Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες

Πρόχειρες Σημειώσεις

ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΑΛΕΖΙΟΥ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΜΠΙΖΑΝΟΣ

Αθήνα,
30 Μαρτίου 2023

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν αρχείο αποτελεί μια (πρόχειρη) μεταφορά των σημειώσεων του μαθήματος ''Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες'' το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2021/22 που διδάσκεται στο Πανεπιστήμιο Αθηνών από τον Γεώργιο Δαλέζιο. Στο παρόν αρχείο θα υπάρχουν αρκετά τυπογραφικά (και όχι μόνο) σφάλματα, οπότε θα ήταν αρκετά βοηθητικό αν μου τα επισημαίνατε στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο kostasbizanos@gmail.com.

Σχετικά με τις σημειώσεις, από τώρα και στο εξής θα υποθέτουμε ότι όλοι οι δακτύλιοι έχουν μονάδα και ότι οι ομομορφισμοί δακτυλίων απεικονίζουν την μονάδα στην μονάδα. Αρκετές φορές οι μονομορφισμοί θα συμβολίζονται με $X \rightarrowtail Y$ και οι επιμορφισμοί $X \twoheadrightarrow Y$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Πρότυπα **7**
- 1.1 Η έννοια του προτύπου . . . 7
- 1.2 Θεωρήματα Ισομορφισμών . . . 9
- 1.3 Ακριβείς Ακολουθίες . . . 10
- 1.4 Ευθέα Αθροίσματα και γινόμενα . . . 11
- 1.5 Ελεύθερα πρότυπα . . . 15
- 1.6 Διασπώμενες βραχείες ακριβείς ακολουθίες . . . 16
- 1.7 Προβολικά Πρότυπα . . . 18
- 1.8 Εμφυτευτικά και διαιρέσιμα πρότυπα . . . 20
- 1.9 Hom σύνολα και ακριβείς ακολουθίες . . . 23
- 1.10 Ασκήσεις . . . 24

2 Κατηγορίες **27**
- 2.1 Η έννοια της κατηγορίας . . . 27
- 2.2 Δυϊσμός . . . 33
- 2.3 Συναρτητές . . . 34
- 2.4 Φυσικοί Μετασχηματισμοί . . . 36
- 2.5 Προσαρτημένοι συναρτητές . . . 41
- 2.6 Όρια και Συνόρια . . . 43
- 2.7 Διάγραμμα εφέλκυσης και εξώθησης . . . 47

3 Τανυστικά Γινόμενα **49**
- 3.1 Ορισμοί . . . 49
- 3.2 Τανυστικά γινόμενα και προσάρτηση . . . 53
- 3.3 Εφαρμογές . . . 54
- 3.4 Επίπεδα πρότυπα . . . 56
- 3.5 Προσθετικοί και ακριβείς συναρτητές . . . 58
- 3.6 Εμφυτεύσεις σε ενριπτικά πρότυπα . . . 59

4 Συμπλέγματα **63**
4.1 Αλυσωτά συμπλέγματα 63
4.2 Ιδιάζουσα ομολογία 65
4.3 Συναλυσωτά συμπλέγματα 65
4.4 Ομοτοπία 66
4.5 Προβολικές επιλύσεις 69

5 Παραγόμενοι συναρτητές **75**
5.1 Αριστερά παραγόμενοι συναρτητές 75
5.2 Συναρτητές Tor 78
5.3 Παραγόμενοι συναρτητές και μακριές ακριβείς ακολουθίες 79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΟΤΥΠΑ

1.1 Η έννοια του προτύπου

Ορισμός 1.1.1. Έστω R δακτύλιος. Ένα **(αριστερό)** R **- πρότυπο** είναι μια αβελιανή ομάδα $(M,+)$ εφοδιασμένη με μια απεικόνιση $R \times M \xrightarrow{\varphi} M$ (δράση), όπου συμβολίζουμε $\varphi(r,m) = r \cdot m$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot m = \lambda_1 \cdot m + \lambda_2 \cdot m$

(β) $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot m = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot m)$

(γ) $1_R \cdot m = m$

(δ) $\lambda\,(m_1 + m_2) = \lambda \cdot m_1 + \lambda \cdot m_2$

για κάθε $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ και για κάθε $m, m_1, m_2 \in M$.

Παράδειγμα 1.1.1. (α) Έστω R δακτύλιος. Ο R είναι R - πρότυπο μέσω της δράσης :

$$R \times R \to R, \quad (r, r') \mapsto r \cdot r' \quad \text{(ο αντίστοιχος πολλαπλασιασμός του δακτυλίου } R\text{)}.$$

(β) Έστω k σώμα. Τα k - πρότυπα είναι k - διανυσματικοί χώροι .

(γ) Έστω $(M,+)$ αβελιανή ομάδα με $R = \mathbb{Z}$. Θεωρούμε τη δράση

$$\mathbb{Z} \times M \to M, \quad (z,m) \mapsto \begin{cases} \underbrace{m + \cdots + m}_{z-\text{φορές}}, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ (-z) \cdot m, & z < 0 \end{cases}.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η παραπάνω δράση δεν προσφέρει τίποτα το καινούριο στην αβελιανή ομάδα $(M,+)$.

