721. Εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία των Πολλαπλοτήτων

Διδασκουσα:
Μ. Φραγκουλοπούλου

by
AmpalosMathimatikos

Χειμερινό Εξάμηνο 2012 - 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαφορικές Πολλαπλότητες

1.1 Βασικές Έννοιες

Ορισμός 1.1.1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X. Θα ονομάζουμε **n-διάστατο χάρτη** του X ένα ζεύγος (U, ϕ) με $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ και $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε:

(i) $\phi(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ και

(ii) η ϕ είναι 1-1.

Παρατηρήσεις 1.1.1. (i) Εφόσον θεωρήσουμε $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, η ϕ είναι 1-1 και επί στην εικόνα της. Άρα το U ταυτίζεται με το $\phi(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

(ii) Η διάσταση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ λέγεται και **διάσταση** του χάρτη.

Παραδείγματα 1.1.1. (i) **Ολικός χάρτης** του X ονομάζεται κάθε χάρτης (U, ϕ) με $U = X$. Ο χάρτης $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ είναι ένας ολικός χάρτης του $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $X = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση

$$\phi : (0,1) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{id}} (0,1) \subseteq \mathbb{R}$$

είναι ένας 1-διάστατος χάρτης του $\mathbb{R}$.

(iii) Έστω

$$k = u^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto t^3$$

Η k είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφος της

$$u^{1/3} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto t^{1/3}$$

είναι επίσης χάρτης.

(iv) Αν $X = \mathbb{R}^n$, ένας προφανής χάρτης είναι ο ολικός $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.

(v) Έστω

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

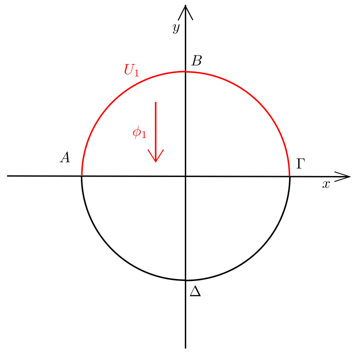
Θεωρούμε το ανοιχτό τόξο

$$U_1 = \widehat{AB\Gamma} = \{(x, y) \in S^1 : x \in (-1, 1), y = \sqrt{1 - x^2}\}$$

Ορίζουμε

$$\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x$$

Τότε, το (U_1, ϕ_1) είναι ένας 1-διάστατος χάρτης του S^1.



Πράγματι, η εικόνα της ϕ_1 είναι $\phi_1(U_1) = (-1, 1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ και η ϕ_1 είναι 1-1.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται χάρτες (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Π.χ. για $i = 2$, έχουμε $U_2 = \overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$ και $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $X \neq \emptyset$ και (U, ϕ), (V, ψ) n-διάστατοι χάρτες του X με $U \cap V \neq \emptyset$. Οι χάρτες αυτοί ονομάζονται **διαφορικά συμβιβαστοί** αν

(i) $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ και

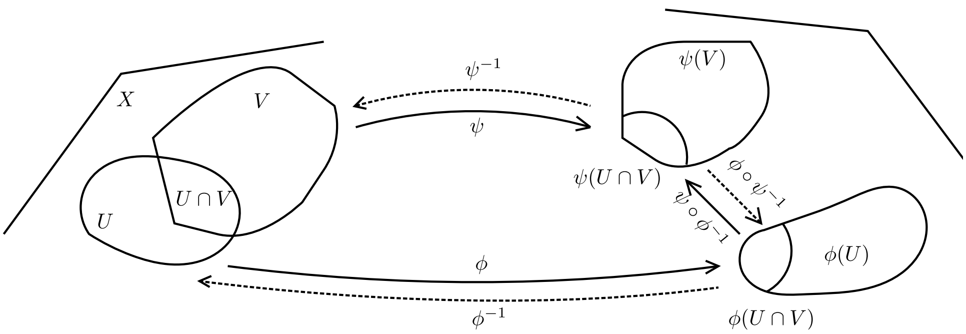
(ii) οι

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

και

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορίσιμες.



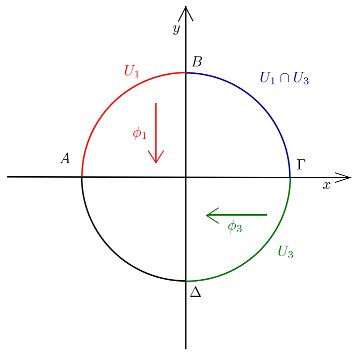
Παρατήρηση 1.1.1. Επειδή $\phi \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1})^{-1}$ ζητάμε η $\phi \circ \psi^{-1}$ να είναι αμφιδιαφορίσιμη, δηλαδή να είναι 1-1, επί και τόσο η ίδια όσο και η αντίστροφη της να είναι διαφορίσιμες.

Παραδείγματα 1.1.2. (i) Έστω $X = \mathbb{R}$ και οι χάρτες $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, $(\mathbb{R}, u^3)$. Αυτοί οι δύο χάρτες δεν είναι διαφορικά συμβιβαστοί γιατί η

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ (u^3)^{-1} = u^{1/3} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.

(ii) Έστω $X = S^1$ και οι χάρτες (U_1, ϕ_1), (U_3, ϕ_3). Τότε $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$, το $\phi_1(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$ στον άξονα x είναι ανοιχτό και το $\phi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$ στον άξονα y είναι ανοιχτό.



Η συνάρτηση

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1} : (0, 1) \subseteq \mathbb{R} \to (0, 1) \subseteq \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{1 - y^2}$$

είναι διαφορίσιμη, όπως και η

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} : (0, 1) \subseteq \mathbb{R} \to (0, 1) \subseteq \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

Έτσι οι (U_1, ϕ_1), (U_3, ϕ_3) είναι διαφορικά συμβιβαστοί. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι 4 χάρτες της S^1 είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

Αν δύο χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) είναι διαφορικά συμβιβαστοί, θα γράφουμε $(U, \phi) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$.

Οι διαφορίσιμες απεικονίσεις $\phi \circ \psi^{-1}$, $\psi \circ \phi^{-1}$ ονομάζονται **απεικονίσεις μεταφοράς** των δυο χαρτών.

Είναι φανερό ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς δύο διαφορικά συμβιβαστών χαρτών είναι αμφισυνεχείς, άρα ομοιομορφισμοί.

Τι μας εξασφαλίζουν οι χάρτες σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$; Έστω $(U, \phi) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$ διαφορικά συμβιβαστοί χάρτες. Έστω $x \in U \cap V$. Τότε $x \simeq \phi(x)$, $x \simeq \psi(x)$. Έχουμε

$$\begin{tikzcd}
X \supseteq U \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "x_i = u_i \circ \phi"'] & \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "u_i|_{\phi(U)}"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Έτσι $x_i = u_i \circ \phi$ και ανάλογα, $y_i = u_i \circ \psi$. Οπότε

$$\phi(x) = (u_1(\phi(x)), \ldots, u_n(\phi(x)) = (x_1(x), \ldots, x_n(x))$$

και αφού $x \simeq \phi(x)$ με το χάρτη (U, ϕ), προσδώσαμε συντεταγμένες στο $x \in U$, και οι συναρτήσεις $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** του χάρτη (U, ϕ) ή σύστημα συντεταγμένων του $x \in U$. Γι' αυτό πολλές φορές γράφουμε αντί του (U, ϕ),

$$(U, x_1, \ldots, x_n)$$

Όμως, επιπλέον, $x \in V$, άρα έχει και τις συντεταγμένες $y_1, \ldots, y_n$. Οπότε, ποιές επιλέγουμε για να δουλέψουμε;

Αυτό "θεραπεύεται" από το γεγονός ότι με τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο χαρτών, το ένα σύστημα συντεταγμένων πάει στο άλλο με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, δηλαδή μέσω αμφιδιαφορίσεων.

Πράγματι,

$$(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \psi(x)$$

άρα

$$(\psi \circ \phi^{-1})(x_1(x), \ldots, x_n(x)) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \quad \forall x \in U \cap V$$

Ορισμός 1.1.3. Έστω $X \neq \emptyset$. Ονομάζουμε **άτλαντα** του X μια οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

n-διάστατων χαρτών του X με την ιδιότητα $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

Λόγω της διάστασης των χαρτών του $\mathcal{A}$, ο $\mathcal{A}$ θα λέγεται n-διάστατος άτλαντας του X.

Ένας άτλαντας του X θα ονομάζεται **διαφορικός**, αν ανά δύο οι χάρτες του είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

Παράδειγμα 1.1.1. Αν $X = S^1$, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα, η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$$

είναι ένας 1-διάστατος άτλαντας του S^1.

Θα συμβολίζουμε με $\alpha_\delta^n(X)$ όλους τους n-διάστατους διαφορίσιμους άτλαντες του X. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια μερική διάταξη ως εξής:

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \alpha_\delta^n(X)$ θα λέμε ότι ο $\mathcal{A}$ περιέχεται στον $\mathcal{B}$ και θα γράφουμε $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ ανν κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι και χάρτης του $\mathcal{B}$.

Έχοντας ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, το $\alpha_\delta^n(X)$, μπορούμε να μιλήσουμε για ένα μεγιστικό στοιχείο αυτού του συνόλου.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A} \in \alpha_\delta^n(X)$. Έστω $\mathcal{A}'$ το σύνολο όλων των n-διάστατων χαρτών του X που είναι διαφορικά συμβιβαστοί με τους χάρτες του $\mathcal{A}$.*

Τότε, ο $\mathcal{A}'$ είναι ένας μεγιστικός διαφορικός άτλαντας του X, μοναδικός ως προς τη σχέση $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}'$.

Απόδειξη. Δείχνουμε, αρχικά, ότι ο $\mathcal{A}'$ είναι πράγματι διαφορικός άτλαντας του X.

Παρατηρούμε ότι εφόσον $\bigcup\limits_{(U,\phi) \in \mathcal{A}} U = X$, τότε και $\bigcup\limits_{(V,\psi) \in \mathcal{A}'} V = X$. Άρα ο $\mathcal{A}'$ είναι ένας n-διάστατος άτλαντας του X.

Έστω (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$. Αν ο ένας από τους δύο ανήκει και στον $\mathcal{A}$, τότε αυτοί είναι διαφορικά συμβιβαστοί. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι κανένας από αυτούς δεν ανήκει στον $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι $(U, \phi) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$.

Έστω $x \in \phi(U \cap V)$ τυχόν. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ με $x \in B \subseteq \phi(U \cap V)$. Θέτουμε $y = \phi^{-1}(x) \in U \cap V \subseteq X$. Οπότε υπάρχει $(W, \omega) \in \mathcal{A} : y \in W$. Θέτουμε $A = U \cap V \cap W$ και $B = \phi(A)$. Τότε $x \in B$ και θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι $(U,\phi) \underset{\delta}{\sim} (W,\omega) \underset{\delta}{\sim} (V,\psi)$, άρα

$$
\begin{aligned}
\phi(A) &= \phi((U \cap W) \cap (V \cap W)) \\
&= (\phi \circ \omega^{-1})(\omega[(U \cap W) \cap (V \cap W)]) \\
&= \phi \circ \omega^{-1}(\underbrace{\overbrace{\omega(U \cap W)}^{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}} \cap \overbrace{\omega(V \cap W)}^{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}}}_{\in \mathcal{T}_{\omega(U \cap W)}})
\end{aligned}
$$

Επειδή η

$$\phi \circ \omega^{-1} : \omega(U \cap W) \to \phi(U \cap W)$$

είναι ομοιομορφισμός, τα ανοιχτά απεικονίζονται σε ανοιχτά, άρα το $B = \phi(A)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U \cap W)$. Άρα $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Άρα το $\phi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό, και όμοια αποδεικνύεται ότι και το $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό.

Πρέπει, επιπλέον, να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες απεικονίσεις μεταφοράς είναι διαφορίσιμες. Θεωρούμε την

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Αρκεί να θεωρήσουμε ένα $x \in \phi(U \cap V)$ και να βρούμε ένα B ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $x \in B \subseteq \phi(U \cap V)$ έτσι ώστε η $\psi \circ \phi^{-1}|_B$ να είναι διαφορίσιμη.

Όπως και πριν, θεωρούμε $y = \phi^{-1}(x)$, το $B = \phi(A)$ και το $\omega(A)$ που είναι επίσης ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$ και παρατηρούμε ότι

$$\psi \circ \phi^{-1}|_{B=\phi(A)} = (\psi \circ \omega^{-1}|_{\omega(A)}) \circ (\omega \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)})$$

άλλα κάθε ένας από τους περιορισμούς αυτούς είναι διαφορίσιμος ως περιορισμός διαφορίσιμης σε ανοιχτό σύνολο. Άρα η $\psi \circ \phi^{-1}|_B$ είναι διαφορίσιμη. Έτσι $(U,\phi) \underset{\delta}{\sim} (V,\psi)$.

$$
\begin{tikzcd}
\phi(A) \arrow[r, "\omega \circ \phi^{-1}"] \arrow[dr, "\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)}"'] & \omega(A) \arrow[d, "\psi \circ \omega^{-1}"] \\
 & \psi(A)
\end{tikzcd}
$$

Ας δείξουμε, τώρα, ότι ο $\mathcal{A}'$ είναι μεγιστικός. Έστω $\mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X)$ με $\mathcal{A}' \leq \mathcal{B}$. Όμως $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}'$, άρα $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Δηλαδή κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ είναι διαφορικά συμβιβαστός με τους χάρτες του $\mathcal{A}$, επομένως $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}'$. Άρα $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$ και έτσι ο $\mathcal{A}'$ είναι μεγιστικός.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{A}'$ είναι μοναδικός. Έστω $\mathcal{C} \in \alpha^n_\delta(X)$ μεγιστικός με $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$. Τότε, όπως και πριν, θα έχουμε $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}'$. Όμως, ο $\mathcal{C}$ είναι μεγιστικός, άρα $\mathcal{C} = \mathcal{A}'$. □

Ορισμός 1.1.4. Αν $X \neq \emptyset$, το X ονομάζεται **διαφορική πολλαπλότητα** αν δέχεται μέγιστο διαφορικό άτλαντα.

Η διάσταση των χαρτών του μέγιστου διαφορικού άτλαντα ορίζεται ως η **διάσταση** της διαφορικής πολλαπλότητας. Ο Ευκλείδειος χώρος στον οποίο παίρνουν τιμές οι χάρτες του μέγιστου διαφορικού άτλαντα ονομάζεται **μοντέλο** της διαφορικής πολλαπλότητας.

Βάσει του Θεωρήματος 1.1.1, αρκεί να έχουμε έναν διαφορικό άτλαντα του X ώστε το X να είναι διαφορική πολλαπλότητα.

Αν X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα, ο μέγιστος διαφορικός άτλαντας που ορίζεται στο X ονομάζεται **διαφορική δομή** του X. Στο εξής, όταν θα λέμε ότι το X είναι διαφορική πολλαπλότητα, θα εννοούμε ότι το X εφοδιάζεται με έναν διαφορικό άτλαντα $\mathcal{A}$, ο οποίος προσδιορίζει τη διάσταση και το μοντέλο της X, ενώ ο $\mathcal{A}'$ είναι αυτός που προσδιορίζει τη διαφορική δομή του X.

Παραδείγματα 1.1.3. (i) Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})\}$, $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R}, u^3)\}$. Τότε $(\mathbb{R}, u^3) \notin \mathcal{A}'$, άρα οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ορίζουν δύο διαφορετικές δομές στον $\mathbb{R}$.

Οι Ευκλείδειοι χώροι θα θεωρούνται πάντα διαφορικές πολλαπλότητες με την κανονική διαφορική δομή, που είναι αυτή που επάγεται από τον διαφορικό άτλαντα που αντιστοιχεί στον Ευκλείδειο χώρο μαζί με την αντίστοιχη ταυτοτική απεικόνιση.

Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}^n$, η κανονική διαφορική μορφή του είναι ο $\mathcal{A}'_{\mathbb{R}^n}$, οι n-διάστατοι χάρτες του $\mathbb{R}^n$ που προέρχονται από τις τοπικές και ολικές αμφιδιαφορίσεις του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Έστω $X = S^1$. Με τον διαφορικό άτλαντα

$$A_{S^1} = \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$$

ο S^1 είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 1.

Ορισμός 1.1.5. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X)$. Θα λέμε ότι οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι **διαφορικά συμβιβαστοί** και θα γράφουμε $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$ αν η οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από όλους τους χάρτες των $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι στοιχείο του $\alpha^n_\delta(X)$.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω $\mathcal{A} \in \alpha^n_\delta(X)$. Τότε*

$$\mathcal{A}' = \bigcup \{\mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X) : \mathcal{B} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{A}\}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X) : \mathcal{B} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{A}$. Τότε κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{A}'$. Άρα $\bigcup \{\mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X) : \mathcal{B} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}'$. Όμως, το $\mathcal{A}'$ είναι ένα $B \in \bigcup\{\mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X) : \mathcal{B} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{A}\}$. □

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \alpha^n_\delta(X)$. Τότε $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ ανν $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}'$ ενώ ταυτόχρονα $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}'$ και ο $\mathcal{A}'$ είναι μοναδικός ως προς αυτήν την σχέση. Άρα $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$.

Αν, τώρα, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$, τότε $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A} \leq \mathcal{B}'$, άρα $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$. □

Παραδείγματα 1.1.4. (i) Έστω $X = \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $\det A \neq 0$ και $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε ο άτλαντας $\mathcal{B} = \{(V, \psi)\}$ με $V = \mathbb{R}^n$ και

$$\psi : V \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \psi(x) = Ax + a_0$$

ορίζει μια διαφορική δομή στον $\mathbb{R}^n$ που συμπίπτει με την κανονική διαφορική δομή του.

Αν $\psi(x) = \psi(x')$, τότε $Ax + a_0 = Ax' + a_0 \Rightarrow x = x'$, άρα η ψ είναι 1-1. Επίσης, η ψ είναι επί. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Για $x = A^{-1}y - A^{-1}a_0 \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\psi(x) = y$, άρα $\psi(V) = \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Έτσι ο (V, ψ) είναι ένας n-διάστατος ολικός χάρτης του $\mathbb{R}^n$.

Άρα, για να έχουμε $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$, που σημαίνει ότι $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$. Δείχνουμε, λοιπόν, ότι η

$$\psi : V = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι αμφιδιαφορίσιμη.

Αν $x \in V = \mathbb{R}^n$, τότε

$$\psi(x) = Ax + a_0 = \gamma_A(x) + c(x)$$

όπου

$$c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto c(x) = a_0$$

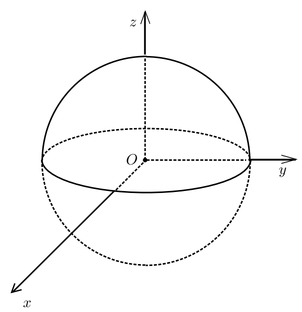
και γ_A η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Όμως, η γ_A ως γραμμική απεικόνιση μεταξύ Ευκλείδειων χώρων είναι διαφορίσιμη και η c είναι διαφορίσιμη ως σταθερή. Άρα η ψ είναι διαφορίσιμη ως άθροισμα διαφορίσιμων.

(ii) Έστω

$$X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Θα δείξουμε ότι ο S^2 είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.



(α) Θέτουμε

$$U_z^+ = \{(x, y, z) \in S^2 : x^2 + y^2 < 1, z > 0\}$$

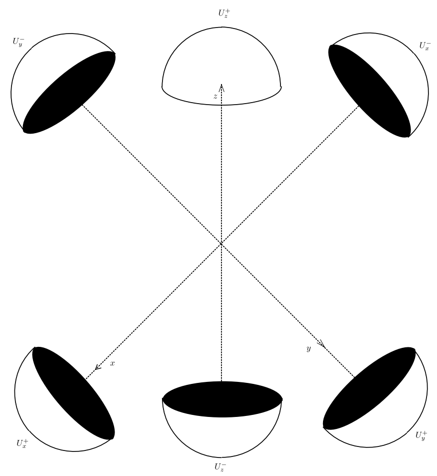
και

$$\phi_z^+ : U_z^+ \subseteq S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

Τότε η ϕ_z^+ είναι 1-1 και $\phi_z^+(U_z^+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Άρα ο (U_z^+, ϕ_z^+) είναι ένας 2-διάστατος χάρτης του S^2.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε (U_z^-, ϕ_z^-).

Εντελώς ανάλογα ορίζονται 2 χάρτες για τον άξονα των y και 2 χάρτες για τον άξονα των x.



Θεωρώντας

$$\mathcal{A}_{S^2} = \{(U_a^i, \phi_a^i) : a = x, y, z, \quad i = \pm\}$$

έχουμε, προφανώς, ότι $\bigcup\limits_{a,i} U_a^i = S^2$. Θα δείξουμε ότι οι ανά δύο τεμνόμενοι χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

Ας θεωρήσουμε τις (U_z^+, ϕ_z^+) και (U_y^+, ϕ_y^+). Τότε το $\phi_z^+(U_z^+ \cap U_y^+)$ είναι ο ανοικτός ημιδίσκος του xy που είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}^2$ και το $\phi_y^+(U_z^+ \cap U_y^+)$ είναι ο ανοικτός ημιδίσκος του yz που είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης, η

$$\phi_z^+ \circ (\phi_y^+)^{-1} : D_{yz}^{1/2} \to D_{xy}^{1/2}$$

$$(x, z) \xrightarrow{(\phi_y^+)^{-1}} (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) \xrightarrow{\phi_z^+} (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2})$$

είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του (x, z). Όμοια, η

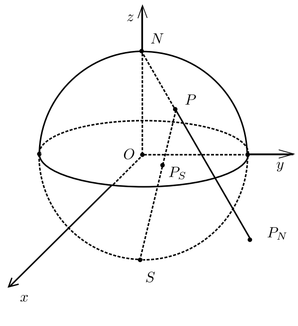
$$\phi_y^+ \circ (\phi_z^+)^{-1} : D_{xy}^{1/2} \to D_{yz}^{1/2}$$

$$(x, y) \xrightarrow{(\phi_z^+)^{-1}} (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) \xrightarrow{\phi_y^+} (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2})$$

είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του (x, y).

Έτσι, $(U_z^+, \phi_z^+) \underset{\delta}{\sim} (U_y^+, \phi_y^+)$ και το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους τεμνόμενους χάρτες. Άρα ο $\mathcal{A}_{S^2}$ είναι ένας διαφορικός άτλαντας διάστασης 2 και η S^2 είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

(β) Μπορούμε, επίσης, να θεωρήσουμε την σφαίρα S^2 ως διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2 και μέσω της στερεογραφικής προβολής.



Οι (x', y') είναι η στερεογραφική προβολή του P στο επίπεδο xy από το N. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα NBP, NOA είναι όμοια όπως και τα $OP'B'$, OAA'. Από την ομοιοθεσία αυτή των τριγώνων προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1-z} = \frac{x}{x'} = \frac{y'}{y} \Rightarrow x' = \frac{x}{1-z}, \quad y = \frac{y'}{1-z}$$

Οπότε θεωρούμε το ζεύγος (U_N, ϕ_N) ώστε $U_N = S^2 \backslash \{N\}$ και

$$\phi_N : U_N \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Τότε η ϕ_N είναι 1-1. Πράγματι, αν (x, y, z), $(x', y', z') \in U_n$ με ίσες εικόνες μέσω της ϕ_N έχουμε $\frac{x}{1-z} = \frac{x'}{1-z'}$ και $\frac{y}{1-z} = \frac{y'}{1-z'}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε $\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2} = \frac{x'^2+y'^2}{(1-z')^2} \Rightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+z'}{1-z'}$, άρα $z = z'$ και $x = x'$, $y = y'$.

Θα δείξουμε ότι $\phi_N(U_N) = \mathbb{R}^2$, δηλαδή ότι αν $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, τότε υπάρχει $(x, y, z) \in U_N : \phi_N(x, y, z) = (x', y') \Leftrightarrow \frac{x}{1-z} = x', \quad \frac{y}{1-z} = y'$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \neq 1$.

Το $(x, y, z) \in U_N$ είναι λύση του προηγούμενου συστήματος. Πάλι υψώνοντας τις 2 πρώτες ισότητες στο τετράγωνο, προσθέτοντας τις και αντικαθιστώντας από την 3η ισότητα το $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ έχουμε $(x')^2 + (y')^2 = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 1 = \frac{1+z}{1-z} + 1 = \frac{2}{1-z} \Rightarrow z = \frac{(x')^2+(y')^2-1}{(x')^2+(y')^2+1}$

Οπότε, έχουμε

$$x = \frac{2x'}{(x')^2 + (y')^2 + 1}, \qquad y = \frac{2y'}{(x')^2 + (y')^2 + 1}$$

και διαπιστώνουμε ότι $\phi_N(x, y, z) = (x', y')$.

Άρα δείξαμε ότι το (U_N, ϕ_N) είναι ένας 2-διάστατος χάρτης του S^2. Εντελώς ανάλογα, παίρνοντας τη στερεογραφική προβολή του $P(x, y, z) \in S^2$ στο επίπεδο xy από το νότιο πόλο $S = (0, 0, -1)$ προκύπτει ο 2-διάστατος χάρτης (U_S, ϕ_S) με $U_S = S^2 \backslash \{S\}$ και $\phi_S : U_S \to \mathbb{R}^2$.

Αν

$$\mathcal{B}_{S^2} = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$$

έχουμε ότι $U_N \bigcup U_S = \mathbb{R}^2$ και

$$\phi_N(U_N \cap U_S) = \phi_N(S^2 \backslash \{N, S\}) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} = \phi_S(U_N \cap U_S)$$

που είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Έχοντας υπολογίσει το επί της ϕ_N, που είναι 1-1, προκύπτει η

$$\phi_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Οπότε θεωρώντας τους 2 χάρτες του $\mathcal{B}_{S^2}$ έχουμε ότι η

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$

$$(x, y) \xrightarrow{\phi_N^{-1}} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \xrightarrow{\phi_S} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του (x, y). Άρα, ο άτλαντας $\mathcal{B}_{S^2}$ είναι διαφορικός διάστασης 2.

Ο διαφορικοί άτλαντες $\mathcal{A}_{S^2}, \mathcal{B}_{S^2}$ ορίζουν την ίδια διαφορική δομή στη μοναδιαία σφαίρα S^2, δηλαδή $\mathcal{A}'_{S^2} = \mathcal{B}'_{S^2}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A}_{S^2} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}_{S^2}$. Θεωρούμε τους χάρτες $(U_z^+, \phi_z^+) \in \mathcal{A}_{S^2}$ και $(U_N, \phi_N) \in \mathcal{B}_{S^2}$. Τότε $U_z^+ \cap U_N = U_z^+ \backslash \{N\}$, άρα

$$\phi_N(U_z^+ \cap U_N) = \mathbb{R}^2 \backslash S^1_{xy} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$$

όπου

$$S^1_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

και

$$\phi_z^+(U_z^+ \cap U_N) = D_z \backslash \{(0, 0)\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$$

όπου

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Επιπλέον, η

$$\phi_z^+ \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash S^1_{xy} \to D_z \backslash \{(0, 0)\}$$

$$(x, y) \xrightarrow{\phi_N^{-1}} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \xrightarrow{\phi_z^+} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση του (x, y) όπως και η

$$\phi_N \circ (\phi_z^+)^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right), \qquad \forall (x, y) \in D_z \backslash \{(0, 0)\}$$

Άρα, τελικά, οι δύο χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(iii) Το προβολικό επίπεδο $P^2(\mathbb{R})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

Το προβολικό επίπεδο ορίζεται γεωμετρικά από όλες τις ευθείες του $\mathbb{R}^3$ που περνούν από το $(0, 0, 0)$ χωρίς να θεωρούμε ότι το $(0, 0, 0)$ είναι σημείο τους.

Αλγεβρικά, το προβολικό επίπεδο $P^2(\mathbb{R})$ ορίζεται από ένα πηλίκο

$$(\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}) / \sim$$

όπου η σχέση $\sim$ ορίζεται ως εξής

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$$

δηλαδή ανν τα δύο σημεία είναι συγραμμικά. Άρα, αλγεβρικά

$$P^2(\mathbb{R}) = \{[(x_1, x_2, x_3)] : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η απεικόνιση

$$(x_1, x_2, x_3) \in \ell \mapsto [(x_1, x_2, x_3)]$$

είναι 1-1 και επί.

Θεωρούμε τα ζεύγη (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2, 3$ με

$$U_1 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in P^2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0\}$$

και

$$\phi_1 : U_1 \subseteq P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$$

Ανάλογα, ορίζουμε και τα U_2, U_3 και ϕ_2, ϕ_3.

