Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

8 Αυγούστου 2022

Περιεχόμενα

1 Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων

1.1. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Να δείξετε ότι μια αβελιανή ομάδα M επιδέχεται δομή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ –προτύπου αν και μόνο αν $nM = 0$.

Λύση. Έστω ότι η αβελιανή ομάδα M επιδέχεται δομή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - προτύπου, δηλαδή από την Άσκηση 1.2 υπάρχει $\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. ομομορφισμός δακτυλίων. Επίσης, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. Θεωρούμε το εξής διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] & \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M) \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "m \mapsto [m]_n"] \arrow[ur, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

το οποίο λόγω της μοναδικότητας της α είναι μεταθετικό. Επομένως, προκύπτει ότι για κάθε $x \in M$ έχουμε ότι

$$n \cdot x = \alpha(n)(x) = \varphi\left([0]_n\right)(x) = 0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $nM = 0$. Με τον παραπάνω συμβολισμό, συμπεραίνουμε ότι $n\mathbb{Z} \subseteq \ker \alpha$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M), \quad [m]_n \mapsto [\alpha(m)\colon M \to M, \quad x \mapsto m \cdot x].$$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη αφού $n\mathbb{Z} \subseteq \ker \alpha$ και άμεσο ότι είναι ομομομορφισμός δακτυλίων. Επομένως, η αβελιανή ομάδα M επιδέχεται δομή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ προτύπου. ■

1.2. Έστω $(M, +)$ αβελιανή ομάδα και R δακτύλιος. Να δείξετε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ απεικονίσεων (συνόλων) $R \times M \to M$ που πληρούν τα αξιώματα των R–προτύπων $(M_1) - (M_4)$ και ομομορφισμών δακτυλίων $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$

Λύση. Έστω $R \times M \xrightarrow{\varphi} M$ που ικανοποιεί τα αξιώματα $(M_1) - (M_4)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{\varphi} \colon R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M), \quad \tilde{\varphi}(r)(x) = \varphi(r, x) \quad \text{για κάθε } x \in M$$

Λόγω των $(M_1) - (M_4)$ είναι άμεσο ότι $\tilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι $\tilde{\varphi}(r) \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, και ότι είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Αντίστροφα, θεωρούμε $R \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ομομορφισμός δακτυλίων. Έτσι επάγεται η απεικόνιση

$$\varphi \colon R \times M \to M, \quad (r, x) \mapsto \tilde{\varphi}(r)(x)$$

όπου επειδή $\tilde{\varphi}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων, προκύπτει ότι φ ικανοποιεί τα $(M_1) - (M_4)$. ∎

1.3. Έστω θετικοί ακέραιοι m, n. Να δείξετε ότι υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$$

αν και μόνο αν οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Λύση. Αρχικά υποθέτουμε ότι $(m, n) = 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi \colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad k + mn\mathbb{Z} \mapsto (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z})$$

η οποία είναι άμεσο ότι καλά ορισμένη και προσθετική. Τώρα, $\varphi(k + mn\mathbb{Z} = (0, 0)$ αν και μόνο αν $m|k$ και $n|k$ και αφού $(m, n) = 1$ προκύπτει ότι $mn|k$. Επομένως, έχουμε ότι $k + mn\mathbb{Z} = 0$, δηλαδή η φ είναι μονομορφισμός. Τέλος, από την αρχή του περιστερώνα, έχουμε ότι φ είναι επί και προκύπτει το ζητούμενο.

Αντίστροφα, αν $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, τότε η ομάδα $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ είναι κυκλική τάξης mn. Αν $(m, n) = d > 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $m = xd$ και $n = yd$. Τότε, παρατηρούμε ότι $xyd \cdot (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ με $xyd < xyd^2 = mn$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο. ∎

1.4. Εξετάστε εάν το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι προβολικό εάν ιδωθεί ως:

(α) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

(β) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

(γ) $\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

Λύση. (α) Αρχικά το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ μπορεί να θεωρηθεί ως $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ - πρότυπο λόγω της Άσκησης 1.1. Αφού το $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερο ως $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ - πρότυπο, από την Άσκηση 1.3 (η απεικόνιση που δίνεται στην απόδειξη είναι και $\mathbb{Z}_6$ - γραμμική) έχουμε τον ισομορφισμό $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ - προτύπων $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Άρα, προκύπτει ότι το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι ένα προβολικό $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ - πρότυπο.

(β) Το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ πρότυπο $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερο, άρα είναι και προβολικό.

(γ) Το $\mathbb{Z}$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, επομένως το $\mathbb{Z}$ - πρότυπο $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι προβολικό αν και μόνο αν είναι ελεύθερο. Όμως $3 \cdot \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$ δηλαδή το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ δεν είναι ελεύθερο, συνεπώς δεν είναι ούτε προβολικό.

$\blacksquare$

1.5. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων και X ένα R - πρότυπο. Να δείξετε τα ακόλουθα :

(α) Εαν $\{\varphi_i \colon X \to M_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια R - γραμμικών απεικονίσεων, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$u \colon X \to \prod_{i\in I} M_i$$

τέτοια ώστε για κάθε $i \in I$ να έχουμε $\varphi_i = \pi_i \circ u$, όπου $\pi_i \colon \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ είναι η απεικόνιση προβολής $\pi_j\left(\{m_i\}_{i\in I}\right) = m_j$.

(β) Υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\operatorname{Hom}_R\left(X, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(X, M_i\right).$$

(γ) Το R - πρότυπο $\prod_{i\in I} M_i$ είναι ενριπτικό αν και μόνο αν για κάθε i στο I το M_i είναι ενριπτικό.

Λύση. (α) Θεωρούμε την $u \colon X \to \prod_{i\in I} M_i$ με $u(x) = \{\varphi_i(x)\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, η οποία προφανώς και είναι R - γραμμική λόγω της γραμμικότητας της φ_i και u ικανοποιεί την σχέση $\varphi_i = \pi_i \circ u$, για κάθε $i \in I$. Τώρα, αν $v \colon X \to \prod_{i\in I} M_i$ είναι μια R - γραμμική απεικόνιση ώστε $\varphi_i = \pi_i \circ v$, για κάθε $i \in I$ έχουμε ότι

$$v(x) = \{\pi_i \circ v(x)\}_{i\in I} = \{\varphi_i(x)\}_{i\in I} = u(x).$$

(β) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi \colon \operatorname{Hom}_R\left(X, \prod_{i\in I} M_i\right) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(X, M_i\right), \quad \varphi(f) = \{\pi_i \circ f\}_{i\in I}.$$

Η φ είναι προσθετική και λόγω του (α) είναι και επί. Τώρα, αν $f \in \ker\varphi$ έχουμε ότι $\varphi(f) = 0$, δηλαδή $\pi_i \circ f = 0$, για κάθε $i \in I$. Επομένως, έχουμε ότι $f = \{\pi_i \circ f\}_{i\in I} = 0$ συνεπώς προκύπτει ότι $\ker\varphi = 0$.