(δ) Έστω R δακτύλιος και $I \subseteq R$ αριστερό ιδεώδες του R.

i. Αφού για κάθε $r \in R$ και $i \in I$ ισχύει ότι $r \cdot i \in I$, τότε φυσιολογικά ορίζεται δράση που ικανοποιεί τα (α) - (δ) του Ορισμού 1.1.1

ii. Ο δακτύλιος πηλίκο R/I μπορεί να θεωρηθεί ως R - πρότυπο μέσω της δράσης

$$r \cdot (x+I) \coloneqq r \cdot x + I, \quad \text{για κάθε } r \in R \text{ και για κάθε } x+I \in R/I.$$

(ε) Έστω $\varphi\colon R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Το S είναι R - πρότυπο μέσω της δράσης

$$R \times S \to S, \quad (r,s) \mapsto \varphi(r) \cdot s.$$

Ορισμός 1.1.2. Έστω M ένα R - πρότυπο και $N \subseteq M$ υποομάδα της $(M,+)$. Η N καλείται **R - υποπρότυπο** του M εαν η δράση $R \times M \xrightarrow{\varphi} M$ περιορίζεται στο N, δηλαδή για κάθε $n \in N$ και για κάθε $\lambda \in R$ έχουμε ότι $\varphi(\lambda, n) = \lambda \cdot n \in N$.

Επίσης, αν $N \subseteq M$ υποπρότυπο του M, τότε ορίζεται το πηλίκο M/N (ως αβελιανή ομάδα) και θεωρώ δράση

$$R \times (M/N) \to M/N, \quad r \cdot (m+N) \mapsto (r \cdot m) + N.$$

Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι η παραπάνω δράση είναι καλά ορισμένη.

Ορισμός 1.1.3. Έστω M, N δύο R - πρότυπα. Μια απεικόνιση $f\colon M \to N$ λέγεται

(α) **ομομορφισμός R - προτύπων (ή R - γραμμική)** εαν

i. η f είναι ομομομορφισμός (αβελιανών) ομάδων και

ii. για κάθε $\lambda \in R$ και για κάθε $m \in M$ ισχύει $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$.

(β) **μονομορφισμός R - προτύπων** εαν ομομορφισμός R - προτύπων και 1-1 ,

(γ) **επιμορφισμός R - προτύπων** εαν ομομορφισμός R - προτύπων και επί ,

(δ) **ισομορφισμός R - προτύπων** εαν ομομορφισμός R - προτύπων, 1-1 και επί. Αν $f\colon M \to N$ ισομορφισμός R - προτύπων λέμε ότι τα M και N είναι ισόμορφα και συμβολίζουμε $M \cong N$.

Ορισμός 1.1.4. Έστω $f\colon M \to N$ ομομορφισμός R - προτύπων. Ορίζονται τα εξής R - πρότυπα :

(α) ο **πυρήνας** της f που ορίζεται ως $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$,

(β) η **εικόνα** της f που ορίζεται ως $\mathrm{Im} f = \{n \in N \mid \text{ υπάρχει } m \in M \ : f(m) = n\}$,

(γ) ο **συνπυρήνας** της f που ορίζεται ως $\mathrm{coker} f \coloneqq N/\mathrm{Im} f$.

Παρατήρηση 1.1.1. Έστω $f\colon M \to N$ ομομορφισμός R - προτύπων.

(α) Η f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker f = \{0\}$.

(β) Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\mathrm{coker} f = \{0\}$.

1.2 Θεωρήματα Ισομορφισμών

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $f\colon M \to N$ ομομορφισμός R - προτύπων και $B \subseteq \ker f$ (εγκλεισμός υποπροτύπων). Τότε υπάρχει $\tilde{f}\colon M/B \to N$ μοναδικός ομομορφισμός R - προτύπων ώστε $f = \tilde{f} \circ \pi$, όπου $\pi\colon M \to M/B$ με $\pi(m) = m + B$.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\
M/B \arrow[ur, "\exists! \tilde{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

Επιπλέον,

- εαν η f είναι επιμορφισμός, τότε και η $\tilde{f}$ είναι επιμορφισμός.
- εαν $B = \ker f$, τότε η $\tilde{f}$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\tilde{f}\colon M/B \to N$ με $\tilde{f}(m+B) = f(m)$.

- Η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $m + B = m' + B$ έχουμε ότι $m - m' \in B \subseteq \ker f$ επομένως $f(m - m') = f(m) - f(m') = 0 \Rightarrow f(m) = f(m')$.
- Είναι άμεσο ότι $\tilde{f}$ είναι ομομορφισμός R - προτύπων. και ότι η $\tilde{f}$ είναι η μοναδική που ικανοποιεί τη σχέση $f = \tilde{f} \circ \pi$.
- Υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός R - προτύπων. Αν $n \in N$, τότε υπάρχει $m \in M$ ώστε $f(m) = n$, επομένως έχουμε ότι $\tilde{f}(m + B) = f(m) = n$.
- Αν $B = \ker f$ τότε έχουμε ότι $m + \ker f \in \ker \tilde{f}$ αν $\tilde{f}(m+B) = f(m) = 0 \Rightarrow m \in \ker f$. Έτσι προκύπτει ότι $\ker \tilde{f} = \{0\}$.

□

Πόρισμα 1.2.1 (Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών)**.** Έστω $f\colon M \to N$ ομομορφισμός R - προτύπων. Τότε υπάρχει ισομορφισμός R - προτύπων ώστε $M/\ker f \cong \mathrm{Im} f$. Ειδικότερα, αν η f είναι επί τότε $M/\ker f \cong N$.

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεώρημα 1.2.1 θεωρώντας την $\tilde{f}\colon M \to \mathrm{Im} f$ (περιορισμός της f στην $\mathrm{Im} f$).