Η ϕ_1 είναι καλά ορισμένη. Δηλαδή, αν $(y_1, y_2, y_2) \in [(x_1, x_2, x_3)]$, πρέπει $(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}) = (\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1})$. Όμως, αφού $(y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$, δηλαδή $y_i = \lambda x_i$, $i = 1, 2, 3 \Rightarrow \lambda = \frac{y_1}{x_1} \neq 0$ και $y_i = -\lambda x_i = \frac{y_1}{x_1} x_i \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$ και ανάλογα $\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_3}{x_1}$.

Έστω, τώρα, $[(x_1, x_2, x_3)], [(x_1', x_2', x_3')] \in U_1$ με ίσες εικόνες μέσω της ϕ_1. Τότε $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'}$ και $\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3'}{x_1'}$. Άρα $x_2 = \frac{x_1}{x_1'} x_2'$, $x_3 = \frac{x_1}{x_1'} x_3'$. Άρα θέτοντας $\lambda = \frac{x_1}{x_1'} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, έχουμε $x_i = \lambda x_i'$, $i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow [(x_1, x_2, x_3)] = [(x_1', x_2', x_3')]$. Έτσι η ϕ_1 είναι 1-1.

Δείχνουμε, επίσης, ότι $\phi_1(U_1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$. Ισχύει ότι $\phi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε $\exists[(1, x, y)] \in U_1 : \phi_1([(1, x, y)]) = (\frac{x}{1}, \frac{y}{1}) = (x, y)$, δηλαδή η ϕ_1 είναι επί. Άρα ο (U_1, ϕ_1) είναι χάρτης του $P^2(\mathbb{R})$ διάστασης 2. Ανάλογα για τα άλλα ζεύγη.

Οπότε θεωρώντας την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2, 3\}$$

έχουμε ότι $\bigcup\limits_{i \leq 3} U_i = P^2(\mathbb{R})$ και αν πάρουμε, π.χ, τους (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) έχουμε

$$U_1 \cap U_2 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in P^2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0 \neq x_2\}$$

και

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \left\{\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0 \neq x_2\right\} = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$$

Οπότε η

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \phi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} [(x, 1, y)] \xrightarrow{\phi_1} \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

και η

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \phi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \xrightarrow{\phi_1^{-1}} [(1, x, y)] \xrightarrow{\phi_2} \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

είναι διαφορίσιμες.

Άρα, $(U_1, \phi_1) \underset{\delta}{\sim} (U_2, \phi_2)$ και ανάλογα για τα υπόλοιπα τεμνόμενα ζεύγη χαρτών. Οπότε ο $\mathcal{A}$ είναι ένας διαφορικός άτλαντας διάστασης 2 του οποίου ο μέγιστος διαφορικός άτλαντας $\mathcal{A}'$ κάνει το $P^2(\mathbb{R})$ διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

1.2 Τοπολογική Δομή

Ορισμός 1.2.1. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $\mathcal{A}'$ η διαφορική της δομή και έστω $A \subseteq X$. Τότε, το A θα ονομάζεται **ανοιχτό** υποσύνολο του X αν για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ ισχύει $\phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Εύκολα προκύπτει ότι η οικογένεια

$$\{A \subseteq X : A \quad \text{ανοιχτό}\}$$

ορίζει μια τοπολογία επί του X που ονομάζεται **κανονική τοπολογία** και συμβολίζεται με $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Εδώ γεννιούνται δύο ερωτήματα. Εαν X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και (U, ϕ) ένας χάρτης του X, είναι το U διαφορική πολλαπλότητα; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική, και μάλιστα το U είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n είτε εφοδιασμένη με τον ολικό χάρτη (U, ϕ) ή με τον άτλαντα

$$\mathcal{A}_U = \{(U \cap V, \psi|_{U \cap V}) : (V, \psi) \in \mathcal{A}_X\}$$

Αν, τώρα, $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}_X}$, γίνεται το A διαφορική πολλαπλότητα; (Αφήνεται ως άσκηση)

Συχνά θα χρησιμοποιούμε την εξής παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.2.1. Έστω $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $B \subseteq E$ ανοιχτό. Τότε $A \subseteq B$ ανοιχτό στο B ανν το A είναι ανοιχτό στον E.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω X n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \alpha_\delta^n(X)$ με $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{B}$. Τότε $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.*

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\psi(B \cap V) = \psi(B \cap V \cap X) &= \psi\left(B \cap V \cap \bigcup_{i \in I} U_i\right) \\
&= \bigcup_{i \in I} \psi(B \cap V \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \psi(B \cap U_i) \cap \psi(V \cap U_i) \\
&= \bigcup_{i \in I} (\psi \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(B \cap U_i) \cap \phi_i(V \cap U_i))
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι $\phi_i(V \cap U_i) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, αφού $(U_i, \phi_i) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$. Τότε, η τομή $\phi_i(B \cap U_i) \cap \phi_i(V \cap U_i)$ είναι ανοιχτή στον $\mathbb{R}^n$, άρα και στο $\phi_i(V \cap U_i) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Επειδή, τώρα, η $\psi \circ \phi_i^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός έχουμε ότι η τομή απεικονίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του $\psi(U \cap V)$ άρα και σε ανοιχτό του $\mathbb{R}^n$. Έτσι, $\psi(B \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ ως ένωση ανοιχτών και $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Όμοια, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. $\square$

Παρατήρηση 1.2.2. Για κάθε n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα X έχουμε ότι $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$, αφού $\mathcal{A} \underset{\delta}{\sim} \mathcal{A}'$.

Πρόταση 1.2.2. *Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και*

$$\mathcal{A} = \{(U, \phi) \quad n\text{-διάστατοι χάρτες}\}$$

διαφορικός άτλαντας. Τότε

(i) $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ και

(ii) Οι απεικονίσεις των χαρτών $\phi : U \subseteq X \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμοί όταν τα U, $\phi(U)$ φέρουν τις σχετικές τοπολογίες ως προς τις $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ και $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ ανν $\psi(U \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, το οποίο ισχύει αφού $(U, \phi) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής και ανοιχτή.

Έστω B ανοιχτό στο $\phi(U)$. Επειδή $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ ανν $\psi(\phi^{-1}(B) \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\psi(\phi^{-1}(B) \cap V) &= \psi(\phi^{-1}(B) \cap U \cap V) = \psi(\phi^{-1}(B) \cap \phi^{-1}(\phi(U \cap V))) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1})(\underbrace{B \cap (\phi(U \cap V)}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}})\end{aligned}$$

Άρα, το $(\psi \circ \phi^{-1})(B \cap (\phi(U \cap V))$ είναι ανοιχτό στο $\psi(U \cap V)$ άρα και στο $\mathbb{R}^n$.

Έστω, τώρα, A ανοιχτό στο U. Επειδή $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, $\phi(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ έχουμε ότι $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Όμως $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ ανν $\psi(V \cap A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, άρα αν στη θέση του (V, ψ) πάρουμε τον (U, ϕ) έχουμε ότι $\phi(A) = \phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Έτσι, η $\phi : U \to \phi(U)$ με τις αντίστοιχες σχετικές τοπολογίες είναι ομοιομορφισμός. □

Πρόταση 1.2.3. *Έστω X n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $\mathcal{A}$ n-διάστατος διαφορικός άτλαντας και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Αν A ανοιχτό υποσύνολο του U, τότε $(A, \phi|_A) \in \mathcal{A}'$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\phi(A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ από την Πρόταση 1.2.2 και η $\phi|_A$ είναι 1-1 ως περιορισμός 1-1 συνάρτησης. Άρα ο $(A, \phi|_A)$ είναι ένας n-διάστατος χάρτης του X.

Δείχνουμε, τώρα, ότι $(A, \phi|_A) \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow (A, \phi|_A) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi) \quad \forall (V, \psi) \in \mathcal{A}$. Ισχύει ότι $\phi|_A(A \cap V) = \phi(A \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ αφού το A ως ανοιχτό στο $\mathcal{T}_\mathcal{A}$-ανοιχτό U είναι $\mathcal{T}_\mathcal{A}$-ανοιχτό και $\psi(A \cap V) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ μιας και $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.

Επιπλέον, η $\psi \circ (\phi|_A)^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(A \cap V)}$, με $\phi(A \cap V)$ ανοιχτό στο $\phi(U \cap V)$, είναι διαφορίσιμη ως περιορισμός διαφορίσιμης συνάρτησης σε ανοιχτό υποσύνολο. Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι και η $(\phi|_A) \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap A) \to \phi(V \cap A)$ είναι διαφορίσιμη.

Άρα $(A, \phi|_A) \in \mathcal{A}'$. □

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι τέμνοντας τους χάρτες του $\mathcal{A}$ παίρνουμε χάρτες του μέγιστου $\mathcal{A}'$.

Πόρισμα 1.2.1. *Έστω X n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $\mathcal{A}$ n-διάστατος διαφορικός άτλαντας. Τότε, οι χάρτες του $\mathcal{A}'$ αποτελούν βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $(W, \omega) \in \mathcal{A}'$ με $x \in W \subseteq A$. Έστω, λοιπόν, τυχόν $x \in A$. Αφού, ιδιαίτερα, $x \in X$, θα υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Οπότε $x \in U \cap A$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του U. Θεωρώντας $W = U \cap A$ και $\omega = \phi|_{U \cap A}$ έχουμε ότι $x \in W \subseteq A$ και $(W, \omega) \in \mathcal{A}'$. □

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να μπορούμε να ελέγχουμε αν η κανονική τοπολογία μιας διαφορικής πολλαπλότητας είναι Hausdorff.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω X n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $\mathcal{A}$ n-διάστατος διαφορικός άτλαντας. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_\mathcal{A})$ είναι Hausdorff.

(ii) Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

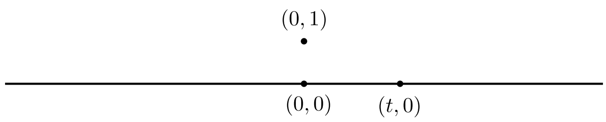
Απόδειξη. (i)⇒(ii) Αφού ο X είναι χώρος Hausdorff θεωρώντας $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ώστε $x \in A$, $y \in B$ και $A \cap B = \emptyset$. Τότε, από το Πόρισμα 1.2.1 υπάρχουν (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ ώστε $x \in U \subseteq A$, $y \in V \subseteq B$ και $U \cap V \subseteq A \cap B = \emptyset$.
(ii)⇒(i) Άμεσο από τον ορισμό του Hausdorff τοπολογικού χώρου και το γεγονός ότι U, $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. □

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι οι κανονικές τοπολογίες των θεωρούμενων διαφορικών πολλαπλοτήτων θα είναι Hausdorff, εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο.

Εν γένει, η κανονική τοπολογία μιας πολλαπλότητας δεν είναι Hausdorff, όπως φαίνεται και από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω

$$\mathbb{R}^2 \supseteq M = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\}$$



Η M είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 1. Θεωρούμε

$$U_1 = \{(t, 0) \in M : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}, \quad (t, 0) \mapsto t$$

και

$$U_2 = \{(t, 0) \in M : t \neq 0\} \cup \{(0, 1)\}$$

$$\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (t, 0) \mapsto t & t \neq 0 \\ (0, 1) \mapsto 0 \end{cases}$$

Τότε, τα (U_i, ϕ_i) είναι χάρτες του M. Έχουμε

$$\phi_1(U_1) = \phi_2(U_2) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό τους, οι ϕ_1, ϕ_2 είναι 1-1 συναρτήσεις.

Ακόμα, $U_1 \cup U_2 = M$ και $(U_1, \phi_1) \underset{\delta}{\sim} (U_2, \phi_2)$.

Πράγματι,

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \backslash \{0\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

Επίσης

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad t \xrightarrow{\phi_2^{-1}} (t, 0) \xrightarrow{\phi_1} t$$

άρα η

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \mathrm{id}\,|_{\mathbb{R} \backslash \{0\}} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη ως περιορισμός διαφορίσιμης συνάρτησης σε ανοιχτό σύνολο.

Άρα η

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2\}$$

είναι διαφορικός άτλαντας του M διάστασης 1. Άρα η M είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 1.

Όμως, η $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ επί του M δεν είναι Hausdorff.

Θεωρούμε τα $(0,0)$, $(0,1) \in M$. Έστω A, $B \in \mathcal{T}_\mathcal{A} : (0,0) \in A$, $(0,1) \in B$.

Έχουμε ότι $\phi_1(U_1 \cap A)$, $\phi_2(U_2 \cap B) \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$. Επίσης, $0 \in \phi_1(U_1 \cap A) \cap \phi_2(U_2 \cap B)$ και αφού $\phi_1(U_1 \cap A) \cap \phi_2(U_2 \cap B) \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα $t \in \phi_1(U_1 \cap A) \cap \phi_2(U_2 \cap B)$ με $t \neq 0$. Τότε, $\phi_1^{-1}(t) = (t,0) \in U_1 \cap A$ και $\phi_2^{-1}(t) = (t,0) \in U_2 \cap B$.

Άρα $(t,0) \in A \cap B$ και $A \cap B \neq \emptyset$.

Τα A, B ήταν τυχόντα, άρα η $(M, \mathcal{T}_\mathcal{A})$ δεν είναι Hausdorff.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και επιπλέον X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{A}$

(ii) Αν $\mathcal{T}_U$ είναι η σχετική τοπολογία της $\mathcal{T}$ στο U με (U,ϕ) χάρτη της X και $\mathcal{T}_{\phi(U)}$ η σχετική τοπολογία της $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ επί της $\phi(U)$ με $U \in \mathcal{T}$, τότε η $\phi : (U, \mathcal{T}_U) \to (\phi(U), \mathcal{T}_{\phi(U)})$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε χάρτη (U,ϕ).

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Άμεσο.

(ii)⇒(i) Έστω $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Τότε $\phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$. Άρα $\phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\phi(U)}$ αφού $\phi(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, άρα από την υπόθεση, $\phi^{-1}(\phi(U \cap A)) = U \cap A \in \mathcal{T}_U$.

Αφού, από την υπόθεση, $U \in \mathcal{T}$ έχουμε ότι $U \cap A \in \mathcal{T}$ για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, άρα $A = \bigcup\limits_{(U,\phi)\in\mathcal{A}} (U \cap A) \in \mathcal{T}$, και τελικά $\mathcal{T}_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$.

Αντίστοφα, αν $A \in \mathcal{T}$, τότε $U \cap A \in \mathcal{T}$ για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και επειδή $U \in \mathcal{T}$ έπεται ότι $U \cap A \in \mathcal{T}_U$.

Άρα, πάλι από την υπόθεση, $\phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\phi(U)}$ και άρα $\phi(U \cap A) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$. Επομένως, $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. □

Ορισμός 1.2.2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff τοπολογικός χώρος. Ο X ονομάζεται **τοπικά συμπαγής** αν κάθε σημείο του, $x \in X$, δέχεται μια συμπαγή περιοχή.

Παραδείγματα 1.2.1. (i) Κάθε συμπαγής χώρος είναι και τοπικά συμπαγής.

(ii) Το $\mathbb{R}$ -και όλοι οι Ευκλείδειοι χώροι- είναι τοπικά συμπαγής.

Πράγματι, αν $t \in \mathbb{R}$, τότε το $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] = \overline{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}$ είναι μια συμπαγής περιοχή του t, για κατάλληλο $\varepsilon > 0$.

Πρόταση 1.2.6. *Κάθε διαφορίκη πολλαπλότητα ως τοπολογικός χώρος με την κανονική τοπολογία είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $x \in X$. Τότε, υπάρχει (U,ϕ) χάρτης με $x \in U$. Έχουμε ότι $\phi(x) \in \phi(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\phi(x) \in S(\phi(x), \varepsilon) \subseteq \phi(U)$. Άρα, αν $K = \overline{S(\phi(x), \varepsilon)}$ έχουμε ότι το K είναι συμπαγής περιοχή του $\phi(x) \in \phi(U)$.

Τότε το $\phi^{-1}(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του U και περιοχή του x, αφού η $\phi : U \to \phi(U)$ είναι ομοιομορφισμός με τις σχετικές τοπολογίες. Επειδή, τώρα, $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ το $\phi^{-1}(K)$ είναι, τελικά, μια συμπαγής περιοχή του x στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T}_\mathcal{A})$. □

Πρόταση 1.2.7. *Έστω ότι ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_\mathcal{A})$ είναι συμπαγής. Τότε, ο $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον δύο χάρτες.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathcal{A} = \{(X, \phi)\}$ με (X, ϕ) ολικό χάρτη διάστασης n. Τότε, $\phi(X) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ και επειδή ο X είναι συμπαγής και η ϕ είναι συνεχής, το $\phi(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό.

Δηλαδή, το $\phi(X)$ είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, όπου ο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός χώρος.

Επιπλέον, αφού $X \neq \emptyset$, έχουμε $\phi(X) \neq \emptyset$, άρα από την συνεκτικότητα $\phi(X) = \mathbb{R}^n$ -άτοπο, αφού ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι φραγμένος.

Επομένως, ο $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον δύο χάρτες. □

1.3 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n, Y διαφορική πολλαπλότητα διάστασης m και

$$f : X \to Y$$

Πότε η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο $x \in X$;

Εφόσον γνωρίζουμε τη διαφορισιμότητα στους Ευκλείδειους χώρους, θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε την f στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$.

Για το $x \in X$ υπάρχει χάρτης του X, (U, ϕ) με $x \in U$. Ανάλογα, $f(x) \in Y$, άρα υπάρχει (V, ψ) χάρτης του Y με $f(x) \in V$. Τότε

$$\begin{tikzcd}
X \supseteq U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & f(U) \underset{?}{\subseteq} V \arrow[r, "\psi"] & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \arrow[dll, dotted, "\psi \circ f \circ \phi^{-1}"] \\
\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n & &
\end{tikzcd}$$

Αν ξέρουμε ότι

$$f(U) \subseteq V \tag{*}$$

θα μπορούσαμε να έχουμε τη σύνθεση

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

που μπορούμε για συγκεκριμένη f να εξετάσουμε τη διαφορισιμότητα της στο $\phi(x)$ και να ορίσουμε διαφορισιμότητα της f στο x ακριβώς τη διαφορισιμότητα της F στο $\phi(x)$.

Υπάρχει συνθήκη που να μας εξασφαλίζει τον εγκλεισμό (*);

Αν η

$$f : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}}) \to (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$$

είναι συνεχής, τότε από τη συνέχεια στο x και επειδή το V που θεωρήσαμε παραπάνω είναι ανοιχτό και $f(x) \in V$, θα είχαμε ότι $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ και $x \in f^{-1}(V)$, άρα $x \in U \cap f^{-1}(V)$.

Η τομή αυτή είναι ανοιχτό υποσύνολο του U και επομένως το ζεύγος

$$(U \cap f^{-1}(V), \phi|_{U \cap f^{-1}(V)}) \in \mathcal{A}'$$

και, μάλιστα,

$$f(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq f(U) \cap V \subseteq V$$

Άρα βρήκαμε χάρτες (W, ω) του X με $W = U \cap f^{-1}(V)$, $\omega = \phi|_W$ με $x \in W$ και (V, ψ) του Y με $f(x) \in V$ και $f(W) \subseteq V$.

Άρα με τη συνέχεια της f επιτυγχάνεται μια συνθήκη για την (*) για την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε την αντίστοιχη F.

Αν, τώρα, ισχύει η (*) και η

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, τότε είναι και συνεχής στο $\phi(x)$, άρα η $f = \psi^{-1} \circ F \circ \phi$ είναι συνεχής στο x.

Οπότε, αντί της συνέχειας της f θα χρησιμοποιούμε για ότι ακολουθεί τη συνθήκη (*).

Έτσι καταλήγουμε στους εξής ορισμούς.

Ορισμός 1.3.1. Έστω $f : X \to Y$ με X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα. Έστω $x \in X$. Τότε, αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) της X με $x \in U$ και (V, ψ) της Y με $f(x) \in V$ έτσι ώστε $f(U) \subseteq V$, έχουμε την καλά ορισμένη απεικόνιση

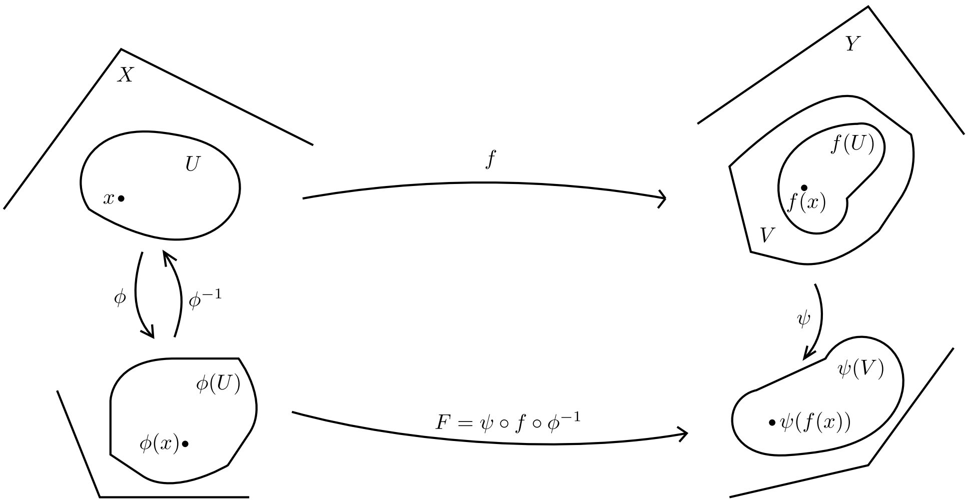
$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Η F ονομάζεται **τοπική παράσταση** της f στο x για τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) αντίστοιχα.

Ορισμός 1.3.2. Έστω $f : X \to Y$ με X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διάστασης n και m αντίστοιχα. Έστω $x \in X$, χάρτες (U, ϕ) της X με $x \in U$ και (V, ψ) της Y με $f(x) \in V$ έτσι ώστε $f(U) \subseteq V$.

Τότε, η f ονομάζεται **διαφορίσιμη στο x**, αν η τοπική της παράσταση στο x, F, είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x) \in \phi(U)$.

Η f θα λέγεται **διαφορίσιμη** αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in X$.



Έστω X, Y, f όπως προηγουμένως. Τότε θα συμβολίζουμε με $C^\infty_x(X, Y)$ και $C^\infty(X, Y)$ τα σύνολα

$$C^\infty_x(X, Y) = \{f : X \to Y, \quad f \quad \text{διαφορίσιμη στο} \quad x \in X\}$$

και

$$C^\infty(X, Y) = \{f : X \to Y, \quad f \quad \text{διαφορίσιμη}\}$$

Είναι φανερό ότι για να είναι ο ορισμός της διαφορισιμότητας της f στο x, που δώσαμε παραπάνω, καλός, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτός δεν εξαρτάται από τους θεωρούμενους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) με $f(U) \subseteq V$.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $f : X \to Y$ με X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in X$.

(ii) Για οποιουσδήποτε χάρτες (U, ϕ) της X, (V, ψ) της Y με $x \in U$, $f(x) \in V$ και $f(U) \subseteq V$, η

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $x \in X$ και έστω (A, α) χάρτης της X με $x \in A$, (B, β) χάρτης της Y με $f(x) \in B$ και $f(A) \subseteq B$.

Τότε, από τη διαφορισιμότητα της f στο x έχουμε ότι η

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \beta(B) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμη στο $\alpha(x) \in \alpha(A)$.

Έστω, τώρα, τυχόντες χάρτες (U, ϕ) της X, (V, ψ) της Y με $x \in U$, $f(x) \in V$ και $f(U) \subseteq V$. Θα δείξουμε ότι η τοπική παράσταση

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Αρκεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της F σε μια ανοιχτή περιοχή του $\phi(x)$, στο $\phi(U)$.

Όμως, $(A, \alpha) \underset{\delta}{\sim} (U, \phi)$ και $(B, \beta) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$, που σημαίνει ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς

$$\phi \circ \alpha^{-1} : \alpha(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

και

$$\psi \circ \beta^{-1} : \beta(B \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \to \psi(B \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι αμφιδιαφορίσεις (1).

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F &= \psi \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \psi \circ (\beta^{-1} \circ \beta) \circ f \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \circ \phi^{-1} \\ &= (\psi \circ \beta^{-1}) \circ (\beta \circ f \circ \alpha^{-1}) \circ (\alpha \circ \phi^{-1}) \end{aligned}$$

με

$$\begin{tikzcd} \phi(U \cap A) \arrow[r, "\alpha \circ \phi^{-1}"] \arrow[d, "\psi \circ f \circ \phi^{-1}"] & \alpha(U \cap A) \arrow[d, "\beta \circ f \circ \alpha^{-1}"] \\ \psi(V \cap B) & \beta(V \cap B) \arrow[l, "\psi \circ \beta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

όπου το $\alpha(U \cap A)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\alpha(x)$ στο $\alpha(U)$, μιας και $U \cap A \in \mathcal{T}_A$, $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}_X}$ και η $\alpha : U \to \phi(U)$ είναι ομοιομορφισμός. Επομένως, αφού η

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(A) \to \beta(B)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\alpha(x)$, θα είναι διαφορίσιμη στο $\alpha(x)$ και περιορισμένη στο ανοιχτό $\alpha(U \cap A)$.

Άρα, από τις (1) και το διάγραμμα, η F είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ που ανήκει στο $\phi(U \cap A)$, το οποίο είναι ανοιχτό στο $\phi(U)$, ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

(ii)$\Rightarrow$(i) Έπεται άμεσα από τον ορισμό. $\square$

Πρόταση 1.3.1 (Κανόνας της Αλυσίδας). *Αν X, Y, Z είναι διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n, m και k αντίστοιχα και*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

διαφορίσιμες απεικονίσεις, τότε η

$$g \circ f : X \to Z$$

είναι επίσης διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της $g \circ f$ σε ένα τυχόν σημείο $x \in X$.

Από τη διαφορισιμότητα της f στο x, υπάρχουν χάρτες (U_1, ϕ_1) της X, (V_1, ψ_1) της Y με $x \in U_1$, $f(x) \in V_1$ και $f(U_1) \subseteq V_1$ έτσι ώστε η

$$\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi_1(V_1) \subseteq \mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi_1(x)$.

Τώρα, από τη διαφορισιμότητα της g στο $f(x)$, υπάρχουν χάρτες (V_2, ψ_2) της Y, (W, ω) της Z με $f(x) \in V_2$, $g(f(x)) \in W$ και $g(V_2) \subseteq W$ έτσι ώστε η

$$\omega \circ g \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(V_2) \subseteq \mathbb{R}^m \to \omega(W) \subseteq \mathbb{R}^k$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\psi_2(f(x))$.

Για να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της $g \circ f : X \to Z$ στο x θα πρέπει να βρούμε μια τοπική παράσταση της, διαφορίσιμη, οπότε για να λύσουμε το πρόβλημα των δύο χαρτών στην Y θεωρούμε τον (V, ψ) με $V = V_1 \cap V_2$ και $\psi = \psi_2|_V$, οπότε $(V, \psi) \in \mathcal{A}'_Y$.

Θα μικρύνουμε, τώρα, τον (U_1, ϕ_1) χρησιμοποιώντας τον (V, ψ). Παίνουμε το $f^{-1}(V)$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, αφού η $f : X \to Y$ είναι συνεχής ως διαφορίσιμη, και ορίζουμε τον $(U, \phi) \in \mathcal{A}'_X$ με $U = U_1 \cap f^{-1}(V) \ni x$ και $\phi = \phi_1|_U$.

Οπότε, έχουμε

$$\omega \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\omega \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})$$

με

$$\begin{tikzcd}
\phi(U) \arrow[r, "\psi \circ f \circ \phi^{-1}"] \arrow[dr, "\omega \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1}"'] & \psi(V) \arrow[d, "\omega \circ g \circ \psi^{-1}"] \\
 & \omega(W)
\end{tikzcd}$$

Η

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ διότι είναι τοπική παράσταση της f στο x για τους χάρτες (U,ϕ) της X και (V,ψ) της Y με $x \in U$, $f(x) \in V$ και $f(U) \subseteq V$, και αντίστοιχα η

$$\omega \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \omega(W)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\psi(f(x))$ αφού είναι μια τοπική παράσταση της g στο $f(x)$ για τους χάρτες (V,ψ) της Y και (W,ω) της Z με $f(x) \in V$, $g(f(x)) \in W$ και $g(V) \subseteq W$.

Άρα, η $\omega\circ(g\circ f)\circ\phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. □

Ορισμός 1.3.3. Αν οι X, Y είναι διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα, μια απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται **αμφιδιαφόριση** αν η f είναι 1-1, επί και τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι διαφορίσιμες.

Πόρισμα 1.3.1. *Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n, (U,ϕ) χάρτης της X. Τότε*

(i) Η

$$\phi : U \to \phi(U)$$

είναι αμφιδιαφόριση, όταν τα U και $\phi(U)$ εφοδιάζονται με τις σχετικές διαφορικές δομές των X και $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα.