(γ) Αρχικά υποθέτουμε ότι $\prod_{i\in I} M_i$ είναι ενριπτικό. Έστω $j \in I$, $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ μονομορφισμός R-προτύπων και $A \xrightarrow{\pi} M_j$ μια R - γραμμική απεικόνιση. Τότε, έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[ddl, "\tilde{\pi}"] \\
M_j \arrow[d, shift right, "p_j"'] & \\
\prod_{I\in I} M_i \arrow[u, shift right, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Αφού η απεικόνιση $p_j \circ \pi$ είναι R - γραμμική και $\prod_{I\in I} M_i$ είναι ενριπτικό, υπάρχει $\tilde{\pi} \colon B \to \prod_{I\in I} M_i$ ώστε $p_j \circ \pi = \tilde{\pi} \circ i$. Επομένως, η R - γραμμική απεικόνιση $B \xrightarrow{\pi_j \circ \tilde{\pi}} M_j$ ικανοποιεί την σχέση

$$(\pi_j \circ \tilde{\pi}) \circ i = \pi_j \circ (\tilde{\pi} \circ i) = (\pi_j \circ p_j) \circ \pi = \pi$$

και έχουμε το ζητούμενο. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι M_i είναι ενριπτικό για κάθε $i \in I$. Έστω $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ μονομορφισμός R- προτύπων και $A \xrightarrow{\pi} \prod_{i\in I} M_i$ μια R - γραμμική απεικόνιση. Επομένως, αφού για κάθε $i \in I$ το M_i είναι ενριπτικό, υπάρχει R - γραμμική $\tilde{\pi}_i \colon B \to M_i$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"'] \arrow[ddl, "\tilde{\pi}_i"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
M_i &
\end{tikzcd}$$

Από το (α), για την οικογένεια $\{\tilde{\pi}_i\}_{i\in I}$ υπάρχει μοναδική $\tilde{\pi} \colon B \to \prod_{i\in I} M_i$ ώστε $\tilde{\pi}_i = \pi_i \circ \tilde{\pi}$, για κάθε $i \in I$. Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\pi} \circ i = \{\pi_i \circ \tilde{\pi} \circ i\}_{i\in I} = \{\tilde{\pi}_i \circ i\}_{i\in I} = \{\pi_i \circ \pi\}_{i\in I} = \pi$$

και έτσι έχουμε δείξει το ζητούμενο.

■

1.6. (α) Έστω R δακτύλιος και e ένα μη μηδενικό στοιχείο του R για το οποίο ισχύει $e^2 = e$. Να δείξετε ότι το Re είναι ένα προβολικό R - πρότυπο.

(β) Θεωρούμε ένα σώμα k και τον δακτύλιο

$$R := \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}.$$

Να δείξετε ότι οι στήλες $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ είναι προβολικά R - πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα.

Λύση. (α) Θεωρούμε την R - γραμμική απεικόνιση

$$\varphi \colon R \to Re \oplus R(1-e), \quad (re, r(1-e))\,.$$

Η φ είναι μονομορφισμός. Πράγματι, έστω $r \in R$ ώστε $\varphi(r) = 0$, δηλαδή ισχύει ότι $re = 0$ και $r(1-e) = r = 0$. Επομένως, έχουμε ότι $\ker\varphi = 0$. Τέλος η φ είναι επί. Πράγματι, αν $(xe, y(1-e)) \in Re \oplus R(1-e)$ τότε παρατηρούμε ότι $\varphi(xe + y(1-e)) = (xe, y(1-e))$. Επομένως $R \cong Re \oplus R(1-e)$ και αφού R είναι ελεύθερο R - πρότυπο συμπεραίνουμε ότι Re είναι προβολικό.

(β) Το $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ είναι ισόμορφο με το R - πρότυπο $\left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ r' & 0 \end{pmatrix} \mid r, r' \in k \right\}$ επομένως θεωρούμε ότι ταυτίζονται. Παρατηρούμε ότι αν $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $e^2 = e$ και επίσης $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = Re$ μέσω της δράσης των διαγώνιων πινάκων στο e. Άρα, από το (α) το $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ είναι προβολικό, όμως όχι ελεύθερο αφού ισχύει ότι $(I_2 - e) \cdot e = 0$ με $I_2 - e \neq 0$.

Όμοια, ταυτίζουμε το R - προτυπο $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ με το R - πρότυπο $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in k \right\}$. Τώρα, αν $e' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ παρατηρούμε ότι $(e')^2 = e'$ και $Re' = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$. Όμοια με παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

■

1.7. Έστω R δακτύλιος. Δίνονται R –πρότυπα και ομομορφισμοί

$$A \xrightarrow{\quad i \quad} B \xrightarrow{\quad \pi \quad} C$$

(χωρίς να υποθέτουμε καμία συνθήκη ακρίβειας). Υποθέτουμε ότι για κάθε R – πρότυπο X η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\quad i_* \quad} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{\quad \pi_* \quad} \mathrm{Hom}_R(X, C)$$

είναι ακριβής. Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad i \quad} B \xrightarrow{\quad \pi \quad} C$$

είναι ακριβής. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι για κάθε R –πρότυπο X ο ομομορφισμός $\pi_* : \mathrm{Hom}_R(X, B) \to \mathrm{Hom}_R(X, C)$ είναι επί, να δείξετε ότι $B \cong A \oplus C$.

Λύση. • Θα δείξουμε ότι i είναι μονομορφισμός. Εφαρμόζοντας την αρχική υπόθεση για $X = \ker i$ και $\mathrm{id}\colon \ker i \to A \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$ την φυσική εμφύτευση του X στο A έχουμε ότι $i_*(\mathrm{id}) = 0$ και αφού i_* είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $\mathrm{id} = 0$, δηλαδή ισχύει ότι $\ker i = 0$.

- Θα αποδείξουμε την ακρίβεια στο B, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\mathrm{im}(i) = \ker \pi$. Για $X = \ker \pi$ προκύπτει ότι αν $\mathrm{id}\colon X \to B$ η φυσική εμφύτευση του X στο B, τότε έχουμε ότι $\pi_*(\mathrm{id}) = 0$, δηλαδή έχουμε ότι $\mathrm{id} \in \ker(\pi_*) = \mathrm{im}(i_*)$. Συνεπώς υπάρχει $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$ ώστε $\mathrm{id} = i \circ \varphi$. Έτσι είναι σαφές ότι $\ker \pi \subseteq \mathrm{im}(i)$.