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Im} f \\
M/\ker f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

Πόρισμα 1.2.2 (Δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών)**.** Έστω M ένα R - πρότυπα και N, P υποπρότυπο του M. Θεωρούμε τα $N + P = \{n + p \mid n \in N,\ p \in P\}$ και $N \cap P$ υποπροτυπά του M και των N, P αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι
$$P/_{N \cap P} \cong (N + P)/_{N}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την R - γραμμική απεικόνιση $P \xrightarrow{j} P + N \xrightarrow{\pi} (N + P)/_{N}$, όπου $j(p) = p$ για κάθε $p \in P$.

- Η απεικόνιση $\pi \circ j$ είναι επί. Πράγματι, αν $(n + p) + N = p + N$, τότε έχουμε ότι $\pi \circ j(p) = (n + p) + N$.
- $\ker(\pi \circ j) = \{p \in P \mid p + N = 0 + N\} = \{p \in P \mid p \in N\} = N \cap P$.

Από το Πόρισμα 1.2.1 προκύπτει ότι $P/_{N \cap P} \cong (N + P)/_{N}$. □

1.3 Ακριβείς Ακολουθίες

Ορισμός 1.3.1. Έστω $A \xrightarrow{f} B$ και $B \xrightarrow{g} C$ ομομορφισμοί R - προτύπων. Η ακολουθία
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
λέγεται **ακριβής στο** B εαν $\ker g = \mathrm{Im} f$. Γενικότερα, η ακολουθία
$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n\ ,$$
με $A_1, \dots, A_n$ να είναι R - πρότυπα και $f_1, \dots, f_{n-1}$ να είναι R - γραμμικές απεικόνισεις, λέγεται **ακριβής** εαν οι επιμέρους ακολουθίες
$$A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1}$$
είναι ακριβείς, δηλαδή αν $\ker f_i = \mathrm{Im}(f_{i-1})$ για κάθε $i = 2, \dots, n-1$.

Πρόταση 1.3.1. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Η ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής (στο A) αν και μόνο αν η f είναι μονομορφισμός.

(β) Η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \to 0$ είναι ακριβής (στο B) αν και μόνο αν η f είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. (α) Η $0 \to A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής (στο A) αν και μόνο αν $\ker f = \{0\} = \mathrm{Im}\,(0 \to A)$.

(β) Η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \to 0$ είναι ακριβής (στο B) αν και μόνο αν $\mathrm{Im} f = B = \ker\,(B \to 0)$.

□

Πρόταση 1.3.2. Εαν $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι ακριβής ακολουθία, τότε υπάρχει ισομορφισμός $B/A \cong C$.

Απόδειξη. Από την ακρίβεια στο A έχουμε ότι η απεικόνιση f είναι μονομορφισμός και από την ακρίβεια στο C προκύπτει ότι g είναι επιμορφισμός. Επίσης, από την ακρίβεια στο B έχουμε ότι $\ker g = \mathrm{Im} f$. Από το Πόρισμα 1.2.1 προκύπτει ότι $A/\ker f \cong \mathrm{Im} f \Rightarrow A \cong \mathrm{Im} f$. Επομένως, ισχύει ότι $A \cong \ker g$, και αφού από το Πόρισμα 1.2.1 για την g έχουμε ότι $B/\ker g \cong \mathrm{Im} g$ τελικά προκύπτει ότι $B/A \cong C$. □

Ορισμός 1.3.2. Οι ακριβείς ακολουθίες της μορφής $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ λέγονται **βραχείες ακριβείς ακολουθίες** (short exact sequences).

Παρατήρηση 1.3.1. Έστω $A \xrightarrow{f} B$ ομομορφισμός R - προτύπων. Τότε επάγεται ακριβής ακολουθία

$$0 \to \ker f \xrightarrow{\mathrm{i}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker} f \to 0. \tag{1.1}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

- Η απεικόνιση i είναι μονομορφισμός, άρα η ακολουθία 1.1 είναι ακριβής στο $\ker f$.
- Η ακολουθία 1.1 είναι ακριβής στο A αφού $\mathrm{Im(i)} = \ker f$.
- Η ακολουθία 1.1 είναι ακριβής στο B αφού $\mathrm{Im}(f) = \ker \pi$, όπου $\pi \colon B \to \mathrm{coker} f$ με $\pi(b) = b + \mathrm{Im} f$.
- Η ακολουθία 1.1 είναι ακριβής στο $\mathrm{coker} f$ αφού $\mathrm{Im}\pi = \ker(\mathrm{coker} f \to 0) = \mathrm{coker} f$.

□

1.4 Ευθέα Αθροίσματα και γινόμενα

Ορισμός 1.4.1. Έστω A, B δύο R - πρότυπα. Αν $S = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ και ορίζουμε

- $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$, για κάθε $(a, b), (a', b') \in S$
- $\lambda \cdot (a, b) := (\lambda a, \lambda b)$, για κάθε $\lambda \in R$ και $(a, b) \in S$.

Το S με τις παραπάνω πράξεις ορίζει ένα R πρότυπο, το οποίο συμβολίζεται με $A \oplus B$, και ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των A, B.

Παρατήρηση 1.4.1. Για A, B όπως στον Ορισμό 1.4.1 υπάρχουν μονομορφισμοί $A \xrightarrow{i_A} A \oplus B$ με $i_A(a) = (a, 0)$ και $B \xrightarrow{i_B} A \oplus B$ με $i_B(b) = (0, b)$.