(ii) Οι συνιστώσες συναρτήσεις του χάρτη (U,ϕ), $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι διαφορίσιμες.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τους ολικούς χάρτες (U,ϕ) στο U και $\big(\phi(U), \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}|_{\phi(U)}\big)$ στο $\phi(U)$, οπότε η τοπική παράσταση της ϕ στο $x \in U$ για τους χάρτες που θεωρήσαμε είναι η

$$\underbrace{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}|_{\phi(U)} \circ \overbrace{\phi \circ \phi^{-1}}^{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}|_{\phi(U)}}}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}|_{\phi(U)}} : \phi(U) \to \phi(U)$$

που είναι διαφορίσιμη ως περιορισμός διαφορίσιμης συνάρτησης σε ανοιχτό υποσύνολο. Άρα, η ϕ είναι διαφορίσιμη.

Εντελώς ανάλογα, αποδεικνύεται η διαφορισιμότητα της ϕ^{-1}.

(ii) Έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "x_i = u_i \circ \phi"'] & \phi(U) \arrow[d, "u_i|_{\phi(U)}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Άρα οι x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι διαφορίσιμες ως συνθέσεις διαφορίσιμων συναρτήσεων. □

Πρόταση 1.3.2. *Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in X$.

(ii) Υπάρχει χάρτης (U, ϕ) στην X με $x \in U$ έτσι ώστε η

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

(iii) Για κάθε χάρτη (U, ϕ) στην X με $x \in U$, η

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Απόδειξη. Αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης της X με $x \in U$ τότε, από τη διαφορισιμότητα της f στο X, η τοπική παράσταση της f στο x είναι η

$$\underbrace{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f}_{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

δηλαδή η τοπική παράσταση της f στο x είναι η

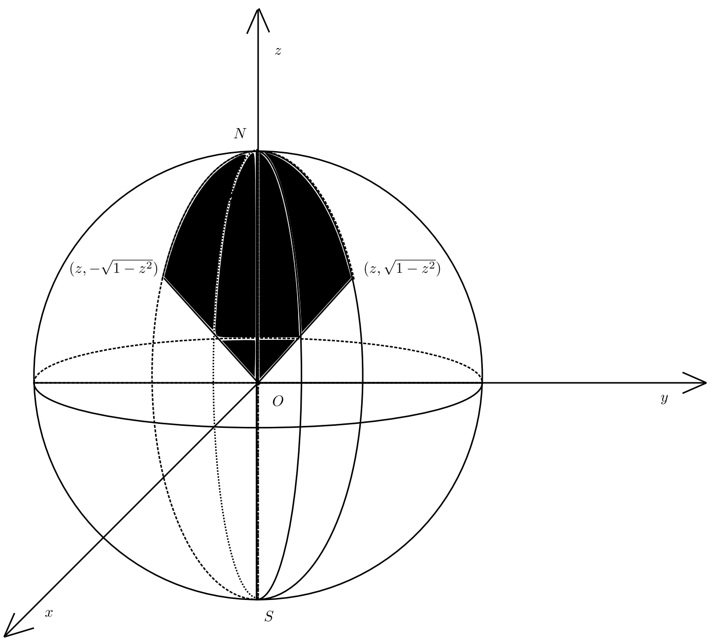
$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Έπονται τα ισοδύναμα από τον ορισμό της διαφορισιμότητας και την ανεξαρτησία της από την επιλογή των χαρτών. □

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω

$$f : S^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \arccos z$$

Εξετάζουμε τη διαφορισιμότητα της f.



Θεωρούμε τον χάρτη (U_N, ϕ_N) και θα εξετάσουμε τη διαφορισιμότητα της

$$f \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(U_N) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\left(f\circ\phi_N^{-1}\right)(x,y) &= f\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(f\circ\phi_N^{-1}\right)(x,y) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\ &= \frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2+1)}\end{aligned}$$

όπου αυτή η μερική παράγωγος δεν ορίζεται στο $(0,0)$, που είναι εικόνα του νότιου πόλου, $S=(0,0,-1)\in U_N$, μέσω της ϕ_N.

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι η μερική παράγωγος της $f\circ\phi_N^{-1}$ στο (x,y) είναι

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\circ\phi_N^{-1}\right)(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2+1)}$$

όπου κι εδώ η μερική παράγωγος αυτή, δεν υπάρχει στο $(0,0)$, που είναι η εικόνα του νότιου πόλου, $S=(0,0,-1)\in U_N$, μέσω της ϕ_N.

Για να εξετάσουμε τη διαφορισιμότητα της f στο βόρειο πόλο $N=(0,0,1)$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον χάρτη (U_S,ϕ_S).

Όπως και πριν έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\circ\phi_S^{-1}\right)(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2+1)}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\circ\phi_S^{-1}\right)(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2+1)}$$

Αυτές οι μερικές παράγωγοι δεν υπάρχουν στο $(0,0)$, εικόνα του βόρειου πόλου, $N=(0,0,1)\in U_S$, μέσω της ϕ_S.

Τελικά, η f είναι διαφορίσιμη στο $S^2\backslash\{N,S\}$.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και $f:X\to Y$ διαφορίσιμη. Τότε, για κάθε $A\in\mathcal{T}_{\mathcal{A}_X}$ η $f|_A$ παραμένει διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $A\in\mathcal{T}_{\mathcal{A}_X}$. Θα δείξουμε ότι η $f|_A:A\to Y$ είναι διαφορίσιμη.

Στο A έχουμε τη σχετική διαφορική δομή που επάγεται από τον διαφορικό άτλαντα

$$\mathcal{A}_A=\{(A\cap U),\phi|_{A\cap U}):(U,\phi)\in\mathcal{A}_X\}$$

Έστω $x\in A$. Τότε από τη διαφορισιμότητα της $f:X\to Y$ στο x, υπάρχουν χάρτες (U,ϕ) της X με $x\in U$, (V,ψ) της Y με $f(x)\in f(U)\subseteq V$ έτσι ώστε η

$$F=\psi\circ f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n\to\psi(V)\subseteq\mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Θεωρώντας το $A\cap U\ni x$, που είναι ανοιχτό στο U έχουμε ότι $(A\cap U,\phi|_{A\cap U})\in\mathcal{A}'_X$ και επιπλέον $(A\cap U,\phi|_{A\cap U})\in\mathcal{A}'_A$ και, επειδή η ϕ είναι ομοιομορφισμός στην εικόνα της, το $\phi(A\cap U)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U)$.

Άρα η
$$F|_{\phi(A\cap U)} : \phi(A\cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$
είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Όμως, η
$$F|_{\phi(A\cap U)} = \psi \circ f \circ (\phi|_{A\cap U})^{-1} : \phi(A\cap U) \to \psi(V)$$
είναι η
$$\psi \circ f|_A \circ (\phi|_{A\cap U})^{-1} : \phi(A\cap U) \to \psi(V)$$
που είναι η τοπική παράσταση της f στο x ως προς τους χάρτες $(A\cap U, \phi|_{A\cap U})$ της A και (V,ψ) της Y με $x \in A\cap U$, $f(x) \in f(A\cap U) \subseteq f(U) \subseteq V$.

Άρα, η $f|_A$ είναι διαφορίσιμη. □

Πρόταση 1.3.4. *Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $f : X \to \mathbb{R}^m$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in X$.

(ii) Οι συναρτήσεις
$$u_i \circ f : X \to \mathbb{R}$$
είναι διαφορίσιμες στο x, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Από τη διαφορισιμότητα της f στο x, υπάρχουν χάρτες (U,ϕ) της X με $x \in U$ και ο ολικός χάρτης $(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ με $f(x) \in f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε η
$$F = \underbrace{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ f}_{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
να είναι διαφορίσιμη στο x.

Η $F = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ ανν οι
$$u_i \circ f \circ \phi^{-1} = (u_i \circ f) \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
είναι διαφορίσιμες στο $\phi(x)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ ανν οι $u_i \circ f$ είναι διαφορίσιμες στο x για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

(ii)⇒(i) Αντιστρέφοντας τους συλλογισμούς έχουμε το ζητούμενο. □

Παραδείγματα 1.3.1. (i) Έστω
$$\pi : S^2 \to P^2(\mathbb{R}), \quad (x,y,z) \mapsto [(x,y,z)]$$

Η π είναι διαφορίσιμη, αλλά δεν είναι αμφιδιαφόριση.

Έστω $(x,y,z) \in S^2$ με $(x,y,z) \in U_x^+$. Αφού $x \neq 0$, θεωρώντας τον χάρτη (U_1, ϕ_1) του $P^2(\mathbb{R})$ έχουμε ότι η
$$\phi_1 \circ \pi \circ \left(\phi_x^+\right)^{-1} : \phi_x^+(U_x^+) \to \phi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$$
$$(y,z) \xrightarrow{(\phi_x^+)^{-1}} (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \xrightarrow{\pi} [(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)] \xrightarrow{\phi_1} \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)$$
είναι διαφορίσιμη, αφού οι συντεταγμένες της είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των y, z, άρα η αντίστοιχη τοπική παράσταση είναι διαφορίσιμη στο $\phi_x^+((x,y,z))$.

Η π δεν είναι αμφιδιαφόριση διότι δεν είναι 1-1. Πράγματι, αν $(x,y,z) \in S^2$, τότε $(x,y,z) \neq (-x,-y,-z)$. Όμως, $(-x,-y,-z) = (-1)\cdot(x,y,z)$, δηλαδή $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$, άρα $[(x,y,z)] = [(-x,-y,-z)]$ και $\pi((x,y,z)) = \pi((-x,-y,-z))$.

(ii) Ο προβολικός χώρος $P^2(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής και συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα.

Η

$$\pi : S^2 \to P^2(\mathbb{R}), \quad (x,y,z) \mapsto [(x,y,z)]$$

ως διαφορίσιμη είναι συνεχής με τις τοπολογίες $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{S^2}}$ και $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{P^2(\mathbb{R})}}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι οι τοπολογιές αυτές ταυτίζονται με τις σχετικές τοπολογίες των S^2 και $P^2(\mathbb{R})$ ως προς τις $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ και $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim}$.

Η ταύτιση ισχύει εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που μας έλεγε ότι αν X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα, $\mathcal{T}_A$ η κανονική τοπολογία της X και $\mathcal{T}$ μια τοπολογία επί της X, τότε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$ ανν τα πεδία ορισμού των χαρτών είναι $\mathcal{T}$-ανοιχτά και οι

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n$$

είναι $\mathcal{T}_U - \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ συνεχείς.

Επειδή η S^2 είναι συμπαγής και συνεκτική ως προς της $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ και η συνέχεια διατηρεί τις προηγούμενες ιδιότητες, αρκεί να δείξουμε ακόμη ότι η π είναι επί.

Έστω $[(x,y,z)] \in P^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$x^2 + y^2 + z^2 = a > 0$$

και

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{a}}\right)^2 = 1$$

Άρα

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{a}}, \frac{z}{\sqrt{a}}\right) \sim (x,y,z)$$

οπότε

$$\pi\left(\left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{a}}, \frac{z}{\sqrt{a}}\right)\right) = \pi((x,y,z))$$

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο τι καλούμε διαφορικό σε συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και στην γενική περίπτωση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Ορισμός 1.3.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Τότε, για $x \in \mathbb{R}$ το **διαφορικό** της f στο x, που συμβολίζεται με $(D_f)_x$, ορίζεται ως

$$(Df)_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(x)t$$

Εύκολα φαίνεται ότι η $(Df)_x$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x) - f'(x)t}{t} = 0$$

και

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

και είναι, μάλιστα, μοναδική ως προς τις ιδιότητες αυτές.

Ορισμός 1.3.5. Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο ανοιχτό U, το διαφορικό της f στο $x \in U$ είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$(Df)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

μοναδική ως προς την σχέση

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - (Df)_x(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική, τότε $(Df)_x = f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Επίσης, ο υπολογισμός του διαφορικού $(Df)_x$ ανάγεται στον υπολογισμό του πίνακα της $(Df)_x$ ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, που δεν είναι άλλος από τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J_x(f) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_x \right)$$

της f, όπου f_j οι συνιστώσες της f.

Αν, τώρα, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια αμφιδιαφόριση, τότε το

$$(Df)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

είναι ισομορφισμός γραμμμικών χώρων, άρα $m = n$ και

$$(Df^{-1})_{f(x)} = (Df)_x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα εφοδιασμένη με δύο διαφορικές δομές $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ διαστάσεων n και m αντίστοιχα. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Οι δύο διαφορικές δομές ταυτίζονται και άρα $n = m$.

(ii) Η

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{A}') \to (X, \mathcal{B}')$$

είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έχουμε ότι $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ και $n = m$. Έστω $x \in X$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}'$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}'$ με $x \in U \cap V$. Τότε η

$$\psi \circ \mathrm{id}_X \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι τοπική παράσταση της id_X στο x ως προς τους χάρτες $(U \cap V, \phi|_{U\cap V}) \in \mathcal{A}'$, $(U \cap V, \psi|_{U\cap V}) \in \mathcal{B}'$ και είναι διαφορίσιμη, ταυτιζόμενη με την απεικόνιση μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ των διαφορικά συμβιβαστών χαρτών (U, ϕ), (V, ψ).

Ανάλογα, έπεται και η διαφορισιμότητα της

$$\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{B}') \to (X, \mathcal{A}')$$

(ii)⇒(i) Από τη διαφορισιμότητα της id_X στο x, έπεται ότι υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}'$ με $x \in U$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}'$ με $x \in U \subseteq V$ έτσι ώστε η

$$\psi \circ \mathrm{id}_X \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Αφού η id_X είναι αμφισυνεχής ως αμφιδιαφόριση θα έχουμε ότι $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Άρα U, $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ και οι ϕ, ψ είναι $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}} - \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$,και $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$ αντίστοιχα, ομοιομορφισμοί.

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους χάρτες $(U \cap V, \phi|_{U\cap V}) \in \mathcal{A}'$, $(U \cap V, \psi|_{U\cap V}) \in \mathcal{B}'$, οπότε η αντίστοιχη τοπική παράσταση

$$\psi \circ \mathrm{id}_X \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι αμφιδιαφόρισιμη.

Το

$$\left(D(\psi \circ \phi^{-1})\right)_{\phi(x)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

θα είναι ισομορφισμός γραμμμικών χώρων, άρα $n = m$ και τελικά $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$, αφού $(U, \phi) \underset{\delta}{\sim} (V, \psi)$. ☐

1.4 Τοπικά Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και f μια απεικόνιση μεταξύ τους που δεν είναι ορισμένη σε ολόκληρο το X. Συμβολίζουμε με $\operatorname{Dom} f$ το πεδίο ορισμού της f.

Θα λέμε ότι η f είναι **τοπικά ορισμένη** στο $x \in X$, αν υπάρχει χάρτης (A, α) της X με $x \in A \subseteq \operatorname{Dom} f$.

Ορισμός 1.4.1. Έστω $f : \operatorname{Dom} f \subseteq X \to Y$ τοπικά ορισμένη στο $x \in X$. Θα λέμε ότι η f είναι **τοπικά διαφορίσιμη** στο x, αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) της X με $x \in U$, (V, ψ) της Y με $f(x) \in f(U) \subseteq V$ έτσι ώστε η

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, όπου ο χάρτης (A, α) είναι αυτός που ορίζει τοπικά την f στο x.

Παραδείγματα 1.4.1. (i) Οι απεικονίσεις $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ των χαρτών είναι τοπικά ορισμένες και τοπικά διαφορίσιμες.

(ii) Οι συνιστώσες συναρτήσεις $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ των χαρτών (U, ϕ) είναι τοπικά ορισμένες, τοπικά διαφορίσιμες.

Είναι φανερό ότι το σύνολο των τοπικά ορισμένων, τοπικά διαφορίσιμων απεικονίσεων

$$f : \operatorname{Dom} f \subseteq X \to Y$$

είναι ευρύτερο από το $C_x^\infty(X, Y)$. Παρόλα αυτά, θα διατηρούμε το προηγούμενο συμβολισμό και για τις τοπικά διαφορίσιμες στο x.

Παρατήρηση 1.4.1. Όπως και στην διαφορισιμότητα απεικονίσεων μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων αποδεικνύεται ότι και ο ορισμός της τοπικής διαφορισιμότητας, τοπικά ορισμένων απεικονίσεων μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων δεν εξαρτάται από την επιλογή των χαρτών.

Επιπλέον, ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας, μικραίνοντας ανάλογα τους χάρτες.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $f : \operatorname{Dom} f \subseteq X \to Y$ τοπικά ορισμένη στο $x \in X$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Η f είναι τοπικά διαφορίσιμη στο x.

(ii) Για κάθε $g : \operatorname{Dom} g \subseteq Y \to \mathbb{R}$ τοπικά διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, η $g \circ f$ είναι τοπικά διαφορίσιμη στο x.

(iii) Για κάθε χάρτη $(V, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ της Y με $f(x) \in V$, οι $y_i \circ f$ είναι τοπικά διαφορίσιμες στο x για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Αποδεικνύουμε, πρώτα, ότι η $g \circ f$ είναι τοπικά ορισμένη στο x.

Η f είναι τοπικά ορισμένη στο x, άρα υπάρχει χάρτης (A, α) της X με $x \in A \subseteq \operatorname{Dom} f$. Η g είναι τοπικά ορισμένη στο $\phi(x)$, άρα υπάρχει χάρτης (B, β) της Y με $f(x) \in B \subseteq \operatorname{Dom} g$.

Η f είναι διαφορίσιμη στο x και το B είναι ανοιχτή περιοχή του $f(x)$, άρα το $f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x. Οπότε, θεωρώντας τον χάρτη $(A \cap f^{-1}(B), \alpha|_{A \cap f^{-1}(B)}) \in \mathcal{A}'_X$

με $A \cap f^{-1}(B) \subseteq A \subseteq \operatorname{Dom} f$ και $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B \subseteq \operatorname{Dom} g$, έχουμε

$$\begin{tikzcd} A \cap f^{-1}(B) \subseteq \operatorname{Dom} f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \subseteq \operatorname{Dom} g \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Άρα, η $g \circ f$ είναι τοπικά ορισμένη στο x.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έπεται ότι η $g \circ f$ είναι τοπικά διαφορίσιμη.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Αρκεί να θεωρήσουμε στη θέση της g, τις $y_i : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ που είναι τοπικά ορισμένες στο x και τοπικά διαφορίσιμες στο $f(x)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Έχουμε ότι $y_i \circ f \in C_x^\infty(X)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, άρα υπάρχουν χάρτες (A, α), (U, ϕ) της X και ο ολικός χάρτης $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ του $\mathbb{R}$ με $x \in A \subseteq \operatorname{Dom}(y_i \circ f)$, $x \in U$ και $(y_i \circ f)(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}$ έτσι ώστε η

$$\mathrm{id}_\mathbb{R} \circ (y_i \circ f) \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Ισοδύναμα, η

$$y_i \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, ανν οι

$$u_i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{**}$$

είναι διαφορίσιμες στο $\phi(x)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

Για να έχουμε, από την προηγούμενη διαφορισιμότητα, την τοπική διαφορισιμότητα της f στο x, θα πρέπει, επιπλέον, να ξέρουμε ότι $f(U) \subseteq V$, άρα και $f(A \cap U) \subseteq V$.

Άρα, από την αρχή θεωρούμε τον (U, ϕ) να πληροί την σχέση $f(U) \subseteq V$. Τότε, η (**) μας λέει ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις της

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμες στο $f(x)$.

Άρα, η $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in A \cap U$. □

1.5 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι η σχέση συμβιβαστότητας ατλάντων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

2. Να αποδειχθεί ότι ο προβολικός χώρος $P^n(\mathbb{R})$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n.

3. Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ είναι μια τοπολογία στο X.

4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Να αποδειχθεί ότι το A γίνεται μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n με τη σχετική διαφορική δομή από τη διαφορική δομή της X.

5. Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και (U, ϕ) με $U = \mathbb{R}^2$ και

$$\phi(x, y) := \left(\frac{2x - y}{3}, \frac{2x + y}{3}\right)$$

Να αποδειχθεί ότι ο (U, ϕ) είναι ένας χάρτης του $\mathbb{R}^2$ που ανήκει στη σύνηθη διαφορική δομή του.

6. (i) Αν X, Y είναι διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το $X \times Y$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $n + m$.

   (ii) Να αποδειχθεί ότι ο κύλινδρος με βάση την S^1 είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

7. (i) Να αποδείξετε ότι η αλλαγή από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο, ορίζει ένα 2-διάστατο χάρτη, που ανήκει στη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Να αποδείξετε ότι η αλλαγή από κυλινδρικές (αντίστοιχα σφαιρικές) σε καρτεσιανές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$, ορίζει ένα 3-διάστατο χάρτη, που ανήκει στη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^3$.

8. Να αποδείξετε ότι όλα τα ανοιχτά διαστήματα είναι αμφιδιαφορικά μεταξύ τους, αλλά και με το ίδιο το $\mathbb{R}$.

9. Έστω S^1, η μοναδιαία περιφέρεια, και έστω η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(V_i, \psi_i) : i = 1, 2\}$ με

$$V_1 = \{(\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \in S^1 : 0 < t < 1\}$$

$$V_2 = \{(\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \in S^1 : -1/2 < t < 1/2\}$$

και

$$\psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}, \qquad (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \mapsto t$$

$$\psi_2 : V_2 \to \mathbb{R}, \qquad (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \mapsto t$$

Να αποδειχθεί ότι ο $\mathcal{A}$ είναι ένας 1-διάστατος διαφορικός άτλαντας της S^1, και ότι η επαγόμενη απ' αυτόν διαφορική δομή στην S^1, ταυτίζεται με την ήδη δοθείσα διαφορική δομή στην S^1.

10. Έστω X ένα μη κενό σύνολο, Y μια n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί απεικόνιση.

    (i) Να ορισθεί μια διαφορική δομή επί του X, ώστε η f να γίνεται αμφιδιαφόριση.

    (ii) Αν $X = M_{n \times m}(\mathbb{R})$, οι $n \times m$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι το X είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης nm.

11. Έστω Y ένα μη κενό σύνολο, X μια n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί απεικόνιση.

    (i) Να ορισθεί μια διαφορική δομή επί του Y, ώστε η f να γίνεται αμφιδιαφόριση.

    (ii) Αν $Y = V$, είναι ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος διάστασης n, να αποδειχθεί ότι ο V είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n.

12. Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Να αποδειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ είναι T_1.

13. Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Να αποδειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ είναι τοπικά συνεκτικός.

14. (i) Να αποδειχθεί ότι το $GL_n(\mathbb{R})$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n^2.

    (ii) Ο $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι ούτε συνεκτική, ούτε συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα.

15. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ δεν είναι συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα.

16. Έστω
$$X = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
και (U, ϕ), (V, ψ) με $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, $V = (\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}\backslash\{(0, 0, 0\}) \cup \{(0, 0, 1)\}$ και $\phi(x, y, 0) := (x, y)$, $\psi(x, y, 0) = (x, y)$, $\psi(0, 0, 1) = (0, 0)$. Να αποδείξετε ότι ο $\mathcal{A} = \{(U, \phi), (V, \psi)\}$ είναι διαφορικός άτλαντας του X και ότι η $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ δεν είναι Hausdorff.

17. Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και $X \times Y$ η διαφορική πολλαπλότητα γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι οι απεικονίσεις προβολών
$$p_X : X \times Y \to X, \qquad (x, y) \mapsto x$$
και
$$p_Y : X \times Y \to Y, \qquad (x, y) \mapsto y$$
είναι διαφορίσιμες.

18. Να αποδειχθεί ότι η
$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
είναι διαφορίσιμη.

19. Να αποδειχθεί ότι η
$$f : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R}), \quad [x, y, z] \mapsto [y + z, z + x, x + y]$$
είναι διαφορίσιμη.

20. (i) Έστω $D^2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ και
$$f : D^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad D^2 \ni (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{y}{1 - x^2 - y^2}\right)$$
    Να αποδειχθεί ότι η f είναι αμφιδιαφόριση.

    (ii) Να αποδειχθεί ότι το D^2 είναι αμφιδιαφορικό με το $(a, b)^2$ για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

21. Έστω X, Y, X', Y' διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n,m,n' και m' αντίστοιχα και $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Να αποδειχθεί ότι η
$$f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'$$
είναι διαφορίσιμη.

22. Έστω $f : X \times Y \to Z$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι οι
$$f_x : Y \to Z, \qquad y \mapsto f_x(y) := f(x, y)$$
και
$$f_y : X \to Z, \qquad x \mapsto f_y(x) := f(x, y)$$
είναι διαφορίσιμες.

23. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathrm{Diff}(X) := \{f : X \to X \quad \text{αμφιδιαφορίσεις}\}$$

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

24. Να αποδειχθεί ότι το $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

25. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ευθειών του $\mathbb{R}^2$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

26. Να αποδειχθεί ότι το

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1 + z)x^2 - (1 - z)y^2 = 2z(1 - z^2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

27. Να αποδειχθεί ότι το

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

Κεφάλαιο 2

Εφαπτόμενη Δέσμη

2.1 Εφαπτόμενος Χώρος

Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $x \in X$. Έστω, επίσης, I ένα ανοιχτό διάστημα της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0. Γενικά, θα θεωρούμε ότι $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ με $\varepsilon > 0$.

Ορισμός 2.1.1. Ονομάζουμε **καμπύλη** της X μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\alpha : I \to X$$

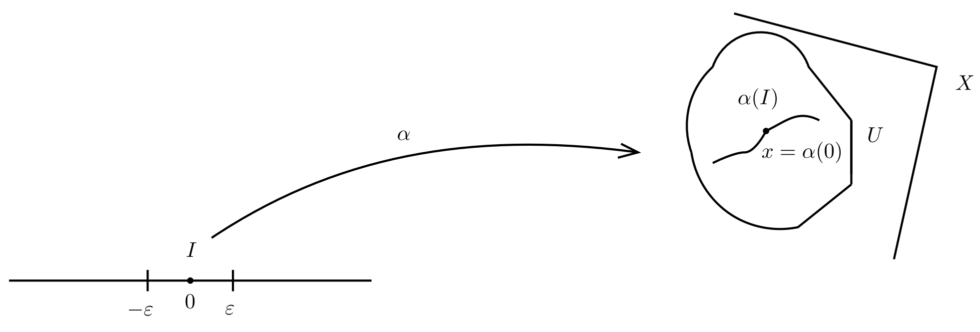
όπου το I θεωρείται εφοδιασμένο με τη σχετική διαφορική δομή από τη σύνηθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}$.

Θα λέμε ότι η καμπύλη α περνάει από το x, αν $\alpha(0) = x$.

Παρατηρήσεις 2.1.1. (i) Έστω $\alpha : I \to X$ καμπύλη της X από το x. Αφού η α είναι διαφορίσιμη είναι συνεχής, οπότε από τη συνέχεια στο 0, έχουμε ότι για κάθε χάρτη (U, ϕ) της X με $\alpha(0) = x \in U$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή I_0 του $0 \in I$ έτσι ώστε

$$\alpha(I_0) \subseteq U \tag{*}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέτουμε ότι $\alpha(I) \subseteq U$ μικραίνοντας εν ανάγκη το I όπως στην (*).



(ii) Σύμφωνα με την (i) ορίζεται η απεικόνιση $\phi \circ \alpha$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\phi\circ\alpha"'] & \alpha(I)\subseteq U\subseteq X \arrow[d, "\phi"] \\
& \phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

και είναι διαφορίσιμη με $(\phi\circ\alpha)(0)=\phi(x)$. Έτσι, η $\phi\circ\alpha$ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ που περνάει από το $\phi(x)$.

Ιδιαίτερα, η

$$\phi\circ\alpha=\phi\circ\alpha\circ\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|_I\right)^{-1}:I\to\phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$$

είναι η τοπική παράσταση της διαφορίσιμης α στο 0.

(iii) Έχοντας την καμπύλη $\phi\circ\alpha:I\to\phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$, έχουμε τις $\alpha_i=x_i\circ\alpha=u_i\circ\phi\circ\alpha$ με

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\phi\circ\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & \phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n \arrow[d, "u_i"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

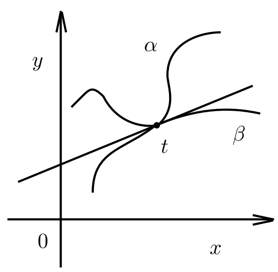
που είναι διαφορίσιμες με $\alpha_i(0)=x_i(\alpha(0))=x_i(x)$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$.

Δηλαδή, οι α_i είναι καμπύλες του $\mathbb{R}$ από τα $x_i(x)$ που αναπαρίστανται γραφικά στο επίπεδο.

Οι α_i, $i=1,2,\ldots,n$ ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** της καμπύλης α.