  Ομοίως θεωρούμε $X = \mathrm{im(i)}$ και την φυσική εμφύτευση id του X στο B. Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi\colon X \to A$ με $\psi(i(a)) = a$, η οποία είναι καλά ορισμένη αφού i μονομορφισμός. Τότε, έχουμε ότι $\mathrm{id} = i \circ \psi \in \mathrm{im}(i_*) = \ker(\pi_*)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\pi_*(\mathrm{id}) = \pi \circ \mathrm{id} = 0$, δηλαδή ισχύει ότι $\mathrm{im(i)} \subseteq \ker(\pi)$ και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

- Υποθέτουμε ότι ότι για κάθε R –πρότυπο X ο ομομορφισμός $\pi_* : \mathrm{Hom}_R(X,B) \to \mathrm{Hom}_R(X,C)$ είναι επί. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad i \quad} B \xrightarrow{\quad \pi \quad} C \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία, δηλαδή ότι π είναι επιμορφισμός. Πράγματι, έστω $c \in C$. Τότε, αν $X = \langle c \rangle$ και $\mathrm{id}\colon X \to C$ η φυσική εμφύτευση του X στο C. Αφού η απεικόνιση π_* τότε υπάρχει $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(X,B)$ ώστε $\mathrm{id} = \pi \circ \alpha$. Έτσι $c = \pi\left(\alpha(c)\right)$ με $\alpha(c) \in B$ και έχουμε το ζητούμενο.

Για $X = A \oplus C$ εφαρμόζοντας την υπόθεση για την απεικόνιση $X \xrightarrow{\pi_C} C$ προκύπτει ότι υπάρχει $X \xrightarrow{\tilde{\pi}} C$ ώστε $\pi \circ \tilde{\pi} = \pi_C$. Θεωρούμε την απεικόνιση $A \oplus C \xrightarrow{u} B$ που ορίζεται ως εξής $u(a,c) = i(a) + \tilde{\pi}(0,c)$. Παρατηρούμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Αφού $\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_C$ είναι ισομορφισμοί R - προτύπων και οι δύο παραραπάνω ακολουθίες είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες, τότε προκύπτει ότι u είναι ισομορφισμός (βλέπε Hilton - Stammbach σελίδα 14) και έχουμε το ζητούμενο.

■

2 Δεύτερο Φυλλάδιο Ασκήσεων

2.1. Έστω Ring η κατηγορία των δακτυλίων και των ομομορφισμών μεταξύ τους και Group η κατηγορία των ομάδων και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Για κάθε ομάδα G, συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων τυπικών αθροισμάτων $\sum_{g\in G}\lambda_g g$, όπου $\lambda_g \in \mathbb{Z}$. Θεωρήστε δεδομένο ότι το $\mathbb{Z}[G]$ γίνεται δακτύλιος με πράξη πολλαπλασιασμού

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\cdot\left(\sum_{g'\in G}\lambda_{g'} g'\right) \coloneqq \sum_{g,g'\in G}\left(\lambda_g\lambda_{g'}\right) gg'.$$

Να δείξετε τα ακόλουθα

(α) Η αντιστοίχιση $G \mapsto \mathbb{Z}[G]$ ορίζει συναρτητή $\mathbb{Z}[-]\colon \mathrm{Group} \to \mathrm{Ring}$. Στην αντίθετη κατεύθυνση, η αντιστοίχιση

$$R \mapsto U(R) \coloneqq \{r \in R \mid r \text{ αντιστρέψιμο στοιχείο του } R\}$$

ορίζει συναρτητή $U\colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{Group}$.

(β) Για κάθε ομάδα G, δακτύλιος R και ομομορφισμό ομάδων $f\colon G \to U(R)$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\phi\colon \mathbb{Z}[G] \to R$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & U(R) \\ U\left(\mathbb{Z}[G]\right) \arrow[ur, "U(\phi)"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $\eta(g) \coloneqq 1_{\mathbb{Z}} \cdot g$ για $g \in G$, να είναι μεταθετικό στην κατηγορία των ομάδων.

(γ) Το ζεύγος $\mathbb{Z}[f]\colon \mathrm{Group} \rightleftarrows \mathrm{Ring} : U$ είναι ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών, όπου $\mathbb{Z}[-]$ ο αριστερά προσαρτημένος.

(δ) Έστω M ένα (αριστερό) $\mathbb{Z}[G]$ - πρότυπο. Η αντιστοίχιση

$$M \mapsto M^G \coloneqq \{m \in M \mid \ \forall g \in G : \ g\cdot m = m\}$$

ορίζει συναρτητή $(-)^G\colon \mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$.

(ε) Θεωρήστε το $\mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}[G]$ πρότυπο ως εξής : για κάθε $g \in G$ και $z \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $g\cdot z \coloneqq z$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Έτσι αν $x = \sum_{g\in G}\lambda_g g \in \mathbb{Z}[G]$ και $z \in \mathbb{Z}$ το x δρα ως εξής :

$$x\cdot z \coloneqq \sum_{g\in G}\lambda_g z.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $(-)^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$. Συμπεράνετε ότι ο συναρτητής των σταθερών σημείων $(-)^G$ είναι αριστερά ακριβής.

Λύση. (α) • Αρχικά θα δείξουμε ότι η αντιστοίχιση $G \mapsto \mathbb{Z}[G]$ ορίζει συναρτητή

$$\mathbb{Z}[-]\colon \text{Group} \to \text{Ring}.$$

Αν $G \xrightarrow{f} G'$ ομομορφισμός ομάδων, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathbb{Z}[f]\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G'], \quad \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g'\in G'} \lambda_{g'} g'$$

όπου

$$\lambda_{g'} \coloneqq \begin{cases} 0, & g' \notin \operatorname{im} f \\ \sum_{g\in f^{-1}(\{g'\})} \lambda_g, & g' \in \operatorname{im} f \end{cases}.$$

Για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε ως εξής :

$$\mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g'\in G'} \lambda_{g'} g' = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g).$$

Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, αφού $\lambda_g \neq 0$ για πεπερασμένα $g \in G$. Τώρα, θα δείξουμε ότι $\tilde{f}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Θεωρούμε $\sum_{g\in G} \lambda_g g$, $\sum_{g'\in G} \lambda_{g'} g'$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g + \sum_{g'\in G} \lambda_{g'} g'\right) = \mathbb{Z}[f]\left[\sum_{g\in G} \left(\lambda_g + \lambda'_g\right) g\right] = \sum_{g\in G} \left(\lambda_g + \lambda'_g\right) f(g) \\ = \quad & \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) + \sum_{g'\in G} \lambda_{g'} f(g') = \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) + \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g'\in G} \lambda'_g g'\right). \end{aligned}$$

και επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}[f]\left[\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum_{g'\in G} \lambda'_g g'\right)\right] = \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g,g'\in G} \left(\lambda_g \lambda_{g'}\right) gg'\right) \\ = \quad & \sum_{g,g'\in G} \left(\lambda_g \lambda_{g'}\right) f(gg') = \sum_{g,g'\in G} \left(\lambda_g \lambda_{g'}\right) f(g) f(g') \\ = \quad & \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot \mathbb{Z}[f]\left(\sum_{g'\in G} \lambda'_g g'\right) \end{aligned}$$

Τώρα, αν $G \xrightarrow{f} G'$ και $G' \xrightarrow{g} G''$ είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $\mathbb{Z}[g \circ f] = \mathbb{Z}[g] \circ \mathbb{Z}[f]$ και $\mathbb{Z}[\mathrm{id}_G] = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}[G]}$, επομένως η αντιστοίχιση $\mathbb{Z}[-]$ ορίζει συναρτητή.