Πρόταση 1.4.1. Έστω M, N δύο R - πρότυπα και γραμμικές $\psi_M\colon M \to X$ και $\psi_N\colon N \to X$, όπου X ένα R - πρότυπο. Τότε υπάρχει μοναδική $u\colon M \oplus N \to X$ τέτοια ώστε $u \circ i_M = \psi_M$ και $u \circ i_N = \psi_N$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "i_M"] \arrow[drr, bend left, "\psi_M"] & & \\
& M \oplus N \arrow[r, "\exists ! u"] & X \\
N \arrow[ur, "i_N"] \arrow[urr, bend right, "\psi_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι απαραίτητο για να ισχύουν οι δύο ζητούμενες σχέσεις είναι να ισχύει

$$u\left(i_M(m)\right) = \psi_M(m) \Rightarrow u(m,0) = \psi_M(m), \quad \text{για κάθε } m \in M \tag{1.2}$$

και

$$u\left(i_N(n)\right) = \psi_N(n) \Rightarrow u(0,n) = \psi_N(n), \quad \text{για κάθε } n \in N \tag{1.3}$$

Επίσης, η ζητούμενη u πρέπει να είναι γραμμική. Επομένως αφού $(m,n) = (m,0) + (0,n)$ για κάθε $(m,n) \in M \oplus N$, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι

$$u(m,n) = u(m,0) + u(0,n) = \psi_M(m) + \psi_N(n).$$

Συνεπώς, ορίζουμε $u\colon M \oplus N \to X$ με $u(m,n) = \psi_M(m) + \psi_N(n)$, η οποία είναι γραμμική (άσκηση) και μοναδική λόγω των παραπάνω. □

Πρόταση 1.4.2. Η ιδιότητα της Πρότασης 1.4.1 χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα ως προς ισομορφισμό.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει R - πρότυπο W μαζί με μονομορφισμούς $M \xrightarrow{j_M} W \xleftarrow{j_N} N$ τέτοιο ώστε για κάθε R - πρότυπο X και για κάθε $M \xrightarrow{\varphi_M} X \xleftarrow{\varphi_N} N$ να υπάρχει μοναδική R - γραμμική $\tau\colon W \to X$ με $\varphi_M = \tau \circ j_M$ και $\varphi_N = \tau \circ j_N$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "j_M"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_M"] & & \\
& W \arrow[r, "\exists ! \tau"] & X \\
N \arrow[ur, "j_N"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ιδιότητα του W στο παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "j_M"] \arrow[drr, bend left, "i_M"] & & \\
& W \arrow[r, "\tau"] & M \oplus N \\
N \arrow[ur, "j_N"] \arrow[urr, bend right, "i_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Επίσης από την ιδιότητα του $M \oplus N$ από την Πρόταση 1.4.1 θεωρούμε το διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "i_M"] \arrow[drr, bend left, "j_M"] & & \\
& M \oplus N \arrow[r, "u"] & W \\
N \arrow[ur, "i_N"] \arrow[urr, bend right, "j_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $u \circ \tau = \mathrm{id}_W$ και $\tau \circ u = \mathrm{id}_{M\oplus N}$. Παρατηρούμε ότι $u \circ \tau \circ j_M = u \circ i_M = j_M$ και $u \circ \tau \circ j_N = u \circ i_N = j_N$. Αφού $\mathrm{id}_W \circ j_M = j_M$ και όμοια $\mathrm{id}_W \circ j_M = j_M$, λόγω της μοναδικότητας (ιδιότητα του W) θα πρέπει $u \circ \tau = \mathrm{id}_W$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "j_M"'] \arrow[dr, bend left, "j_M"] & \\
W \arrow[r, "u\circ\tau", "\mathrm{id}_W"'] & W \\
N \arrow[u, "j_N"] \arrow[ur, bend right, "j_N"'] &
\end{tikzcd}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\tau \circ u = \mathrm{id}_{M\oplus N}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. □

Ορισμός 1.4.2. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων. Ορίζουμε ως **ευθύ γινόμενο** των $\{M_i\}_{i\in I}$ το σύνολο

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{\{m_i\}_{i\in I} \mid m_i \in M_i \text{ για κάθε } i \in I\right\}.$$

Το σύνολο $\prod_{i\in I} M_i$ αποκτά δομή R - προτύπου με πράξεις :

$$\{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I} \coloneqq \{a_i + b_i\}_{i\in I} \quad \text{και} \quad \lambda \cdot \{a_i\}_{i\in I} \coloneqq \{\lambda a_i\}_{i\in I}.$$

Ορισμός 1.4.3. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων. Ορίζουμε ως **ευθύ άθροισμα** των $\{M_i\}_{i\in I}$ το σύνολο

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{\{m_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \exists J \subseteq I \text{ με } \operatorname{card}(J) < \infty \text{ τέτοιο ώστε } m_i = 0, \text{ για κάθε } i \in I \setminus J\right\}.$$

Το σύνολο $\bigoplus_{i\in I} M_i$ αποκτά δομή R - προτύπου με πράξεις :

$$\{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I} \coloneqq \{a_i + b_i\}_{i\in I} \quad \text{και} \quad \lambda \cdot \{a_i\}_{i\in I} \coloneqq \{\lambda a_i\}_{i\in I}.$$

Επίσης, ορίζονται οι εμφυτεύσεις $M_j \xhookrightarrow{\varphi_j} \bigoplus_{i\in I} M_i$, για κάθε $i \in I$.

Πρόταση 1.4.3 (καθολική ιδιότητα ευθέως αθροίσματος)**.** Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων και $\left\{M_i \xrightarrow{\psi_i} X\right\}_{i\in I}$ οικογένεια R - γραμμικών απεικονίσεων, όπου X είναι ένα R - πρότυπο. Τότε, υπάρχει μοναδική $u\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ R - γραμμική ώστε $u \circ \varphi_i = \psi_i$, για κάθε $i \in I$. Η παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα ως προς μοναδικό ισομορφισμό.