(iv) Αν έχουμε δύο καμπύλες α, $\beta:I\to\mathbb{R}$ με $\alpha(0)=t=\beta(0)$ αυτές εφάπτονται, όπως ξέρουμε, στο t ανν

$$\alpha'(0)=\beta'(0)$$



Η σχέση $\alpha'(0)=\beta'(0)$ ισοδυναμεί με την

$$(D\alpha)_0(1)=(D\beta)_0(1)$$

όπου οι $(D\alpha)_0$, $(D\beta)_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γραμμικές.

Άρα, αφού αυτές οι γραμμικές απεικονίσεις ταυτίζονται στη βάση του πεδίου ορισμού τους, ταυτίζονται παντού.

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha \underset{t}{\sim} \beta \Leftrightarrow \alpha'(0) = \beta'(0) \Leftrightarrow (D\alpha)_0 = (D\beta)_0$$

Αν X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα και $x \in X$, θα συμβολίζουμε με $C(X,x)$ το σύνολο όλων των καμπυλών της X που διέρχονται από το x. Δηλαδή,

$$C(X,x) = \{\alpha : I \to X \quad \text{διαφορίσιμη} \quad : \alpha(0) = x\}$$

Ορισμός 2.1.2. Αν α, $\beta \in C(X,x)$ θα λέμε ότι οι α, β **εφάπτονται** στο x και θα γράφουμε $\alpha \underset{x}{\sim} \beta$ αν $\alpha_i \underset{x_i(x)}{\sim} \beta_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Παρατήρηση 2.1.1. Οι α, $\beta \in C(X,x)$ εφάπτονται αν

$$\begin{aligned}
\alpha_i \underset{x_i(x)}{\sim} \beta_i &\Leftrightarrow \alpha_i'(0) = \beta_i'(0) \\
&\Leftrightarrow (D\alpha_i)_0 = (D\beta_i)_0 \\
&\Leftrightarrow D(x_i \circ \alpha)_0 = D(x_i \circ \beta)_0 \\
&\Leftrightarrow D(u_i \circ \phi \circ \alpha)_0 = D(u_i \circ \phi \circ \beta)_0 \\
&\Leftrightarrow D(u_i)_{\phi(\alpha(0))} \circ D(\phi \circ \alpha)_0 = D(u_i)_{\phi(\beta(0))} \circ D(\phi \circ \beta)_0 \\
&\Leftrightarrow u_i \circ D(\phi \circ \alpha)_0 = u_i \circ D(\phi \circ \beta)_0 \\
&\Leftrightarrow u_i \circ D(\phi \circ \alpha)_0(1) = u_i \circ D(\phi \circ \beta)_0(1) \\
&\Leftrightarrow D(\phi \circ \alpha)_0(1) = D(\phi \circ \beta)_0(1) \\
&\Leftrightarrow D(\phi \circ \alpha)_0 = D(\phi \circ \beta)_0
\end{aligned}$$

Λήμμα 2.1.1. *Ο ορισμός της επαφής δύο καμπυλών α, $\beta \in C(X,x)$ στο x είναι ανεξάρτητος από το θεωρούμενο χάρτη.*

Απόδειξη. Έστω (V,ψ) χάρτης της X με $x \in V$. Θα δείξουμε ότι $D(\psi \circ \alpha)_0(1) = D(\psi \circ \beta)_0(1)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
D(\psi \circ \alpha)_0 &= D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)_0 \\
&= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(\alpha(0))} \circ D(\phi \circ \alpha)_0 \\
&= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(\beta(0))} \circ D(\phi \circ \beta)_0 \\
&= D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \beta)_0 \\
&= D(\psi \circ \beta)_0
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.1.2. Η σχέση επαφής $\underset{x}{\sim}$ που ορίσαμε είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $C(X,x)$.

Ορισμός 2.1.3. Ορίζουμε

$$T_x(X) := C(X,x)/\underset{x}{\sim}$$

Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε **εφαπτόμενο χώρο** της πολλαπλότητας X στο x.

Στοιχεία του $T_x(X)$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας $[(x,\alpha)]$, $\alpha \in C(X,x)$ και για συντομία θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $v, u, w, \ldots$ για τα στοιχεία του $T_x(X)$, όπου αν

$$v = [(x,\alpha)] = \{\beta \in C(X,x) : \beta \underset{x}{\sim} \alpha\}$$

θα λέμε ότι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** v υλοποιείται από την καμπύλη α που περνάει από το x.

Θεώρημα 2.1.1. *$T_x(X) \simeq \mathbb{R}^n$ ως προς ένα ισομορφισμό συνόλων.*

Απόδειξη. Έχουμε, κατ' αρχάς, ένα χάρτη της X, τον (U, ϕ) με $x \in X$. Θεωρούμε την αντιστοιχία

$$\overline{\phi} : T_x(X) \to \mathbb{R}^n, \quad v = [(x, \alpha)] \mapsto D(\phi \circ \alpha)_0(1)$$

(α) Η $\overline{\phi}$ είναι καλά ορισμένη, σύμφωνα με τον ορισμό της επαφής και το Λήμμα 2.1.1.

(β) Η $\overline{\phi}$ είναι 1-1. Πράγματι, έστω $v = [(x, \alpha)]$, $w = [(x, \beta)] \in T_x(X)$ έτσι ώστε $\overline{\phi}(v) = \overline{\phi}(w)$. Τότε, $D(\phi \circ \alpha)_0(1) = D(\phi \circ \beta)_0(1)$ ανν $\alpha \underset{x}{\sim} \beta$ ανν οι αντίστοιχες κλάσεις με αντιπροσώπους τα α και β ταυτίζονται, δηλαδή $v = w$.

(γ) Η $\overline{\phi}$ είναι επί. Έστω $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $v = [(x, \alpha)] \in T_x(X)$ ώστε $\overline{\phi}(v) = h$.

Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε τα σημεία $\phi(x)$ και h. Άρα, ορίζοντας

$$\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) = I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \sigma(t) = \phi(x) + th$$

έχουμε μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ που περνάει από το $\phi(x)$.

Αφού η σ είναι συνεχής ως διαφορίσιμη, από τη συνέχεια της σ στο 0 και θεωρώντας την ανοιχτή περιοχή $\phi(U)$ του $\phi(x)$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή I_0 του 0 ούτως ώστε $\sigma(I_0) \subseteq \phi(U)$, άρα στον ορισμό της σ, όπου I εννοούμε το I_0.

Για την $\alpha = \phi^{-1} \circ \sigma$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\alpha = \phi^{-1} \circ \sigma"'] & \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "\phi^{-1}"] \\
& U \subseteq X
\end{tikzcd}$$

έχουμε ότι $\alpha \in C(X, x)$.

Θέτουμε $v = [(x, \alpha)] \in T_x(X)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(v) &= D(\phi \circ \alpha)_0(1) \\
&= (u_i \circ D(\phi \circ \alpha)_0(1))_{1 \le i \le n} \\
&= (D(u_i \circ \sigma)_0(1))_{1 \le i \le n} \\
&= ((u_i \circ \sigma)'(0))_{1 \le i \le n} \\
&= (h_i)_{1 \le i \le n} \\
&= h
\end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας τον συνολοθεωρητικό ισομορφισμό $\overline{\phi}$, θα ορίσουμε γραμμική δομή στο σύνολο $T_x(X)$.

Έστω $v = [(x, \alpha)]$, $w = [(x, \beta)]$ δύο στοιχεία του $T_x(X)$. Τότε, $\overline{\phi}(v)$, $\overline{\phi}(w) \in \mathbb{R}^n$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $\overline{\phi}(v) + \overline{\phi}(w)$, $\lambda\overline{\phi}(v) \in \mathbb{R}^n$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} v+w &:= \overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(v)+\overline{\phi}(w)) \\ \lambda\cdot v &:= \overline{\phi}^{-1}(\lambda\overline{\phi}(v)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Όμως, αυτός ο ορισμός εξαρτάται από το χάρτη (U,ϕ). Δηλαδή, αν έχουμε έναν δεύτερο χάρτη (V,ψ) της X με $x\in V$, τότε ορίζεται πάλι η

$$\overline{\psi}:T_x(X)\to\mathbb{R}^n,\quad v=[(x,\alpha)]\mapsto D(\psi\circ\alpha)_0(1)$$

και είναι 1-1 και επί.

Άρα, πάλι, μπορούμε να θέσουμε

$$\begin{aligned} v\oplus w &:= \overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}(v)+\overline{\psi}(w)) \\ \lambda\odot v &:= \overline{\psi}^{-1}(\lambda\overline{\psi}(v)) \end{aligned}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι οι $+,\cdot$ ταυτίζονται με τις $\oplus,\odot$, δηλαδή ότι

$$\overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(v)+\overline{\phi}(w))=\overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}(v)+\overline{\psi}(w))$$

και

$$\overline{\phi}^{-1}(\lambda\overline{\phi}(v))=\overline{\psi}^{-1}(\lambda\overline{\psi}(v))$$

ανν

$$(\overline{\psi}\circ\overline{\phi}^{-1})(\overline{\phi}(v)+\overline{\phi}(w))=\overline{\psi}(v)+\overline{\psi}(w)$$

και

$$(\overline{\psi}\circ\overline{\phi}^{-1})(\lambda\overline{\phi}(v))=\lambda\overline{\psi}(v)$$

Αν ξέραμε ότι η

$$\overline{\psi}\circ\overline{\phi}^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

είναι γραμμική θα είχαμε το ζητούμενο.

Αυτό, πράγματι, ισχύει. Πιο συγκεκριμένα,

$$\overline{\psi}\circ\overline{\phi}^{-1}=D(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}$$

που είναι γραμμική.

Έστω $h\in\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχουν $v=[(x,\alpha)]\in T_x(X):\overline{\phi}(v)=h$. Άρα,

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}\circ\overline{\phi}^{-1})(h) &= D(\psi\circ\alpha)_0(1) \\ &= D(\psi\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha)_0(1) \\ &= D(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi\underbrace{(\alpha(0))}_{x}}\underbrace{(D(\phi\circ\alpha)_0(1))}_{\overline{\phi}(v)} \\ &= D(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}(h),\qquad \forall h\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Επομένως, οι γραμμικές πράξεις που ορίζονται από τις (2.1) στο σύνολο $T_x(X)$ είναι ανεξάρτητες από το θεωρούμενο χάρτη.

Έτσι, ο $T_x(X)$ γίνεται γραμμικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ και η $\overline{\phi}$ γραμμική σύμφωνα με τις (2.1).

Βρίσκουμε, τώρα, ποια είναι η βάση του n-διάστατου γραμμικού χώρου $T_x(X)$.

Θέτουμε

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := \overline{\phi}^{-1}(e_i)$$

όπου $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Αφού η $\overline{\phi}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τα στοιχεία $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$ αποτελούν βάση του $T_x(X)$.

Παρατηρήσεις 2.1.2. (i) Αν $v \in T_x(X)$, τότε τα v, $\overline{\phi}(v)$ έχουν τις ίδιες συντεταγμένες ως προς τις αντίστοιχες βάσεις των $T_x(X)$ και $\mathbb{R}^n$.

Δηλαδή, αν

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

με $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\overline{\phi}(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(0) e_i$$

όπου

$$\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) = I \to \mathbb{R}$$

οι συνιστώσες συναρτήσεις της καμπύλης $\alpha : I \to X$, που είναι επίσης καμπύλες του $\mathbb{R}$.

Άρα,

$$v = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0), \ldots, \alpha_n'(0))$$

(ii) Ποιά καμπύλη του X υλοποιεί το $0 \in T_x(X)$;

Αν $x \in U$, τότε $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$. Η $v(t) = \phi(x)$, για κάθε t, είναι μια σταθερή καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ από το $\phi(x)$ και η $\alpha = \phi^{-1} \circ \sigma$ είναι η σταθερή καμπύλη x της X έτσι ώστε, αν $v = [(x, \alpha)]$, τότε $v = 0$.

(iii) Ποιές καμπύλες υλοποιούν τα βασικά διανύσματα $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$, $i = 1, 2, \ldots, n$ του $T_x(X)$;

Έχουμε $x \in U$, $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$ και $\overline{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right) = e_i \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\sigma_i(t) = \phi(x) + te_i$$

οπότε $\sigma_i \in C(\mathbb{R}^n, \phi(x))$.

Τα πεδία ορισμού των σ_i τα βρίσκουμε από τη συνέχεια των σ_i στο 0 και είναι της μορφής

$$I_i = (-\delta_i, \delta_i) : \quad \sigma_i(I_i) \subseteq \phi(U)$$

Τότε, η $\alpha_i = \phi \circ \sigma_i$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη του X που περνάει από το x με $\operatorname{Dom} \alpha_i = I_i$ και $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = [(x, \alpha_i)]$.

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι, αν $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$ είναι τα βασικά διανύσματα του $T_{\phi(x)}(\mathbb{R}^n)$, τότε αυτές είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις του ολικού χάρτη $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.

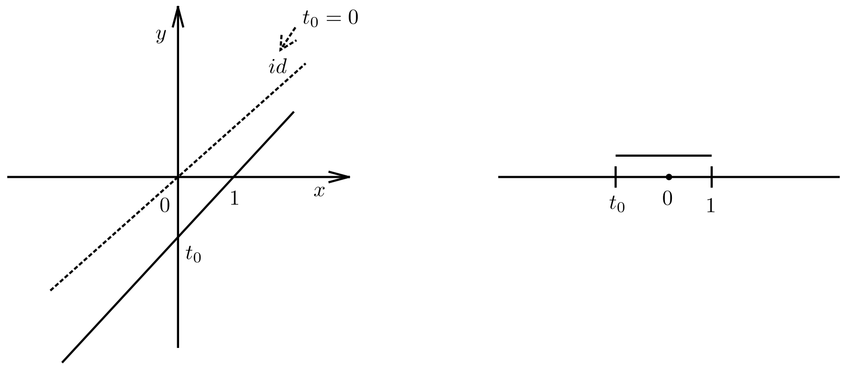
Έχουμε

$$\overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(e_i) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = [(\phi(x), \sigma_i)]$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iv) Αν $X = \mathbb{R}$ και $t_0 \in \mathbb{R}$, τότε το βασικό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου του $\mathbb{R}$ στο t_0, $T_{t_0}(\mathbb{R}) \underset{\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}{\simeq} \mathbb{R}$, το συμβολίζουμε με

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0} = \partial_t|_{t_0}$$



Έχουμε

$$\partial_t|_{t_0} = [(t, \ell_{t_0})]$$

και

$$\partial_t|_{t_0=0} = [(t, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})]$$

(v) Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in A$. Τότε,

$$T_x(A) \simeq T_x(X) \simeq \mathbb{R}^n$$

Πράγματι, αν (U, ϕ) χάρτης της X με $x \in U$, θεωρώντας τον χάρτη

$$\mathcal{A}_X \ni (U \cap A, \phi|_A = \phi|_{U \cap A}) \in \mathcal{A}'_A$$

έχουμε

$$T_x(A) \underset{\overline{\phi|_A}}{\simeq} \mathbb{R}^n \underset{\overline{\phi}}{\simeq} T_x(X)$$

Παραδείγματα 2.1.1. (i) Έστω $X = S^2$, $p = (0,0,1) = N$ και α, $\beta \in C(S^2, p)$ με

$$\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t)$$

και

$$\beta(t) = (0, \sin t, \cos t)$$

Έστω $v = [(p, \alpha)]$, $w = [(p, \beta)] \in T_p(S^2)$. Θα βρούμε μια καμπύλη στο $C(S^2, p)$ που να υλοποιεί το διάνυσμα $2v - w$.

Παρατηρούμε ότι $p \in U_z^+$ και $p \in U_S$. Ας θεωρήσουμε, πρώτα, τον χάρτη (U_z^+, ϕ_z^+). Τότε, $\phi_z^+(p) = (0,0)$ και υπάρχει $I_0 = (-\pi, \pi)$ με $\alpha(I_0)$, $\beta(I_0) \subseteq U_z^+$.

Παρατηρούμε ότι $\overline{\phi_z^+}(2v - w) = 2\overline{\phi_z^+}(v) - \overline{\phi_z^+}(w)$, και εφόσον έχουμε ότι

$$\overline{\phi_z^+}(v) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (1, 0)$$

και

$$\overline{\phi_z^+}(w) = (\beta_1'(0), \beta_2'(0)) = (0, 1)$$

παίρνουμε ότι $\overline{\phi_z^+}(2v-w) = (2,-1)$.

Οπότε, θεωρούμε την ευθεία

$$\sigma(t) = t \cdot (2,-1)$$

του $\mathbb{R}^2$ που ενώνει τα σημεία $\phi_z^+(p) = (0,0)$ και $\overline{\phi_z^+}(2v-w) = (2,-1)$.

Τότε, ορίζουμε την

$$\gamma : I_0 \to S^2$$

με

$$\begin{aligned} t \mapsto \gamma(t) &= (\phi_z^+)^{-1}(\sigma(t)) \\ &= (\phi_z^+)^{-1}((2t,-t)) \\ &= (2t,-t,\sqrt{1-4t^2-t^2}) \end{aligned}$$

Έστω $w_0 = [(p,\gamma)] \in T_p(S^2)$. Θα δείξουμε ότι $\overline{\phi_z^+}(w_0) = \overline{\phi_z^+}(2v-w)$, οπότε το $2v-w = w_0 = [(p,\gamma)]$ θα υλοποιείται από την γ.

Έχουμε ότι

$$\overline{\phi_z^+}(w_0) = (\gamma_1'(0),\gamma_2'(0)) = (2,-1) = \overline{\phi_z^+}(2v-w)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον χάρτη (U_S,ϕ_S) με $p \in U_S$.

Οι συνιστώσες συναρτήσεις των α, β ως προς τον (U_S,ϕ_S) είναι $\alpha_i = u_i \circ \phi_S \circ \alpha$ με

$$\alpha_1(t) = \frac{\sin t}{1+\cos t}, \qquad \alpha_2(t) = 0$$

και αντίστοιχα

$$\beta_1(t) = 0, \qquad \beta_2(t) = \frac{\sin t}{1+\cos t}$$

Άρα, $\overline{\phi}(v) = (\alpha_1'(0),\alpha_2'(0)) = (1/2,0)$ και $\overline{\phi}(w) = (\beta_1'(0),\beta_2'(0)) = (0,1/2)$.

Έχουμε $\phi_S(p) = (0,0)$ και $\overline{\phi}_S(2v-w) = 2\overline{\phi}_S(v) - \overline{\phi}_S(w) = (1,-1/2)$.

Ορίζουμε την ευθεία του $\mathbb{R}^2$

$$\varepsilon(t) = (0,0) + t(1,-1/2) = (t,-t/2)$$

και την

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \phi_S^{-1}(\varepsilon(t)) = \phi_S^{-1}((t,-t/2)) \\ &= \left(\frac{8t}{5t^2+4}, \frac{-4t}{5t^2+4}, \frac{-5t^2-4}{5t^2+4}\right) \end{aligned}$$

Τότε, αν $s_0 = [(p,\sigma)] \in T_p(S^2)$, έχουμε ότι

$$(\delta_1'(0),\delta_2'(0)) = \overline{\phi}_S(s_0) = \overline{\phi}_S(2v-w) = (1,-1/2)$$

άρα $2v-w = [(p,\delta)]$.

Τελικά, έχουμε ότι $[(p,\gamma)] = 2v-w = [(p,\delta)]$. Δηλαδή, έχουμε $\gamma \underset{p}{\sim} \delta$ όταν $p \in U_Z^+$, αλλά και $\gamma \underset{p}{\sim} \delta$ όταν $p \in U_S$.

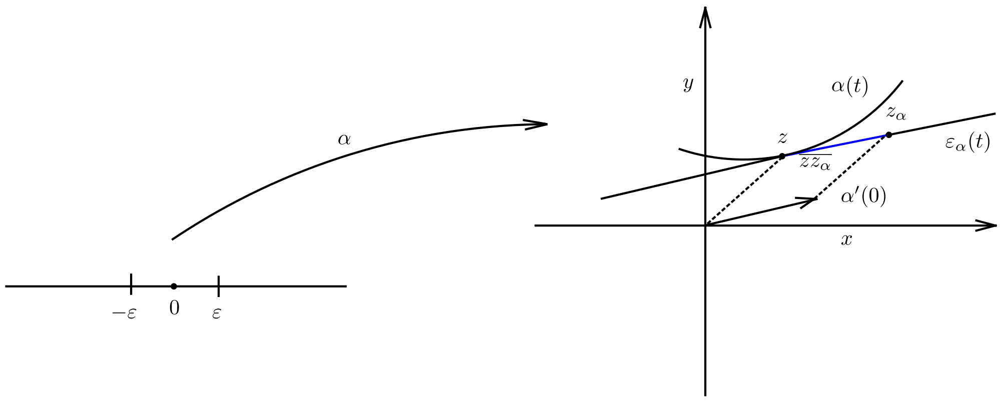
(ii) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και $z \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$T_z(\mathbb{R}^2) \simeq Z = \{\overline{zz_\alpha} : z_\alpha = z + \alpha'(0)\}$$

δηλαδή, $\overline{zz_\alpha}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με αρχή το z, πέρας το z_α, που είναι τμήμα της εφαπτομένης

$$\varepsilon(t) = z + t\alpha'(0)$$

της α στο z, με $\alpha(0) = z$ και κατεύθυνση το διάνυσμα $\alpha'(0)$.



Θεωρούμε την αντιστοιχία

$$\theta : T_z(\mathbb{R}^2) \to Z, \quad v = [(z,\alpha)] \mapsto \overline{zz_\alpha}$$

Τότε, η θ είναι 1-1 και επί.

Αν $v = [(z,\alpha)]$, $w = [(z,\beta)]$ με α, $\beta \in C(\mathbb{R}^2, z)$ και $\overline{zz_\alpha} = \overline{zz_\beta}$, τότε $z_\alpha = z_\beta$, άρα $\alpha'(0) = \beta'(0)$ και $\alpha \underset{z}{\sim} \beta$ ανν $v = w$. Έτσι, η θ είναι 1-1.

Έστω, τώρα, $\overline{zh} \in Z$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in C(\mathbb{R}^2, z)$ τέτοιο ώστε, θεωρώντας το $v = [(z,\alpha)]$ να έχουμε $\theta(v) = \overline{zh}$ ανν $\overline{zz_\alpha} = \overline{zh}$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $z_\alpha = h$.

Θέτουμε $k = h - z \in \mathbb{R}^2$ και ορίζουμε $\alpha(t) = z + tk$. Τότε $\alpha \in C(\mathbb{R}^2, z)$ και

$$z_\alpha = z + \alpha'(0) = z + k = z + h - z = h$$

Έστω X διαφορική πολλαπλότητα, $x \in X$ και

$$T_x(X) = \{[(x,\alpha)] = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0), \ldots, \alpha_n'(0)) : \alpha \in C(X,x)\}$$

Έστω f, $g \in C_x^\infty(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχουν χάρτες (U,ϕ), (V,ψ) της X με $x \in U \cap V$ ώστε οι

$$f : U \subseteq \mathrm{Dom}\, f \to \mathbb{R}$$

και

$$g : V \subseteq \mathrm{Dom}\, g \to \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμες στο x.

Οπότε, ορίζουμε

$$(f+g)(y) = f(y) + g(y), \qquad \forall y \in U \cap V$$

Έτσι η

$$f+g : U \cap V \subseteq \mathrm{Dom}(f+g) \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη στο x.

Ανάλογα, ορίζεται η

$$\lambda f : U \subseteq \mathrm{Dom}(\lambda f) \to \mathbb{R}$$

και είναι διαφορίσιμη στο x, όπως και η

$$fg : U \cap V \subseteq \mathrm{Dom}(fg) \to \mathbb{R}$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το $C_x^\infty(X)$ εφοδιασμένο με τις τρεις αυτές πράξεις, με τις οποίες γίνεται άλγεβρα.

Ορισμός 2.1.4. Ονομάζουμε σημειακή παραγώγιση, ή απλά **παραγώγιση** της άλγεβρας $C_x^\infty(X)$ μια συνάρτηση

$$\ell : C_x^\infty(X) \to \mathbb{R}$$

με τις εξής ιδιότητες

(i) Η ℓ είναι γραμμική, δηλαδή

$$\ell(\lambda f + g) = \lambda \ell(f) + \ell(g), \qquad \forall f, g \in C_x^\infty(X), \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii) Η ℓ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, δηλαδή

$$\ell(fg) = f(x)\ell(g) + \ell(f)g(x)$$

Παράδειγμα 2.1.1. Αν $X = \mathbb{R}$, τότε ο τελεστής παράγωγος

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} : C_{t_0}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \frac{df}{dt}\Big|_{t_0}$$

είναι μια σημειακή παραγώγιση.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $D_x(X)$ για τις σημειακές παραγωγίσεις της πολλαπλότητας X στο x.

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $D_x(X)$ είναι ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος, με τις γραμμικές πράξεις οριζόμενες κατά σημείο.

Παρατηρήσεις 2.1.3. (i) Αν $\ell \in D_x(X)$ και $f \in C_x^\infty(X)$ σταθερή με $f(y) = \lambda$ για κάθε $y \in U \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, τότε $\ell(f) = 0$.

Έχουμε $f(y) = \lambda = \lambda \mathbb{1}(y)$ για κάθε $y \in U$ με $\mathbb{1}(y) = 1$ για κάθε $y \in U$ και $\mathbb{1} \in C_x^\infty(X)$. Άρα, $f = \lambda \mathbb{1}$, οπότε από την γραμμικότητα της ℓ, αρκεί να δείξουμε ότι $\ell(\mathbb{1}) = 0$.

Πράγματι,

$$\ell(\mathbb{1}) = \ell(\mathbb{1} \cdot \mathbb{1}) = \mathbb{1}(x)\ell(\mathbb{1}) + \ell(\mathbb{1})\mathbb{1}(x) = 2\ell(\mathbb{1})$$

άρα $\ell(\mathbb{1}) = 0$.

Συνεπώς, οι παραγωγίσεις μηδενίζονται στις σταθερές συναρτήσεις του $C_x^\infty(X)$.

(ii) Κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα, $v = [(x, \alpha)] \in T_x(X)$, της πολλαπλότητας X στο x, ορίζει μια παραγώγιση.

Θέτουμε

$$\ell_v(f) := (f \circ \alpha)'(0)$$

όπου η σύνθεση $f \circ \alpha$ ορίζεται καλά ως σύνθεση τοπικά ορισμένων, τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Ο ορισμός της ℓ_v δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο της κλάσης που ορίζει το v.

Έστω $\beta \in [(x, \alpha)]$. Τότε

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= D(f \circ \alpha)_0(1) \\ &= D(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)_0(1) \\ &= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(\alpha(0))}(D(\phi \circ \alpha)_0(1)) \\ &= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(\beta(0))}(D(\phi \circ \beta)_0(1)) \\ &= D(f \circ \beta)_0(1) \\ &= (f \circ \beta)'(0)\end{aligned}$$

Άρα, η ℓ_v δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο της $[(x, \alpha)]$.

Τώρα,

$$\ell_v(f) = (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0}$$

όπου η $\displaystyle\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ είναι γραμμική και πληροί τον κανόνα του Leibniz.

Τελικά, η ℓ_v είναι παραγώγιση της πολλαπλότητας X.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω X μια n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $f \in C_x^\infty(X)$. Τότε, υπάρχει (U, ϕ) χάρτης της X με $x \in U \subseteq \operatorname{Dom} f$ και $\phi(x) = 0$, έτσι ώστε*

$$f = f(x)\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

όπου x_i είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της ϕ και

$$f_i \equiv \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}$$

όπου η $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$, η τοπική παράσταση της f στο x, είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Η απόδειξη παραλείπεται.

Παρατήρηση 2.1.3. Αν ο χάρτης που ορίζει τοπικά την f έχει $\phi(x) \neq 0$, μπορούμε να βρούμε έναν άλλο που να περιέχει το x και να μηδενίζεται στο x.

Πράγματι, αν είναι (U, ϕ) με $x \in U \subseteq \operatorname{Dom} f$ και $\phi(x) \neq 0$, θεωρούμε τη μεταφορά

$$\ell_{-\phi(x)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad h \mapsto h - \phi(x)$$

και συνθέτουμε με την ϕ

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'\ell_{-\phi(x)} \circ \phi"] & \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "\ell_{-\phi(x)}"] \\
& \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Τότε, ο (U', ϕ') ανήκει στον $\mathcal{A}'_X$ και έχει την ιδιότητα $\phi'(x) = 0$.

Άρα, πάντα βρίσκουμε ένα χάρτη όπως στο Λήμμα 2.1.2.

Θεώρημα 2.1.2. *$T_x(X) \simeq D_x(X)$ ως προς ένα ισομορφισμό $\mathbb{R}$-γραμμικών χώρων.*

Απόδειξη. Από τις Παρατήρησεις 2.1.3, ορίζεται καλά η απεικόνιση

$$L : T_x(X) \to D_x(X), \qquad v \mapsto L(v) := \ell_v$$

Έστω $v = [(x, \alpha)]$, $w = [(x, \beta)]$ με $\ell_v = \ell_w$. Θα δείξουμε ότι $v = w$. Έχουμε $\ell_v(f) = \ell_w(f)$, για κάθε $f \in C^\infty_x(X)$, άρα και για τις $x_i \in C^\infty_x(X)$, συνιστώσες συναρτήσεις ενός χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$, ισχύει το ίδιο.

