Η ισότητα (5) είναι ισοδύναμη με

$$T_x f(\xi_x) = \eta_{f(x)} \in T_{f(x)}N, \quad \forall x \in M.$$

Θεωρώντας τα ανωτέρω εφαπτόμενα διανύσματα σαν παραγωγήσεις του $\mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, παίρνουμε ότι η (5) είναι ισοδύναμη με την

$$T_x f(\xi_x)(g) = \eta_{f(x)}(g) \quad \forall x \in M,\ g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$$

που, με τη σειρά της, είναι ισοδύναμη με την

$$(\xi(g \circ f))(x) = (\eta(g) \circ f)(x) \quad \forall x \in M,\ g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$$

αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό. □

3.4 Πόρισμα. *Έστω $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta, \eta' \in \mathcal{X}(N)$, έτσι ώστε ξ να είναι f-συσχετισμένο με το η και ξ' να είναι f-συσχετισμένο με το η'. Τότε $[\xi, \xi']$ είναι f-συσχετισμένο με το $[\eta, \eta']$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $[\xi, \xi']$, $[\eta, \eta']$ είναι f-συσχετισμένα, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$[\eta, \eta'](g) \circ f = [\xi, \xi'](g \circ f),$$

για κάθε τοπικά ορισμένη διαφορίσιμη $g : A \to \mathbb{R}$, όπου A διατρέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του N. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της αγκύλης Lie στο αριστερό μέλος της ανωτέρω ισότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned} [\eta, \eta'](g) \circ f &= (\eta(\eta'(g)) - \eta'(\eta(g))) \circ f \\ &= \eta(\eta'(g)) \circ f - \eta'(\eta(g)) \circ f \end{aligned}$$

Επειδή ξ, η είναι f-συσχετισμένα και $\eta'(g) : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση στο N, έχουμε

$$\eta(\eta'(g)) \circ f = \xi(\eta'(g) \circ f).$$

Ομοια, αφού ξ', η' είναι f-συσχετισμένα και $\eta(g) : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση στο N, έχουμε

$$\eta'(\eta(g)) \circ f = \xi'(\eta(g) \circ f).$$

Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} [\eta, \eta'](g) \circ f &= \xi(\eta'(g) \circ f) - \xi'(\eta(g) \circ f) \\ &= \xi(\xi'(g \circ f)) - \xi'(\xi(g \circ f)) \\ &= [\xi, \xi'](g \circ f) \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.5 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν f είναι αμφιδιαφόριση, τότε η απεικόνιση*

$$f_* : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(N) : \xi \longmapsto f_*(\xi) := Tf \circ \xi \circ f^{-1}$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie.

Απόδειξη. (ι) Παρατηρούμε ότι η f_* είναι καλά ορισμένη, διότι $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ είναι διαφορίσιμη και, για κάθε $y = f(x) \in N$,

$$Tf \circ \xi \circ f^{-1}(y) = T_x f(\xi_x) \in T_{f(x)}N = T_y N,$$

δηλαδή, $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο.

(ii) Η f_* είναι 1–1: Αν $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ με $f_*(\xi) = f_*(\xi')$, τότε

$$Tf \circ \xi \circ f^{-1} = Tf \circ \xi' \circ f^{-1}.$$

Επειδή f και Tf είναι αντιστρέψιμες, παίρνουμε $\xi = \xi'$.

(iii) Η f_* είναι επί: Έστω $\eta \in \mathcal{X}(N)$ και

$$\xi := (Tf)^{-1} \circ \eta \circ f = (f^{-1})_*(\eta).$$

Τότε προφανώς, $f_*(\xi) = \eta$.

(iv) Η f_* είναι $\mathbb{R}$–γραμμική: Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $y = f(x) \in N$, έχουμε

$$\begin{aligned} f_*(\lambda\xi + \eta)(y) &= Tf \circ (\lambda\xi + \eta) \circ f^{-1}(y) \\ &= Tf(\lambda\xi_x + \eta_x) = \lambda Tf(\xi_x) + Tf(\eta_x) \\ &= \lambda(Tf \circ \xi \circ f^{-1})(y) + (Tf \circ \eta \circ f^{-1})(y) \\ &= \lambda f_*(\xi)(y) + f_*(\eta)(y) \end{aligned}$$

(v) Η f_* διατηρεί την αγκύλη Lie, δηλαδή,

$$f_*([\xi, \xi']) = [f_*(\xi), f_*(\xi')], \tag{6}$$

για κάθε $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$. Πράγματι, η ισοδυναμία

$$f_*(\xi) = Tf \circ \xi \circ f^{-1} \Leftrightarrow f_*(\xi) \circ f = Tf \circ \xi$$

συνεπάγεται ότι $f_*(\xi)$ είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο του N, που είναι f–συσχετισμένο με ξ. Άρα, για κάθε $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$, ξ είναι f–συσχετισμένο με $f_*(\xi)$ και ξ' είναι f–συσχετισμένο με $f_*(\xi')$. Λόγω του Πορίσματος 3.4, $[\xi, \xi']$ είναι f–συσχετισμένο με $[f_*(\xi), f_*(\xi')]$. Η μοναδικότητα συνεπάγεται την ζητούμενη ισότητα (6). □

ΜΑΘΗΜΑ 11

1 Ολοκληρωτικές Καμπύλες

1.1 Ορισμός. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Μια **ολοκληρωτική καμπύλη του** ξ με **αρχική συνθήκη** x_o, είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : I \to M$, με

$$\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha \tag{1}$$

και

$$\alpha(0) = x_o, \tag{2}$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, με $0 \in I$.

Ο προηγούμενος ορισμός συνεπάγεται ότι ο περιορισμός $\xi|_{\alpha(I)}$ του ξ στην εικόνα $\alpha(I)$ συμπίπτει με το $\dot{\alpha}$. Ακόμη, η ισότητα $\dot{\alpha} = T\alpha \circ \frac{d}{dt}$ συνεπάγεται την μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} TI \arrow[r, "T\alpha"] & TM \\ I \arrow[u, "\frac{d}{dt}"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

δηλαδή, α είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, αν και μόνον αν $\frac{d}{dt}$ και ξ είναι α–συσχετισμένα.

Θα βρούμε τις τοπικές εκφράσεις των (1) και (2). Έστω (U, ϕ) ένα χάρτης επί του M με $x_o \in U$ και x_i, $i = 1, \ldots, m$ οι συντεταγμένες του. Επειδή α

είναι συνεχής, μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό διάστημα $J \subseteq I$ με $0 \in J$ και $\alpha(J) \subseteq U$. Θεωρούμε την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\alpha_i := x_i \circ \alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{3}$$

Τότε, για κάθε $t \in J$, έχουμε ότι $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}M$, άρα

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) = T_t\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left(T_t\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\right)(x_i)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left.\frac{d(x_i\circ\alpha)}{dt}\right|_t\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left.\frac{d\alpha_i}{dt}\right|_t\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i'(t)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο,

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha(t)) &= \sum_{i=1}^{m}\xi_{\alpha(t)}(x_i)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i(\alpha(t))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_i'(t) = \xi_i(\alpha(t)), \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

Μετασχηματίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\xi_i(\alpha(t)) &= \xi_i\circ\alpha(t) = \xi_i\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha(t) \\
&= \xi_i\circ\phi^{-1}(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_m(t)).
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\tilde{\xi}_i := \xi_i\circ\phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ και αντικαθιστώντας στην (4), παίρνουμε

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_m(t)), \qquad i = 1,\ldots,m \tag{5}$$

που είναι ένα σύστημα από m συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. Ακόμη, ικανοποιούν την αρχική συνθήκη

$$\alpha_i(0) = x_i(x_o), \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Σύμφωνα με την γενική θεωρία των ΣΔΕ, το ανωτέρω σύστημα έχει (τοπικά) μια μοναδική λύση

$$\tilde{\alpha} \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : J \longrightarrow \phi(U).$$

Θέτουμε

$$\alpha := \phi^{-1} \circ \tilde{\alpha} : J \longrightarrow U.$$

Τετριμμένα διαπιστώνουμε ότι α είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\alpha(0) = x_o$. Τα προηγούμενα συνοψίζονται στην επόμενη

1.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική m-διάστατη πολλαπλότητα και έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Για κάθε $x \in M$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in J$, και μια ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha : J \to M$ του ξ με $\alpha(0) = x$.*

Η Πρόταση 1.2 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ολοκληρωτικής καμπύλης που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη αρχική συνθήκη x, αλλά όχι την μοναδικότητα της, παρ' όλο που η αντίστοιχη λύση $\tilde{\alpha}$ επί ενός χάρτη είναι μοναδική. Όμως, το μονοσήμαντο των ολοκληρωτικών καμπυλών εξασφαλίζεται, σε Hausdorff πολλαπλότητες.