• Αν $R \xrightarrow{f} S$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε είναι σαφές ότι περιορισμός

$$U(f) = f\Big|_{U(R)} : U(R) \to U(S)$$

είναι καλά ορισμένος, αφού η f απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα στοιχεία. Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι η διαδικασία $U(-)$ ορίζει συναρτητή.

(β) Έστω ομάδα G, δακτύλιος R και ομομορφισμό ομάδων $f\colon G \to U(R)$. Ορίζουμε

$$\phi\colon \mathbb{Z}[G] \to R, \quad \phi\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g).$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσο ότι ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και $(\phi\circ\eta)(g) = f(g)$, για κάθε $g \in G$. Έστω τώρα $\psi\colon \mathbb{Z}[G] \to R$ ομομορφισμός δακτυλίων ώστε $\psi \circ \eta = f$. Τότε, αν $\sum_{g\in G} \lambda_g g$ έχουμε ότι

$$\psi\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g \psi(1_{\mathbb{Z}} g) = \sum_{g\in G} \lambda_g (\psi\circ\eta)(g) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) = \phi\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right).$$

(γ) Έστω G ομάδα και R δακτύλιος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$\Phi_{G,R}\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}\left(\mathbb{Z}[G], R\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(G, U(R)).$$

Έστω $\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{f} R$ ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε ορίζουμε

$$\Phi_{G,R}(f)\colon G \to U(R), \quad \Phi_{G,R}(f)(g) = f(1_{\mathbb{Z}} g).$$

- Η $\Phi_{G,R}(f)$ είναι καλά ορισμένη.
  (α) Αφού το στοιχείο $1_{\mathbb{Z}} g$ είναι αντιστρέψιμο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[G]$, άρα $f(1_{\mathbb{Z}} g)$ είναι αντιστρέψιμο στον δακτύλιο R.
  (β) Η προσθετικότητα της $\Phi_{G,R}(f)$ έπεται άμεσα από την προσθετικότητα της f, άρα είναι πράγματι ομομορφισμός ομάδων.
- Η $\Phi_{G,R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Έστω $G \xrightarrow{h} U(R)$ ομομορφισμός ομάδων. Από το ερώτημα (β), υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\phi\colon \mathbb{Z}[G] \to R$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta"'] & U(R) \\ U\left(\mathbb{Z}[G]\right) \arrow[ur, "U(\phi)"'] & \end{tikzcd}$$

  Θα δείξουμε ότι $\Phi_{G,R}(\phi) = h$. Πράγματι, αν $g \in G$ έχουμε ότι

$$\Phi_{G,R}(\phi)(g) = \phi(1_{\mathbb{Z}} g) = (\phi\circ\eta)(g) = h(g).$$

- Η $\Phi_{G,R}$ είναι φυσικός ισομορφισμός. Για να ελέγξουμε την φυσικότητα αρχικά έστω $G \xrightarrow{f} G'$ ομομομορφισμός ομάδων και R δακτύλιος. Θα δείξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}[G], R\right) \arrow[r, "\Phi_{G,R}"] & \mathrm{Hom}\left(G, U(R)\right) \\ \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}[G'], R\right) \arrow[r, "\Phi_{G',R}"'] \arrow[u, "-\circ\mathbb{Z}[f]"] & \mathrm{Hom}\left(G', U(R)\right) \arrow[u, "-\circ f"'] \end{tikzcd}$$

Έστω $h\colon \mathbb{Z}[G'] \to R$. Θα δείξουμε ότι $\Phi_{G,R}\left(h \circ \mathbb{Z}[f]\right) = \Phi_{G',R}(h) \circ f$. Πράγματι, αν $g \in G$ έχουμε ότι

$$\Phi_{G,R}\left(h \circ \mathbb{Z}[f]\right)(g) = \left(h \circ \mathbb{Z}[f]\right)(1_{\mathbb{Z}}g) = h(1_{\mathbb{Z}}f(g)) = \Phi_{G',R}(h)\left[f(g)\right]$$

Έστω $R \xrightarrow{f} S$ ομομορφισμός δακτυλίων και G ομάδα. Τότε, θα δείξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}[G], R\right) \arrow[r, "\Phi_{G,R}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}\left(G, U(R)\right) \arrow[d, "U(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}[G], S\right) \arrow[r, "\Phi_{G,S}"'] & \mathrm{Hom}\left(G, U(S)\right)
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $g \in G$ έχουμε ότι

$$\Phi_{G,S}(f \circ h)(g) = (f \circ h)(1_{\mathbb{Z}}g) = U(f) \circ \Phi_{G,R}(h)(g).$$

(δ) Αρχικά είναι σαφές ότι $\left(M^G, +\right) \leq (M, +)$ επομένως η αντιστοίχιση είναι καλά ορισμένη. Έστω μια $\mathbb{Z}[G]$ - γραμμική απεικόνιση $M \xrightarrow{f} N$. Ορίζουμε ως $(f)^G = f\Big|_{M^G}$. Αν $m \in M^G$ και $g \in G$ παρατηρούμε ότι

$$g \cdot f(m) = f(g \cdot m) = f(m).$$

Επομένως, έχουμε ότι $\mathrm{im}\left(f^G\right) \subseteq N^G$, δηλαδή $f^G\colon M^G \to N^G$. Από τον παραπάνω ορισμό έχουμε $(\mathrm{id}_M)^G = \mathrm{id}_{M^G}$ και ότι για κάθε $\mathbb{Z}[G]$ - γραμμικές $M \xrightarrow{f} N$ και $N \xrightarrow{g} K$ έχουμε ότι $(g \circ f)^G = g^G \circ f^G$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η αντιστοίχιση $(-)^G$ είναι συναρτητής.

(ε) Θεωρούμε την οικογένεια ομομορφισμών αβελιανών ομάδων

$$\left\{\tau^M\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \to M^G\right\}_{M \in \mathrm{Obj}(\mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod})}$$

με $\tau^M(f) = f(1)$, για $\mathbb{Z}[G]$ - πρότυπο M. Η τ^M είναι καλά ορισμένη, αφού αποδεικνύεται άμεσα ότι η τ^M είναι προσθετική και για κάθε $g \in G$ έχουμε ότι

$$g \cdot f(1) \coloneqq (1_{\mathbb{Z}}g) \cdot f(1) = f(g \cdot 1) = f(1)$$

Έστω $m \in M^G$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi_m\colon \mathbb{Z} \to M$ με $\varphi_m(n) = n \cdot m$. Η φ_m είναι προφανώς προσθετική και για κάθε $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{Z}[G]$ έχουμε ότι

$$\varphi_m\left(x \cdot 1\right) = \varphi_m\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \cdot 1\right) = \varphi_m\left(\sum_{g \in G} \lambda_g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g m = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot m.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι τ^M είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Επομένως η φ_m είναι η μοναδική [1] $\mathbb{Z}[G]$ - γραμμική ώστε $\tau^M(\varphi_m) = m$. Για την φυσικότητα έστω $M \xrightarrow{f} N$ μια $\mathbb{Z}[G]$ -

[1] Από τον ορισμό του τ^M, αν $\tau^M(g) = \tau^M(h)$, τότε έχουμε ότι $g(1) = h(1)$ και επομένως είναι σαφές ότι $g = h$.