Τότε, $\ell_v(x_i) = \ell_w(x_i)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ ανν $(x_i \circ \alpha)'(0) = (x_i \circ \beta)'(0)$.

Άρα $\alpha'_i(0) = \beta'_i(0)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε

$$v = (\alpha'_1(0), \alpha'_2(0), \ldots, \alpha'_n(0)) = (\beta'_1(0), \beta'_2(0), \ldots, \beta'_n(0)) = w$$

Έστω, τώρα, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_x(X)$. Πρέπει, τότε,

$$L(\lambda v + w) = \lambda L(v) + L(w)$$

δηλαδή

$$\ell_{\lambda v + w} = \lambda \ell_v + \ell_w$$

Στο καλά ορισμένο της ℓ_v είχαμε υπολογίσει

$$\begin{aligned}
\ell_v(f) &= (f \circ \alpha)'(0) \\
&= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(\alpha(0))}(D(\phi \circ \alpha)_0(1)) \\
&= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}(\overline{\phi}(v)) \\
&= (D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \circ \overline{\phi})(v)
\end{aligned}$$

που είναι γραμμική ως σύνθεση γραμμικών.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\ell_{\lambda v + w}(f) &= (D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \circ \overline{\phi})(\lambda v + w) \\
&= \lambda (D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \circ \overline{\phi})(v) + (D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \circ \overline{\phi})(w) \\
&= \lambda \ell_v(f) + \ell_w(f) = (\lambda \ell_v + \ell_w)(f)
\end{aligned}$$

Η ℓ είναι, τέλος, επί. Έστω $\ell \in D_x(X)$ και έστω (U, ϕ) χάρτης της X με $x \in U$ και $\phi(x) = 0$. Έστω, επίσης, μια $f \in C^\infty_x(X)$. Τότε, από το Λήμμα 2.1.2, θα υπάρχει (U_f, ϕ_f) χάρτης της X με $x \in U_f$ και $\phi_f(x) = 0$.

Παρατηρούμε ότι οι χάρτες $(U \cap U_f, \phi|_{U \cap U_f})$, $(U \cap U_f, \phi_f|_{U \cap U_f}) \in \mathcal{A}'_X$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί. Επομένως,

$$\phi(U \cap U_f) \simeq \phi_f(U \cap U_f)$$

Άρα, στην ουσία, θεωρώντας τον έναν ή τον άλλον χάρτη, παραμένουμε στο σύστημα συντεταγμένων του αρχικού χάρτη (U, ϕ).

Έτσι, θέτουμε $\lambda_i = \ell'(x_i)$, $x_i = u_i \circ \phi|_{U \cap U_f}$. Ορίζουμε, τότε, το διάνυσμα

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \in T_x(X)$$

Έστω $v = [(x, \alpha)]$. Θα δείξουμε ότι $\ell' \equiv \ell_v$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\ell'(f) = \ell_v(f)$, για την τυχούσα f.

Από το Λήμμα 2.1.2, για τον χάρτη $(U \cap U_f, \phi|_{U \cap U_f})$ έχουμε ότι

$$f = f(x)\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

όπου $f_i = \dfrac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}$.

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\ell_v(f) &= f(x)\ell_v(\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^{n} \ell_v(x_i f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ell_v(x_i f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i(x)\ell_v(f_i) + f_i(x)\ell_v(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)(x_i \circ \alpha)'(0)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε την ℓ' στο f και κάνουμε την ίδια διαδικασία, οπότε καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\ell'(f) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ell'(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i \circ \alpha)'(0) = \ell_v(f)
\end{aligned}$$

αφού $v = [(x, \alpha)]$ και $\lambda_i = (x_i \circ \alpha)'(0)$.

Άρα, υπάρχει $v \in T_x(X)$ με $\ell' = \ell_v$. $\square$

Αφού κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $v \in T_x(X)$ είναι παραγώγιση, όπως δείξαμε στο Θεώρημα 2.1.2, στο εξής θα ταυτίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα v με τις αντίστοιχες παραγωγίσεις ℓ_v. Άρα μπορούμε να γράφουμε $v(f)$ με $f \in C_x^\infty(X)$ εννοώντας το $\ell_v(f)$.

Άρα, θα έχουμε

$$\ell_v(f) = v(f) = (f \circ \alpha)'(0)$$

με α την καμπύλη που υλοποιεί το v.

Παρατηρήσεις 2.1.4. (i) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη έκφραση του v, μπορούμε να δικαιολογήσουμε τον συμβολισμό των βασικών εφαπτόμενων διανυσμάτων του $T_x(X)$ ως

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Ας ξεκινήσουμε με $X = \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ και το βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\partial t|_{t_0} \in T_{t_0}(\mathbb{R})$. Δείξαμε ότι $\partial t|_{t_0} = [(t_0, \ell_{t_0})]$, οπότε αν $f \in C^\infty_{t_0}(\mathbb{R})$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\partial t|_{t_0}(f) &= \ell_{[(t_0,\ell_{t_0})]}(f) \\
&= (f \circ \ell_{t_0})'(0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(\ell_{t_0}(t)) - f(\ell_{t_0}(0))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \\
&= \frac{df}{dt}\Big|_{t=t_0} \\
&= f'(t_0)
\end{aligned}$$

Άρα, το βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα του $\mathbb{R}$ στο t_0 είναι η συνήθης παράγωγος στο t_0.

(ii) Θεωρούμε, τώρα, τον $T_x(X)$.

Δείξαμε ότι τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ υλοποιούνται από τις $[(x, \alpha_i)]$ με $\alpha_i = \phi^{-1} \circ \sigma_i$ και $\sigma_i(t) = \phi(x) + te_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$. Άρα, αν $f \in C^\infty_x(X)$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x(f) &= \ell_{[(x,\alpha_i)]}(f) \\
&= (f \circ \alpha_i)'(0) \\
&= D(f \circ \alpha_i)_0(1) \\
&= D(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha_i)_0(1) \\
&= D(f \circ \phi^{-1} \circ \sigma_i)_0(1) \\
&= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}((D\sigma_i)_0(1)) \\
&= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}(e_i) \\
&= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

Άρα, $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Έτσι, τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x(f)$ του $T_x(X)$ είναι στην ουσία μερικές παράγωγοι όπως δείχνει η τελευταία ισότητα, και αυτό δικαιολογεί το συμβολισμό τους.

2.2 Σημειακό Διαφορικό

Έστω ότι X, Y είναι διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και $x \in X$. Τότε, από τη διαφορισιμότητα μιας f στο $x \in X$, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}'_X$ και

$(V,\psi) \in \mathcal{A}'_Y$ με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε η τοπική παράσταση

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω $\alpha,\ \beta \in C(X,x)$ με $\alpha \underset{x}{\sim} \beta$. Τότε, η f διατηρεί την επαφή αυτών των καμπυλών, δηλαδή $f \circ \alpha,\ f \circ \beta \in C(Y, f(x))$ και $f \circ \alpha \underset{f(x)}{\sim} f \circ \beta$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(y_j \circ f \circ \alpha)'(0) = (y_j \circ f \circ \beta)'(0), \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

με y_j τις συνιστώσες συναρτήσεις του (V,ψ).

Πράγματι,

$$(y_j \circ f \circ \alpha)'(0) = (u_j \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$$

και όμοια

$$(y_j \circ f \circ \beta)'(0) = (u_j \circ F \circ \phi \circ \beta)'(0)$$

Η ισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$D(F \circ (\phi \circ \alpha))_0 = D(F \circ (\psi \circ \beta))_0$$

διότι $u_j = (Du_j)_{\phi(x)}$.

Όμως,

$$\begin{aligned} D(F \circ \phi \circ \alpha)_0 &= D(F)_{\phi(\alpha(0))} \circ D(\phi \circ \alpha))_0 \\ &= D(F)_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)_0 \\ &= D(F)_{\phi(\beta(0))} \circ D(\phi \circ \beta)_0 \\ &= D(F \circ \phi \circ \beta)_0 \end{aligned}$$

□

Σύμφωνα, λοιπόν, με το Λήμμα 2.2.1, ορίζεται καλά η απεικόνιση

$$(df)_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y), \qquad [(x,\alpha)] \mapsto [(f(x), f \circ \alpha)]$$

Ορισμός 2.2.1. Η απεικόνιση $(df)_x$ ονομάζεται σημειακό διαφορικό ή απλώς **διαφορικό** της $f \in C_x^\infty(X,Y)$ στο $x \in X$.

Θεώρημα 2.2.1. *(i) Η $(df)_x$ είναι γραμμική.*

(ii) Για κάθε $g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, ισχύει $((df)_x(v))(g) = v(g \circ f)$.

(iii) Αν $Y = \mathbb{R}$, τότε $(df)_x(v) = v(f)$.

(iv) $d(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_x(X)}$

(v) Αν $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, με $f,\ g \in C^\infty$ και $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, $\dim(Z) = k$, τότε $d(g \circ f)_x = (dg)_{f(x)} \circ (df)_x$.

(vi) Αν η f είναι αμφιδιαφόριση, τότε το $(df)_x$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(vii) Ισχύει $\overline{\phi} = (d\phi)_x$, όπου (U, ϕ) ο χάρτης που ήδη έχουμε θεωρήσει.

Απόδειξη. (i) Έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_x(X) \arrow[r, "(df)_x"] \arrow[d, "\overline{\phi}"] & T_{f(x)}(Y) \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "(DF)_{\phi(x)}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Πράγματι, π.χ.

$$\begin{aligned} (\overline{\psi} \circ (df)_x)(v) &= \overline{\psi}((df)_x(v)) \\ &= \overline{\psi}[(f(x), f \circ \alpha)] \\ &= D(\psi \circ f \circ \alpha)_0(1) \\ &= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)_0(1) \\ &= DF_{\phi(x)}(D(\phi \circ \alpha)_0(1)) \\ &= (DF_{\phi(x)} \circ \overline{\phi})(v) \end{aligned}$$

Οπότε, από την

$$\psi \circ (df)_x = (DF)_{\phi(x)} \circ \overline{\phi}$$

έπεται το ζητούμενο.
(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} ((df)_x(v))(g) &= [(f(x), f \circ \alpha)](g) \\ &= \ell_{[(f(x), f\circ\alpha)]}(g) = (g \circ f \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

Όμως, $g \circ f \in C_x^\infty(X)$, άρα

$$((df)_x(v))(g) = \ell_v(g \circ f) = v(g \circ f)$$

(iii) Ισχύει

$$(df)_x(v) = [(f(x), f \circ \alpha)] = (f \circ \alpha)'(0) = \ell_v(f) = v(f)$$

(iv) Έχουμε

$$\begin{aligned} (d\,\mathrm{id}_X)_x(v) &= [(\mathrm{id}_X(x), \mathrm{id}_X \circ \alpha)] \\ &= [(x, \alpha)] \\ &= v = \mathrm{id}_{T_x(X)}(v) \end{aligned}$$

για κάθε $v \in T_x(X)$.
(v) Έχουμε το

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Έτσι στα αντίστοιχα διαφορικά

$$\begin{tikzcd}
T_x(X) \arrow[r, "(df)_x"] \arrow[dr, "d(g\circ f)_x"] & T_{f(x)}(Y) \arrow[d, "(dg)_{f(x)}"] \\
 & T_{g\circ f(x)}(Z)
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{aligned}
d(g\circ f)_x(v) &= [(g(f(x)), g\circ f\circ\alpha)] \\
&= (dg)_{f(x)}([(f(x), f\circ\alpha)]) \\
&= ((dg)_{f(x)}\circ(df)_x)(v)
\end{aligned}$$

για κάθε $v\in T_x(X)$.
(vi) Η $f\in C^\infty(X,Y)$ είναι αμφιδιαφόριση, άρα υπάρχει η $f^{-1}\in C^\infty(Y,X)$ με

$$f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

και

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_X$$

Από τις (iv),(v) έχουμε

$$d(f\circ f^{-1})_{f(x)} = d(\mathrm{id}_Y)_{f(x)}$$

και

$$d(f^{-1}\circ f)_x = d(\mathrm{id}_X)_x$$

άρα

$$d(f\circ f^{-1})_{f(x)} = (df)_x\circ(df^{-1})_{f(x)} = \mathrm{id}_{T_{f(x)}(Y)}$$

και

$$d(f^{-1}\circ f)_x = (df^{-1})_{f(x)}\circ(df)_x = \mathrm{id}_{T_x(X)}$$

Όμως η id είναι 1-1 και επί, άρα η $(df)_x$ είναι 1-1 και επί, και αφού η $(df)_x$ είναι γραμμική, η $(df)_x$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Αφού η $(df)_x$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, έπεται ότι

$$\dim T_x(X) = n = m = \dim T_{f(x)}(Y)$$

άρα οι πολλαπλότητες X, Y έχουν ίδια διάσταση όταν συνδέονται με μια αμφιδιαφόριση.

Επιπλέον, $(df)_x^{-1} = (df^{-1})_{f(x)}$.
(vii) Έχουμε τις $\overline{\phi}: T_x(X)\to\mathbb{R}^n$, $\phi: U\to\phi(U)$ και

$$(d\phi)_x : T_x(U) \underset{U\in\mathcal{T}_\mathcal{A}}{\simeq} T_x(X) \to T_{\phi(x)}(\phi(U)) \underset{\phi(U)\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}}{\simeq} T_{\phi(x)}(\mathbb{R}^n) \underset{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}}{\simeq} \mathbb{R}^n$$

Άρα, οι γραμμικές $\overline{\phi}$ και $(d\phi)_x$ έχουν κοινά πεδία ορισμού και τιμών.

Έστω $v = [(x,\alpha)]\in T_x(X)$. Τότε, $\overline{\phi}(v) = D(\phi\circ\alpha)_0(1)$ και τα v, $\overline{\phi}(v)$ έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Άρα

$$\overline{\phi}(v) = ((x_i\circ\alpha)'(0), (x_2\circ\alpha)'(0), \dots, (x_n\circ\alpha)'(0))$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}(d\phi_x)(v) &= [(\phi(x), \phi \circ \alpha)] \\ &= ((u_1 \circ \phi \circ \alpha)'(0), (u_2 \circ \phi \circ \alpha)'(0), \dots, (u_n \circ \phi \circ \alpha)'(0)) \\ &= ((x_1 \circ \alpha)'(0), (x_2 \circ \alpha)'(0), \dots, (x_n \circ \alpha)'(0))\end{aligned}$$

Τελικά, $\overline{\phi} = (d\phi)_x$. □

Παραδείγματα 2.2.1. (i) Έστω $X = M_n(\mathbb{R})$ και

$$f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \qquad (a_{ij}) = A \mapsto A^2$$

Θα υπολογίσουμε το διαφορικό της f στον A.

Η διαφορική πολλαπλότητα $M_n(\mathbb{R})$ έχει διάσταση $n \cdot n = n^2$. Για να θεωρήσουμε το διαφορικό της f πρέπει να δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμη.

Επειδή $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συνιστώσες

$$u_{ij} \circ f : M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμες, όπου οι $u_{ij} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ είναι οι προβολές.

Οπότε

$$(u_{ij} \circ f)(A) = u_{ij}(A^2)$$

όπου $A^2 = (c_{ij})$ και $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$, άρα οι

$$(u_{ij} \circ f) = c_{ij}$$

είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των a_{ij}.

Άρα, ορίζεται το

$$(df)_A : T_A(M_n(\mathbb{R})) \to T_{A^2}(M_n(\mathbb{R}))$$

και έστω $\beta \in T_A(M_n(\mathbb{R}))$.

Τότε, $\beta = [(A, \alpha)]$, όπου

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \dots & \beta_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}(t) & \dots & \beta_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

είναι καμπύλη της πολλαπλότητας $M_n(\mathbb{R})$ με $\alpha(0) = A$.

Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}(df)_A(\beta) &= (df)_A([(A, \alpha)]) \\ &= [(f(A), f \circ \alpha)] \\ &= [(A^2, f \circ \alpha)] \\ &= D(f \circ \alpha)_0(1) \\ &= (\alpha(t)^2)'(0) \\ &= \alpha(0)\alpha'(0) + \alpha'(0)\alpha(0) \\ &= AB + BA\end{aligned}$$

Άρα,

$$(df)_A(B) = AB + BA$$

(ii) Έστω $X = M_2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$ και

$$f = \det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Αν

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 3t^2 \\ 2t & 2t+1 \end{pmatrix}$$

θα υπολογίσουμε το $T_{I_2}(M_2(\mathbb{R}))$, το εφαπτόμενο διάνυσμα $B = [(I_2, \alpha)]$, καθώς και το $(df)_{I_2}(B)$.

Έχουμε $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{2^2}$, άρα

$$T_{I_2}(M_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}^{2^2} \simeq M_2(\mathbb{R})$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} [(I_2, \alpha)] &= \alpha'(0) \\ &= (D\alpha)_0(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6t \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \simeq T_{I_2}(M_2(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Για το διαφορικό, ισχύει ότι

$$f(A) = f(a_{ij}) = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

που είναι διαφορίσιμη απεικόνιση των α_{ij}. Άρα έχει έννοια το

$$(df)_{I_2} : T_{I_2}(M_2(\mathbb{R})) \to T_{f(I_2)}(\mathbb{R}) = T_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

Αν $v = [(I_2, \alpha)]$, τότε

$$\begin{aligned} (df)_{I_2}([(I_2, \alpha)] &= [(f(I_2), f \circ \alpha)] \\ &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= -18t^2 + 4t + 3|_{t=0} = 3 \end{aligned}$$

2.3 Ιακωβιανός Πίνακας

Ορισμός 2.3.1. Έστω $x \in X$. Ονομάζουμε **Ιακωβιανό πίνακα** της f στο x, και συμβολίζουμε με $J_x f$, τον $n \times m$ πίνακα που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση που δίνεται από το διαφορικό

$$(df)_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$$

Έστω δύο χάρτες (U,ϕ) της X και (V,ψ) της Y με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$ έτσι ώστε η

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

να είναι διαφορίσιμη.

Βάση του πρώτου χώρου είναι τα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$, ενώ βάση του Y είναι τα $\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(x)}$, για $i = 1,2,\ldots,n$ και $j = 1,2,\ldots,m$.

Θα δείξουμε ότι $J_x f = (f_{ij})$, με

$$f_{ij} = (df)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right)(y_j)$$

τις συντεταγμένες του $(df)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right)$ ως προς την βάση $\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(x)}$ του $T_{f(x)}(Y)$.

Αν $v \in T_x(X)$, τότε

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

και βάσει αυτού

$$(df)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right) = \sum_{i=1}^{m} \left((df)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right) \right)(y_j) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(x)}$$

Αλλά, από τις ιδιότητες του διαφορικού

$$\begin{aligned}
(df)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right)(y_j) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x (y_j \circ f) \\
&= \frac{\partial(y_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} \\
&= f_{ij}
\end{aligned}$$

Έτσι, $J_x f = (f_{ij})$.

Παρατηρήσεις 2.3.1. (i) Έχουμε $J_x(f) = J_{\phi(x)}(F)$, όπου F η τοπική παράσταση στο $x \in X$ ως προς τους προηγούμενους χάρτες.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(f_{ij}) &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right)(y_j \circ f) \right] \\
&= \left(\frac{\partial(y_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} \right) \\
&= \left(\frac{\partial(u_j \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} \right) \\
&= \left(\frac{\partial(u_j \circ F)}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} \right) \\
&= \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} \right) \\
&= J_{\phi(x)}(F)
\end{aligned}$$

(ii) Αν ϕ, ψ χάρτες όπως πριν, και $V \cap U \neq \emptyset$, τότε στο $x \in V \cap U$ έχουμε δύο χάρτες και δύο βάσεις.

Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης μεταφοράς.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο χάρτες (U,ϕ), (V,ψ) της X έτσι ώστε $x \in U \cap V$. Τότε, ο $T_x(X)$ έχει τις βάσεις $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right)_{1\leq i\leq n}$ και $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_x\right)_{1\leq j\leq n}$.

Τότε, ο πίνακας αλλαγής αυτών των δύο βάσεων, έστω P, ξέρουμε ότι δίνεται από τις συντεταγμένες των $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ ως προς την βάση $\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_x$. δηλαδή, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \tag{*}$$

θα έχουμε ότι,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x (y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_x$$

άρα,

$$P = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big|_x\right) = \left(\frac{\partial(y_j\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}\right)$$

όπου $y_j\circ\phi^{-1} = u_j\circ\psi\circ\phi^{-1} = u_j\circ(\psi\circ\phi^{-1})$, με $\psi\circ\phi^{-1}$ την απεικόνιση μεταφοράς των δύο χαρτών που θεωρήσαμε και αν

$$\left(\frac{\partial(y_j\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}\right) = \left(\frac{\partial(u_j\circ(\psi\circ\phi^{-1}))}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}\right)$$

έχουμε τον $J_{\phi(x)}(\psi\circ\phi^{-1})$.

Άρα,

$$P = J_{\phi(x)}(\psi\circ\phi^{-1})$$

Παραδείγματα 2.3.1. (i) Έστω $v = (2,0,1) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ στο $p = (1,1,1)$ και έστω $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με

$$f(x,y,z) = xy^2z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Θα υπολογίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα $(df)_p(v)$.

Α' Τρόπος: Χρησιμοποιώντας την (*), έχουμε ότι

$$v = 2\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 1\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

άρα

$$\begin{aligned} v(f) &= \ell_v(f) \\ &= \ell_v\left(2\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 1\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\right) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_p \\ &= 2(y^2z)|_p + (xy^2)|_p \\ &= 3 \end{aligned}$$

Τώρα, η f έχει τιμές στο $\mathbb{R}$, άρα ξέρουμε ότι $(df)_p(v) = v(f) = 3$, άρα το $(df)_p(v)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα με σημείο στήριξης το 1 και συντεταγμένη το 3.

Β' Τρόπος: Αν $v = [(x,\alpha)]$, τότε $(df)_p(v) = [(f(p), f\circ\alpha)]$. Άρα, αρκεί να υπολογίσουμε την α.

Η α είναι

$$\alpha(t) = \underbrace{(1,1,1)}_{p} + t\underbrace{(2,0,1)}_{v}$$

Οπότε,

$$(f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = (1+2t)(1+t) = 2t^2 + 3t + 1$$

άρα

$$(df)_p(v) = [(1, f \circ \alpha)] = (f \circ \alpha)'(0) = 3$$

(ii) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και (U, ϕ) χάρτης του $\mathbb{R}^2$ με

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

και

$$\phi(x,y) = (r,\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Θα υπολογίσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα $\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_p$ με $p = (x_0, y_0) \in U$.

Ξέρουμε ότι

$$\phi^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

και έστω ότι $\phi(p) = (r_0, \theta_0)$. Τότε,

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p = [(p, \phi^{-1}(\phi(p) + t(1,0))]$$

άρα

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \phi^{-1}((r_0,\theta_0) + (t,0)) \\
&= \phi^{-1}((r_0+t, \theta_0)) \\
&= ((r_0+t)\cos\theta_0, (r_0+t)\sin\theta_0)
\end{aligned}$$

Και έτσι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p &= [(p, ((r_0+t)\cos\theta_0, (r_0+t)\sin\theta_0))] \\
&= (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) \\
&= (\cos\theta_0, \sin\theta_0)
\end{aligned}$$

οπότε η έκφραση του ως προς τη βάση $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ που αντιστοιχεί στο χάρτη $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ είναι

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p = \cos\theta_0 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \sin\theta_0 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

Εντελώς ανάλογα, έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_p = \phi^{-1}(e_2) = [(\phi(p), \beta)]$$

και προκύπτει η

$$\beta(t) = (r_0\cos(\theta_0+t), r_0\sin(\theta_0+t))$$

Τελικά,

$$\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_p = -r_0\sin\theta_0 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + r_0\cos\theta_0 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

2.4 Εφαπτόμενη Δέσμη

Ορισμός 2.4.1. Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Συμβολίζουμε

$$\mathcal{T}(X) := \bigsqcup_{x\in X} T_x(X)$$

Το σύνολο $\mathcal{T}(X)$ ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** της X.

Εφόσον, το $\mathcal{T}(X)$ αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της X στα διάφορα σημεία της, για να ξεχωρίσουμε αυτά τα διανύσματα θα τα συμβολίζουμε με (x, v) θεωρώντας κάθε φορά το σημείο στήριξης x του εφαπτόμενου διανύσματος v που έχουμε θεωρήσει.

Έτσι,

$$\mathcal{T}(X) = \{(x, v) : x \in X, v \in T_x(X)\}$$

Δείχνουμε, τώρα, ότι το σύνολο $\mathcal{T}(X)$ γίνεται διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

Είναι φανερό ότι ορίζεται καλά η απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{T}(X) \to X, \qquad (x, v) \mapsto x$$

Η π ονομάζεται **απεικόνιση προβολής** της $\mathcal{T}(X)$ στην X.

Χρησιμοποιώντας τους χάρτες της πολλαπλότητας X θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε χάρτες στο σύνολο $\mathcal{T}(X)$.

Αν (U, ϕ) είναι χάρτης της X, θεωρούμε το σύνολο

$$\pi^{-1}(U) = \{(x, v) \in \mathcal{T}(X) : \pi((x, v)) = x \in U\}$$

Ιδιαίτερα, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} T_x(X)$, όπου $\pi^{-1}(\{x\}) = T_x(X)$, και επιπλέον, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} \pi^{-1}(\{x\})$.

Στη συνέχεια, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\alpha : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}, \qquad (x, v) \mapsto (\phi(x), \overline{\phi}(v)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Μένει να δείξουμε ότι ο $(\pi^{-1}(U), \alpha)$ είναι χάρτης της $\mathcal{T}(X)$.

Έχουμε ότι $\alpha(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^{2n}$, και η α είναι 1-1, εφόσον οι ϕ, $\overline{\phi}$ είναι 1-1.

Θεωρούμε, τώρα, την οικογένεια

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}(X)} = \{(\pi^{-1}(U), \alpha) : (U, \phi) \in \mathcal{A}'_X\}$$

Ο $\mathcal{A}_{\mathcal{T}(X)}$ είναι ένας άτλαντας. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\bigcup_U \pi^{-1}(U) &= \bigcup_U \left(\bigcup_{x\in U} \pi^{-1}(\{x\}) \right) \\
&= \bigcup_{x\in X} \pi^{-1}(\{x\}) \\
&= \bigcup_{x\in X} T_x(X) \\
&= \mathcal{T}(X)
\end{aligned}$$

Θεωρούμε δύο χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) της X με $U \cap V \neq \emptyset$ και παίρνουμε τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi^{-1}(U), \alpha)$, $(\pi^{-1}(V), \beta)$ της $\mathcal{T}(X)$, όπου $\beta((x, v)) = (\psi(x), \overline{\psi}(v))$.

Τότε, $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ και τα

$$\alpha(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

και

$$\beta(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτά στον $\mathbb{R}^{2n}$.

Επιπλέον,

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

και

$$\begin{aligned}(\phi(x), \overline{\phi}(x)) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (x, v) \xrightarrow{\beta} (\psi(x), \overline{\psi}(v)) &= \Big((\psi \circ \phi^{-1}((\phi(x)), (\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1})(\overline{\phi}(v))\Big) \\ &= \big((\psi \circ \phi^{-1}) \circ \pi_1(\phi(x), \overline{\phi}(v)), D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x), \overline{\phi}(v)\big)\end{aligned}$$

όπου η $\pi_1 = \mathrm{pr}_1|_{\phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n}$, με $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, είναι διαφορίσιμη ως περιορισμός διαφορίσιμης συνάρτησης σε ανοιχτό υποσύνολο.

Ακόμα, $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1} = D(\psi \circ \phi)_{\phi(x)}$, άρα

$$(\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1})(v) = D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}(\overline{\phi}(v)) = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x), \overline{\phi}(v))$$

Επομένως, η $\beta \circ \alpha^{-1}$ έχει συντεταγμένες που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των $(\phi(x), \overline{\phi}(v))$, άρα είναι διαφορίσιμη και ο άτλαντας $\mathcal{A}_{\mathcal{T}(X)}$ είναι διαφορικός.

Αποδείξαμε, λοιπόν, το εξής

Θεώρημα 2.4.1. *Η εφαπτόμενη δέσμη $\mathcal{T}(X)$, μιας διαφορικής πολλαπλότητας X διάστασης n, είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.*

Παρατήρηση 2.4.1. Έστω (U, ϕ) χάρτης μιας διαφορικής πολλαπλότητας X.