Απόδειξη. Θεωρήστε την απεικόνιση $u\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ με $u = \sum_{i\in I} \psi_i$. Από τον ορισμό της u το ζητούμενο αποδεικνύεται όμοια με τις Προτάσεις 1.4.1,1.4.2 □

Πρόταση 1.4.4 (καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου)**.** Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων και $\left\{X \xrightarrow{\psi_i} M_i\right\}_{i\in I}$ οικογένεια R - γραμμικών απεικονίσεων, όπου X είναι ένα R - πρότυπο. Τότε, υπάρχει μοναδική R - γραμμική $u\colon X \to \prod_{i\in I} M_i$ ώστε $\psi_i = \pi_i \circ u$, για κάθε $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! u"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.4.5. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ οικογένεια R - προτύπων και X ένα R πρότυπο. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, X\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, X\right).$$

Θυμίζουμε ότι αν M, N δύο R - πρότυπα ορίζουμε ως

$$\operatorname{Hom}_R(M,N) = \{\varphi\colon M \to N \mid \text{η απεικόνιση } \varphi \text{ είναι } R-\text{γραμμική}\}$$

η οποία είναι μια αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση απεικονίσεων.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\mathbb{Z}$ - γραμμική (γιατί;) απεικόνιση

$$\psi\colon \operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, X\right) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, X\right), \quad \psi(f) = \{f\circ\varphi_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, X\right).$$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, hook, "\varphi_i"] \arrow[dr, "f\circ\varphi_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Η ψ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Πράγματι, αν $\{\psi_i\colon M_i \to X\} \in \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, X\right)$, τότε από την Πρόταση 1.4.3 υπάρχει μοναδική $u\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ ώστε $u\circ\varphi_i = \psi_i$, για κάθε $i \in I$. Από την τελευταία σχέση είναι σαφές ότι $\psi(u) = \{u\circ\varphi_i\}_{i\in I}$ και έτσι έχουμε δείξει τον ζητούμενο ισχυρισμό. □

1.5 Ελεύθερα πρότυπα

Ορισμός 1.5.1. Έστω M ένα R - πρότυπο και $S \subseteq M$. Ορίζουμε ως **γραμμική θήκη** του S το σύνολο

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \in R,\ s_i \in M\}.$$

Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι

$$\langle S \rangle = \bigcap \{N \mid S \subseteq N \text{ και } N \text{ είναι } R- \text{ υποπρότυπο του } M\}.$$

Ορισμός 1.5.2. Έστω M ένα R - πρότυπο και $S \subseteq M$. Αν $M = \langle S \rangle$, το S λέγεται **σύνολο γεννητόρων** του M. Ειδικότερα, αν $\operatorname{card}(S) < \infty$, τότε το M λέγεται **πεπερασμένα παραγόμενο** R - πρότυπο. Στην περίπτωση αυτή αν $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ γράφουμε $M = Rs_1 + \cdots + Rs_n$.

Ορισμός 1.5.3. Ένα σύνολο γεννητόρων S ενός R - προτύπου M λέγεται **βάση** εαν κάθε στοιχείο του M γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S.

Πρόταση 1.5.1. Ένα σύνολο γεννητόρων S του M είναι βάση αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή αν $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S$ τότε

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = 0 \Rightarrow s_1 = \cdots = s_n = 0.$$

Ορισμός 1.5.4. Ένα R - πρότυπο καλέιται **ελεύθερο** αν έχει βάση.

Παράδειγμα 1.5.1. (α) Έστω R δακτύλιος. Το $R = \langle \{1\} \rangle$ είναι ένα R - ελεύθερο πρότυπο.

(β) Αν R δακτύλιος, τότε το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i \in I} R_i$, όπου $R_i = R$, είναι ελεύθερο αφού μια βάση του είναι το σύνολο

$$\left\{ e_i = \{\delta_{ij}\}_{j \in I} \mid \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j = i \\ 0, & \text{αν } j \neq i \end{cases} \right\}_{i \in I}.$$

(γ) Οι διανυσματικοί χώροι είναι ελευθέρα πρότυπα. [1]

(δ) Έστω $R = \mathbb{Z}$ και $n \geq 2$. Παρατηρούμε ότι $M = \mathbb{Z}_n = \langle 1 + n\mathbb{Z} \rangle$, αλλά $n \cdot (1 + n\mathbb{Z}) = 0$, επομένως το $\{1 + n\mathbb{Z}\}$ δεν είναι βάση του $\mathbb{Z}_n$. Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $S \subseteq M$ με $M = \langle S \rangle$, τότε $n \cdot S = 0$ επομένως συμπεραίνουμε ότι το M δεν είναι ελεύθερο R - πρότυπο (με τη συνήθη δράση).

Θεώρημα 1.5.1. Έστω M ένα R - πρότυπο. Τότε, υπάρχει F ελευθέρο R - πρότυπο και $F \xrightarrow{\varepsilon} M$ επιμορφισμός R - προτύπων.

[1] Η ύπαρξη βάσης σε τυχαίο διανυσματικό αποδεικνύεται με χρήση του λήμματος του Zorn, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής.

Απόδειξη. Έστω S ένα σύνολο γεννητόρων του M (ενδεχομένως να είναι και το ίδιο το M). Θεωρούμε το R - πρότυπο $F = \bigoplus_{s\in S} R_s$ όπου $R_s = R$ και $R_s = R \xrightarrow{\varphi_s} M$ με $\varphi_s(r) = r \cdot s$. Από την Πρόταση 1.4.3 υπάρχει μοναδική R - γραμμική $u\colon F \to M$ ώστε

$$u\left(\sum_{s\in S} r_s e_s\right) = \sum_{s\in S} r_s s$$

Τέλος, η απεικόνιση u είναι επιμορφισμός R - προτύπων αφού $M = \langle S\rangle$. □

Πόρισμα 1.5.1. Ένα R - πρότυπο M είναι ελευθερο αν και μόνο αν είναι ισόμορφο με $\bigoplus_{i\in I} R_i$ με $R_i = R$, για κάθε $i \in I$ όπου I κάποιο σύνολο δεικτών.