1.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα Hausdorff και έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Αν $x \in M$ και $\alpha : J_\alpha \to M$, $\beta : J_\beta \to M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλες του ξ με $\alpha(0) = \beta(0) = x$, τότε α και β συμπίπτουν στην τομή $J_\alpha \cap J_\beta$ των πεδίων ορισμού τους.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος είναι Hausdorff, αν και μόνον αν η διαγώνιος Δ_M είναι κλειστό υποσύνολο του $M \times M$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$J := \{t \in J_\alpha \cap J_\beta \mid \alpha(t) = \beta(t)\}.$$

Προφανώς $0 \in J$ και $J \neq \emptyset$. Αποδεικνύουμε ότι J είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Πράγματι,

$$J = f^{-1}(\Delta_M)$$

όπου

$$f := (\alpha, \beta) : J \longrightarrow M \times M : f(t) = (\alpha(t), \beta(t)).$$

Επειδή η f είναι συνεχής και Δ_M είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $M \times M$, J είναι κλειστό στο $J_\alpha \cap J_\beta$ σαν αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι J είναι επίσης ένα ανοιχτό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Πράγματι, έστω $s \in J$ και $\alpha(s) = \beta(s) =: y$. Θεωρούμε ένα χάρτη (U, ϕ) με $y \in U$. Σύμφωνα με τους συλλογισμούς προ της προηγούμενης Πρότασης 1.2, οι m–άδες $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \phi \circ \alpha$ και $(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \phi \circ \beta$ είναι λύσεις του ίδιου συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\gamma_i' = \tilde{\xi}_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_m), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

που ικανοποιούν την ίδια αρχική συνθήκη $\phi \circ \alpha(0) = \phi \circ \beta(0) = \phi(x)$. Επομένως, υπάρχουν ένας ανοιχτό διάστημα $J_o \subseteq J$ με $s \in J_o$, έτσι ώστε $\alpha|_{J_o} = \beta|_{J_o}$. Άρα, για κάθε $s \in J$, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή J_o του s με $J_o \subseteq J$. Δηλαδή, J είναι ανοιχτό στο $J_\alpha \cap J_\beta$.

Επομένως, J είναι ένα μη κενό, ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Αλλά $J_\alpha \cap J_\beta$ είναι διάστημα, σαν τομή δύο διαστημάτων, που συνεπάγεται ότι $J = J_\alpha \cap J_\beta$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες προτάσεις μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω

1.4 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα Hausdorff, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $x \in M$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in I$ και ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha : I \to M$ του ξ με $\alpha(0) = x$.*

Εξάλλου, αν $\beta : J \to M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\beta(0) = x$, τότε $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$. □

Σε όλα τα επόμενα, όλες οι πολλαπλότητες θεωρούνται Hausdorff.

1.5 Παραδείγματα. (A) Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ με την συνήθη διαφορική δομή. Συμβολίζουμε με $(x, y) \equiv (pr_1, pr_2)$ τις συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Έστω το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6}$$

δηλ. $\xi_1 = x = pr_1$ και $\xi_2 = y = pr_2$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big), \qquad i = 1, 2. \tag{7}$$

Επειδή

$$\tilde{\xi}_1\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_1(t)$$
$$\tilde{\xi}_2\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_2(t),$$

οι ισότητες (7) γίνονται

$$\alpha_1'(t) = \alpha_1(t), \quad \alpha_2'(t) = \alpha_2(t).$$

Επομένως οι συντεταγμένες της $\tilde{\alpha}$ είναι οι

$$\alpha_1(t) = c_1 \exp t, \quad \alpha_2(t) = c_2 \exp t; \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές. Δηλ. οι ολοκληρωτικές καμπύλες της (6) έχουν την γενική μορφή

(8) $$\alpha(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = (c_1 \exp t, c_2 \exp t); \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\alpha_{(x,y)}$ την ολοκληρωτική καμπύλη με αρχική συνθήκη $\alpha_{(x,y)}(0) = (x, y)$, όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο, τότε

$$\alpha_{(x,y)}(t) = (x \exp t, y \exp t),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(Β) Πάλι στο $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε το

(9) $$\xi = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

δηλ. $\xi_1 = y = pr_2$ και $\xi_2 = -x = -pr_1$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

(10) $$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big), \qquad i = 1, 2.$$

Επειδή

$$\tilde{\xi}_1\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_2(t)$$
$$\tilde{\xi}_2\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = -\alpha_1(t),$$

οι ισότητες (10) γίνονται

$$\alpha_1'(t) = \alpha_2(t), \quad \alpha_2'(t) = -\alpha_1(t).$$

Επομένως οι συντεταγμένες της $\tilde{\alpha}$ είναι οι

$$\alpha_1(t) = c_1 \sin(t + c_2), \quad \alpha_2(t) = c_1 \cos(t + c_2); \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές. Δηλ. οι ολοκληρωτικές καμπύλες της (6) έχουν την γενική μορφή

$$(11) \qquad \alpha(t) = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = (c_1 \sin(t + c_2), c_1 \cos(t + c_2)); \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(Γ) Έστω $(M, \mathcal{A})$ m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα (Hausdorff) και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{X}(U)$. Δηλ. $\xi_1 = 1 =$ σταθ. και $\xi_i = 0$, για κάθε $i = 2, 3, \ldots, m$. Η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = x \in U$ δίνεται από την λύση του συστήματος

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)), \qquad i = 1, \ldots, m$$

δηλ. του συστήματος

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= 1 \\ \alpha_2'(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_m'(t) &= 0 \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t + c_1 \\ \alpha_i(t) &= c_i, \qquad i = 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Άρα

$$\tilde{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)) = (t + c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

και

$$\alpha(t) = \phi^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = \phi^{-1}(t + c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $\alpha(0) = x$, θα πρέπει

$$\phi \circ \alpha(0) = \tilde{\alpha}(0) = (c_1, c_2, \ldots, c_m),$$

δηλ. θα πρέπει

$$c_i = x_i(x) = pr_i \circ \phi(x), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

(Δ) Θεωρούμε το ολικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$. Πρόκειται για ειδική περίπτωση του (Γ). Το ξ έχει μια μοναδική συντεταγμένη $\xi_1 = 1$ και η ολοκληρωτική του καμπύλη δίνεται από την λύση της ΔΕ

$$\alpha_1'(t) = \tilde{\xi}_1(\alpha_1(t)) = \xi_1(\alpha_1(t)) = 1$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha_1(t) = t + c$$

και

$$\alpha(t) = \mathbf{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = t + c.$$

Η αρχική συνθήκη $\alpha(0) = s$ μας δίνει $c = s$. Αν συμβολίσουμε με ℓ_s την *μεταφορά κατά* s, δηλ. την συνάρτηση $\ell_s(t) = t + s$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι η ℓ_s είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $\frac{d}{dt}$ με αρχική συνθήκη s, άρα

$$\dot{\ell}_s = \frac{d}{dt} \circ \ell_s. \tag{12}$$

1.6 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα.

(ii) Για κάθε ολοκληρωτική καμπύλη α του ξ, η $f \circ \alpha$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η.

Απόδειξη. ($i \Rightarrow ii$) Έστω ότι ξ, η είναι f-συσχετισμένα και $\alpha : I \to M$ με $\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$. Έστω και $\beta = f \circ \alpha$. Θα δείξουμε ότι $\dot{\beta} = \eta \circ \beta$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= T(f \circ \alpha) \circ \frac{d}{dt} = Tf \circ Ta \circ \frac{d}{dt} = Tf \circ \dot{\alpha} \\ &= Tf \circ \xi \circ \alpha = \eta \circ f \circ \alpha = \eta \circ \beta. \end{aligned}$$

($ii \Rightarrow i$) Έστω ότι η f μεταφέρει τις ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ σε ολοκληρωτικές καμπύλες του η, δηλ. ισχύει η (ii). Θα δείξουμε ότι, για κάθε $x \in M$, ισχύει $(Tf \circ \xi)(x) = (\eta \circ f)(x)$. Έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη α του ξ με $\alpha(0) = x$. Από την (ii), η σύνθεση $\beta = f \circ \alpha$ είναι ολοκληρωτική του η, άρα $\dot{\beta} = \eta \circ \beta$. Εφαρμόζοντας αυτή την ισότητα στο 0, έχουμε

$$\dot{\beta}(0) = (\eta \circ \beta)(0) = \eta(f(x))$$

άρα

$$
\begin{aligned}
(\eta \circ f)(x) = \dot{\beta}(0) = T(f\circ\alpha)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) &= Tf \circ T\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) \\
&= Tf \circ \dot{\alpha}(0) = Tf \circ \xi \circ \alpha(0) \\
&= (Tf \circ \xi)(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και α ολοκληρωτική του ξ. Τότε $\frac{d}{dt}$ και ξ είναι α-συσχετισμένα. Επειδή, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, η ℓ_s είναι ολοκληρωτική του $\frac{d}{dt}$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.6, η $\alpha \circ \ell_s$ είναι ολοκληρωτική του ξ. Δηλ. για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $t+s$ βρίσκεται μέσα στο π.ο. της α,

$$
\begin{aligned}
&\dot{\overbrace{\alpha \circ \ell_s}}(t) = (\xi \circ \alpha \circ \ell_s)(t) \;\Rightarrow \\
&Ta \circ T\ell_s \circ \frac{d}{dt}(t) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow \\
&T\alpha\left(\ell_s'(t)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{\ell_s(t)}\right) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow \\
&T\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t+s}\right) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow \\
&\dot{\alpha}(t+s) = \xi(\alpha(t+s)) = \xi \circ \alpha \circ \ell_s(t) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ΜΑΘΗΜΑ 12

1 Διαφορικές Ροές

1.1 Ορισμός. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια **διαφορική ροή** επί της M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\theta : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$(1) \qquad \theta(0, x) = x, \qquad \forall\, x \in M,$$

$$(2) \qquad \theta(t, \theta(s, x)) = \theta(t + s, x), \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R},\ x \in M.$$

Δηλ., μια διαφορική ροή επί της M είναι μια διαφορίσιμη δράση της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R}, +)$ επί της M.