γραμμική απεικόνιση. Θα αποδείξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \arrow[r, "\tau^M"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},f)"'] & M^G \arrow[d, "f^G"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \arrow[r, "\tau^N"] & N^G
\end{tikzcd}$$

δηλαδή θα δείξουμε ότι $f^G \circ \tau^M = \tau^N \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, f)$. Πράγματι, αν $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ έχουμε ότι

$$\tau^N \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, f)(g) = \tau^N(f \circ g) = (f \circ g)(1) = f^G\left[\tau^M(g)\right].$$

Αφού οι συναρτητές $(-)^G$ και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$ είναι φυσικά ισόμορφοι και γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$ είναι αριστερά ακριβής, τότε προκύπτει ότι και ο συναρτητής $(-)^G$ είναι αριστερά ακριβής.

■

2.2. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων $R[x] \otimes_R R[y] \cong R[x, y]$.

Λύση.

- Η αβελιανή ομάδα $R[x] \otimes_R R[y]$ αποκτά δομή δακτυλίου με πολλαπλασιασμό (στους στοιχειώδεις τανυστές και έπειτα γενικεύουμε)

$$[f(x) \otimes g(y)] \cdot [f'(x) \otimes g'(y)] := [f(x)f'(x)] \otimes [g(y) \cdot g'(y)].$$

- Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon R[x] \otimes_R R[y] \to R[x, y], \quad f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x) \cdot g(y).$$

Θα δείξουμε ότι φ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

- Η φ είναι ισομορφισμός δακτυλίων. Πράγματι, αν $\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y),\ \sum_{j=1}^m f'_j(x) \otimes g'_j(y) \in R[x] \otimes_R R[y]$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\varphi\left[\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m f'_j(x) \otimes g'_j(y)\right)\right] = \varphi\left[\sum_{i,j=1}^{n,m} \big(f_i(x)f'_j(x)\big) \otimes \big(g_i(y)g'_j(y)\big)\right] \\
= &\sum_{i,j=1}^{n,m} \big(f_i(x)f'_j(x)\big) \cdot \big(g_i(y)g'_j(y)\big) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m f'_j(x)g'_j(y)\right) \\
= &\varphi\left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y)\right] \cdot \varphi\left[\sum_{j=1}^m f'_j(x) \otimes g'_j(y)\right]
\end{aligned}$$

Η προσθετικότητα έπεται άμεσα. Τώρα, αφού κάθε πολυώνυμο $F(x, y)$ γράφεται στη μορφή $F(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot g_i(y)$, λόγω των ιδιοτήτων του τανυστικού γινομένου, το στοιχείο $\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y)$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $R[x] \otimes_R R[y]$ ώστε $\varphi\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y)\right) = F(x, y)$.

■

2.3. Έστω CRing η κατηγορία των μεταθετικών δακτυλίων και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Δείξτε ότι η αντιστοίχιση $R \mapsto \mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες του $R\}$ ορίζει έναν ανταλλοίωτο συναρτητή $\mathrm{Spec}(-)$ από την CRing στην κατηγορία των συνόλων.

Λύση. Έστω $R \xrightarrow{f} S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Γνωρίζοντας ότι αντίστροφη εικόνα πρώτου ιδεώδους (μέσω ομομορφισμού δακτυλίων) είναι πρώτο ιδεώδες, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R), \quad \mathfrak{p} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Είναι άμεσο ότι $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(R)}$ και αν $R \xrightarrow{f} S$ και $S \xrightarrow{g} K$ ομομορφισμοί δακτυλίων έχουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "\mathrm{Spec}(g)"] \arrow[dr, "\mathrm{Spec}(g\circ f)"'] & \mathrm{Spec}(S) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(f)"] \\
& \mathrm{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες του K, τότε έχουμε ότι

$$[\mathrm{Spec}(f) \circ \mathrm{Spec}(g)]\,(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(f)\left(g^{-1}\right)(\mathfrak{p}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathfrak{p})\right) = (g \circ f)^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(g \circ f).$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε δείξει ότι η αντιστοίχιση $\mathrm{Spec}(-)$ ορίζει συναρτητή. ■

2.4. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $f\colon X \to X'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Δείξτε ότι ο f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}$$

είναι διάγραμμα εφέλκυσης. Διατυπώστε και αποδείξτε την δϋική πρόταση.

Λύση. Αρχικά υποθέτουμε ότι η f είναι μονομορφισμός, δηλαδή αριστερά διαγράψιμη, και θα δείξουμε ότι το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα είναι διάγραμμα εφέλκυσης. Έστω $(Q, \{j_1, j_2\})$ αντικείμενο και μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}$$

Τότε, έχουμε ότι $f \circ j_1 = f \circ j_2$ και αφού f μονομορφισμός έχουμε ότι $j := j_1 = j_2$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $j\colon Q \to X$ είναι ο μοναδικός μορφισμός ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}
$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το αρχικό διάγραμμα είναι διάγραμμα εφέλκυσης. Έστω $Z \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} X$ ζεύγος μορφισμών ώστε $f \circ g = f \circ h$. Από την αρχική υπόθεση υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u \colon Z \to X$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}
$$

Έτσι, από το παραπάνω διάγραμμα, έχουμε ότι $h = u = g$ και έχουμε δείξει ότι η f είναι μονομορφισμός.

Δϋικά θα δείξουμε ότι αν $f \colon X' \to X$ μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
X & X \arrow[l, "\mathrm{id}_X"'] \\
X \arrow[u, "\mathrm{id}_X"] & X' \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

είναι διάγραμμα εξώθησης. Αρχικά υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός και έστω $(Q, \{i_1, i_2\})$ αντικείμενο και μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
Q & X \arrow[l, "i_1"'] \\
X \arrow[u, "i_2"] & X' \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Αφού $i_1 \circ f = i_2 \circ f$ και f επιμορφισμός, τότε έχουμε ότι $i := i_1 = i_2$. Έτσι είναι σαφές ότι $i \colon X \to Q$ είναι ο μοναδικός μορφισμός ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
Q & & \\
& X \arrow[ul, dashed, "i"'] & X \arrow[l, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[ull, bend right, "i"'] \\
& X \arrow[u, "\mathrm{id}_X"] \arrow[uul, bend left, "i"] & X' \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Αντίστροφα, έστω ότι το αρχικά διάγραμμα είναι διάγραμμα εξώθησης και έστω $X \overset{h}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ ώστε $h \circ f = g \circ f$. Έτσι είναι σαφές ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u \colon X \to Q$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
Q & & \\
& X \arrow[ul, dashed, "u"'] & X \arrow[l, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[ull, bend right, "g"'] \\
& X \arrow[u, "\mathrm{id}_X"] \arrow[uul, bend left, "h"] & X' \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Έτσι προκύπτει ότι $h = u = g$ και συμπεραίνουμε ότι η f είναι επιμορφισμός. ■