Απόδειξη. Αν το M είναι ισόμορφο με $\bigoplus_{i\in I} R_i$, όπου $R_i = R$, για κάθε $i \in I$ όπου I κάποιο σύνολο δεικτών, τότε υπάρχει $\varphi\colon \bigoplus_{i\in I} R_i \to M$ ισομορφισμός R - πρότυπων. Τότε, είναι σαφές ότι $\{\varphi(e_i)\}_{i\in I}$ είναι βάση του M, δηλαδή το M είναι ελεύθερο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι M είναι ελεύθερο και έστω S μια βάση του. Θεωρούμε τον αντίστοιχο επιμόρφισμό $u\colon \bigoplus_{i\in I} R_i \to M$ που ορίσθηκε στο Θεώρημα 1.5.1 για το σύνολο γεννητόρων S. Η u η είναι 1-1, επειδή το S είναι βάση του M, επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

1.6 Διασπώμενες βραχείες ακριβείς ακολουθίες

Πρόταση 1.6.1. Έστω $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R - προτύπων. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Υπάρχει R - γραμμική $r\colon B \to A$ τέτοια ώστε $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

(β) Υπάρχει R - γραμμική $s\colon C \to B$ τέτοια ώστε $\varepsilon \circ s = \mathrm{id}_C$.

(γ) Υπάρχει $\psi\colon B \to A \oplus C$ ισομορφισμός R - προτύπων τέτοιος ώστε $\psi \circ i = j_A$ και $\psi \circ \pi_C = \varepsilon$, όπου $j_A(a) = (a, 0)$ και $\pi_C(a, c) = c$, για κάθε $a \in A$ και $c \in C$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση αποδεικνύοντας διαδοχικά (β) → (α) → (γ) → (β).

- (β) → (α) : Υποθέτουμε ότι υπάρχει $s\colon C \to B$ με $\varepsilon \circ s = \mathrm{id}_C$. Για κάθε $b \in B$, παρατηρούμε ότι
$$\varepsilon\left(b - s \circ \varepsilon(b)\right) = \varepsilon(b) - \varepsilon \circ s\left(\varepsilon(b)\right) = \varepsilon(b) - \varepsilon(b) = 0.$$
Επομένως, έχουμε ότι $b - s\circ\varepsilon(b) \in \ker\varepsilon = \mathrm{im}(i)$ δηλαδή υπάρχει $a \in A$ ώστε $i(a) = b - s\circ\varepsilon(b)$. Το a που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία είναι μοναδικό, αφού i ειναι 1-1 απεικόνιση. Έτσι ορίζουμε $r\colon B \to A$ με $r(b) = a$, η οποία μάλιστα είναι γραμμική. Θέλουμε να δείξουμε ότι $r \circ i(a) = a$, για κάθε $a \in A$, το οποίο ισχύει από την κατασκευή της r.

- (α) → (γ) Έστω ότι υπάρχει $r \colon B \to A$ με $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Ορίζουμε $\psi \colon B \to A \oplus C$ με $\psi(b) = (r(b), \varepsilon(b))$, η οποια είναι R - γραμμική. Για την μεταθετικότητα του διαγράμματος παρατηρούμε ότι

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "i"] \arrow[d, equal] & i(a) \arrow[r, mapsto, "\psi"] & (r(i(a)), \varepsilon(i(a))) = (a,0) \arrow[d, equal] \\ a \arrow[rr, mapsto, "j_A"] & & (a,0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto, "\varepsilon"] \arrow[d, mapsto, "\psi"'] & \varepsilon(b) \arrow[d, equal] \\ (r(b), \varepsilon(b)) \arrow[r, mapsto, "\pi_C"] & \varepsilon(b) \end{tikzcd}$$

  Η ψ είναι 1-1. Πράγματι, έστω $b \in B$ με $\psi(b) = 0$, δηλαδή $r(b) = 0$ και $\varepsilon(b) = 0$. Αφού $\varepsilon(b) = 0$, τότε $b \in \ker \varepsilon = \mathrm{im}(i)$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in A$ ώστε $b = i(a)$, άρα έχουμε ότι $r(b) = r \circ i(a) = a = 0$, άρα και $b = 0$

  Η ψ είναι επί. Πράγματι, έστω $(a, b) \in A \oplus C$. Αφού ε είναι επί, τότε υπάρχει $b \in B$ ώστε $\varepsilon(b) = c$. Αν $y = b + i(a) - i \circ r(b) \in B$, τότε παρατηρούμε ότι $\psi(y) = (a, b)$.

- (γ) → (β) Έστω $c \in C$. Θεωρούμε $s(c) = \psi^{-1} \circ j_C(c)$ και παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon \circ s(c) = \varepsilon \circ \psi^{-1}(0, c) = \pi_C(0, c) = c.$$

□

Ορισμός 1.6.1. Μια βραχεία ακριβής ακολουθία που ικανοποιεί τις συνθήκες 1.6.1 λέγεται **διασπώμενη** .