Παρατηρούμε ότι οι μερικές απεικονίσεις θ_t είναι διαφορίσιμες, $\theta_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, ενώ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι

$$\theta_t(\theta_{-t}(x)) = \theta(t + (-t), x) = \theta(0, x) = x,$$

δηλ. κάθε $\theta_t : M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την

$$\theta_t^{-1} = \theta_{-t},$$

ενώ, λόγω της (2), ισχύει και η

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι μερικές απεικονίσεις

$$\theta_x : \mathbb{R} \longrightarrow M, \qquad x \in M$$

είναι *διαφορίσιμες καμπύλες* της M.

1.2 Ορισμός. Έστω θ μια διαφορική ροή της $(M, \mathcal{A})$ και $x \in M$. Ονομάζουμε **τροχιά** του x και συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_x$, την εικόνα της μερικής απεικόνισης θ_x, δηλ.

$$\mathcal{O}_x = \theta_x(\mathbb{R}) = \{\theta(t, x) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ροή (σαν δράση που είναι) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στην πολλαπλότητα:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ \exists \, t \in \mathbb{R} \ : \ \theta(t, x) = y.$$

Οι τροχιά του $x \in M$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς αυτή την σχέση. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε ότι δύο τροχιές ή συμπίπτουν, ή είναι ξένες.

1.3 Ορισμός. Έστω θ μια διαφορική ροή της $(M, \mathcal{A})$. Ονομάζουμε **απειροστικό γεννήτορα** της θ την απεικόνιση

$$\xi : M \longrightarrow TM : \xi(x) = \dot{\theta}_x(0).$$

1.4 Λήμμα. *Για κάθε διαφορική ροή θ της $(M, \mathcal{A})$, ο απειροστικός της γεννήτορας ξ είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της M.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in M$, έχουμε ότι

$$\xi(x) = \dot{\theta}_x(0) \in T_{\theta_0(x)}M = T_xM,$$

άρα το ξ είναι διανυσματικό πεδίο. Είναι και διαφορίσιμο: αν $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε οι συνιστώσες του ξ ως προς τον (U, ϕ) είναι διαφορίσιμες:

$$\begin{aligned} \xi_i(x) = \xi_x(x_i) = \dot{\theta}_x(0)(x_i) &= \left(T\theta_x \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) \right) (x_i) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) (x_i \circ \theta_x) = \left. \frac{\partial (x_i \circ \theta_x)}{\partial t} \right|_0 \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη ως προς x. □

1.5 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλοτητα Hausdorff, θ διαφορική ροή της M και ξ ο απειροστικός της γεννήτορας. Τότε, για κάθε $x \in M$, η θ_x είναι η (μοναδική) ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\dot{\theta}_x(s) = \xi(\theta_x(s))$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x \in M$ και $s \in \mathbb{R}$, σταθερό. Θέτουμε $\theta_x(s) = y \in M$. Παρατηρούμε ότι

$$\theta_y(t) = \theta(t, y) = \theta(t, \theta(s, x)) = \theta(t+s, x) = \theta_x(t+s) = \theta_x \circ \ell_s(t),$$

άρα

$$\theta_y = \theta_x \circ \ell_s.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}
\xi(\theta_x(s)) = \xi(y) = \dot{\theta}_y(0) &= \overset{\cdot}{\overbrace{\theta_x \circ \ell_s}}(0) \\
&= T\theta_x \circ T\ell_s \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \right) = T\theta_x \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{\ell_s(0)} \right) \\
&= T\theta_x \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s \right) = \dot{\theta}_x(s).
\end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας διαφορικής ροής, τότε οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο λέγεται **πλήρες**.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τυχαίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Για κάθε $x \in M$, συμβολίζουμε με α_x την ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x. Τότε η απεικόνιση

$$\alpha : A \longrightarrow M : \alpha(t, x) = \alpha_x(t)$$

με A κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R} \times M$ είναι διαφορίσιμη. Επίσης,

$$\alpha_x(0) = x, \qquad \forall\, x \in M$$

και

$$\alpha(t, \alpha(s, x)) = \alpha(t+s, x)$$

για όσα t, s, x ορίζονται τα δύο μέλη της ισότητας. Πράγματι, η $\alpha(t, \alpha(s, x)) = \alpha_{\alpha(s,x)}(t)$ είναι η (μοναδική, για πολλαπλότητα Hausdorff) ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha(0, \alpha(s, x)) = \alpha(s, x)$. Η $\alpha(t+s, x)$ είναι επίσης ολοκληρωτική καμπύλη του ξ (βλ. σχέση (13) του Μαθήματος 11), με αρχική συνθήκη $\alpha(0+s, x) = \alpha(s, x)$. Άρα οι δύο καμπύλες συμπίπτουν. Δηλ. οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$ είναι "τοπικές διαφορικές ροές" επί της M.

1.6 Παραδείγματα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα Παραδείγματα 1.5 του προηγούμενου μαθήματος, έχουμε:

(Α) Το $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ με
$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$
αντιστοιχεί στην διαφορική ροή
$$\theta(t,(x,y)) = \alpha_{(x,y)}(t) = (x\exp t, y\exp t),$$
για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(Γ) Το βασικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{X}(U)$, ως προς ένα χάρτη (U,ϕ), αντιστοιχεί στην (τοπική) ροή
$$\theta(t,x) = \alpha_x(t) = \phi^{-1}(t + x_1(x), x_2(x), \ldots, x_m(x)).$$

(Δ) Το ολικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στην διαφορική ροή
$$\theta(t,s) = \ell_s = t + s.$$

2 Συσχετισμένες Ροές

2.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη και ϕ, ψ διαφορικές ροές των M, N, αντίστοιχα. Λέμε ότι οι ϕ, ψ είναι f-**συσχετισμένες**, αν
$$f \circ \phi = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f),$$
δηλ. αν το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{R} \times N \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

2.2 Πρόταση. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου ορισμού, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Οι ϕ, ψ είναι f-συσχετισμένες.

(ii) Οι απειροστικοί γεννήτορες των ϕ και ψ είναι f-συσχετισμένοι.

Απόδειξη. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ οι απειροστικοί γεννήτορες των ϕ και ψ, αντίστοιχα.

($i \Rightarrow ii$) Έστω ότι ϕ, ψ είναι f-συσχετισμένες. Για κάθε $x \in M$, η ϕ_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, και, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η σύνθεση

$$f \circ \phi_x(t) = f(\phi(t,x)) = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f)(t,x) = \psi(t, f(x)) = \psi_{f(x)}(t)$$

είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η. Από την Πρόταση 1.6 του Μαθήματος 11, τα ξ και η είναι f-συσχετισμένα.

($ii \Rightarrow i$) Έστω τώρα ότι οι απειροστικοί γεννήτορες είναι f-συσχετισμένοι. Τότε (πάλι από την ίδια πρόταση), η f μεταφέρει κάθε ολοκληρωτική καμπύλη ϕ_x του ξ στην ολοκληρωτική καμπύλη $f \circ \phi_x$ του η, με αρχική συνθήκη $f \circ \phi_x(0) = f(x)$. Άρα η τελευταία συμπίπτει με την $\psi_{f(x)}$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $x \in M$,

$$f \circ \phi(t,x) = f \circ \phi_x(t) = \psi_{f(x)}(t) = \psi(t, f(x)) = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f)(t,x)$$

και οι ροές είναι συσχετισμένες. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 01-02
ΧΑΡΤΕΣ-ΑΤΛΑΝΤΕΣ-ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $U = (0,1) \times (0, \pi/2) \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$\phi : U \to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

αποδείξτε ότι (U, ϕ) είναι ένας χάρτης που ανήκει στη συνήθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$.

2. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (x^2 + 2y^2, 3xy)$$

ορίζει σε κατάλληλα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ (ποιά;) χάρτες που ανήκουν στη συνήθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$.

3. Αποδείξτε ότι οι χάρτες (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S) του S^2 είναι συμβιβαστοί με τους χάρτες $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$. Τί μπορείτε να συμπεράνετε για αυτές τις δύο διαφορικές δομές του S^2;

4. Να δείξετε ότι οι άτλαντες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ του κύκλου (Παράδειγμα 1.2(Δ), του Μαθήματος 02) είναι διαφορικά συμβιβαστοί μεταξύ τους.

5. Αποδείξτε ότι η n–διάστατη σαμπρέλλα $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n.

6. Έστω K η επιφάνεια του κυλίνδρου και B_1, B_2 οι βάσεις της. Δείξτε ότι $K \setminus (B_1 \cup B_2)$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

7. Στο Παράδειγμα 1.2(Α) του Μαθήματος 02, βρείτε τους χάρτες του μέγιστου άτλαντα.

8. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$. Αποδείξτε ότι το μονοσύνολο $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ ορίζει μια διαφορική δομή στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν ο χάρτης $(\mathbb{R}, \psi)$ είναι τοπολογικά ή διαφορικά συμβιβαστός με το χάρτη $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$. Τί συμπεραίνετε;

9. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών *δεν* είναι σχέση ισοδυναμίας.

10. Έστω (U, ϕ) ένας m–διάστατος χάρτης του M, έστω $y \in \mathbb{R}^m$ και έστω

$$\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : x \to x + y$$

η αντίστοιχη μεταφορά. Αποδείξτε ότι οι χάρτες (U, ϕ) και $(U, \mu \circ \phi)$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

11. Αποδείξτε ότι κάθε χάρτης (U, ϕ) ενός συνόλου M είναι διαφορικά συμβιβαστός με ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος χαρτών.

12. Αποδείξτε ότι αν από ένα μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}$ αφαιρεθεί ένα αριθμήσιμο πλήθος χαρτών του, προκύπτει ένας άτλαντας.

13. Αν ένας τοπολογικός άτλαντας $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος, αποδείξτε ότι αυτός περιέχει χάρτες που δεν είναι $\mathcal{C}^1$–συμβιβαστοί, επομένως ο $\mathcal{A}$ δεν είναι $\mathcal{C}^k$–άτλαντας, γιά $k \geq 1$. Άρα ένας μέγιστος τοπολογικός άτλαντας δεν μπορεί να είναι διαφορικός άτλαντας.

14. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλοτητα. Τότε, για κάθε $x \in M$:

(α) Υπάρχει χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ *με κέντρο* x, δηλ. $\phi(x) = 0$.

(β) Υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $\psi(V) = \mathbb{R}^m$.

(γ) Υπάρχει χάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $\chi(W) = \mathbb{R}^m$, και $\chi(x) = 0$.

15. Θεωρείστε το σύνολο $X = X_1 \cup X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου $X_1 := \mathbb{R} \times \{0\}$ και $X_2 := D\big((0,2), 1\big)$ [: ο ανοιχτός δίσκος κέντρου $(0, 2)$ και ακτίνας 1]. Αποδείξτε ότι

(α) (X_1, pr_1) και (X_2, id_{X_2}) είναι χάρτες του X.

(β) Το σύνολο $\mathcal{A} = \big\{(X_1, \mathrm{pr}_1), (X_2, \mathrm{id}_{X_2})\big\}$ είναι διαφορικός άτλαντας του X.

Ποιά είναι η διάσταση του $\mathcal{A}$;

16. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη και

$$\Gamma_f := \big\{(x, f(x)) \, : \, x \in U\big\} \subseteq U \times \mathbb{R}^n$$

το γράφημα της f. Να δείξετε ότι Γ_f είναι m-διάστατη πολλαπλότητα.

17. Έστω $M = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$U_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, \qquad U_2 = (\mathbb{R}_* \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\}$$

και θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\phi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R} : \phi_1(x, y) = x,$$
$$\phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R} : \phi_2(x, y) = x$$

Να δείξετε ότι τα ζεύγη (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2$, είναι 1-διάστατοι χάρτες του M, διαφορικά συμβιβαστοί μεταξύ τους.

18. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια n-διάστατη $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητα, $N \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $f : M \to N$ 1-1 και επί. Να δείξετε ότι το N δέχεται δομή n-διάστατης $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 03
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.10, αποδείξτε ότι:

(i) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$, που ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ από την συνήθη διαφορική δομή του, συμπίπτει με τη συνήθη τοπολογία του.

(ii) Οι τοπολογίες $\tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau_{\mathcal{B}}$ του S^2 που ορίζονται από τους άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ των στερεογραφικών προβολών και των ημισφαιρίων, αντίστοιχα, συμπίπτουν με τη σχετική τοπολογία που ορίζεται στο S^2 από τον $\mathbb{R}^3$.

(iii) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ συμπίπτει με την τοπολογία–πηλίκο του $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$.

(iv) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}|_A}$ μιας ανοιχτής υποπολλαπλότητας A συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία του υποσυνόλου A του M (όπου M είναι εφοδιασμένο με $\tau_{\mathcal{A}}$).

(v) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{C}}$ του $M \times N$ (Πρότ. 2.7 του Μαθήματος 02) συμπίπτει με την τοπολογία–γινόμενο $\tau_{\mathcal{A}} \times \tau_{\mathcal{B}}$.

2. Αποδείξτε ότι η γενική γραμμική ομάδα $GL(n,\mathbb{R})$ είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. Αποδείξτε ότι $GL(n,\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγής πολλαπλότητα.

4. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}_*$ δεν είναι συνεκτική πολλαπλότητα.

5. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

και τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \ : \ i = 1,2\}$ της Ασκησης 17, από τις Ασκήσεις 01. Να δείξετε ότι $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι χώρος Hausdorff.

6. Έστω $\mathcal{A}$ ένας μέγιστος άτλαντας. Αποδείξτε ότι τα μη κενά ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{A}}$ συμπίπτουν με τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}$, αν και μόνον αν ο $\mathcal{A}$ περιέχει έναν ολικό χάρτη.

7. Έστω $\mathcal{A}$ άτλαντας επί του $M \neq \emptyset$, με την ιδιότητα: για κάθε $x \neq y \in M$, υπάρχει $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $x, y \in U$. Να δείξετε ότι η κανονική τοπολογία που ορίζεται από τον $\mathcal{A}$ κάνει το M χώρο Hausdorff.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 04
ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Έστω $f : M \to N$ μια αμφιδιαφόριση και έστω $A \subseteq M$ ανοιχτό. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό $B \subseteq N$, έτσι ώστε $f|_A : A \to B$ να είναι αμφιδιαφόριση ως προς τη διαφορική δομή των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων.

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τους μέγιστους διαφορικούς άτλαντες $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{B}'$, που ορίζονται από τους $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})\}$ και $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$, όπου $\psi(t) = t^3$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να ελέγξετε την διαφορισιμότητα των απεικονίσεων

$$\begin{gathered}
\mathbf{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\
\mathbf{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})
\end{gathered}$$

3. Αποδείξτε ότι κάθε σταθερή απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι διαφορίσιμη.

4. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη.

5. Έστω M, N, P διαφορικές πολλαπλότητες και $f : P \to M \times N$ απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν οι συνθέσεις

$$\begin{gathered}
f_M := p_M \circ f : P \longrightarrow M \\
f_N := p_N \circ f : P \longrightarrow N
\end{gathered}$$

είναι διαφορίσιμες.

6. Έστω M, N μη κενά σύνολα και $f : M \to N$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αν ένα από τα σύνολα έχει διαφορική δομή, δείξτε ότι το άλλο δέχεται διαφορική δομή που κάνει την f αμφιδιαφόριση.

7. Έστω M_i, N_i διαφορικές πολλαπλότητες ($i = 1, 2$) και $f_i : M_i \to N_i$. Αποδείξτε ότι

$$\begin{gathered}
f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2 : \\
(x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))
\end{gathered}$$

είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν και οι δύο f_i είναι διαφορίσιμες.

8. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$, $(P,\mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε στο γινόμενο $M\times N$ την διαφορική δομή που ορίζεται από τον άτλαντα $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f: M\times N\to P$. Για ένα σταθεροποιημένο $(x,y)\in M\times N$ δείξτε ότι οι μερικές απεικονίσεις

$$\begin{aligned} f_x &: N \longrightarrow P : y \longmapsto f(x,y)\\ f_y &: M \longrightarrow P : x \longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμες.

9. Θεωρούμε την διαφορική πολλαπλότητα $(S^1,\mathcal{C}')$, όπου $\mathcal{C}'$ είναι ο μέγιστος άτλαντας του Παραδείγματος 1.2(Δ), στο Μάθημα 02, και το γινόμενο $S^1\times S^1$ με τη δομή της πολλαπλότητας–γινόμενου, δηλ. με τον άτλαντα $(\mathcal{C}\times\mathcal{C})'$. Έστω

$$\begin{gathered} \gamma : S^1\times S^1 \longrightarrow S^1 :\\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1x_2-y_1y_2,\, x_1y_2+x_2y_1). \end{gathered}$$

Αν τα ζεύγη (x_1,y_1), (x_2,y_2) θεωρούνται σαν μιγαδικοί αριθμοί, τότε η γ είναι ο περιορισμός στο S^1 του πολλαπλασιασμού του $\mathbb{C}$. Να ελέγξετε αν η γ είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ των ανωτέρω πολλαπλοτήτων.

10. Αποδείξτε ότι το σύνολο $Diff(M)$ όλων των αμφιδιαφορίσεων $f: M\to M$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση των απεικονίσεων είναι μια μη αβελιανή ομάδα.

11. Για κάθε $A\subseteq M$ ανοιχτό, δείξτε ότι $\mathcal{C}^\infty(A,\mathbb{R})$ είναι μια μεταθετική προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα. Ισχύουν τα ίδια για $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$;

12. Εξηγείστε γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ $\mathcal{C}^k$–διαφορικών πολλαπλοτήτων, με $r>k$.

13. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f: M\to N$ απεικόνιση. Για κάθε $x\in M$, δείξτε ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η απεικόνιση f είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο x.

(ii) Η απεικόνιση f είναι συνεχής στο x και, για κάθε ζεύγος των χαρτών (U,ϕ) του M και (V,ψ) του N με $x\in U$ και $f(x)\in V$, η απεικόνιση

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο $\phi(x)$.

14. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$f : S^2 \longrightarrow S^2 : f(u) = -u, \quad \forall\, u\in S^2$$

είναι διαφορίσιμη.

15. (α) Έστω

$$\pi : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : (x,y,z) \longmapsto [(x,y,z)].$$

Αποδείξτε ότι η π είναι διαφορίσιμη. Είναι αμφιδιαφόριση;

(β) Αποδείξτε ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής και συνεκτικός.

16. Να ελέγξετε αν η απεικόνιση

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : (x,y,z) \longmapsto [(x,y,z)]$$

είναι διαφορίσιμη.

17. Έστω $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ η κανονική εμφύτευση. Να δείξετε ότι είναι διαφορίσιμη.

18. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : [(x,y,z)] \longmapsto \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}$$

είναι καλά ορισμένη και διαφορίσιμη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 05
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ

1. Έστω $u = [(\alpha, x)], v = [(\beta, x)] \in T_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν καμπύλες γ και δ στο M, τέτοιες ώστε $u + v = [(\gamma, x)]$ και $\lambda u = [(\delta, x)]$.

2. Να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το μηδενικό στοιχείο $0_x \in T_xM$.

3. Να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το βασικό διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ που ορίζεται από τον χάρτη $(U, \phi = (x_1, ..., x_m))$. Ιδιαιτέρως, βρείτε καμπύλη που υλοποιεί το $\frac{d}{dt}\Big|_t \in T_t\mathbb{R}$.

4. Έστω η μοναδιαία σφαίρα S^2 και το σημείο $p = (0, 1, 0) \in S^2$. Αν $u \in T_pS^2$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα με συντεταγμένες $(2, -1)$, ως προς τον χάρτη (U_y^+, ϕ_y^+), να βρεθεί μια διαφορίσιμη καμπύλη που υλοποιεί το u.

5. Δείξτε ότι οι καμπύλες $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, με $\alpha(t) = (t, 1 + t^2, t)$ και $\beta(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ορίζουν το ίδιο εφαπτόμενο διάνυσμα $u \in T_{(0,1,0)}\mathbb{R}^3$. Να εκφράσετε το u μέσω της κανονικής βάσης που ορίζεται από τον χάρτη $(\mathbb{R}^3, \mathbf{id}_{\mathbb{R}^3})$.

6. Αν $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ είναι η διαφορίσιμη καμπύλη

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} t+1 & 2t^2 \\ 3t & 2t+1 \end{pmatrix},$$

να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος $u = [(\alpha, I)] \in T_I\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ως προς τον συνήθη χάρτη του $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Εδώ I συμβολίζει τον ταυτοτικό πίνακα.

7. Έστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση

$$\phi(t, s) := \left(\frac{2t + s}{3}, \frac{2t - s}{3}\right).$$

Δείξτε ότι $(\mathbb{R}^2, \phi)$ είναι χάρτης της συνήθους διαφορικής δομής του $\mathbb{R}^2$, και να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$u = 2\, \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p - 3\, \frac{\partial}{\partial x_2}\bigg|_p$$

όπου $p = (\frac{1}{2}, 0)$, και x_1, x_2 είναι οι συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \phi)$.

8. Έστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ η καμπύλη με $\alpha(t) = [(2t + 1, 1, t^2)]$. Δείξτε ότι η α είναι διαφορίσιμη στο 0, και προσδιορίστε τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος $u = [(\alpha, \alpha(0))]$ ως προς τον χάρτη (U_2, ϕ_2) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 06
ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

1. Αν $f : M \to N$ είναι σταθερή, τότε $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$.

2. Αν $\big(x_1, \ldots, x_m\big)$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων ενός χάρτη (U, ϕ), δείξτε ότι

$$(\,\overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^m} \circ T_x x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \right) = \delta_{ij};$$

επομένως,

$$T_x x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i \neq j \\ \dfrac{d}{dt}\bigg|_{x_i(x)} \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i = j. \end{cases}$$

3. Αν $f_i : M_i \to N_i$ ($i = 1, 2$) είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις, τότε,

$$T_{(x_1,x_2)}(f_1 \times f_2) \equiv T_{x_1} f_1 \times T_{x_2} f_2.$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$.

4. Αν $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$, δείξτε ότι $\dot{\alpha}(0) = u$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to S^1$ με $f(t) := (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Δείξτε ότι $T_{\frac{1}{4}} f$ είναι 1-1.

6. Υπολογίστε το διαφορικό της απεικόνισης

$$f : S^2 \longrightarrow S^2 : f(p) = -p$$

μέσω των βασικών εφαπτόμενων διανυσμάτων ενός χάρτη της επιλογής σας.

7. Έστω $f : S^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $f(x, y, z) = [(x, y, z)]$, για κάθε $(x, y, z) \in S^2$. Θεωρούμε τον χάρτη (U_z^+, ϕ_z^+) της S^2 και το σημείο $N \in U_z^+$. Αν $w \in T_x S^2$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα με συντεταγμένες $(1, 2)$ ως προς τον ανωτέρω χάρτη, υπολογίστε το $T_N f(w)$ ως προς κατάλληλη βάση του $T_{f(N)}\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

8. Δείξτε ότι η κανονική εμφύτευση $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση της οποίας το διαφορικό στο $(1, 0, 0)$ είναι 1-1.

9. Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη και Γ_f το γράφημα της f. Να δείξετε ότι

(α) Το Γ_f δέχεται δομή διαφορικής πολλαπλότητας ίδιας διάστασης με την M, έτσι ώστε ο περιορισμός της προβολής στην M

$$p_M|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \longrightarrow M$$

να είναι αμφιδιαφόριση.

(β) Η $j : M \to \Gamma_f$, με $j(x) = (x, f(x))$, είναι διαφορίσιμη και το διαφορικό της σε κάθε $x \in M$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

10. Έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση με $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$. Δείξτε ότι αν M είναι συνεκτικό, τότε f είναι σταθερή.

11. Έστω $f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$f(x, y, t) = \left(\frac{x}{1+t^2}, \frac{y}{1+t^2} \right).$$

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi της f σε ένα σημείο $p = (x, y, t)$, με $x > 0$ και βρείτε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $S^1 \times \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι αμφιδιαφόριση.

12. Αν $(x_1, \ldots, x_m)$ είναι οι συντεταγμένες ενός χάρτη (U, ϕ), δείξτε ότι

$$(\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \circ T_x x_i) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) = \delta_{ij},$$

επομένως,

$$T_x x_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i \neq j \\ \frac{d}{dt}\big|_{x_i(x)} \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i = j. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 07
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

1. Έστω $(U,\phi), (V,\psi)$ χάρτες μιας m-διάστατης πολλαπλότητας M και $x \in U \cap V$. Συμβολίζουμε με

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \right\}_{1 \le i \le m} \quad \text{και} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_x \right\}_{1 \le i \le m}$$

τις κανονικές βάσεις του T_xM που ορίζονται από τους (U,ϕ) και (V,ψ), αντίστοιχα. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial (x_i \circ \psi^{-1})}{\partial u_j}\bigg|_{\psi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x .$$

Πώς συνδέονται ο πίνακας αλλαγής βάσης (των ανωτέρω βάσεων) με την απεικόνιση μεταφοράς των χαρτών;

2. Έστω $f : M \times N \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και $w \in T_{(x,y)}(M \times N)$. Αν $w \equiv (u,v) \in T_xM \times T_yN$, δείξτε ότι $w(f) = u(f_y) + v(f_x)$.

3. Θεωρώντας το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}M$ μιας διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha : J \to M$ σαν παραγώγιση, δείξτε ότι

$$\dot\alpha(t)(f) = (f \circ \alpha)'(t),$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_{\alpha(t)}(M,\mathbb{R})$.

4. Θεωρείστε το $\mathbb{R}^3$ με την συνήθη διαφορική δομή. Αν $p = (1,0,0)$, $u \in T_p\mathbb{R}^3$ έχει συντεταγμένες $(1,2,3)$, ως προς τον χάρτη $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, και $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ δίνεται από $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, τότε υπολογίστε το $u(f)$.

5. Έστω η απεικόνιση $f : S^2 \to \mathbb{R}$, με $f(x,y,z) = x^2 + (1+2y)z^2$. Αν $p = \left(-\sqrt{3}/2, 0, 1/2\right)$, υπολογίστε την παράσταση $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$, όπου x_i ($i=1,2$) είναι οι συντεταγμένες του χάρτη (U_z^+, ϕ_z^+) της S^2.

6. Έστω $u = (3,2,-1) \in T_p\mathbb{R}^3$, όπου $p = (2,0,1)$ και $\mathbb{R}^3$ έχει την συνήθη διαφορική δομή. Αν $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ δίνονται από τις ισότητες $f(x,y,z) = y^2z$ και $g(x,y,z) = e^x \cos y$, υπολογίστε τα $u(f \cdot g)$, $u(f^2+3g)$, $T_pf(u)$ και $T_pg(u)$.

7. Έστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ η καμπύλη $\alpha(t) = [(2t+1, 1, t^2)]$ και $u = [(\alpha, \alpha(0))]$. Υπολογίστε το $u(f)$, για την $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, με $f([(x,y,z)]) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$.

8. Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$ και $(U, \phi = (x_1,\dots,x_m))$ χάρτης στο x. Τότε

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i'(0)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x , \quad \text{όπου} \quad \alpha_i = x_i \circ \alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 08
Εφαπτόμενη Δέσμη και Ολικό Διαφορικό

1. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : \mathbb{R} \times TM \to TM$ με $\rho(\lambda, u) = \lambda u$ είναι διαφορίσιμη.

2. Αποδείξτε ότι αν M είναι Hausdorff, τότε TM είναι επίσης Hausdorff.

3. Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ είναι αμφιδιαφόριση, να δείξετε ότι η $Tf : TM \to TN$ είναι αμφιδιαφόριση με $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

4. Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, διαστάσεων m και n, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχει αμφιδιαφόριση $F : T(M \times N) \to TM \times TN$.

5. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια $\mathcal{C}^r$–πολλαπλότητα και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Τότε η τοπική παράσταση $\Phi \circ \pi \circ \phi^{-1}$ της προβολής π της TM είναι $\mathcal{C}^\infty$-διαφορίσιμη. Είναι η π $\mathcal{C}^\infty$-απεικόνιση ή όχι, και γιατί;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 09
Διανυσματικά Πεδία

1. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη πολλαπλότητα και (U, ϕ), (V, ψ) δύο τεμνόμενοι χάρτες με αντίστοιχες συντεταγμένες $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$, $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{1}$$

2. Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, έστω (ξ_i) και $\left(\bar{\xi}_j\right)$ οι συντεταγμένες του $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ως προς τους δύο δεδομένους χάρτες. Δείξτε ότι

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad \text{και} \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

3. Δείξτε ότι $\xi(c) = 0$, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και κάθε σταθερή $c \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

4. Έστω (x_1, x_2, x_3) οι συντεταγμένες του $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$

$$\xi = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1 + x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Αν $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}_3, \mathbb{R})$, με $f(x, y, z) = x - 2y$, υπολογίστε την $\xi(f)$ στο $(1, 3, -2)$.

5. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $x_o \in M$, με $\xi(x_o) \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του x_o με $\xi(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

6. Θεωρούμε τους χάρτες (U_N, θ_N), (U_S, θ_S) του μοναδιαίου κύκλου S^1 (βλ. Παράδειγμα 1.2 (Δ3) του Μαθήματος 01). Συμβολίζουμε με $\frac{\partial}{\partial x_N}$ και $\frac{\partial}{\partial x_S}$ τα βασικά διανυσματικά πεδία αυτών των χαρτών.

(α) Να δείξετε ότι

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_N}\right|_{U_N \cap U_S} = \left.\frac{\partial}{\partial x_N}\right|_{U_N \cap U_S}.$$

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ολικό βασικό διανυσματικό πεδίο $\xi_o \in \mathcal{X}(S^1)$. Δηλ. ένα ξ_o με την ιδιότητα:

$$\forall\, \xi \in \mathcal{X}(S^1), \;\; \exists!\, f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}) \; : \; \xi = f \xi_o.$$

7. Μια m-διάστατη πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ λέγεται **παραλληλοποιήσιμη**, αν υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathcal{X}(M)$ με την ιδιότητα: $\forall\, \xi \in \mathcal{X}(M)$, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} f_i \xi_i.$$

(α) Εξηγείστε γιατί οι πολλαπλότητες $\mathbb{R}_n$, A ($A \subset \mathbb{R}_n$ ανοιχτό), και S^1 είναι παραλληλοποιήσιμες. Βρείτε τις αντίστοιχες οικογένειες $\{\xi_i\}_i$.

(β) Να εξετάσετε αν το καρτεσιανό γινόμενο παραλληλοποιήσιμων πολλαπλοτήτων είναι παραλληλοποιήσιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10
Αγκύλη Lie - Συσχετισμένα Πεδία

1. Αποδείξτε την ισότητα

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi,$$

για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

2. Δείξτε ότι τα βασικά διανυσματικά πεδία ενός χάρτη (U, ϕ), με συντεταγμένες $(x_i)_{1\leq i\leq m}$, ικανοποιούν την ισότητα

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0; \qquad i, j = 1, \dots, m.$$

3. Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες του ταυτοτικού χάρτη του $\mathbb{R}^2$, υπολογίστε τις αγκύλες Lie

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right],\ \ Y = \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ e^{-y}\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

με δύο τρόπους: α) υπολογίζοντας τις συνιστώσες των αγκυλών, και β) χρησιμοποιώντας τον τύπο της Άσκησης 1.

4. Αν (U, ϕ) χάρτης της M και $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, δείξτε ότι

$$\left[f\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](h) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

5. Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\widetilde{\xi} : M \times N \longrightarrow TM \times TN : \widetilde{\xi}(x, y) = (\xi_x, 0_y),$$
$$\widetilde{\eta} : M \times N \longrightarrow TM \times TN : \widetilde{\eta}(x, y) = (0_x, \eta_y).$$

Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $T(M\times N) = TM \times TN$, δείξτε ότι $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \in \mathcal{X}(M \times N)$ με $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = 0$.

6. Έστω $\alpha : J \to M$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα) μια διαφορίσιμη καμπύλη και $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Να δείξετε ότι το βασικό διανυσματικό πεδίο $\dfrac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$ είναι α-συσχετισμένο με το $\xi \in \mathcal{X}(M)$ αν και μόνον αν

$$\dot{\alpha}(t) = \xi(\alpha(t)), \qquad t \in J.$$

7. Έστω $f : M \to N$ διαφορίσιμη. Υποθέτουμε ότι (U, ϕ) και (V, ψ) είναι χάρτες των M και N, αντίστοιχα, με $f(U) \subseteq V$. Αν $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ και $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων των ανωτέρω χαρτών, να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ να είναι f-συσχετισμένο με το $\dfrac{\partial}{\partial y_n}$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση $f(t) = (\sin t, \cos t)$. Αν $\eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ είναι το διανυσματικό πεδίο $\eta = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, δείξτε ότι $\dfrac{d}{dt}$ και η είναι f-συσχετισμένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11-12
Ολοκληρωτικές Καμπύλες - Ροές

1. Βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των επόμενων διανυσματικών πεδίων του $\mathbb{R}^2$:

(α) $$\xi = y\frac{\partial}{\partial y},$$

(β) $$\zeta = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y},$$

(γ) $$\eta = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

2. Θεωρώντας το $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ σαν ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$, βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του $\xi \in \mathcal{X}\left(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right)$, με

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

3. Έστω α μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f : M \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $T_t\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\overbrace{f \circ \alpha}^{\cdot} = \xi(f) \circ \alpha.$$

4. Βρείτε τις ροές των διανυσματικών πεδίων του $\mathbb{R}^2$:

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ \ \eta = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},\ \ \zeta = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Είναι αυτά τα πεδία πλήρη;

5. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ με $\xi = x^2 d/dx$ [όπου x συμβολίζει την μοναδική συντεταγμένη του $(\mathbb{R}, \mathbf{id}_{\mathbb{R}})$], δηλ. $\xi(t) = t^2 \left.\frac{d}{dx}\right|_t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι ξ δεν είναι πλήρες και βρείτε την ροή του.

6. Έστω

$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \theta\big(t, (x,y)\big) = \big((2 + \sin y)t + x, y\big).$$

Δείξτε ότι η θ είναι ροή και βρείτε τον απειροστικό της γεννήτορα.

7. Έστω ξ και η πλήρη διανυσματικά πεδία των πολλαπλοτήτων M και N, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με α_x και β_y τις ολοκληρωτικές καμπύλες των ξ και η, με αρχικές συνθήκες $x \in M$ και $y \in N$, αντίστοιχα. Τότε:

1) Δείξτε ότι $\gamma(t) := \big(\alpha_x(t), \beta_y(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi \times \eta$, με αρχική συνθήκη (x,y).

2) Βρείτε την ροή θ του $\xi \times \eta$.

3) Επαληθεύστε ότι ο απειροστικός γεννήτορας της θ είναι το $\xi \times \eta$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1 Ορισμοί και Βασικά Αποτελέσματα

1.1. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $a \in U$ και $f : U \to \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f **είναι διαφορίσιμη στο** a, αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (δηλ. $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$), έτσι ώστε

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

Η γραμμική απεικόνιση $Df(a)$ λέγεται **διαφορικό της** f **στο** a.