Τότε,

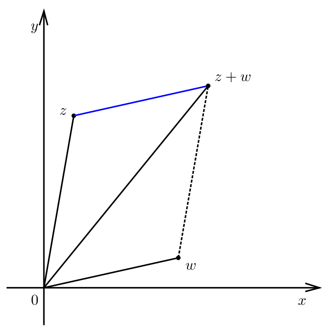
$$\begin{aligned}\mathcal{T}(U) &= \bigcup_{x \in U} T_x(U) \\ &= \bigcup_{x \in U} \pi^{-1}(\{x\}) \\ &= \pi^{-1}(U) \simeq \alpha(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n \simeq U \times \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Ανάλογα, αν $X = \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

και για $n = 2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^4 &= \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\} \\ &= \{\text{ευθύγραμμα τμήματα με αρχή το} \quad z \quad \text{και πέρας το} \quad z + w\}\end{aligned}$$



Πρόταση 2.4.1. *Η απεικόνιση προβολής $\pi : \mathcal{T}(X) \to X$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Αν (U, ϕ) χάρτης της X και $(\pi^{-1}(U), \alpha)$ χάρτης της $\mathcal{T}(X)$, τότε $\pi(\pi^{-1}(U)) \subseteq U$, άρα η αντίστοιχη τοπική παράσταση της π είναι

$$\phi \circ \pi \circ \alpha^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^n \to \phi(U)$$

$$(\phi(x), \overline{\phi}(v)) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (x, v) \xrightarrow{\pi} x \xrightarrow{\phi} \phi(x) = \pi_1((\phi(x), \overline{\phi}(v))$$

και είναι διαφορίσιμη. □

2.5 Ολικό Διαφορικό

Ορισμός 2.5.1. Ονομάζουμε **ολικό διαφορικό** μιας $f \in C^\infty(X, Y)$, και συμβολίζουμε με df, την απεικόνιση

$$df : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$$

$$(x, v) \mapsto (df)(v) = (f(x), (df)_x(v))$$

Πρόταση 2.5.1. *Η df είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι διαφορίσιμη, π.χ. στο $x \in X$, υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) της X με $x \in U$ και (V, ψ) της Y με $f(U) \subseteq V$ έτσι ώστε η

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

να είναι διαφορίσιμη.

Θεωρώντας τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi_X^{-1}(U), \alpha)$ της $\mathcal{T}(X)$ και $(\pi_Y^{-1}(V), \beta)$ της $\mathcal{T}(Y)$, έχουμε $(df)(\pi_X^{-1}(U)) \subseteq \pi_Y^{-1}(V)$, οπότε η αντίστοιχη τοπική παράσταση στο $(x, v) \in \pi_X^{-1}(U)$ της df είναι

$$\beta \circ df \circ \alpha^{-1} : \alpha(\pi_X^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n \to \beta(\pi_Y^{-1}(V)) = \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

με

$$\begin{aligned}(\phi(x), \overline{\phi}(v)) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (x, v) \xrightarrow{df} (f(x), (df)_x(v)) &\xrightarrow{\beta} (\psi(f(x)), \overline{\psi}((df)_x(v))) \\ &= \left((\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)), (\overline{\psi} \circ (df)_x \circ \overline{\phi}^{-1})(\overline{\phi}(v))\right) \\ &= \big((F \circ \pi_1)(\phi(x), \overline{\phi}(v)), (DF)_{\phi(x)}(\overline{\phi}(v))\big)\end{aligned}$$

Οι $F \circ \pi_1$ και DF είναι διαφορίσιμες στο $(\phi(x), \overline{\phi}(v))$ και $\overline{\phi}(v)$ αντίστοιχα, άρα η $\beta \circ df \circ \alpha^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. □

2.6 Ασκήσεις

1. Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και $(x, y) \in X \times Y$. Να αποδείξετε ότι

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_x(X) \times T_y(Y)$$

μέσω ενός γραμμικού ισομορφισμού.

2. (i) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) := (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$$

ορίζει μια καμπύλη στη σφαίρα S^2 κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 2.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα της καμπύλης αυτής δίνεται ως τομή της προηγούμενης σφαίρας με τον κύλινδρο, που έχει βάση κύκλο του επιπέδου x, y με κέντρο το σημείο $(1, 0, 0)$ και ακτίνα 1.

3. Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και (U, ϕ) ο χάρτης του $\mathbb{R}^2$ που έχει οριστεί στην Άσκηση 1.5. Να βρεθεί καμπύλη του $\mathbb{R}^2$, που να υλοποιεί το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$v = 2\frac{\partial}{\partial x_1} - 3\frac{\partial}{\partial x_2}$$

του $\mathbb{R}^2$ στο $p = (1/2, 0)$ με x_1, x_2 τις συνιστώσες συναρτήσεις του παραπάνω χάρτη (U, ϕ).

4. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $(U, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(V, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ χάρτες της X με $x \in U \cap V$. Τότε, αν

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_x \in T_x(X)$$

να αποδειχθεί ότι

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial(x_i \circ \psi^{-1})}{\partial u_j}\Big|_{\psi(x)}$$

και

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial(y_j \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}$$

5. Έστω $X = S^2$, $p = (0, 1/2, -\sqrt{3}/2) \in S^2$ και $v \in T_p(S^2)$ με $v = [(p, \alpha)]$ όπου

$$\alpha(t) = (-1/2\sin t, 1/2\cos t, -\sqrt{3}/2), \quad t \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του v ως προς την βάση $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $i = 1, 2$ του $T_p(S^2)$, όταν (x_1, x_2) είναι οι συνιστώσες του χάρτη (U_z^-, ϕ_z^-).

6. Έστω $X = \mathbb{R}^2$. Δίνονται τα ζεύγη $(\mathbb{R}^2, \phi)$, $(\mathbb{R}^2, \psi)$ με

$$\phi(x, y) := (x, y - x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

και

$$\psi(x, y) := (x + 1/2y, x - 1/2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(i) Να αποδειχθεί ότι τα προηγούμενα ζεύγη αποτελούν χάρτες της συνήθους διαφορικής δομή του $\mathbb{R}^2$.

(ii) Να υπολογισθεί η $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1}$.

(iii) Αν (y_1, y_2) είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \psi)$, και

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy - 2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

να υπολογισθεί ο Ιακωβιανός πίνακας της f στο $p = (0, 1/2)$.

7. Έστω $f : X \to Y$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν για ένα $x_0 \in X$, το διαφορικό $df_x : T_{x_0}(X) \to T_{f(x_0)}(Y)$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων, τότε η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο x_0.

8. Έστω $f : X \times Y \to Z$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, μετά την ταύτιση $T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_x(X) \times T_y(Y)$, ισχύει
$$df_{(x,y)}(u, v) = (df_y)_x(u) + (df_x)_y(v), \quad \forall (u, v) \in T_x(X) \times T_y(Y)$$

9. Έστω $f : Z \to X \times Y$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $f_M = p_M \circ f$ και $f_N = p_N \circ f$, να αποδειχθεί ότι, μετά την ταύτιση $T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_x(X) \times T_y(Y)$, ισχύει
$$df_p = ((df_M)_p, (df_N)_p)$$

10. Αν $f : X \to Y$ και $g : X \to Z$ διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε η απεικόνιση
$$(f, g) : X \to Y \times Z, \quad x \mapsto (f(x), g(x))$$
είναι διαφορίσιμη και $d(f, g)_x = (df_x, dg_x)$.

11. Αν $f : X \to Y$ και $f' : X' \to Y'$ διαφορίσιμες, τότε για κάθε $(x, x') \in X \times X'$ είναι
$$d(f \times f')_{(x,x')} = df_x \times df'_{x'}$$

12. Έστω
$$f : \mathbb{R} \to S^1, \quad t \mapsto (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$$
Αν $s = 1/8$, να δείξετε ότι η $df_s : T_s(\mathbb{R}) \to T_{f(s)}(S^1)$ είναι 1-1. Εξετάστε, επίσης, αν η df_s είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

13. Έστω $x \in X$ και (U, ϕ), (V, ψ) δύο χάρτες της X με $x \in U \cap V$ και αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $(x_i)_{1 \le i \le n}$ και $(y_j)_{1 \le j \le n}$.

   (i) Έστω $v \in T_x(X)$. Αποδείξτε ότι
$$v(x_i) = \sum_{j=1}^{n} v(y_j) \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big|_x$$
   και
$$v(y_j) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big|_x$$

   (ii) Αποδείξτε ότι
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big|_x \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_x$$
   και
$$\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big|_x \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

14. Αν η X είναι Hausdorff, τότε και η $\mathcal{T}(X)$ είναι Hausdorff.

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικά Πεδία

3.1 Βασικές Έννοιες

Έστω X μια n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $\mathcal{T}(X)$ η αντίστοιχη εφαπτόμενη δέσμη.

Ορισμός 3.1.1. Μια απεικόνιση

$$\xi : X \to \mathcal{T}(X), \qquad x \mapsto \xi(x) = \xi_x = (x, \xi_x) \in \mathcal{T}(X)$$

ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο** της πολλαπλότητας X αν $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \mathcal{T}(X) \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα 3.1.1. (i) Έστω (U, ϕ) χάρτης της X με $x \in U$. Τότε, οι απεικονίσεις

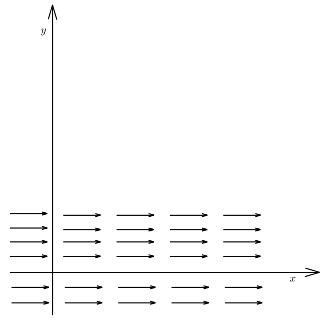
$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to \mathcal{T}(U) \simeq \mathcal{T}(X), \quad x \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

είναι διανυσματικά πεδία της πολλαπλότητας U.

(ii) Αν $X = \mathbb{R}^2$, θεωρούμε τα $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$. Για $i = 1$, έχουμε

$$\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_{(s,t)} = \overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^2}^{-1}(e_1), \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

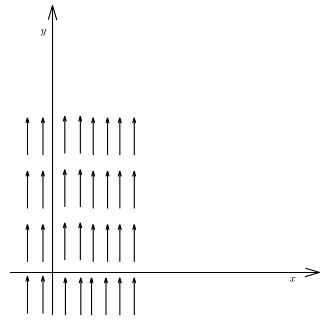
Άρα $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_{(s,t)} = (1, 0)$ για κάθε $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, και το $\dfrac{\partial}{\partial u_1}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο.



Ανάλογα,

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_{(s,t)} = \overline{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^2}^{-1}(e_2), \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

και άρα το διανυσματικό πεδίο $\dfrac{\partial}{\partial u_2}$ παριστάνεται γραφικά

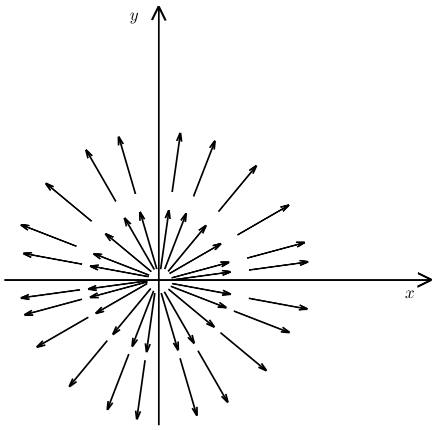


(iii) Έστω

$$\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^4$$
$$(s,t) \mapsto s\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{(s,t)} + t\frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_{(s,t)}$$

δηλαδή το $\xi_{(s,t)}$ έχει συντεταγμένες τα $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Τότε, το ξ είναι ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ και γραφικά μοιάζει με το εξής



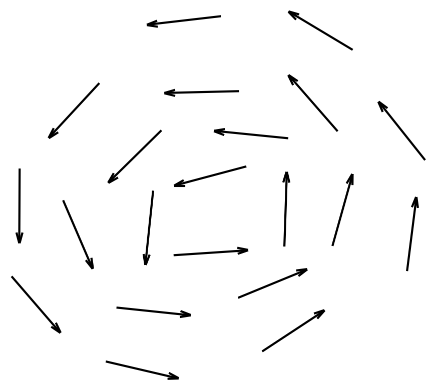
(iv) Έστω

$$\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^4$$

$$(s,t) \mapsto -t\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{(s,t)} + s\frac{\partial}{\partial u_2}\Big|_{(s,t)}$$

δηλαδή $\xi_{(s,t)} = ((s,t),(-t,s))$.

Τότε, το ξ είναι ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ και γραφικά μοιάζει με το εξής



Παρατήρηση 3.1.1. Έστω $\xi : X \to \mathcal{T}(X)$ διανυσματικό πεδίο. Τότε $\xi_x \in T_x(X)$, άρα

$$\xi_x = \sum_{i=1}^{n} \xi_x(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \tag{*}$$

για κάποια $\xi_x(x_i) \in \mathbb{R}$ και με $x \in U$, όπου $(U, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ χάρτης της X.

Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό. Ορίζουμε

$$\xi_i = \xi(x_i) : U \to \mathbb{R}, \qquad \xi_i(y) := \xi_y(x_i), \quad \forall y \in U$$

Οπότε, η (*) γίνεται

$$\xi(x) = \xi_x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x), \qquad \forall x \in U$$

Έτσι

$$\xi|_U = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Αυτή η έκφραση ονομάζεται **τοπική έκφραση** του ξ στο U και τα $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ονομάζονται **βασικά διανυσματικά πεδία** της πολλαπλότητας X.

Ορισμός 3.1.2. Οι συναρτήσεις $\xi_i : U \to \mathbb{R}$ ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** του ξ.

Εξ αφορμής του ορισμού των $\xi_i = \xi(x_i)$, ορίζονται και οι $\xi(f)$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$.

Πράγματι, έχουμε ένα χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$ και έναν χάρτη (A, α) τέτοιο ώστε $x \in A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Τότε, ορίζεται η

$$\xi(f) : A \cap U \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \xi(f)(x) = \xi_x(f)$$

Για να είναι το ξ διαφορίσιμο στο x, πρέπει να υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) της X με $x \in U$, χάρτης $(\pi^{-1}(U'), \alpha')$ της $\mathcal{T}(X)$, που να πρόερχεται από έναν (U', ϕ'), τέτοιο ώστε $\xi(U) \subseteq \pi^{-1}(U')$.

Θεωρώντας, ως (U', ϕ') τον ίδιο τον (U, ϕ), έχουμε $\xi(U) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Άρα, πηγαίνοντας στην αντίστοιχη τοπική παράσταση του ξ στο x, έχουμε

$$\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \alpha(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

$$\phi(x) \mapsto (\alpha \circ \xi)_{(x)} = \alpha(\xi_x) = (\phi(x), \overline{\phi}(\xi_x))$$

Τα ξ_x και $\overline{\phi}(\xi_x)$ έχουν τις ίδιες συντεταγμένες, όπου, όπως είδαμε

$$\xi_x = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

άρα

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(\xi_x) &= (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x)) \\
&= ((\xi_1 \circ \phi^{-1})(\phi(x)), (\xi_2 \circ \phi^{-1})(\phi(x)), \dots, (\xi_n \circ \phi^{-1})(\phi(x))) \\
&= \big((\xi_i \circ \phi^{-1})(\phi(x))\big)_{1 \leq i \leq n}
\end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε ότι

$$(\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\Big|_{\phi(U)}(\phi(x)), \big((\xi_i \circ \phi^{-1})(\phi(x))\big)_{1 \leq i \leq n}\right), \quad \forall \phi(x) \in \phi(U)$$

Άρα

$$\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1} = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\Big|_{\phi(U)}, (\xi_i \circ \phi^{-1})_{1 \leq i \leq n}\right), \quad \forall \phi(x) \in \phi(U) \tag{**}$$

και οι $\xi_x : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες ανν οι $\xi_i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες.

Άρα, η (**) μας λέει ότι η τοπική παράσταση $\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη ανν οι συνιστώσες συναρτήσεις $\xi_i : U \to \mathbb{R}$ του ξ είναι διαφορίσιμες, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Θα εξετάσουμε, αν μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη διαφορισιμότητα ενός διανυσματικού πεδίου ξ και με άλλο τρόπο.

Είδαμε ότι

$$\xi|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{*}$$

και ορίζονται τα $\xi(f)$, για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$, με $[\xi(f)](x) := \xi_x(f)$.

Οπότε εφαρμόζουμε την (*) σε μια $f \in C_x^\infty(X)$ και στη συνέχεια στο x. Τότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
[\xi(f)](x) &= \xi_x(f) \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε

$$\xi(f)(x) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i} \circ \phi\right)\right)(x), \quad \forall x$$

και άρα

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i} \circ \phi\right)$$

και τα ξ_i είναι διαφορίσιμα για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ ανν το ξ είναι διαφορίσιμο.

Άρα, αν το ξ είναι διαφορίσιμο, τότε και το $\xi(f)$ είναι διαφορίσιμο για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$.

Αντίστροφα, αν $\xi(f)$ διαφορίσιμη για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$, τότε για x_i στη θέση των f, οι $\xi(x_i) = \xi_i$ είναι διαφορίσιμες για κάθε i, άρα το ξ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο.

Έτσι, έχουμε δείξει το εξής κριτήριο διαφορισιμότητας διανυσματικών πεδίων.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $\xi : X \to \mathcal{T}(X)$ ένα διανυσματικό πεδίο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Οι συνιστώσες συναρτήσεις ξ_i του ξ είναι διαφορίσιμες για κάθε χάρτη (U, ϕ) που περιέχει το σημείο x στο οποίο εξετάζεται η διαφορισιμότητα του ξ.

(iii) Για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$, έχουμε ότι $\xi(f) \in C_x^\infty(X)$.

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(X)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της πολλαπλότητας X.

Παρατηρήσεις 3.1.1. (i) Το σύνολο $\mathfrak{X}(X)$ είναι ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος.

Πράγματι, αν $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\lambda\xi + \eta : X \to \mathcal{T}(X)$$

$$x \mapsto (\lambda\xi + \eta)(x) := \lambda\xi_x + \eta_x \in T_x(X) \subseteq \mathcal{T}(X)$$

Η $\lambda\xi + \eta$ είναι διαφορίσιμη ανν οι $(\lambda\xi + \eta)_i$ είναι διαφορίσιμες για κάθε i, αλλά οι $(\lambda\xi + \eta)_i = \lambda\xi_i + \eta_i$ είναι διαφορίσιμες, άρα $\lambda\xi + \eta \in \mathfrak{X}(X)$.

(ii) Το $\mathfrak{X}(X)$ είναι ένα $C^\infty(X)$-πρότυπο.

Πράγματι, αφού είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος, αρκεί να ορίσουμε την εξωτερική πράξη

$$C^\infty(X) \times \mathfrak{X}(X) \to \mathfrak{X}(X)$$

$$(f, \xi) \mapsto f\xi$$

με

$$(f\xi)(x) := f(x) \cdot \xi_x \in T_x(X) \subseteq \mathcal{T}(X)$$

Η $f\xi$ είναι διαφορίσιμη, αφού αν $x \in U$, θεωρώντας ένα χάρτη $(U, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}(f\xi)_i(x) &= [(f\xi)(x)](x_i)\\ &= (f(x)\xi_x)(x_i)\\ &= f(x)\xi_x(x_i) = (f\xi_i)(x), \quad \forall x \in U\end{aligned}$$

άρα η $(f\xi)_i = f\xi_i$ είναι διαφορίσιμη, αφού οι f, ξ_i είναι διαφορίσιμες.

(iii) Εφόσον κάθε ξ αντιστοιχεί σε εφαπτόμενα διανύσματα και αυτά είναι σημειακές παραγωγίσεις, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε κατά πόσο ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ είναι διαφορικός τελεστής, με την έννοια ότι θεωρούμενη ως $\xi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ είναι γραμμική και πληροί τον κανόνα του Leibniz

$$\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(X)$$

Αυτό ισχύει, σύμφωνα με τον ορισμό του $\xi(f)$, $[\xi(f)](x) := \xi_x(f)$, και του ότι το ξ_x είναι μια σημειακή παραγώγιση.

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi(\lambda f + g) &= \lambda\xi(f) + \xi(g) \\ \xi(f) &= \xi(f)g + f\xi(g) \end{aligned}$$

Άρα, κάθε διαφορικό διανυσματικό πεδίο μπορούμε να το δούμε ως μια παραγώγιση ανν είναι ένας διαφορικός τελεστής $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$.

(iv) Ορίζεται το γινόμενο δύο διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων ως διανυσματικό πεδίο;

Αν ξ, $\eta \in \mathfrak{X}(X)$ για να είναι το $\xi\eta$ επίσης διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο θα πρέπει να είναι διαφορικός τελεστής όπως είδαμε.

Δηλαδή, λόγου χάρη, θα πρέπει το $\xi\eta$ να πληροί τον κανόνα Leibniz.

Ας δούμε τι γίνεται

$$\begin{aligned} (\xi\eta)(fg) &= \xi(\eta(fg)) \\ &= \xi(\eta(f)g + f\eta(g)) \\ &= \xi(\eta(f)g) + \xi(f\eta(g)) \\ &= \xi(\eta(f))g + \eta(f)\xi(g) + \xi(f)\eta(g) + f\xi(\eta(g)) \\ &= (\xi\eta)(f)g + f(\xi\eta)(g) + \eta(f)\xi(g) + \xi(f)\eta(g) \end{aligned} \tag{*}$$

Αν το $\xi\eta$ ήταν παραγώγιση θα είχαμε στη προηγούμενη ισότητα μόνο τους δύο πρώτους όρους. Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$(\eta\xi)(fg) = (\eta\xi)(f)g + f(\eta\xi)(g) + \eta(f)\xi(g) + \xi(f)\eta(g) \tag{**}$$

όπου πάλι αν το $\eta\xi$ ήταν παραγώγιση θα είχαμε μόνο τους δύο πρώτους όρους.

Επομένως, το $\xi\eta$ δεν ορίζεται. Όμως, αν αφαιρέσουμε τις (*) και (**) κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\xi\eta - \eta\xi)(fg) &= (\xi\eta)(fg) - (\eta\xi)(fg) \\ &= (\xi\eta)(f)g + f(\xi\eta)(g) - (\eta\xi)(f)g - f(\eta\xi)(g) \\ &= (\xi\eta - \eta\xi)(f)g + f(\xi\eta - \eta\xi)(g) \end{aligned}$$

δηλαδή η διαφορά $\xi\eta - \eta\xi$ πληροί τον κανόνα του Leibniz και εύκολα βλέπουμε ότι είναι και γραμμική.

Έτσι, η διαφορά $\xi\eta - \eta\xi$ είναι ενας διαφορικός τελεστής του $C^\infty(X)$.

Ορισμός 3.1.3. Για κάθε ξ,$\eta \in \mathfrak{X}(X)$ ορίζεται η **αγκύλη Lie**, $[\xi, \eta]$, ως εξής

$$[\xi, \eta] := \xi\eta - \eta\xi \in \mathfrak{X}(X)$$

Η αγκύλη Lie, $[\,,\,]$, ορίζει στην ουσία έναν πολλαπλασιασμό (όχι προσεταιριστικό) στο $\mathfrak{X}(X)$ με τον οποίο το $\mathfrak{X}(X)$ γίνεται άλγεβρα Lie.

Έτσι, αν ξ, $\eta \in \mathfrak{X}(X)$, τότε ορίζεται ένα καινούριο διανυσματικό πεδίο

$$[\xi, \eta] : X \to \mathcal{T}(X)$$

έτσι ώστε για κάθε $f \in C_x^\infty(X)$ και για κάθε $x \in X$

$$\begin{aligned}[\xi,\eta](f)(x) &= [\xi,\eta]_x(f)\\ &= \xi_x(\eta(f)) - \eta_x(\xi(f))\\ &= [\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))](x)\end{aligned}$$

άρα

$$[\xi,\eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$$

Αφού, τώρα, τα ξ, η είναι διαφορίσιμα, τα $\xi(f)$, $\eta(f)$ είναι τοπικά διαφορίσιμα, άρα και τα $\xi(\eta(f))$, $\eta(\xi(f))$ είναι διαφορίσιμα.

Τελικά, το $[\xi,\eta]$ είναι διαφορίσιμο.

Αν θέσουμε στη θέση της f τις συνιστώσες συναρτήσεις x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ενός χάρτη (U,ϕ) της X με $x \in U$, τότε

$$\begin{aligned}[\xi,\eta]_i &= [\xi,\eta](x_i)\\ &= \xi(\eta(x_i)) - \eta(\xi(x_i))\\ &= \xi(\eta_i) - \eta(\xi_i)\end{aligned}$$

Πρόταση 3.1.1. *Έστω ξ, η, $\zeta \in \mathfrak{X}(X)$, f, $g \in C_x^\infty(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$, *άρα* $[\xi,\xi] = 0$.

(ii) $[\lambda\xi + \eta,\zeta] = \lambda[\xi,\zeta] + [\eta,\zeta]$. *Το ίδιο συμβαίνει για το $[\xi,\lambda\eta+\zeta]$, δηλαδή το γινόμενο Lie είναι μια διγραμμική απεικόνιση.*

(iii) $[f\xi, g\eta] = fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi$

(iv) $[[\xi,\eta],\zeta] + [[\eta,\zeta],\xi] + [[\zeta,\xi],\eta] = 0$

Από την πρόταση αυτή, προκύπτει ότι ο $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος $\mathfrak{X}(X)$ εφοδιασμένος με το γινόμενο Lie είναι μια (μη-προσεταιριστική) άλγεβρα Lie.

Παρατήρηση 3.1.2. Έστω $\mathcal{D}(X)$ όλες οι παραγωγίσεις (διαφορικοί τελεστές) της X. Τότε, ο $\mathcal{D}(X)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος και ισχύει ότι $\mathfrak{X}(X) \simeq \mathcal{D}(X)$ ως προς ένα γραμμικό ισομορφισμό.

Αν $\delta \in \mathcal{D}(X)$, τότε

$$\delta : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$$

$$f \mapsto \delta(f), \quad \delta(f)(x) = \delta_x(f)$$

όπου $\delta_x \in D_x(X)$ και όπως γνωρίζουμε $T_x(X) \simeq D_x(X)$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\theta : \mathcal{D}(X) \to \mathfrak{X}(X)$$

$$\delta \mapsto \tilde{\delta}, \quad \tilde{\delta}(x) := \delta_x$$

Εύκολα προκύπτει ότι η θ είναι γραμμική και 1-1. Το επί ήδη το έχουμε δείξει, εφόσον αποδείξαμε ότι κάθε ξ είναι παραγώγιση.

Παραδείγματα 3.1.2. (i) Αν X μια n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $(U, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ χάρτης της X, τότε τα βασικά διανυσματικά πεδία $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ της X είναι διαφορίσιμα.

Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to \mathcal{T}(U) \simeq \mathcal{T}(X)$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x_j)}{\partial x_i}\Big|_x &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x (x_j)\\ &= \frac{\partial(x_j \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}\\ &= \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)}\\ &= \delta_{ij}|_{\phi(x)}\end{aligned}$$

Άρα $\dfrac{\partial(x_j)}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, όπου το δ του Kronecker είναι διαφορίσιμη ως σταθερή.

Συνεπώς, τα $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ είναι διαφορίσιμα.

(ii) Ισχύει ότι $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι 0. Έχουμε

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](x_\ell) = \frac{\partial^2(x_\ell)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2(x_\ell)}{\partial x_j \partial x_i}$$

και εφαρμόζοντας σε ένα $x \in U$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](x_\ell)(x) = \frac{\partial^2(u_\ell)}{\partial u_i \partial u_j}\Big|_{\phi(x)} - \frac{\partial^2(u_\ell)}{\partial u_j \partial u_i}\Big|_{\phi(x)} = 0$$

Άρα οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι 0, δηλαδή

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(x_\ell)}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(x_\ell)}{\partial x_i}\right)$$

και έτσι

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$$

(iii) Έστω

$$\xi = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}(X)$$

και

$$\eta = -x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}(X)$$

Θα υπολογίσουμε το $[\xi, \eta]$.

Αρκεί να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του $[\xi, \eta]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}[\xi, \eta]_1 &= [\xi, \eta](x_1)\\ &= \xi(\eta(x_1)) - \eta(\xi(x_1))\\ &= \xi(\eta_1) - \eta(\xi_1)\\ &= \left(2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(-x_1^2) - \left(-x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) 2x_1\\ &= -4x_1^2 - (-2x_1^2)\\ &= -2x_1^2\end{aligned}$$

και ανάλογα

$$[\xi,\eta]_2 = 3x_2^2$$

Τελικά,

$$[\xi,\eta] = -2x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

3.2 Διανυσματικά Πεδία κατά μήκος μιας Απεικόνισης

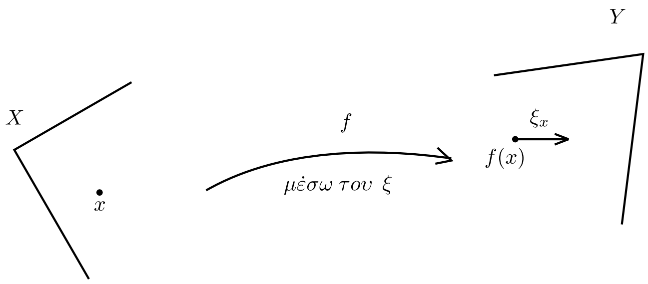
Ορισμός 3.2.1. Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων n και m αντίστοιχα και $f \in C^\infty(X,Y)$. Μια απεικόνιση $\xi : X \to \mathcal{T}(Y)$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, αν το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{T}(Y) \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

ανν $\pi_Y \circ \xi = f$, δηλαδή $\pi_Y(\xi_x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$ ανν $\xi_x \in T_{f(x)}(Y)$ για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα 3.2.1. Είναι φανερό ότι κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του X είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $\mathrm{id}_X : X \to X$.