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αν F ελεύθερο R - πρότυπο, τότε κάθε β.α.α. $0 \to A \to B \to F \to 0$ διασπάται. Για να αποδειχθεί το παραπάνω αποτέλεσμα χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.6.1 (γραμμικής επέκτασης)**.** *Έστω W ελεύθερο πρότυπο με βάση S. Αν $S \xrightarrow{f} N$ συνάρτηση (συνόλων), τότε υπάρχει μοναδική γραμμική $\tilde{f} \colon W \to N$ ώστε $\tilde{f}(s) = f(s)$, για κάθε $s \in S$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{f} \colon W \to N$, όπου αν $m = \sum_{s \in S} r_s \cdot s \in W$, τότε έχουμε $\tilde{f}(m) = \sum_{s \in S} r_s f(s)$. □

Πρόταση 1.6.2. *Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία R- προτύπων $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} F \to 0$, όπου F ένα ελεύθερο R - πρότυπο, διασπάται.*

Απόδειξη. Έστω S μια βάση του F. Αφού ε είναι επί, τότε για κάθε $s \in S$ υπάρχει $b_s \in B$ ώστε $\varepsilon(b_s) = s$. Επομένως ορίζουμε την $S \xrightarrow{f} B$ με $s \mapsto b_s$. Από το Λήμμα 1.6.1 υπάρχει μοναδική R - γραμμική $\tilde{f} \colon F \to B$ που επεκτείνει την f και θα δείξουμε ότι $\varepsilon \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_F$. Πράγματι, αν $x = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n$ με $s_i \in S$ και $r_i \in R$ τότε έχουμε ότι

$$\varepsilon \circ \tilde{f}(x) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{f}(s_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\varepsilon \circ \tilde{f}(s_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = x.$$

□

Η τελευταία πρόταση μπορεί να γενικευτεί ως εξής :

Πρόταση 1.6.3. Έστω βραχεία ακριβής ακολουθία R- προτύπων $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ και R - γραμμική $F \xrightarrow{\pi} C$, όπου F ελεύθερο R - πρότυπο. Τότε, υπάρχει R - γραμμική $\tilde{\pi}\colon F \to B$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} & & & F \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω S βάση του F. Αφού $\pi(s) \in C$ και ε είναι επί υπάρχει $b_s \in B$ ώστε $\varepsilon(b_s) = \pi(s)$, για κάθε $s \in S$. Επομένως, ορίζεται $S \xrightarrow{f} B$ με $s \mapsto b_s$ η οποία από το Λήμμα 1.6.1 επεκτείνεται σε R - γραμμική $\tilde{\pi}\colon F \to B$ και πληροί την ιδιότητα $\varepsilon \circ \tilde{\pi} = \pi$. □

1.7 Προβολικά Πρότυπα

Ορισμός 1.7.1. Ένα R - πρότυπο P καλείται **προβολικό** εαν για κάθε επιμορφισμό R - προτύπων $B \xrightarrow{\varepsilon} C$ και R - γραμμική $P \xrightarrow{\pi} C$, τότε υπάρχει $P \xrightarrow{\tilde{\pi}} B$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \end{tikzcd}$$

Θεώρημα 1.7.1. Έστω R - πρότυπο M. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Το M είναι προβολικό.

(β) Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \to A \to B \to M \to 0$ διασπάται.

(γ) Υπάρχει ελεύθερο R - πρότυπο F ώστε $F \cong M \oplus K$, για κάποιο R - πρότυπο K.

Απόδειξη.
- (α) → (β) Θεωρούμε $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ βραχεία ακριβή ακολουθία. Θεωρούμε το διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon"] & M \end{tikzcd}$$

  το οποίο υπάρχει λόγω του (α) και μάλιστα ικανοποιείται η σχέση $\varepsilon \circ \tilde{\pi} = \mathrm{id}_M$. Από την Πρόταση 1.6.1 (β) έχουμε το ζητούμενο.

- (β) → (γ) Από το Θεώρημα 1.5.1 υπάρχει επιμορφισμός $F \xrightarrow{\varepsilon} M$, όπου F ένα R - ελεύθερο πρότυπο. Θεωρούμε την β.α.α. R - προτύπων $0 \to \ker \varepsilon \to F \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$, η οποία από το (β) διασπάται. Από την Πρόταση 1.6.1 (γ) προκύπτει ότι $F \cong M \oplus \ker \varepsilon$.

- (γ) → (α) Έστω $B \xrightarrow{\varepsilon} C$ επιμορφισμός R - προτύπων και $M \xrightarrow{\pi} C$. Τότε, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
& M \oplus K \cong F \arrow[d, "p_M"] \arrow[ddl, bend right, "\tilde{\pi}"'] \\
& M \arrow[u, bend left, "j_M"] \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\varepsilon"] & C
\end{tikzcd}$$

  Επειδή $M \oplus K \xrightarrow{\pi \circ p_M} C$ είναι R - γραμμική και $M \oplus K \cong F$ ελεύθερο, υπάρχει R - γραμμική $M \oplus K \xrightarrow{\tilde{\pi}} B$ ώστε να ισχύει $\varepsilon \circ \tilde{\pi} = \pi \circ p_M$. Τότε, έχουμε ότι $M \xrightarrow{\tilde{\pi} \circ j_M} B$ είναι R - γραμμική και μάλιστα $\varepsilon \circ \tilde{\pi} \circ j_M = \pi \circ p_M \circ j_M = \pi \circ \mathrm{id}_M = \pi$.

$\square$

Υπενθυμίζουμε ότι αν R είναι μια περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε υποπρότυπα R - ελεύθερων προτύπων είναι ελεύθερα.

Πρόταση 1.7.1. Έστω R περιοχή κύριων ιδεωδών. Τότε ένα R - πρότυπο M είναι ελεύθερο αν και μόνο αν είναι προβολικό.