1.2. Ειδική περίπτωση. Έστω I ένα ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $t_o \in I$. Τότε το διαφορικό της f στο t_o

$$Df(t_o) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

επειδή είναι γραμμική απεικόνιση, ικανοποιεί την σχέση

$$Df(t_o)(t) = tDf(t_o)(1)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, από τον ορισμό της διαφορίσιμης απεικόνισης, έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(t_o+t) - f(t_o) - tDf(t_o)(1)|}{|t|} = 0.$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t_o+t) - f(t_o)}{t} = Df(t_o)(1).$$

Σε αυτή την περίπτωση, θέτουμε

$$f'(t_o) := Df(t_o)(1), \tag{2}$$

και παίρνουμε

$$Df(t_o)(t) = t \cdot f'(t_o)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Αν $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και η $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, τα επόμενα αποτελέσματα είναι άμεσα:

1.3. Πρόταση. *Το διαφορικό της f στο a είναι μονοσήμαντα ορισμένο.*

1.4. Πρόταση. *Η f είναι συνεχής στο a.*

1.5. Πρόταση. *Ο περιορισμός της f σε κάθε ανοιχτό $V \subseteq U$ με $a \in V$, είναι διαφορίσιμος στο a.*

1.6. Ορισμός. Αν $U \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη στο** U, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $x \in U$.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις μας εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα κάποιων απλών απεικονίσεων:

1.7. Πρόταση. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$. Αν η f είναι σταθερή, τότε είναι διαφορίσιμη στο U, και $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$.*

Αντίστροφα, αν η f είναι διαφορίσιμη με $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του U. Ιδιαιτέρως, αν U είναι συνεκτικό, τότε η f είναι σταθερή.

1.8. Πρόταση. *Αν $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η f είναι διαφορίσιμη και*

$$Df(x) = f, \tag{4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Δηλ.

$$[Df(x)](h) = f(h), \tag{5}$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$.

1.9. Πρόταση. *Αν* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *είναι μια διγραμμική απεικόνιση, δηλ.*

$$f \in L_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k),$$

τότε, η f *είναι διαφορίσιμη και*

$$[Df(a,b)](h,k) = f(h,b) + f(a,k), \tag{6}$$

για κάθε $(a,b),(h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1.10. Πόρισμα. *(i) Κάθε εσωτερικό γινόμενο*

$$< \, , \, >: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμο, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[D < \, , \, > (x,y)](h,k) =< h,y > + < x,k >, \tag{7}$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Το εξωτερικό γινόμενο

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμο, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[D \times (x,y)](h,k) = h \times y + x \times k, \tag{8}$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Η εκτιμήτρια απεικόνιση

$$ev : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (f,x) \mapsto ev(f,x) := f(x)$$

είναι διαφορίσιμη, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[Dev(f,x)](g,y) = g(x) + f(y), \tag{9}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^m$ *και* $f, g \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

(iv) Η σύνθεση

$$co : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) : (f,g) \mapsto co(f,g) := g \circ f$$

είναι διαφορίσιμη, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[Dco(f_o, g_o)](f,g) = g_o \circ f + g \circ f_o, \tag{10}$$

για κάθε $f_o, f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *και* $g_o, g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Πρόταση 9 και το Πόρισμα 10 είναι ειδικές περιπτώσεις του παρακάτω γενικού αποτελέσματος:

1.11. Πρόταση. *Αν* $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^n$ *είναι μια* k*-πλειογραμμική απεικόνιση, δηλ.*

$$f \in L_k(\mathbb{R}^{m_1}, \cdots, \mathbb{R}^{m_k}; \mathbb{R}^n),$$

τότε η f *είναι διαφορίσιμη και*

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= f(h_1, x_2, \ldots, x_k) + f(x_1, h_2, x_3, \ldots, x_k) + \cdots \\ &\quad + f(x_1, \ldots, x_{k-2}, h_{k-1}, x_k) + f(x_1, \ldots, x_{k-1}, h_k), \end{aligned}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k), h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$.

Σχετικά με την σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

1.12. Θεώρημα (Κανόνας της Αλυσίδας). *Υποθέτουμε ότι* $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοιχτά,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *διαφορίσιμη στο* $a \in U$, *με* $f(U) \subseteq V$, *και* $g : V \to \mathbb{R}^k$ *διαφορίσιμη στο* $f(a) \in V$. *Τότε η σύνθεση* $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ *είναι διαφορίσιμη στο* a *και*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{11}$$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις αναφέρονται σε απεικονίσεις που ορίζονται ή έχουν πεδίο τιμών ένα καρτεσιανό γινόμενο ευκλείδειων χώρων.

1.13. Πρόταση. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *ανοιχτό και* $f : U \to \mathbb{R}^n$. *Συμβολίζουμε με* f_i *τις συνθέσεις* $f_i := pr_i \circ f$, *όπου* $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι η* i*-προβολή (δηλ.* $pr_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$*). Τότε η* f *είναι διαφορίσιμη στο* $a \in U$ *αν και μόνον αν* f_i *είναι διαφορίσιμη στο* a, *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *και*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_n(a)). \tag{12}$$

Ιδιαιτέρως, αν $U = I \subseteq \mathbb{R}$, *θέτοντας* $f'(a) := Df(a)(1)$, *παίρνουμε*

$$f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_n'(a)). \tag{13}$$

Στην ειδική περίπτωση που ο κανόνας της αλυσίδας εφαρμόζεται σε απεικονίσεις $f : I \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ και $g : V \to \mathbb{R}^n$, όπου το πεδίο ορισμού της f είναι ένα ανοιχτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες (2) και (13), έχουμε

$$(g \circ f)'(t) = [Dg(f(t))](f'(t)), \tag{14}$$

για κάθε $t \in I$.

1.14. Πρόταση. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^p$ ανοιχτά. Τότε οι απεικονίσεις $f : U \to \mathbb{R}^m$ και $g : V \to \mathbb{R}^q$ είναι διαφορίσιμες στα $a \in U$ και $b \in V$, αντίστοιχα, αν και μόνον αν η απεικόνιση*

$$f \times g : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q : (x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

είναι διαφορίσιμη στο (a, b). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$D(f \times g)(a, b) = Df(a) \times Dg(b). \tag{15}$$

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $a \in U$ και $b \in V$. Έστω ακόμη μια απεκόνιση $f : U \times V \to \mathbb{R}^p$. Συμβολίζουμε με f_a και f_b τις μερικές απεικονίσεις της f στο (a, b), δηλ. τις

$$\begin{aligned} f_a &: V \to \mathbb{R}^p : v \longmapsto f_a(v) := f(a, v), \\ f_b &: U \to \mathbb{R}^p : u \longmapsto f_b(u) := f(u, b). \end{aligned}$$

Ισχύει το επόμενο

1.15. Θεώρημα. *Έστω μια απεικόνιση f, όπως προηγουμένως. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(a, b) \in U \times V$, τότε και οι f_a και f_b είναι διαφορίσιμες στα b και a, αντίστοιχα, και ισχύει ο τύπος του Leibniz*

$$[Df(a, b)](h, k) = [Df_a(b)](k) + [Df_b(a)](h),$$

για κάθε $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1.16. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση στο $a \in U$. Τότε το διαφορικό $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί με ένα πίνακα $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, μέσω των σχέσεων

$$a_{ji} := pr_j(Df(a)(e_i)) = D(pr_j \circ f)(a)(e_i) = Df_j(a)(e_i). \tag{16}$$

Ο ανάστροφος του (16) λέγεται **πίνακας Jacobi της** f **στο** a και συμβολίζεται με $J_a f$.

Όπως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, ο $J_a f$ είναι ακριβώς ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, ως προς τις κανονικές βάσεις.

Συνήθως, πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi και τότε βρίσκουμε την γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, μέσω της ισότητας

$$[Df(a)](h_1, \dots, h_m) = (J_a f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \tag{17}$$

για κάθε $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$.

1.17. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$. Υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα $I_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, με $a \in I_1 \times \cdots \times I_m \subseteq U$. Λέμε ότι **η** f **είναι διαφορίσιμη στο** $a \in U$ **ως προς την** i**-μεταβλητή**, ή ότι **υπάρχει η** i**-μερική παράγωγος της** f **στο** $a \in U$, αν υπάρχει η παράγωγος της μερικής απεικόνισης

$$I_i \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

στο a_i. Το διαφορικό της ανωτέρω απεικόνισης θα το συμβολίζουμε με

$$D_i f(a) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

και μπορούμε να το ταυτίζουμε με το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, που συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_a$ και δίνεται από την ισότητα

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = [D_i f(a)](1). \tag{18}$$

Η διαφορισιμότητα της f στο a, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(a + te_i) - f(a) - [Df(a)](te_i)\|}{\|te_i\|} = 0,$$

που με την σειρά του είναι ισοδύναμο με

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = [Df(a)](e_i).$$

Επομένως παίρνουμε

$$[D_i f(a)](1) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = [Df(a)](e_i). \tag{19}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την (16), βρίσκουμε για τον πίνακα Jacobi της f στο a

$$J_a f = \left(\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_a\right)^t = ([Df_j](e_i))^t. \tag{20}$$

1.18. Ορισμός Έστω $h \in \mathbb{R}^m$ σταθερό. Αν η $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, λέμε ότι η $Df(a)(h)$ είναι η **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο a, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος h**.

Προφανώς, η i–μερική παράγωγος της f στο a είναι η ειδική περίπτωση της κατευθυνόμενης παραγώγου της f στο a κατά την κατεύθυνση του e_i.

2 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

2.1. Ορισμός. Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **διαφορίσιμη στο** U. Τότε η απεικόνιση

$$Df : U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : x \mapsto Df(x)$$

λέγεται **(ολικό) διαφορικό** ή **(ολική) παράγωγος της** f.