Αν, λοιπόν, έχουμε ένα $\xi : X \to \mathcal{T}(Y)$ κατά μήκος της f, τότε



Αφού $\xi_x \in T_{f(x)}(Y)$, αν (U,ϕ) χάρτης της X με $x \in U$ και (V,ψ) χάρτης της Y με $f(U) \subseteq V$, τότε

$$\xi_x = \sum_{j=1}^{n} \xi_x(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(x)} \tag{*}$$

Η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.2.2. Οι συναρτήσεις

$$\xi_j = \xi(y_j) : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [(\xi(y_j)](x) := \xi_x(y_j)$$

ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** του $\xi : X \to \mathcal{T}(Y)$.

Έτσι, η (*) γράφεται

$$\xi_x = \left[\sum_{j=1}^{n} \xi(y_j)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\circ f\right)\right](x), \quad \forall x \in U \tag{**}$$

Άρα θέτοντας $\dfrac{\partial}{\partial y_j} \circ f = \dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big|_f$ έχουμε ότι το $\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big|_f$ είναι επίσης ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y_j}|_f"'] & f(U) \subseteq V \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial y_j}"] \\ & \mathcal{T}(Y) \end{tikzcd}$$

και η (**) γίνεται

$$\xi|_U = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_f$$

Για αυτό το λόγο τα $\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big|_f$ ονομάζονται **βασικά διανυσματικά πεδία** κατά μήκος της f.

Έχοντας ορίσει τις $\xi(y_j)$ με $y_j \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, κατά ανάλογο τρόπο ορίζουμε τις

$$\xi(g) : U \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto [\xi(g)](x) := \xi_x(g), \quad \forall g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$$

Έτσι, ανάλογα με το κριτήριο διαφορισιμότητας ενος διανυσματικού πεδίου της X, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο για τη διαφορισιμότητα διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας $f \in C^\infty(X,Y)$.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $\xi : X \to \mathcal{T}(Y)$ διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας $f \in C^\infty(X,Y)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο στο x.

(ii) Τα $\xi(y_j) : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμα στο x.

(iii) Για κάθε $g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, ισχύει $\xi(g) \in C^\infty_{f(x)}(Y)$.

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(f)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος μιας $f \in C^\infty(X,Y)$.

Παραδείγματα 3.2.1. (i) Έστω $f \in C^\infty(X,Y)$ και $\eta \in \mathfrak{X}(Y)$. Τότε, $\eta \circ f \in \mathfrak{X}(f)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta \circ f"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ & \mathcal{T}(Y) \end{tikzcd}$$

Αν $x \in X$, τότε $(\eta \circ f)(x) = \eta(f(x)) = \eta_{f(x)} \in T_{f(x)}(Y)$ και το $\eta \circ f$ είναι διαφορίσιμο ως σύνθεση διαφορίσιμων. Έτσι, $\eta \circ f \in \mathfrak{X}(f)$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} [(\eta \circ f)(y_j)](x) &= \eta_{f(x)}(y_j) \\ &= [\eta(y_j)](f(x)) \\ &= \eta_i(f(x)) \\ &= (\eta_i \circ f)(x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι

$$(\eta \circ f)(y_j) : U \to \mathbb{R}$$

είναι $(\eta \circ f)(y_j) = \eta_j \circ f$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Έστω $f \in C^\infty(X, Y)$ και $\xi \in \mathfrak{X}(X)$. Τότε, $df \circ \xi \in \mathfrak{X}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(X) \arrow[r, "df"] & \mathcal{T}(Y) \\
X \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "df \circ \xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Αν $x \in X$, τότε $(df \circ \xi)(x) = (df)_x(\xi_x) \in T_{f(x)}(Y)$ και το $df \circ \xi$ είναι διαφορίσιμο ως σύνθεση διαφορίσιμων. Έτσι, $df \circ \xi \in \mathfrak{X}(f)$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
[(df \circ \xi)(y_j)](x) &= (df \circ \xi)(x)(y_j) \\
&= (df)_x(\xi_x)(y_j) \\
&= \xi_x(y_j \circ f) \\
&= [\xi(y_j \circ f)](x)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι

$$(df \circ \xi)(y_j) : U \to \mathbb{R}$$

είναι $(df \circ \xi)(y_j) = \xi(y_j \circ f)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Θεωρούμε στη θέση της f μια καμπύλη του X. Έστω $\alpha \in C(X, x)$ και (U, f) χάρτης της X με $x \in U$ και $\alpha(I) \subseteq U$ με $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Θεωρούμε τον $\dot{\alpha} = d\alpha \circ \dfrac{\partial}{\partial t}\Big|_I$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(I) \arrow[r, "d\alpha"] & \mathcal{T}(U) \\
I \arrow[u, "\frac{\partial}{\partial t}\big|_I"] \arrow[ur, "d\alpha \circ \frac{\partial}{\partial t}\big|_I"'] &
\end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με το (ii) έχουμε ότι $\dot{\alpha} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ και

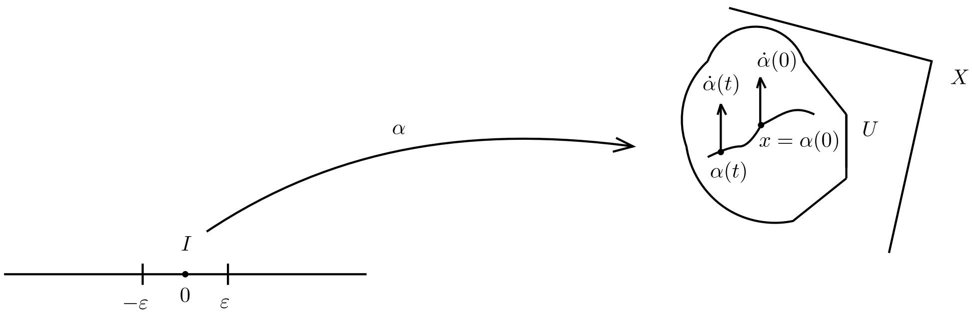
$$\begin{aligned}
[\dot{\alpha}(x_i)](t) &= \left(d\alpha \circ \frac{\partial}{\partial t}\right)(x_i)(t) \\
&= \left(d\alpha \circ \frac{\partial}{\partial t}\right)(t)(x_i) \\
&= (d\alpha)_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t\right)(x_i) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t (x_i \circ \alpha) \\
&= (x_i \circ \alpha)'(t)
\end{aligned}$$

Έτσι, η τοπική έκφραση του $\dot{\alpha} \in \mathfrak{X}(f)$ είναι

$$\dot{\alpha}|_I = \sum_{i=1}^{n} (x_i \circ \alpha)' \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\alpha} \tag{*}$$

Ορισμός 3.2.3. Το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\dot{\alpha}$ κατά μήκος της α, ονομάζεται **πεδίο ταχυτήτων**. Κάθε καμπύλη στον X μετράει την κίνηση ενός σημείου της X και το $\dot{\alpha}$ μετράει την ταχύτητα κίνησης του σημείου σε κάθε χρονική στιγμή t.

Παρατηρήσεις 3.2.1. (i) Αν $t \in I$, τότε $\dot{\alpha}(t) = (d\alpha)_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t \right)$, $\alpha(t) \in U$, για κάθε $t \in I$.



(ii) Ισχύει ότι $\dot{\alpha}(0) = [(x, \alpha)] \in T_x(X)$.

Πράγματι, από την (*)

$$\dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \circ \alpha)'(0) \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x=\alpha(0)} = [(x, \alpha)]$$

3.3 Συσχετισμένα Διανυσματικά Πεδία

Ορισμός 3.3.1. Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ και $\eta \in \mathfrak{X}(Y)$. Έστω, επίσης, μια $f \in C^\infty(X, Y)$. Τότε, τα ξ, η ονομάζονται **f-συσχετισμένα** αν το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
\mathcal{T}(X) \arrow[r, "df"] & \mathcal{T}(Y)
\end{tikzcd}$$

ανν $\eta \circ f = df \circ \xi$ ανν τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f, $\eta \circ f$ και $df \circ \xi$ συμπίπτουν.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\eta \in \mathfrak{X}(Y)$ και $f \in C^\infty(X, Y)$. Τότε, τα ξ και η είναι f-συσχετισμένα ανν για κάθε $g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$ ισχύει $\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$.*

Απόδειξη. Αφού $g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, έχουμε $\eta(g) \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, $g \circ f \in C^\infty_x(X)$ και $\xi(g \circ f) \in C^\infty_x(X)$ με $x \in U$ και (V, ψ) χάρτη της Y με $f(U) \subseteq V$.

Επίσης, $\eta(g)\circ f \in C_c^\infty(X)$ άρα έχει έννοια να εξετάσουμε την ισότητα $\xi(g\circ f) = \eta(g)\circ f$, όταν τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα.
($\Rightarrow$) Έστω ξ, η f-συσχετισμένα. Τότε, $df\circ\xi = \eta\circ f$ ανν $(df)_x(\xi_x) = \eta_{f(x)}$. Άρα,

$$\begin{aligned}\xi(g\circ f) &= \xi_x(g\circ f)\\ &= (df)_x(\xi_x)(g)\\ &= \eta_{f(x)}(g)\\ &= [\eta(g)](f(x)), \qquad \forall x\in X\end{aligned}$$

Έτσι, $\xi(g\circ f) = \eta(g)\circ f$.
($\Leftarrow$) Ξεκινώντας από την υπόθεση σε ένα $x\in U$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα βέλη έπεται το ζητούμενο. $\square$

Έστω $\xi\in\mathfrak{X}(X)$ και $\alpha\in C(X,x)$ με $\alpha(I)\subseteq U$ και $x\in U$, όπου (U,ϕ) χάρτης της X. Τότε, αν το ξ είναι α-συσχετισμένο με βασικό διανυσματικό πεδίο το $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_I$, τότε έχουμε

$$d\alpha\circ\frac{\partial}{\partial t} = \xi\circ\alpha$$

δηλαδή

$$\dot{\alpha} = \xi\circ\alpha, \qquad \alpha(0) = x$$

3.4 Διανυσματικά Πεδία και Εξισώσεις

Ορισμός 3.4.1. Αν $\xi\in\mathfrak{X}(X)$ και $\alpha\in C(X,x)$, θα λέμε ότι η α είναι **ολοκληρωτική καμπύλη** του ξ από το x, αν $\dot{\alpha} = \xi\circ\alpha$.

Η εξίσωση $\dot{\alpha} = \xi\circ\alpha$, $\alpha(0) = x$, ονομάζεται **διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξεως** επί της X, που αντιστοιχεί στο ξ.

Η ονομασία δικαιολογείται από το γεγονός ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης ως προς το α, δοθέντος ενός ξ, με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = x$, ανάγεται στη λύση ενός διαφορικού συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους.

Πράγματι, έχουμε

$$\dot{\alpha} = \xi\circ\alpha, \qquad \alpha(0) = x \tag{1}$$

με $x\in U$, $(U,\phi = (x_1,x_2,\ldots,x_n))$ χάρτη της X ώστε $\alpha(I)\subseteq U$ και $I = \mathrm{Dom}(\alpha)$.

Για να υπολογίσουμε την α αρκεί να υπολογίσουμε τις n συντεταγμένες της $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\alpha_n(t)$, $t\in I$.

Από την (1) έχουμε

$$\begin{array}{lccc} & \dot{\alpha}(x_i) = (\xi\circ\alpha)(x_i) & ,\alpha(0)=x & ,\forall i=1,2,\ldots,n\\ \Leftrightarrow & (x_i\circ\alpha)' = \xi\circ\alpha & ,\alpha(0)=x & ,\forall i=1,2,\ldots,n\\ \Leftrightarrow & \alpha_i'(t) = \xi_i(\alpha(t)) & ,\alpha(0)=x & ,\forall i=1,2,\ldots,n\\ \Leftrightarrow & \alpha_i'(t) = (\xi_i\circ\phi^{-1})(\phi(\alpha(t))) & ,\alpha(0)=x & ,\forall i=1,2,\ldots,n\\ \Leftrightarrow & \alpha_i'(t) = (\xi_i\circ\phi^{-1})(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\alpha_n(t)) & ,\alpha(0)=x & ,\forall i=1,2,\ldots,n\end{array}$$

Άρα $\dot{\alpha} = \xi\circ\alpha$, $\alpha(0) = x$ ανν

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = (\xi_i\circ\phi^{-1})(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\alpha_n(t)) \quad ,\alpha(0)=x \quad ,\forall i=1,2,\ldots,n$$

Παραδείγματα 3.4.1. (i) Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ με $\xi = e^{-x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_q}$. Θα βρούμε ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha(t)$ του ξ από το $\alpha(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Έστω $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ η ζητούμενη καμπύλη με $(U, \phi) = (\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Έχουμε $\xi_1(x_1, x_2) = e^{-x_1}$ και $\xi_2(x_1, x_2) = 0$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, άρα η $\alpha(t)$ θα είναι λύση του διαφορικού συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= e^{-a_1(t)}, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1(t)} d\alpha_1(t) &= dt, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ d\alpha_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1(t)} &= t + x_1, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \alpha_2(t) &= c_2 \end{aligned}$$

Έτσι, $c_1 = e^{x_0}$ και $c_2 = y_0$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \log(t + e^{x_0}) \\ \alpha_2(t) &= y_0 \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\alpha : (-e^{-x_0}, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\log(t + e^{x_0}), y_0)$$

(ii) Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\xi = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Θα βρούμε ολοκληρωτική καμπύλη της ξ από το $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Όπως και πριν, έχουμε $\xi_1(x_1, x_2) = x_2$ και $\xi_2(x_1, x_2) = -x_1$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως, αν $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ με $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ είναι η ζητούμενη έχουμε το διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= \alpha_2(t), \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= -\alpha_1(t) \end{aligned}$$

ανν

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= \alpha_2(t), \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \alpha_2'(t) &= -\alpha_1(t) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= -\alpha_1''(t), \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \alpha_2(t) &= -\alpha_1'(t) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μια λύση του συστήματος είναι η

$$(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t, -c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

με $c_1 = \alpha_1(0) = x_0$, $c_2 = \alpha_2(0) = y_0$, όπου $\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Επομένως, η $\alpha(t)$ είναι κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

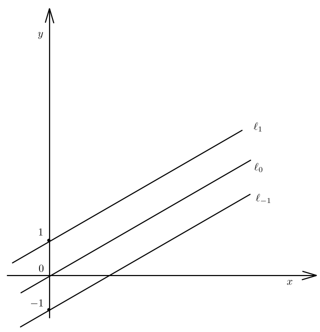
Ιδιαίτερα, μπορεί να δει κανείς ότι όλες οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ είναι ομόκεντροι κύκλοι κέντρου 0.

(iii) Βρίσκουμε, τώρα, τις ολοκληρωτικές καμπύλες των βασικών διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $\dfrac{\partial}{\partial t}$ του $\mathbb{R}$.

Αν $\ell_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + s$ η μεταφορά κατά s στο $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι το $\dfrac{\partial}{\partial t}$ είναι ℓ_s-συσχετισμένο με τον εαυτό του, ισοδύναμα $d\ell_s \circ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \circ \ell_s$ ανν $\dot{\ell}_s = \dfrac{\partial}{\partial t} \circ \ell_s$ ανν οι ℓ_s, $s \in \mathbb{R}$ είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\left(d\ell_s \circ \frac{\partial}{\partial t}\right)(t) &= (d\ell_s)_t \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t\right) \\
&= (d\ell_s)_{[(t, \ell_t)]} \\
&= [(\ell_s(t), \ell_s \circ \ell_t)] \\
&= [(s + t, \ell_{s+t})] \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s+t} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ \ell_s\right)(t)
\end{aligned}$$



Βάσει αυτού, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ με ολοκληρωτική καμπύλη την $\alpha(t)$ με $\mathrm{Dom}(\alpha) = I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$, τότε και η $\alpha(t + s) = (\alpha \circ \ell_s)(t)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ όταν $\ell_s(I') \subseteq I$ για κάποιο $I' \subseteq \mathbb{R}$.

(iv) Ας βρούμε ολοκληρωτική καμπύλη του $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ για $i = 1, 2$ από το $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Έχουμε $\dfrac{\partial}{\partial x_1} = 1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + 0\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Έστω $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ η ζητούμενη ολοκληρωτική καμπύλη. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= 1, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} d\alpha_1(t) &= dt, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (x_0, y_0) \\ d\alpha_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

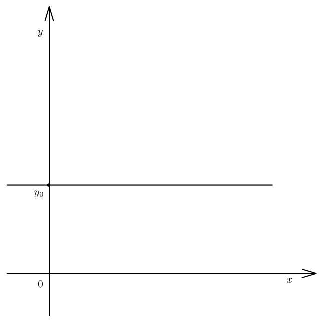
οπότε

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t + c_1, \qquad (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (c_1 = x_0, c_2 = y_0) \\ \alpha_2(t) &= c_2 \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t + x_0, y_0)$$

Άρα, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ είναι όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες στον $x'x$ από τα διάφορα σημεία του $y'y$, με σημείο στήριξης κάθε φορά το $(t + x_0, y_0)$.



Εντελώς ανάλογα, αν $\dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0\dfrac{\partial}{\partial x_1} + 1\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ είναι όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες του άξονα του y από τα διάφορα σημεία του άξονα του x, με $\alpha(t) = (x_0, t + y_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ και α, β ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ από το $x \in X$, με $\mathrm{Dom}(\alpha) = I$, $\mathrm{Dom}(\beta) = I'$ και έστω X Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε,*

$$\alpha|_{I \cap I'} = \beta|_{I \cap I'}$$

Απόδειξη. Έστω $A = \{t \in I \cap I' : \alpha(t) = \beta(t)\} \subseteq I \cap I'$. Θα δείξουμε ότι $A = I \cap I'$.

Επειδή ο $I \cap I'$ είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος θα δείξουμε ότι $A \neq \emptyset$ και ότι το A είναι ανοιχτό και κλειστό. Τότε, θα έχουμε το ζητούμενο.

Εφόσον $0 \in A$, έχουμε $A \neq \emptyset$.

Δείχνουμε, τώρα, ότι το A είναι κλειστό στο $I \cap I'$. Έστω (t_n) μια ακολουθία στο A με $t_n \to t \in I \cap I'$. Από τη συνέχεια των α, β έχουμε $\alpha(t_n) \to \alpha(t)$ και $\beta(t_n) \to \beta(t)$ με $\alpha(t_n) = \beta(t_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{R}$. Άρα $\alpha(t) = \beta(t)$ και $t \in A$.

Μένει να δείξουμε ότι το A είναι και ανοιχτό στο $I \cap I'$. Έστω $t_0 \in A$. Θα βρούμε ανοιχτή περιοχή I_0 του t_0 με $t_0 \in I_0 \subseteq A$. Έστω $(U, \phi = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$ χάρτης της X με

$\alpha(t_0) = \lambda_0 = \beta(t_0) \in U$. Από τη συνέχεια των συναρτήσεων μπορούμε να βρούμε ανοιχτή περιοχή του t_0, έστω I_0, με $\alpha(I_0) \subseteq U$ και $\beta(I_0) \subseteq U$.

Τότε, οι α, β θα είναι λύσεις του διαφορικού συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i(t)}{dt} &= (\xi_i \circ \phi^{-1})(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)), \qquad \alpha(t_0) = x = \beta(t_0) \\ \frac{d\beta_i(t)}{dt} &= (\xi_i \circ \phi^{-1})(\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t)) \end{aligned}$$

Οπότε, από το μονοσήμαντο των λύσεων διαφορικών συστημάτων στον $\mathbb{R}^n$ με κοινή αρχική συνθήκη θα έχουμε ότι $\alpha_i(t) = \beta_i(t)$ για κάθε $t \in I_0$ και $i = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι, $\alpha(t) = \beta(t)$ για κάθε $t \in I_0$. Επομένως, $t_0 \in I_0 \subseteq A$. □

Παραδείγματα 3.4.2. (i) Έστω $p = (x, y, z) \in S^2$ και $\xi_p = [(p, \alpha)]$ με

$$\alpha(t) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z)$$

Υπολογίζουμε το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ επί του S^2 με την δοθείσα ιδιότητα.

Έστω ότι $p \in U_N$, όπου $\alpha(0) = p$. Έστω (x_1, x_2) οι συνιστώσες του χάρτη (U_N, ϕ_N). Τότε

$$\xi_1 = \xi(x_1) : U_N \to \mathbb{R}, \quad p = (x, y, z) \mapsto \xi_p(x_1) = (x_1 \circ \alpha)'(0) = \alpha_1'(0)$$

με $\alpha_1(t) = \dfrac{x\cos t - y\sin t}{1 - z}$. Αφού

$$\begin{aligned} \alpha_1'(0) &= \frac{1}{1-z}(-x\sin t - y\cos t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{-y}{1-z} \\ &= -x_2(x, y, z) \end{aligned}$$

έχουμε $\xi_p(x_1) = -x_2(p)$ ανν $\xi(x_1) = -x_2$ στο U_N.

Ανάλογα, έχουμε ότι $\alpha_2(t) = \dfrac{x\sin t + y\cos t}{1 - z}$, οπότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi_2(p) &= \alpha_2'(0) \\ &= \frac{x}{1-z} \\ &= x_1(p) \end{aligned}$$

Έτσι, $\xi_2 = x_1$ επί του U_N.

Τελικά

$$\xi|_{U_N} = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Όμοια, αν $p = (x, y, z) \in U_S$ και $\phi_s = (y_1, y_2)$, τότε $y_1(p) = \frac{x}{1+z}$, $y_2(p) = \frac{y}{1+z}$, οπότε

$$\xi|_{U_S} = -y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_2}$$

(ii) Έστω $(U_z^-, \phi_z^-) \in \mathcal{A}_{S^2}$, $p = (0, 1/2, -\sqrt{3}/2) \in U_z^-$ και

$$\xi|_{U_z^-} = -3\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Βρίσκουμε ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το p.

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1(x,y,z) &= u_1(\phi_z^-(x,y,z)) \\ &= u_1(x,y) \\ &= x \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_2(x,y,z) &= u_2(\phi_z^-(x,y,z)) \\ &= u_2(x,y) \\ &= y \end{aligned}$$

Έστω $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, όπου $\alpha_1(t) = (x_1 \circ \alpha)(t) = u_1((\phi_z^- \circ \alpha)(t))$ και $\alpha_2(t) = u_2((\phi_z^- \circ \alpha)(t))$ οι συνιστώσες της ολοκληρωτικής καμπύλης που ψάχνουμε και βρίσκονται από την λύση του διαφορικού συστήματος

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = (\xi_i \circ (\phi_z^-)^{-1})(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \qquad i = 1, 2$$

με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = p$.

Οι συνιστώσες του $\xi|_{U_z^-}$, είναι $\xi_1(x,y,z) = 3$ και $\xi_2(x,y,z) = y$. Οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= -3, \qquad \alpha(0) = p \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= \alpha_2(t) \end{aligned}$$

Έχουμε $\alpha_1(0) = \alpha_1(\phi_z^-(x,y,z)) = u_1(x,y) = 0$, αφού $(x,y,z) = (0, 1/2, -\sqrt{3}/2)$ και $\alpha_2(0) = 1/2$. Έτσι $\alpha_1(t) = -3t + c_1$ και $\log \alpha_2(t) = t + c_2$, δηλαδή $\alpha_2(t) = e^t e^{c_2}$. Από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$\alpha_1(t) = -3t$$

και

$$\alpha_2(t) = 1/2e^t$$

Αυτές είναι οι συνιστώσες της $(\phi_z^- \circ \alpha)(t)$. Οι ζητούμενες συνιστώσες της $\alpha(t)$, είναι

$$(\phi_z^-)^{-1}(-3t, 1/2e^t) = (-3t, 1/2e^t, -\sqrt{1 - 9t^2 - 1/4e^{2t}})$$

οπότε

$$\alpha(t) = (-3t, 1/2e^t, -\sqrt{1 - 9t^2 - 1/4e^{2t}}) \in S^2$$

Θέλουμε η α να έχει τιμές στον χάρτη U_z^- με $\alpha(0) = p \in U_z^-$. Από τη συνέχεια της α στο 0, υπάρχει ανοιχτό $I \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in I$ και $\alpha(I) \subseteq U_z^-$. Παίρνουμε ως πεδίο ορισμού της α το I.

3.5 Διαφορικές Ροές

Ορισμός 3.5.1. Μια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$, όπου X μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n, ονομάζεται **διαφορική ροή** της X αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες

(i) Η Φ είναι διαφορίσιμη, αν το $\mathbb{R} \times X$ φέρει τη διαφορική δομή γινόμενο.

(ii) $\Phi(0, x) = x$, για κάθε $x \in X$.

(iii) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in X$.

Παρατήρηση 3.5.1. Αν Φ είναι μια διαφορική ροή της X, τότε αυτή ορίζει μια οικογένεια αμφιδιαφορίσεων στην πολλαπλότητα X, την $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ με

$$\Phi_t : X \to X, \quad x \mapsto \Phi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Η Φ_t είναι μερική απεικόνιση της Φ ως προς t και είναι διαφορίσιμη ως μερική.

Αν $t = 0$, τότε

$$\Phi_0(x) = \Phi(0, x) = x = \mathrm{id}_X(x), \quad \forall x \in X$$

Έτσι, $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$.

Αν, τώρα, t, $s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+s}(x) &= \Phi(t + s, x) \\
&= \Phi(t, \Phi(s, x)) \\
&= \Phi_t(\Phi(s, x)) \\
&= \Phi_t(\Phi_s(x)) \\
&= (\Phi_t \circ \Phi_s)(x)
\end{aligned}$$

οπότε

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$$

Αν επιλέξουμε $t = -s$, τότε

$$\mathrm{id}_X = \Phi_0 = \Phi_{t-t} = \Phi_t \circ \Phi_{-t}$$

και όμοια

$$\mathrm{id}_X = \Phi_0 = \Phi_{-t+t} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t$$

άρα η Φ_t έχει δεξιά και αριστερά αντίστροφο, οπότε είναι 1-1 και επί με αντίστροφο το

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$$

Η Φ_t^{-1} από το προηγούμενο είναι επίσης διαφορίσιμη.

Τελικά, η Φ_t είναι αμφιδιαφόριση, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αφού κάθε διαφορική ροή Φ μιας πολλαπλότητας X ορίζει μια οικογένεια αμφιδιαφορίσεων $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ στην X με $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$ και $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.5.2. Ονομάζουμε **διαφορική ροή** της πολλαπλότητας X μια οικογένεια αμφιδιαφορίσεων $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ με

(i) $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$

(ii) $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, για κάθε t, $s \in \mathbb{R}$.

(iii) Η

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \to X, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x)$$

είναι διαφορίσιμη.

Παραδείγματα 3.5.1. (i) Η

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t,(x,y)) \mapsto (xe^t, ye^t)$$

είναι μια διαφορική ροή του $\mathbb{R}^2$.

(ii) Η

$$\Phi : \mathbb{R} \times S^2 \to S^2, \quad (t,(x,y,z)) \mapsto (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z)$$

είναι μια διαφορική ροή του S^2.

Θα δείξουμε τη διαφορισιμότητα - οι άλλες ιδιότητες είναι προφανείς.

Έστω $(t,(x,y,z)) \in \mathbb{R}\times S^2$ με $(x,y,z) \in U_y^+$. Τότε, $(U,\phi) = (U_x^+ \cap U_y^+, \phi_y^+|_{U_x^+\cap U_y^+}) \in \mathcal{A}_{S^2}$. Αν ως χάρτη του $\mathbb{R}$, θεωρήσουμε τον $((0,\pi/2), \mathrm{id}_{(0,\pi/2)}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, τότε παρατηρούμε ότι $\Phi((0,\pi/2)\times U) \subseteq U_y^+$.

Θεωρώντας την τοπική παράσταση της Φ,

$$\phi_y^+ \circ \phi \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \phi)^{-1} : (0,\pi/2)\times \phi(U) \to \phi_y^+(U_y^+) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(t,\phi(x,y,z)) \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\times\phi)^{-1}} (t,(x,y,z)) \xrightarrow{\phi_y^+\circ\phi} (x\cos t - y\sin t, z)$$

που είναι διαφορίσιμη συνάρτηση των $(t,\phi(x,y,z))$, έχουμε τη διαφορισιμότητα της Φ.