2.5. Θεωρούμε το $\mathbb{N}$ με τη φυσική του διάταξη ως κατηγορία και ένας συναρτητή $X \colon \mathbb{N} \to \mathrm{Ab}$, ή ισοδύναμα, θεωρούμε μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_3} X_3 \cdots .$$

Θεωρούμε επίσης τον ομομορφισμό $s \colon \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$,

$$s(x_0, x_1, x_2, \dots) := (0, f_0(x_0), f_1(x_1), f_2(x_2), \dots,),$$

και θέτουμε $t := \mathrm{id} - s$, όπου id η ταυτοτική συνάρτηση του $\bigoplus_{i\in I} X_i$. Να δείξετε τα ακόλουθα :

(α) Υπάρχει βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} X_i \xrightarrow{\ \tau\ } \bigoplus_{i\in I} X_i \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{coker}(\tau) \longrightarrow 0.$$

(β) $\mathrm{colim}_{\mathbb{N}} X \cong \mathrm{coker}(\tau)$

Λύση. (α) Είναι άμεσο ότι $\mathrm{im}(\tau) = \ker \pi$ και ότι π είναι επί, όπου π η φυσική προβολή του $\bigoplus_{i\in I} X_i$ στο πηλίκο $\mathrm{coker}(\tau)$. Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε την ακρίβεια $\bigoplus_{i\in I} X_i$, δηλαδή ότι ο μορφισμός τ είναι 1-1. Έστω $(x_0, x_1, \cdots) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ με

$$\tau(x_0, x_1, \cdots) = 0 \Leftrightarrow (x_0, x_1 - f_0(x_0), x_2 - f_1(x_1), \cdots) = 0.$$

Άρα προκύπτει ότι $x_0 = 0$ και $x_{i+1} = f_i(x_i)$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επαγωγικά είναι σαφές ότι $x_i = 0$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι $\ker(\tau) = 0$ και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\varphi_n = \pi \circ i_n \colon X_n \to \mathrm{coker}(\tau)$ με $i_n \colon X_n \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i$ και $i_n(x_n) = \left(0, 0, \dots, \underbrace{x_n}_{n\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right)$

- Αρχικά θα δείξουμε ότι $(\mathrm{coker}(\tau), \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι συνκώνος για το X. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & & X_{n+1} \arrow[dl, "\varphi_{n+1}"] \\
& \mathrm{coker}(\tau) &
\end{tikzcd}$$

Τότε, αν $n < m$ [2] το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό και θα έχουμε το ζητούμενο.

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[drr, "\varphi_n"] & X_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dr, "\varphi_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & X_{m-1} \arrow[r, "f_{m-1}"] \arrow[dl, "\varphi_{m-1}"'] & X_m \arrow[dll, "\varphi_m"'] \\
& & \mathrm{coker}(\tau) & &
\end{tikzcd}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $\varphi_{n+1} \circ f_n = \varphi_n$. Έστω $x_n \in X_n$. Τότε, έχουμε ότι

$$\varphi_{n+1} \circ f_n(x_n) = \varphi_{n+1}(f_n(x_n)) = \left(0, 0, \dots, \underbrace{f_n(x_n)}_{n+1\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right) + \mathrm{im}(\tau)$$

$$\begin{aligned}
&= s\left(0, 0, \dots, \underbrace{x_n}_{n\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right) + \mathrm{im}(\tau) \\
&= \left[\left(0, 0, \dots, \underbrace{x_n}_{n\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right) + \tau\left(0, 0, \dots, \underbrace{x_n}_{n\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right)\right] + \mathrm{im}(\tau) \\
&= \left(0, 0, \dots, \underbrace{x_n}_{n\ -\ \text{θέση}}, 0, 0, \dots\right) + \mathrm{im}(\tau) = \varphi_n(x_n)
\end{aligned}$$

- Έστω $(Q, \{\psi_n \colon X_n \to Q\}_{n\in\mathbb{N}})$ συνκώνος του X. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $u \colon \mathrm{coker}(\tau) \to Q$ ώστε, αν $n \in \mathbb{N}$, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_n"'] & & X_{n+1} \arrow[dl, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_{n+1}"] \\
& \mathrm{coker}(\tau) \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

[2] Στην περίπτωση όπου $n = m$, ο μοναδικός μορφισμός από το X_n στο X_n είναι ο ταυτικός, όπου το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Από την καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $h\colon \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \to Q$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[dr, "i_n"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_n"'] & & X_m \arrow[dl, "i_m"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_m"] \\
& \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[d, dashed, "h"] & \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

όπου από την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος γνωρίζουμε ότι

$$h\,(x_0, x_1, x_2 \cdots) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i(x_i).$$

Από την καθολογική ιδιότητα του $\operatorname{coker}(\tau)$, αν δειχθεί ότι $h \circ \tau = 0$, τότε προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική $u\colon \operatorname{coker}(\tau) \to Q$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "0"'] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"] & \operatorname{coker}(\tau) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "u"] & 0 \\
& & Q & &
\end{tikzcd}$$

Αν $(x_0, x_1, x_2, \cdots) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i$ τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& h \circ \tau(x_0, x_1, x_2, \cdots) = h\,(x_0, x_1 - f_0(x_0), x_2 - f_1(x_1), \cdots) \\
= \;& \psi_0(x_0) + \psi_1(x_1 - f_0(x_0)) + \psi_2(x_2 - f_1(x_1)) + \cdots \\
= \;& \psi_0(x_0) - \psi_1(f_0(x_0)) + \psi_1(x_1) - \psi_2(f_1(x_1)) + \cdots = 0
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται αφού $(Q, \{\psi_n\colon X_n \to Q\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι συνκώνος του X. Από την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος είναι σαφές ότι $u\colon \operatorname{coker}(\tau) \to Q$ είναι ο μοναδικός μορφισμός αβελιανών ομάδων ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_n"'] & & X_{n+1} \arrow[dl, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_{n+1}"] \\
& \operatorname{coker}(\tau) \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε δείξει ότι $\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} X \cong \operatorname{coker}(\tau)$.

■

3 Τρίτο Φυλλάδιο Ασκήσεων

3.1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και a, b δύο στοιχεία του R για τα οποία ο a δεν είναι διαιρέτης του μηδενός στον R και το $b+aR$ δεν είναι διαιρέτης του μηδενός στον $R/_{aR}$. Δείξτε ότι το αλυσωτό σύμπλεγμα

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{\pi} R\Big/(a,b) \longrightarrow 0$$

όπου π είναι η κανονική απεικόνιση προβολής, $d_1 := \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ και $d_2 := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ είναι προβολική επίλυση του $R\Big/(a,b)$ πάνω από το R.