Αφού ο $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ είναι ευκλείδειος χώρος, ιδιαιτέρως,

$$L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

η Df μπορεί να είναι συνεχής, ή διαφορίσιμη.

Θα λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^1$ (ή απλά ότι **η f είναι τάξης** $\mathcal{C}^1$), αν η f είναι διαφορίσιμη στο U και Df είναι συνεχής.

Αν επιπλέον η Df είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, το διαφορικό της Df στο a, δηλ. η γραμμική απεικόνιση

$$D^2 f(a) := D(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

λέγεται **δεύτερη παράγωγος της** f **στο** a. Αυτή η απεικόνιση, αν υπάρχει, ικανοποιεί την σχέση

$$D^2f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \cong L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n),$$

όπου $L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ συμβολίζει τον χώρο όλων των διγραμμικών απεικονίσεων $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Αν $D^2f(a)$ υπάρχει για κάθε $a \in U$, τότε ορίζεται το **δεύτερο διαφορικό** (ή **δεύτερη παράγωγος**) **της** f, δηλ. η απεικόνιση

$$D^2f : U \to L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

Αν η D^2f είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^2$.

Με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε το k–διαφορικό $D^kf : U \to L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ και την k–παράγωγο της f στο a, δηλ. την απεικόνιση

$$D^kf(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \dots) \dots)) \cong L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

Αν η D^kf είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^k$. Αν η f είναι τάξης $\mathcal{C}^k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$, τότε λέμε ότι **η** f **είναι διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^\infty$.

2.2. Πρόταση. *Για μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ τάξης $\mathcal{C}^k$, το k-διαφορικό $D^kf(a) \in L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ είναι* **συμμετρικό**. *Δηλ. για κάθε $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, έχουμε*

$$D^kf(a)(h_1, \dots, h_k) = D^kf(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}),$$

για κάθε μετάθεση σ των δεικτών.

Αν μια απεικόνιση $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, λαμβάνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα 1.15, βλέπουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_a$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ υπάρχουν. Ιδιαιτέρως, αν η f είναι C^1, τότε οι προηγούμενες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Αλλά, αντίστροφα, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων **δεν** συνεπάγεται την ύπαρξη του $Df(a)$. Όμως, αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς, τότε η $Df(a)$ επίσης υπάρχει, και η f είναι τάξης C^1.

Επειδή κάθε $f_j : U \to \mathbb{R}$, με $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, είναι μια απεικόνιση m μεταβλητών, αν η f είναι παντού διαφορίσιμη, μπορούμε να θεωρούμε την απεικόνιση

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \ni a \longmapsto \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_a \in \mathbb{R}.$$

Αυτή η απεικόνιση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους σε κάποιο σημείο $a \in U$, δηλ. μπορεί να υπάρχουν οι

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\bigg|_a \equiv \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}\bigg|_a, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης 2 (αντ. C^2–διαφορίσιμη), τότε όλες οι **μερικές παράγωγοι τάξης 2**, δηλ., όλες οι $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}|_a$, $i, k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, ύπαρχουν, για κάθε $a \in U$ (αντ. όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης 2 ύπαρχουν, και είναι συνεχείς). Αντίστροφα, αν οι μερικές παράγωγοι τάξης 2 ύπαρχουν και είναι συνεχείς, τότε και η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^2.

Αναλογα έχουμε τις μερικές παραγώγους τάξης p, για κάθε $p = 1, 2, \ldots$. Έχουμε το επόμενο

2.3. Θεώρημα. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ και $a \in U$. Τότε η f είναι C^∞-διαφορίσιμη, αν και μόνον αν οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς.*

2.4. Ορισμός. Έστω $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $f : U \to V$. Η f λέγεται $\mathcal{C}^k$–**αμφιδιαφόριση**, αν είναι C^k–διαφορίσιμη και αντιστρέψιμη, και και η αντίστροφη $f^{-1} : V \to U$ είναι επίσης $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμη.

2.5. Θεώρημα (Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$ μια $\mathcal{C}^p$-διαφορίσιμη απεικόνιση ($p \geq 1$). Αν η παράγωγος $Df(a_o)$ της f σε κάποιο $a_o \in U$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U_o του a_o με $U_o \subseteq U$ και μια ανοιχτή περιοχή V_o του $f(a_o)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:*

i) Ο περιορισμός της f στο U_o είναι 1-1 και $f(U_o) = V_o$ (επομένως, $f|_{U_o} : U_o \to V_o$ είναι 1-1 και επί).

ii) Η αντίστροφη της $f|_{U_o}$

$$(f|_{U_o})^{-1} : V_o \to U_o$$

είναι $\mathcal{C}^p$-διαφορίσιμη (επομένως, η $f|_{U_o}$ είναι $\mathcal{C}^p$-αμφιδιαφόριση).

iii) Για κάθε $a \in U_o$,

$$Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}. \tag{21}$$

2.6. Πόρισμα. *Αν $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτά, μια απεικόνιση $f : U \to V$ είναι $\mathcal{C}^k$-αμφιδιαφόριση, αν είναι $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμη, 1-1 και επί του V, και $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμη, για κάθε $x \in U$.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1 Τοπολογικοί Χώροι

1.1. Ορισμός. Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Μια οικογένεια υποσυνόλων του X, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, λέγεται **τοπολογία** του X, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{T}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(iii) Αν $A_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, τότε $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** και τα σύνολα που ανήκουν στην τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοιχτά** υποσύνολα του X.

1.2. Παράδειγμα. Τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν τοπολογία.

1.3. Πρόταση-Κριτήριο *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό, αν και μόνον αν ισχύει η παρακάτω συνθήκη:*

για κάθε $x \in A$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε $x \in B_x \subseteq A$.

1.4. Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ λέγεται **βάση** της τοπολογίας $\mathcal{T}$, αν ισχύει η συνθήκη

για κάθε $A \in \mathcal{T}$ και κάθε $x \in A$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subseteq A$,

που είναι ισοδύναμη με την συνθήκη

κάθε $A \in \mathcal{T}$ είναι ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$.

1.5. Παράδειγμα. Οι ανοιχτές μπάλες $B(x,\varepsilon)$ με $x \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$ αποτελούν βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$.

1.6. Ορισμός. Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ονομάζουμε **περιοχή** του x κάθε σύνολο $A \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U \subseteq A$.

2 Συνεχείς Απεικονίσεις

2.1. Ορισμός. Έστω $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια απεικόνιση και $x_o \in X$. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_o, αν για κάθε ανοιχτό $B \in \mathcal{T}_Y$ με $f(x_o) \in B$, υπάρχει ανοιχτό $A \in \mathcal{T}_X$ με $x_o \in A$ και $f(A) \subseteq B$.

Η f λέγεται **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

2.2. Πρόταση. *Έστω $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση. Η f είναι συνεχής, αν αντιστρέφει τα ανοιχτά υποσύνολα του Y σε ανοιχτά υποσύνολα του X, δηλ. αν*

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X, \quad \forall\, V \in \mathcal{T}_Y.$$

2.3. Ορισμός. Έστω $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση. Λέμε ότι η f είναι **ομοιομορφισμός**, αν είναι 1–1 και επί, συνεχής, και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής. Δηλ. αν είναι αντιστρέψιμη και

$$\begin{gathered} f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X, \quad \forall\, V \in \mathcal{T}_Y, \text{ και} \\ f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y, \quad \forall\, U \in \mathcal{T}_X. \end{gathered}$$

3 Υπόχωροι και Χώροι-γινόμενα

3.1. Πρόταση & Ορισμός. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η οικογένεια*

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \;:\; U \in \mathcal{T}\}$$

είναι μια τοπολογία επί του A, που λέγεται **σχετική τοπολογία** *επί του A, επαγόμενη από την $\mathcal{T}$, και ο τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$ λέγεται* **τοπολογικός υπόχωρος** *του $(X, \mathcal{T})$.*

Στην ειδική περίπτωση που A είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, ισχύει

$$\mathcal{T}_A = \{U \in \tau \ : \ U \subseteq A\}.$$

3.1. Πρόταση. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_A$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο A που κάνει συνεχή την κανονική εμφύτευση*

$$i_A : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (X, \mathcal{T}) : a \longmapsto i_A(a) = a.$$

3.2. Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Ένα $U \subseteq X \times Y$ λέγεται **ανοιχτό**, αν για κάθε $(x, y) \in U$, υπάρχουν $A \in \mathcal{T}_X$ και $B \in \mathcal{T}_Y$ με

$$(x, y) \in A \times B \subseteq U.$$

3.3. Πρόταση & Ορισμός. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Τα ανοιχτά υποσύνολα του $X \times Y$ αποτελούν μια τοπολογία $\mathcal{T}_\gamma$ στον $X \times Y$, που λέγεται* **τοπολογία-γινόμενο**. *Η $\mathcal{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία στον $X \times Y$ που κάνει συνεχείς τις προβολές*

$$p_X : (X \times Y, \mathcal{T}_\gamma) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X) : (x, y) \longmapsto x,$$
$$p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}_\gamma) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y) : (x, y) \longmapsto y.$$