Έστω $\Phi : \mathbb{R}\times X \to X$ μια διαφορική ροή της X. Θεωρούμε $x \in X$ και την αντίστοιχη μερική απεικόνιση της Φ ως προς x, και τη συμβολίζουμε με

$$\alpha_x : \mathbb{R} \to X, \quad t \mapsto \Phi(t,x)$$

Η α_x είναι διαφορίσιμη ως μερική διαφορίσιμης.

Αν $t=0$, τότε $\alpha_x(0) = \Phi(0,x) = x$, δηλαδή $\alpha_x \in C(X,x)$.

Αν θεωρήσουμε το πεδίο ταχυτήτων

$$\dot{\alpha}_x(0) = [(x,\alpha_x)] \in T_x(X)$$

ορίζεται καλά η

$$\xi_\Phi : X \to \mathcal{T}(X), \quad x \mapsto \xi_{\Phi(x)} = \dot{\alpha}_x(0)$$

Το ξ_Φ είναι ένα διανυσματικό πεδίο της X.

Θα δείξουμε ότι έχει τις εξής ιδιότητες

Πρόταση 3.5.1. *(i) Το ξ_Φ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της X.*

(ii) Για κάθε $x \in X$ η καμπύλη α_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_Φ από το x.

*(iii) Το ξ_Φ είναι **πλήρες**, δηλαδή όλες οι ολοκληρωτικές καμπύλες του έχουν πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι οι συνιστώσες του ξ_Φ είναι διαφορίσιμες.

Έστω $x \in X$, $(U,\phi = (x_1,x_2,\ldots,x_n))$ χάρτης της X με $x \in U$. Έχουμε

$$\xi_\Phi(x_i) : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [\xi_\Phi(x_i)](x) = \xi_\Phi(x_i)$$

και

$$\begin{aligned}[\xi_\Phi(x_i)](x) &= \xi_\Phi(x_i)\\ &= (\dot{\alpha}_x(0))(x_i)\\ &= \dot{\alpha}_x(x_i)|_0\\ &= (x_i \circ \alpha_x)'(0)\end{aligned}$$

Τα $x_i : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x και η $\alpha_x(t) = \Phi(t, x)$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση των t, x, οπότε παίρνοντας την παράγωγο ως προς t στο $t = 0$, των $x_i(\alpha_x(t)) = x_i(\Phi(t, x))$ ότι μένει είναι διαφορίσιμη απεικόνιση του x.

Έτσι, $\xi_\Phi(x_i) \in C^\infty_x(X)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ οπότε το ξ_Φ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο.
(ii) Έχουμε $\alpha_x(0) = x$. Θα δείξουμε ότι $\dot{\alpha}_x = d\alpha_x \circ \partial_t$, όπου $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Θέτουμε $y = \alpha_x(t) \in X$, οπότε

$$\xi_\Phi(y) = \dot{\alpha}_y(0) = (d\alpha_y \circ \partial_t)(0) \tag{*}$$

και

$$\begin{aligned}\alpha_y(s) &= \Phi(s, y)\\ &= \Phi(s, \alpha_x(t))\\ &= \Phi(s, \Phi(t, x))\\ &= \Phi(t + s, x)\\ &= \alpha_x(t + s)\\ &= (\alpha_x \circ \ell_t)(s)\end{aligned}$$

Οπότε η (*) γίνεται

$$\begin{aligned}\xi_\Phi(y) &= (d(\alpha_x \circ \ell_t) \circ \partial_t)(0)\\ &= (d\alpha_x \circ d\ell_t \circ \partial_t)(0)\\ &= (d\alpha_x \circ (\partial_t \circ \ell_t)|_0\\ &= (d\alpha_x)_t(\partial_t|_t)\\ &= (d\alpha_x \circ \partial_t)(t)\\ &= \dot{\alpha}_x(t)\end{aligned}$$

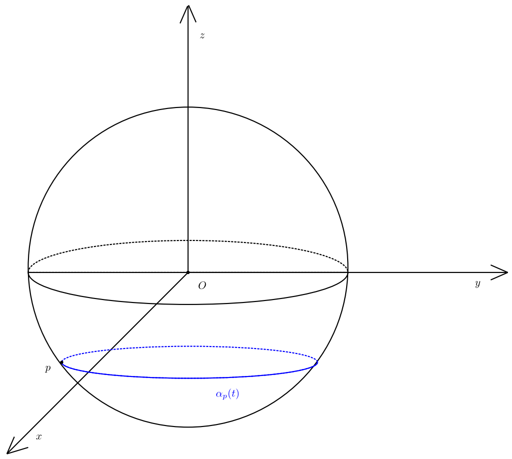
Τελικά, $\xi_\Phi \circ \alpha_x = \dot{\alpha}_x$.
(iii) Έστω $\beta : I \to X$ με $\beta(0) = x$, μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_Φ. Από το (ii), η α_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_Φ από το x. Αφού η X ως τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff, από το μονοσήμαντο των ολοκληρωτικών καμπυλών έχουμε $\beta = \alpha_x|_{I\cap\mathbb{R}}$ ανν $\beta = \alpha_x|_I$, εφόσον $\mathrm{Dom}(\alpha) = \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η β είναι κομμάτι της α_x.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ_Φ εξαντλούνται, όμως, από τις α_x, $x \in X$, άρα το ξ_Φ είναι πλήρες. □

Ορισμός 3.5.3. Το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ_Φ, που προέρχεται από μια διαφορική ροή Φ, ονομάζεται **απειροστικός γεννήτορας** της Φ.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες α_x, $x \in X$ του ξ_Φ ονομάζονται **τροχιές** των $x \in X$.

Παράδειγμα 3.5.1. Έστω $X = S^2$ με τη διαφορική δομή του Παραδείγματος 3.5.1. Τότε, οι αντίστοιχες $\alpha_p(t) = \Phi(t,p)$, $p \in S^2$ είναι τροχιές, που διαγράφονται από την καμπύλη $\alpha_p(t)$.



Αν συμβολίσουμε με $\mathit{\Phi}$ όλες τις διαφορικές ροές της πολλαπλότητας X, τότε ορίζεται καλά η

$$\vartheta : \mathit{\Phi}(X) \to \mathfrak{X}(X), \quad \Phi \mapsto \xi_\Phi$$

Η ϑ είναι 1-1, και γενικά δεν είναι επί, αφού το τυχόν διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ δεν είναι πλήρες.

Για το 1-1, έστω $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathit{\Phi}(X)$ με $\vartheta(\xi_{\Phi_1}) = \vartheta(\xi_{\Phi_2})$. Τότε, η τροχιά $\alpha_x^{\Phi_1}(t) = \Phi_1(t,x)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_{Φ_1} από το x και ανάλογα η $\alpha_x^{\Phi_2}(t) = \Phi_2(t,x)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_{Φ_2} από το x.

Έχουμε, δηλαδή, δύο ολοκληρωτικές καμπύλες του ίδιου διανυσματικού πεδίου από το x. Αφού η X είναι Hausdorff, παίρνουμε ότι $\alpha_x^{\Phi_1} = \alpha_x^{\Phi_2}$ και ισοδύναμα $\Phi_1(t,x) = \Phi_2(t,x)$ για κάθε $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$. Τελικά, $\Phi_1 = \Phi_2$.

Παραδείγματα 3.5.2. (i) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και $(U,\phi) \in \mathcal{A}'_{\mathbb{R}^2}$ με $U = \mathbb{R}^2$ και

$$\phi(x,y) = \left(\frac{2x-y}{3}, \frac{2x+y}{3}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Θα βρούμε τη διαφορική ροή Φ του $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\xi = 2\frac{\partial}{\partial x_1} - 3\frac{\partial}{\partial x_2}$$

με $\xi_\Phi = \xi$, όπου x_i, $i = 1,2$ οι συνιστώσες συναρτήσεις του (U,ϕ).

Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $\alpha_{(x,y)}$ ολοκληρωτική του ξ από το (x,y). Έστω $\alpha_i(t)$, $i = 1,2$ οι συντεταγμένες της $\alpha_{(x,y)}$.

Αν θέσουμε $\sigma = \phi \circ \alpha_{(x,y)}$, τότε $\sigma_i(t) = \alpha_i(t)$, $i = 1,2$ για κάθε t. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sigma_i(t) &= u_i(\sigma(t)) \\ &= u_i(\phi \circ \alpha_{(x,y)})(t) \\ &= \alpha_i(t)\end{aligned}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι $\sigma_i(t)$ βρίσκονται από διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1(t)}{dt} &= 2, \qquad \sigma(0) = \left(\frac{2x-y}{3}, \frac{2x+y}{3}\right) \\ \frac{d\sigma_2(t)}{dt} &= -3 \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2t + \frac{2x-y}{2} \\ \sigma_2(t) &= -3t + \frac{2x+y}{2} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \alpha_{(x,y)}(t) &= (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ &= \phi^{-1}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \\ &= \left(-\frac{3}{4}t + x, -\frac{15}{2}t + y\right) \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε υπολογίσει όλες τις ολοκληρωτικές του δοθέντος ξ από τα διάφορα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Έτσι, ορίζουμε την

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t,(x,y)) := \alpha_{(x,y)}(t) = \left(-\frac{3}{4}t + x, -\frac{15}{2}t + y\right)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η Φ είναι μια ολική διαφορική ροή του $\mathbb{R}^2$.

Παίρνοντας τον απειροστικό γεννήτορα ξ_Φ της Φ έχουμε ότι

$$\xi^1_\Phi(x,y) = \frac{\partial \alpha_1(t)}{\partial t}\Big|_0 = \frac{\partial \sigma_1(t)}{\partial t}\Big|_0 = 2$$

και

$$\xi^2_\Phi(x,y) = \frac{\partial \alpha_2(t)}{\partial t}\Big|_0 = \frac{\partial \sigma_2(t)}{\partial t}\Big|_0 = -3$$

άρα $\xi_\Phi = \xi$.

(ii) Βλέπουμε, τώρα, και ένα παράδειγμα μη πλήρους διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου.

Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - y^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

όπου x_1, x_2 οι συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Τότε, αν $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $\alpha_{(x,y)}$ μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το (x,y) με συντεταγμένες $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, αυτές προσδιορίζονται από το διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= \alpha_1^2(t), \qquad \alpha(0) = (x,y) \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= -\alpha_2^2(t) \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\alpha_{(x,y)}(t) = \left(\frac{x}{1-xt}, \frac{y}{1+yt}\right)$$

άρα πρέπει $1 - xt \neq 0$ και $1 + yt \neq 0$ ανν $t \neq \frac{1}{x}, -\frac{1}{y}$.

Άρα, αν $I_{(x,y)} = \mathrm{Dom}(\alpha_{(x,y)})$, έχουμε ότι

$$I_{(x,y)} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) & \text{αν } x > 0, y > 0 \\ \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\right) & \text{αν } x < 0, y > 0 \\ \left(-\infty, \min\{\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\}\right) & \text{αν } x \geq 0, y < 0 \\ \left(\min\{\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\}, \infty\right) & \text{αν } x < 0, y \geq 0 \\ \mathbb{R} & \text{αν } x = 0 = y \end{cases}$$

Επομένως, το ξ δεν είναι πλήρες.

Στη περίπτωση που ένα $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ δεν είναι πλήρες, η ϑ είναι όπως λέμε τοπικά επί, δηλαδή για ένα τέτοιο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο υπάρχει μια τοπική ροή του ξ, έστω $\Phi : I \times U \to U$, με $\xi_\Phi = \xi|_U$.

Ορισμός 3.5.4. Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $x \in X$ και (U, ϕ) χάρτης της X με $x \in U$. Έστω, επίσης, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Τότε, ονομάζουμε **τοπική διαφορική ροή** του ξ μια απεικόνιση

$$\Phi : I \times U \to U \subseteq X$$

έτσι ώστε

(i) Η Φ είναι διαφορίσιμη.

(ii) $\Phi(0, x) = x$, για κάθε $x \in U$.

(iii) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$, για κάθε $x \in U$ και t, $s \in I$ με $|t + s| < \varepsilon$.

Τότε, αποδεικνύεται ότι για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ όχι πλήρες και $x_0 \in X$ υπάρχει χάρτης (U, ϕ) της X με $x_0 \in U$ και κοινό $\varepsilon > 0$, καθώς και μοναδική τοπική διαφορική ροή

$$\Phi : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to U$$

του ξ έτσι ώστε $\xi_\Phi = \xi$.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι γενίκευση αποτελέσματος των Διαφορικών Εξισώσεων που διατυπώνεται ως εξής

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω Ω μια ανοιχτή περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^n$, $f_i \in C^\infty(\Omega)$ και*

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \qquad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Τότε, υπάρχει ανοιχτή σφαίρα S κέντρου 0 και ακτίνας $\rho > 0$ έτσι ώστε $S \subseteq \Omega$ και κοινό $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε για κάθε $z \in S$ υπάρχει μοναδική καμπύλη $\tilde{\alpha}_z : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $\tilde{\alpha}_z(0) = z$ που ικανοποιεί το προηγούμενο διαφορικό σύστημα.

Άρα, $x_i = u_i \circ \tilde{\alpha}_z$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και επιπλέον η $\tilde{\Phi} : I \times S \to S$ με

$$\tilde{\Phi}(t, z) = \tilde{\alpha}_z(t)$$

είναι διαφορίσιμη και είναι η διαφορική ροή του προηγούμενου συστήματος.

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα του $\mathbb{R}^n$ και το χάρτη (U, ϕ) επανερχόμαστε σε ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ που στην ουσία είναι οι $\phi^{-1} \circ \tilde{\alpha}_z$. Έτσι ορίζεται μια τοπική διαφορική ροή του ξ.

Παράδειγμα 3.5.2. Έστω $X = S^2$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}'_{S^2}$ με $U = U_x^+$, $\phi = \phi_x^+$. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathfrak{X}(S^2)$ με

$$\xi|_U = \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_2}$$

όπου x_1, x_2 οι συνιστώστες του ϕ.

Θα βρούμε τη τοπική διαφορική ροή του ξ και θα αποδείξουμε ότι $\xi_\Phi = \xi|_U$.

Έχουμε

$$\xi_1(x, y, z) = \lambda$$

$$\xi_2(x, y, z) = -\lambda$$

Έστω $\alpha(t) = \alpha_{(x,y,z)}(t)$ μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το $(x, y, z) \in U$ και $\sigma = \phi \circ \alpha$. Τότε, η σ προκύπτει από το διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1(t)}{dt} &= \lambda, \qquad \alpha(0) = (x, y, z) \\ \frac{d\sigma_2(t)}{dt} &= -\lambda \end{aligned}$$

άρα

$$\sigma_1(t) = \lambda t + y$$

$$\sigma_2(t) = -\lambda t + z$$

Άρα, η ζητούμενη καμπύλη είναι

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(\sigma(t)) = (\sqrt{1 - (\lambda t + y)^2 - (-\lambda t + z)^2}, y, z)$$

οπότε το πεδίο ορισμού της α είναι

$$\mathrm{Dom}(\alpha) = I = \{t \in \mathbb{R} : (\lambda t + y)^2 + (-\lambda t + z)^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\}$$

Έτσι, ορίζεται η

$$\Phi : I \times U \to U, \quad \Phi(t, (x, y, z)) = \alpha_{(x,y,z)}(t)$$

και εύκολα αποδεικνύεται ότι η Φ είναι τοπική ροή του ξ έτσι ώστε $\xi_\Phi = \xi|_U$.

Ορισμός 3.5.5. Έστω $f \in C^\infty(X, Y)$, $\Phi \in \mathit{\Phi}(X)$, $\Psi \in \mathit{\Phi}(Y)$. Θα λέμε ότι οι Φ, Ψ είναι **f-συσχετισμένες** αν

(i) $f(\Phi(t, x)) = \Psi(t, f(x))$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

(ii) $f \circ \Phi_t = \Psi_t \circ f$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω $f \in C^\infty(X, Y)$, $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\eta \in \mathfrak{X}(Y)$ και Φ, Ψ τοπικές διαφορικές ροές των ξ, η. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα.

(ii) Αν α_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το $x \in X$, τότε η $f \circ \alpha_x$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η από το $f(x) \in Y$.

(iii) Οι Φ, Ψ είναι f-συσχετισμένες.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Αφήνεται ως άσκηση.
(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$, χάρτες (U, ϕ) της X, (V, ψ) της Y έτσι ώστε $x \in U$, $f(U) \subseteq V$. Έστω, επίσης, α_x ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το x με $\mathrm{Dom}(\alpha_x) = I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Έστω, ακόμα, $\alpha_{f(x)}$ ολοκληρωτική καμπύλη του η από το $f(x)$ με $\mathrm{Dom}(\alpha_{f(x)}) = I' = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

Από την υπόθεση, η $f \circ \alpha_x = \alpha_{f(x)}|_{I \cap I'}$ ανν

$$f(\alpha_x(t)) = \alpha_{f(x)}(t) \tag{*}$$

και αν

$$\Phi : I \times U \to U, \quad \Phi(t, x) = \alpha_x(t) \tag{**}$$
$$\Psi : I' \times V \to V, \quad \Psi(t, f(x)) = \alpha_{f(x)}(t)$$

είναι οι τοπικές διαφορικές ροές των ξ και η αντίστοιχα. Τότε, από την (*) έχουμε το ζητούμενο.
(iii)⇒(i) Έστω (**) οι τοπικές διαφορικές ροές των ξ, η. Τότε, από το (iii) έχουμε ότι ισχύει η (*), δηλαδή αν α_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το $x \in U$, τότε η $f \circ \alpha_x$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η από το $f(x) \in V$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(df \circ \xi)(x) &= (df)_x(\xi_x) \\
&= (df)_x((\xi \circ \alpha_x)(0)) \\
&= (df)_x \circ (\dot{\alpha}_x(0)) \\
&= (df)_x((d\alpha_x)_0(\partial_t(0)) \\
&= d(f \circ \alpha_x)_0(\partial_t(0)) \\
&= f \dot{\circ} \alpha_x(0) \\
&= \dot{\alpha}_{f(x)}(0) \\
&= \eta(f(x)) \\
&= (\eta \circ f)(x)
\end{aligned}$$

□

Παράρτημα Α΄

Ομάδες Lie

Α΄.1 Ορισμός και Παραδείγματα

Ορισμός Α΄.1.1. Έστω G μια ομάδα. Αν η G εφοδιάζεται με μια διαφορική δομή έτσι ώστε η πράξη της ομάδας

$$\gamma : G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy$$

να είναι διαφορίσιμη όταν το $G \times G$ φέρει τη διαφορική δομή γινόμενο, τότε η ομάδα G ονομάζεται **ομάδα Lie**.

Παραδείγματα Α΄.1.1. (i) Το $(\mathbb{R}, +)$ είναι ομάδα Lie με τη συνήθη διαφορική δομή.

(ii) Το $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι ομάδα Lie, εφοδιασμένο με τη σχετική διαφορική δομή από το $\mathbb{R}$, εφόσον είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$.

(iii) Το γινόμενο δύο ομάδων Lie είναι ομάδα Lie με τη διαφορική δομή γινόμενο.

(iv) Το πεπερασμένο γινόμενο ομάδων Lie, είναι ομάδα Lie.

Έτσι, και το $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ομάδα Lie.

(v) Η γενική γραμμική ομάδα

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

είναι ομάδα Lie, με πράξη τον πολλαπλασιασμό των πινάκων και τη σχετική διαφορική δομή από αυτή της $M_n(\mathbb{R})$, εφόσον το $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο της $M_n(\mathbb{R})$.

(vi) Το σύνολο

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι ομάδα Lie με πράξη το γινόμενο πινάκων, ουδέτερο στοιχείο το I_3. Κάθε $A \in G$ αντιστρέφεται, αφού $\det A > 1 \neq 0$.

Η

$$\phi : G \to \mathbb{R}^3, \quad A \mapsto (a, b, c)$$

είναι 1-1 και επί. Οπότε το G εφοδιάζεται με την επαγόμενη από το $\mathbb{R}^3$ διαφορική δομή.

(vii) Η μοναδιαία σφαίρα S^1 με τη διαφορική δομή που έχουμε ορίσει είναι επίσης ομάδα Lie, με πολλαπλασιασμό οριζόμενο όπως στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή, αν (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in S^1$, ορίζουμε

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Τότε, ουδέτερο στοιχείο είναι το $(1, 0)$ και για κάθε $(x, y) \in S^2$ το αντίστροφο του είναι το $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

(viii) Ο τόρος, $T = S^1 \times S^1$, είναι επίσης ομάδα Lie.

Α΄.2 Βασικές Ιδιότητες

Πρόταση Α΄.2.1. *Κάθε ομάδα Lie, ως τοπολογικός χώρος, είναι Hausdorff.*

Πρόταση Α΄.2.2. *Σε κάθε ομάδα Lie G, η αντιστροφή*

$$G \to G, \quad x \mapsto x^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη.

Πρόταση Α΄.2.3. *Οι αριστερές μεταφορές*

$$\ell_x : G \to G, \quad y \mapsto xy$$

είναι διαφορίσιμες.

Έχουμε $\ell_x = \gamma \circ h_x$, όπου η

$$h_x : G \to G \times G, \quad x \mapsto (x, y)$$

είναι διαφορίσιμη αφού οι προβολές της είναι διαφορίσιμες.

Επίσης, $\ell_{xy} = \ell_x \circ \ell_y$, άρα αν $y = x^{-1}$, τότε οι ℓ_x είναι 1-1 και επί με αντίστροφη $\ell_x^{-1} = \ell_{x^{-1}}$.

Οπότε, ορίζεται μια ομάδα αμφιδιαφορίσεων $(\ell_x)_{x \in G}$ της G που παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των ομάδων Lie.

Αν έχουμε $\xi \in \mathfrak{X}(G)$, τότε το ξ ονομάζεται **αριστερά αναλλοίωτο**, αν είναι ℓ_x-συσχετισμένο με τον εαυτό του για κάθε $x \in G$, δηλαδή

$$d\ell_x \circ \xi = \xi \circ \ell_x$$

Άρα ένα αριστερά αναλλοίωτο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της G είναι γνωστό ανν είναι γνωστή η τιμή του στο ουδέτερο στοιχείο e.

Πράγματι, το $(d\ell_x \circ \xi)(e) = \xi(\ell_x(e))$ μας δίνει $\xi(x) = (d\ell_x)_e(\xi(e))$, όπου το $(d\ell_x)_e$ είναι ισομορφισμός, αφού η ℓ_x είναι αμφιδιαφόριση.

Άρα, $T_e(G) \simeq T_x(G)$, για κάθε $x \in G$.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(G)$ το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της G. Το $\mathcal{L}(G)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος, και με το γινόμενο Lie $[\xi, \eta]$, για ξ, $\eta \in \mathcal{L}(G)$ γίνεται μια άλγεβρα Lie.

Επιπλέον, αν $v \in T_e(G)$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\xi_v : G \to \mathcal{T}(G), x \mapsto \xi_x(x) := (d\ell_x)_e(v)$$

Αποδεικνύεται ότι η ξ_v είναι αριστερά αναλλοίωτη, και μάλιστα η αντιστοιχία

$$T_e(G) \to \mathcal{L}(G), \quad v \mapsto \xi_v$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Πρόταση Α΄.2.4. *Κάθε $\xi \in \mathcal{L}(G)$ είναι πλήρες.*

Απόδειξη. (i) Αν ξέρουμε την ολοκληρωτική καμπύλη ενός $\xi \in \mathcal{L}(G)$ από το ουδέτερο στοιχείο, τότε ξέρουμε όλες τις ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ από οποιοδήποτε σημείο.

(ii) Αποδεικνύεται, επίσης, ότι η ολοκληρωτική καμπύλη α_e του ξ έχει πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}(\alpha_e) = \mathbb{R}$. Οπότε, θεωρώντας το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\alpha_e"] \arrow[dr, "\alpha_x := \ell_x \circ \alpha_e"'] & G \arrow[d, "\ell_x"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

έχουμε $\alpha_x(0) = xe = x$, άρα η α_x είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων και εύκολα αποδεικνύεται ότι η α_x, όπου $\mathrm{Dom}(\alpha_x) = \mathbb{R}$, είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το x.

Έτσι έχουμε την απόδειξη του (i), αφού αν $\beta : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το x, τότε αφού η G είναι Hausdorff, $\beta = \alpha_x|_I$. Δηλαδή η β είναι ένα κομμάτι της α_x.

Άρα, τελικά το ξ είναι πλήρες. □

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός $\xi \in \mathcal{L}(G)$ είναι μορφισμοί $(\mathbb{R}, +) \to G$, δηλαδή

$$\alpha_e(t+s) = \alpha_e(t)\alpha_e(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Γενικότερα, ονομάζει κανείς **1-παραμετρική υποομάδα** της G το σύνολο των διαφορίσιμων μορφισμών $\mathbb{R} \to G$, και αυτή η υποομάδα συμβολίζεται με $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$.

Έχοντας ένα $\xi \in \mathcal{L}(G)$ αυτό είναι πλήρες και ξέροντας την ολοκληρωτική καμπύλη του από το e, ξέρουμε όλες τις ολοκληρωτικές καμπύλες του $\alpha_x(t)$, άρα ορίζεται μια ολική διαφορική ροή

$$\Phi : \mathbb{R} \times G \to G, \quad \Phi(t, x) = \alpha_x(t)$$

Οπότε, στην περίπτωση των ομάδων Lie G, η αντιστοιχία $\vartheta : \mathit{\Phi}(G) \to \mathcal{L}(G), \quad \Phi \mapsto \xi_\Phi$.

Ιδιαίτερα, $\xi_\Phi = \xi_v$, όπου $v = \dot{\alpha}_e(0) = [(e, \alpha_e)] \in T_e(G)$.

Πρόταση Α΄.2.5. *Η*

$$\mathcal{L}(G) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G), \quad \xi \mapsto \alpha_e$$

είναι 1-1 και επί.

Άρα, τελικά

$$T_e(G) \simeq \mathcal{L}(G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$$

Σε κάθε ομάδα Lie ορίζεται εκθετική συνάτηση

$$\exp : T_e(G) \to G, \quad v \mapsto a_e^v(t)$$

Αν $G = GL_n(\mathbb{R})$, τότε

$$T_{I_n}(GL_n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \simeq M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

και στην $M_n(\mathbb{R})$ ορίζεται εκθετική συνάρτηση ως εξής

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

όπου η τελευταία συγκλίνει απόλυτα.

Άρα, ουσιαστικά, οι τιμές της exp στη περίπτωση της $GL_n(\mathbb{R})$ είναι μέσα στη $GL_n(\mathbb{R})$.

Πρόταση Α΄.2.6. *Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο σε μια συμπαγή διαφορική πολλαπλότητα X είναι πλήρες.*

Εφόσον ένα $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ είναι πλήρες, ορίζεται μια ολική διαφορική ροή

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$$

ισοδύναμα, ορίζεται μια ομάδα αμφιδιαφορίσεων $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Αυτή η ομάδα γίνεται απειροδιάστατη ομάδα Lie, οπότε ορίζεται και η αντίστοιχη άλγεβρα Lie αυτής.

Έτσι, η μελέτη αυτής της άλγεβρας ανάγεται, στην ουσία, σε συμπαγείς πολλαπλότητες, στη μελέτη των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων.

Παράρτημα Β΄

Θεωρητική Φυσική

Στην Θεωρητική Φυσική, θεωρούνται διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία σε διαφορικές πολλαπλότητες που δέχονται μέτρο μ. Οπότε, θεωρούν το χώρο Hilbert $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ και μέσω διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων ορίζουν κάποιους διαφορικούς τελεστές σε αυτόν τον χώρο και ενδιαφέρονται κατά πόσον αυτοί οι τελεστές είναι αυτοσυζυγείς. Αυτό συμβαίνει ανν το θεωρούμενο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο είναι πλήρες.

Αν έχουμε ένα σωματίδιο που κινείται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, ο χώρος των σημείων κίνησης του, που εδώ είναι ο $\mathbb{R}^3$, ονομάζεται **configuration space**.

Στη Μηχανική έχοντας ένα σωματίδιο, ο configuration space X είναι μια μη τετριμμένη διαφορική πολλαπλότητα και ο **χώρος φάσεως** του συστήματος που αποτελείται από τις θέσεις των σωματιδίων και της ταχύτητας κίνησης είναι η **συνεφαπτόμενη δέσμη** της X που συμβολίζεται με $\mathcal{T}^*(X)$ και είναι

$$\mathcal{T}^*(X) = \bigsqcup_{x\in X} T_x^*(X)$$

Αποδεικνύεται, όπως και στη περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης, ότι η συνεφαπτόμενη δέσμη είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$, αν n η διάσταση της X.