Λύση. Αρχικά R και $R \oplus R$ είναι προβολικά R - πρότυπα ως ελεύθερα R - πρότυπα.

- Η ακρίβεια στο $R\Big/(a,b)$ έπεται άμεσα αφού γνωρίζουμε ότι η π είναι επί.
- Γνωρίζουμε ότι $\ker\pi = (a,b)$. Τώρα, αν $(x,y) \in R \oplus R$ έχουμε ότι $d_1(x,y) = ax + by \in (a,b)$. Αντίστροφα, αν $r = ax + by \in (a,b)$, τότε έχουμε ότι $r = d_1(x,y)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{im}(d_1) = \ker\pi$, δηλαδή προκύπτει η ακρίβεια στο R.
- Αρχικά παρατηρούμε ότι για $r \in R$, τότε έχουμε ότι

  $$d_1 \circ d_2(r) = d_1(-br, ar) = a(-br) + bar = 0 \Rightarrow \mathrm{im}(d_2) \subseteq \ker(d_1).$$

  Αντίστροφα, αν $(x,y) \in \ker(d_1)$, τότε έχουμε ότι $ax + by = 0$. Άρα, στον δακτύλιο $R/_{aR}$ έχουμε την σχέση

  $$(y + aR) \cdot (b + aR) = 0.$$

  Αφού το $b + aR$ δεν είναι μηδενοδιαιρέτης, τότε $y + aR = 0$, επομένως υπάρχει $r \in R$ ώστε $y = ar$. Τότε, από την αρχική σχέση έχουμε ότι

  $$(x + rb) \cdot a = 0.$$

  Αφού το a δεν είναι μηδενοδιαιρέτης, προκύπτει ότι $x = -rb$. Επομένως, έχουμε ότι $(x,y) = d_2(r)$, δηλαδή προκύπτει ότι $\ker(d_1) \subseteq \mathrm{im}(d_2)$.
- Τέλος, η ακρίβεια στο R έπεται άμεσα, διότι η d_2 είναι 1-1, αφού το a δεν είναι μηδενοδιαιρέτης.

■

3.2. Έστω R δακτύλιος. Δίνεται ακριβές αλυσωτό σύμπλεγμα προβολικών R - προτύπων

$$P := \cdots \xrightarrow{\partial_3^P} P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \to 0.$$

Να δειξετε ότι $\mathrm{id}_P \sim 0$, όπου με $\sim$ συμβολίζουμε τη σχέση ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών συμπλεγμάτων.

Λύση. Θα κατασκεύασουμε, με επαγωγή, ακολουθία μορφισμών $\{\delta_n \colon P_n \to P_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε ότι

$$\mathrm{id}_{P_n} = \delta_{n-1} \circ \partial_n^P + \partial_n^P \circ \delta_n.$$

Αρχικά αναζητούμε $\delta_0 \colon P_0 \to P_1$ ώστε $\mathrm{id}_{\mathrm{P}_0} = \partial_1^P \circ \delta_0$. Αφού η απεικόνιση ∂_1^P είναι επιμορφισμός και P_0 προβολικό, συμπεραίνουμε οτι υπάρχει $d_0 \colon P_0 \to P_1$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{P}_1}"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{P}_0}"] \arrow[dl, dashed, "\delta_0"'] & 0 \arrow[d, equal] \arrow[dl, "0"] \\
P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] & P_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι έχουν κατασκευασθεί $\delta_i \colon P_i \to P_{i+1}$ με τη ζητούμενη ιδιότητα για $i = 0, \ldots, n-1$ και αναζητούμε $\delta_n \colon P_n \to P_{n+1}$ ώστε

$$\mathrm{id}_{P_n} = \delta_{n-1} \circ \partial_n^P + \partial_n^P \circ \delta_n.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\mathrm{id}_{P_{n-1}} = \delta_{n-2} \circ \partial_{n-1}^P + \partial_n^P \circ \delta_{n-1} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\partial_n^P \left(\mathrm{id}_{P_n} - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P\right) = \partial_n^P - \partial_n^P \circ \delta_{n-1} \circ \partial_n^P$$

Από την σχέση 1 προκύπτει ότι

$$\partial_n^P \left(\mathrm{id}_{P_n} - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P\right) = \partial_n^P - \partial_n^P + \delta_{n-2} \circ \left(\partial_{n-1}^P \circ \partial_n^P\right) = 0.$$

Άρα, αν $h = \mathrm{id}_{P_n} - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P$, αφού $\partial_n^P \circ h = 0$, από την καθολική ιδιότητα του $\ker\left(\partial_n^P\right)$, υπάρχει $u \colon P_n \to \ker\left(\partial_n^P\right)$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}^P"] \arrow[d] & & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, dashed, "u"'] & P_{n-1} \arrow[d] \\
P_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}^P"] \arrow[dr, two heads] & & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] & P_{n-1} \\
& \ker(\partial_n^P) \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

Αφού το P_n είναι προβολικό, τότε υπάρχει $\delta_n \colon P_n \to P_{n+1}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}^P"] \arrow[d] & & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, dashed, "u"'] \arrow[dll, dashed, "\delta_n"'] & P_{n-1} \arrow[d] \arrow[dl, "\delta_{n-1}"'] \\
P_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}^P"] \arrow[dr, two heads] & & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] & P_{n-1} \\
& \ker(\partial_n^P) \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

Έτσι έχουμε ότι $h = \partial_{n+1}^P \circ \delta$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

3.3. Έστω R δακτύλιος και $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R - προτύπων.

(α) Έστω ότι το C είναι επίπεδο. Να δείξετε ότι το A είναι επίπεδο αν και μόνο αν το B επίπεδο.

(β) Έστω ότι το C είναι προβολικό. Να δείξετε ότι το A είναι προβολικό αν και μόνο αν B είναι προβολικό.

Λύση. 1. Έστω M ένα αριστερό R - πρότυπο. Θα δείξουμε ότι $\operatorname{Tor}_1^R(A, M) = 0$ αν και μόνο αν $\operatorname{Tor}_1^R(B, M) = 0$. Αφού το C είναι επίπεδο, γνωρίζουμε ότι $\operatorname{Tor}_n^R(C, -) = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Θεωρούμε την μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
0 & C \otimes M \arrow[l] & B \otimes M \arrow[l] & A \otimes M \arrow[l] \\
& \operatorname{Tor}_1^R(C, M) = 0 \arrow[urr, "\delta^0"] & \operatorname{Tor}_1^R(B, M) \arrow[l] & \operatorname{Tor}_1^R(A, M) \arrow[l] \\
& \operatorname{Tor}_2^R(C, M) = 0 \arrow[urr, "\delta^1"] & \cdots\cdots \arrow[l] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι $\operatorname{Tor}_1^R(A, M) \cong \operatorname{Tor}_1^R(B, M)$, επομένως ισχύει ότι

$$\operatorname{Tor}_1^R(A, M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(B, M) = 0.$$

(β) Αφού C είναι προβολικό, γνωρίζουμε ότι $\operatorname{Ext}_R^n(C, -) = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Τώρα, τα A, B είναι προβολικά αν και μόνο αν $\operatorname{Ext}_R^1(A, -) = 0$ και $\operatorname{Ext}_R^1(B, -) = 0$ αντίστοιχα. Έστω M ένα δεξί R - πρότυπο. Θεωρούμε την μακρά ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(C, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(B, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(A, M) \arrow[dll, "\delta^0"] \\
& \operatorname{Ext}_R^1(C, M) = 0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^1(B, M) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^1(A, M) \arrow[dll, "\delta^1"] \\
& \operatorname{Ext}_R^2(C, M) = 0 \arrow[r] & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι $\operatorname{Ext}_R^1(A, M) \cong \operatorname{Ext}_R^1(B, M)$, επομένως ισχύει ότι

$$\operatorname{Ext}_R^1(A, M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(B, M) = 0.$$

■

3.4. Έστω R δακτύλιος και I, J ιδεώδη του R. Δείξτε ότι υπάρχουν ισομορφισμοί :

(α) $\operatorname{Tor}_1^R\left(R/I, R/J\right) \cong I \cap J / IJ$.

(β) Για κάθε $i > 1$, $\operatorname{Tor}_i^R\left(R/I, R/J\right) \cong \operatorname{Tor}_{i-1}^R\left(I, R/J\right)$.

Λύση. (α) Θεωρούμε την βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} {}^{R}/_{I} \to 0$$

και εφαρμόζουμε μακρά ακριβή ακολουθία σε αυτήν

$$\begin{tikzcd}
0 & {}^{R}/_{I} \otimes_R {}^{R}/_{J} \arrow[l] & R \otimes_R {}^{R}/_{J} \arrow[l] & I \otimes_R {}^{R}/_{J} \arrow[l] \\
 & \mathrm{Tor}_1^R\left({}^{R}/_{I}, {}^{R}/_{J}\right) \arrow[urr, "\delta^0"] & \mathrm{Tor}_1^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0 \arrow[l] & \mathrm{Tor}_1^R(I, {}^{R}/_{J}) \arrow[l] \\
 & \mathrm{Tor}_2^R\left({}^{R}/_{I}, {}^{R}/_{J}\right) \arrow[urr, "\delta^1"] & \cdots\cdots \arrow[l] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

όπου ισχύει ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0$$

αφού το R είναι επίπεδο R - πρότυπο. Τότε, έχουμε ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R\left({}^{R}/_{I}, {}^{R}/_{J}\right) \cong \ker\left(i \otimes_R {}^{R}/_{J}\right).$$

Από τους ακόλουθους δύο ισομορφισμούς

$$R \otimes_R {}^{R}/_{J} \cong {}^{R}/_{J}$$
$$I \otimes_R {}^{R}/_{J} \cong {}^{I}/_{IJ}$$

πρόκυπτει ότι το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_R {}^{R}/_{J} \arrow[r, "i \otimes_R {}^{R}/_{J}"] \arrow[d, "\cong"] & R \otimes_R {}^{R}/_{J} \arrow[d, "\cong"] \\
{}^{I}/_{IJ} \arrow[r, "i'"] & {}^{R}/_{J}
\end{tikzcd}$$

με $i'(r + IJ) = r + J$, είναι μεταθετικό, επομένως έχουμε ότι

$$\ker\left(i \otimes_R {}^{R}/_{J}\right) \cong \ker(i') = {}^{I \cap J}/_{IJ}.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(β) Από την εφαρμογή της μακράς ακριβούς ακολουθίας στην β.α.α. του (α) προκύπτει ότι για κάθε $i > 1$ ισχύει

$$\mathrm{Tor}_{i-1}^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0 \longleftarrow \mathrm{Tor}_{i-1}^R\left(I, {}^{R}/_{J}\right) \longleftarrow \mathrm{Tor}_i^R\left({}^{R}/_{I}, {}^{R}/_{J}\right) \longleftarrow \mathrm{Tor}_i^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0$$

όπου οι σχέσεις

$$\mathrm{Tor}_{i-1}^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0, \quad \text{και} \quad \mathrm{Tor}_i^R\left(R, {}^{R}/_{J}\right) = 0$$

ισχύουν γιατί το R είναι επίπεδο R - πρότυπο.

■

3.5. Έστω A αβελιανή ομάδα όπου κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $A \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$.

Λύση. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Εφαρμόζουμε μακρά ακριβή ακολουθία στην παραπάνω β.α.α. όπου προκύπτει ότι

$$\begin{tikzcd}
0 & A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[l] & A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[l] & A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \arrow[l] \\
& \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[urr, "\delta^0"] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(A, \mathbb{Q}\right) \arrow[l] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \arrow[l] \\
& \mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}\left(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[urr, "\delta^1"] & \cdots\cdots \arrow[l] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Αφού κάθε στοιχειο του A έχει πεπερασμένη τάξη, είναι σαφές ότι $A \otimes \mathbb{Q} = 0$. Τώρα, θα δείξουμε ότι $\mathrm{Tor}_1^R\left(A, \mathbb{Q}\right) = 0$, και έτσι από το παραπάνω διάγραμμα θα έχουμε δείξει ότι

$$A \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right).$$

Θεωρούμε

$$P_\bullet^{\mathbb{Q}} : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\mathbb{Q}}} P_n^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\partial_n^{\mathbb{Q}}} P_{n-1}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\partial_{n-1}^{\mathbb{Q}}} \cdots \xrightarrow{\partial_2^{\mathbb{Q}}} P_1^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\partial_1^{\mathbb{Q}}} P_0^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\partial_0^{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q} \to 0$$

προβολική επίλυση του $\mathbb{Q}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $A \otimes_{\mathbb{Z}} -$ προκύπτει το αλυσωτό σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \left(P_\bullet^{\mathbb{Q}}\right) : \cdots\cdots \xrightarrow{A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_2^{\mathbb{Q}}} \underbrace{A \otimes_{\mathbb{Z}} P_1^{\mathbb{Q}}}_{1} \xrightarrow{A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_1^{\mathbb{Q}}} \underbrace{A \otimes_{\mathbb{Z}} P_0^{\mathbb{Q}}}_{0} \xrightarrow{A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_0^{\mathbb{Q}}} A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0 \to 0$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathrm{im}\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_1^{\mathbb{Q}}\right) = \ker\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_0^{\mathbb{Q}}\right) = A \otimes_{\mathbb{Z}} P_0.$$

Άρα, έχουμε ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R\left(A, \mathbb{Q}\right) = H_1^{\mathbb{Z}}\left(A, A \otimes_{\mathbb{Z}} \left(P_\bullet^{\mathbb{Q}}\right)\right) = \ker\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} P_0 \to 0\right) \Big/ \mathrm{im}\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_1^{\mathbb{Q}}\right) = A \otimes P_0 / A \otimes P_0 = 0.$$

■