Απόδειξη. Ο ευθύς ισχυρισμός ισχύει πάντα λόγω της Πρότασης 1.6.3. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι M είναι προβολικό πρότυπο. Τότε, υπάρχει R - ελεύθερο πρότυπο F ώστε $F \cong M \oplus K$, όπου K κάποιο R - πρότυπο. Τότε, $M \hookrightarrow M \oplus K \cong F$, άρα το M μπορεί να θεωρηθεί ως υποπρότυπο του F και από την παραπάνω υπενθύμιση συμπεραίνουμε ότι M είναι ελεύθερο. $\square$

Πρόταση 1.7.2. Έστω $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων. Τότε $\bigoplus_{i \in I} M_i$ είναι προβολικό αν και μόνο αν M_i είναι προβολικό, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Έστω ότι M_i είναι προβολικό, δηλαδή υπάρχει F_i ελεύθερο R - πρότυπο τέτοιο ώστε $F_i \cong M_i \oplus K_i$, για κάποιο K_i ένα R - πρότυπο και για κάθε $i \in I$. Τότε, έχουμε ότι

$$\bigoplus_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \oplus K_i) \cong \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} K_i \right).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $\bigoplus_{i \in I} M_i$ είναι προβολικό, δηλαδή υπάρχει F ένα ελεύθερο R - πρότυπο ώστε $F \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \oplus K$. Για κάθε $j \in I$, γράφουμε ως εξής :

$$F \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \oplus K \cong M_j \oplus \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{j\}} M_i \oplus K \right) ,$$

άρα το M_j είναι προβολικό. $\square$

1.8 Εμφυτευτικά και διαιρέσιμα πρότυπα

Παρατήρηση 1.8.1. Εαν στον Ορισμό 1.7.1 του προβολικού προτύπου ''αντιστρέψουμε τα βέλη '' και γράψουμε ''μονομορφισμός'' αντί για επιμορφισμός επάγεται μια δυϊκή έννοια σε σχέση με αυτή του προβολικού προτύπου.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad \text{α.α.} \quad
\begin{tikzcd}
 & P & \\
B \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & C \arrow[l, "i"] \arrow[u, "f"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\quad \text{α.α.}
$$

Ορισμός 1.8.1. Ένα R - πρότυπο καλείται **ενριπτικό ή εμφυτευτικο** (injective) εαν για κάθε μονομορφισμό R - προτύπων $A \xrightarrow{i} B$ και R - γραμμική $A \xrightarrow{f} I$, υπάρχει R - γραμμική $B \xrightarrow{\tilde{f}} I$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό, δηλαδή $\tilde{f} \circ i = f$.

$$
\begin{tikzcd}
I & \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[ul, dashed, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}
$$

Παρατήρηση 1.8.2. Έστω D αβελιανή ομάδα η οποία είναι ενριπτική. Για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ θεωρούμε την απεικόνιση $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ και για κάθε $d \in D$ ορίζουμε την $\varphi_d \colon \mathbb{Z} \to D$ με $1 \mapsto d$ και την επεκτείνουμε γραμμικά. Άρα, έχουμε ότι

$$
\begin{tikzcd}
D & \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "\varphi_d"] \arrow[r, hook, "\cdot n"] & \mathbb{Z} \arrow[ul, dashed, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}
$$

Άρα, υπάρχει R - γραμμική $\mathbb{Z} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} D$ με $\tilde{\varphi}(n) = \varphi_d(1) = d \Leftrightarrow n \cdot \tilde{\varphi}(1) = d$. Γενικότερα, αν R είναι μια ακέραια περιοχή και D ενριπτικό για κάθε $r \in R \setminus \{0\}$ έχουμε ότι

$$
\begin{tikzcd}
D & \\
R \arrow[u, "\varphi_d"] \arrow[r, hook, "\cdot r"] & R \arrow[ul, dashed, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}
$$

όπου προκύπτει ότι $r \cdot \tilde{\varphi}(1) = d$.

Ορισμός 1.8.2. Έστω R μια ακέραια περιοχή. Ένα R - πρότυπο D καλείται **διαιρέσιμο** (divisible) εαν για κάθε $d \in D$ και κάθε $r \in R \setminus \{0\}$ υπάρχει $c \in D$ ώστε $r \cdot c = d$.

Παράδειγμα 1.8.1. Το $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$ - πρότυπο είναι διαιρέσιμο, αφού για κάθε $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ και $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ έχουμε ότι $\lambda \left(\frac{m}{\lambda n} \right) = \frac{m}{n}$.

Πρόταση 1.8.1. Έστω R ακέραια περιοχή.

(α) Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ οικογένεια διαιρέσιμων R - προτύπων. Τότε τα R - πρότυπα $\bigoplus_{i\in I} M_i$ και $\prod_{i\in I} M_i$ είναι διαιρέσιμα.

(β) Έστω D διαιρέσιμο R - πρότυπο και $N \subseteq D$ ένα R - υποπρότυπο. Τότε, το R - πρότυπο ${}^{D}/_{N}$ είναι διαιρέσιμο.

Απόδειξη. (α) Έστω $d = \{m_i\} \in \prod_{i\in I} M_i$ και $r \in R \setminus \{0\}$. Αφού το M_i είναι διαιρέσιμο, υπάρχει $c_i \in M_i$ ώστε $r \cdot c_i = d_i$, για κάθε $i \in I$. Έτσι, αν $c = \{c_i\}_{i\in I}$ έχουμε ότι $r \cdot c = d$. Ομοίως δείχνουμε ότι το $\bigoplus_{i\in I} M_i$ είναι διαιρέσιμο.

(β) Έστω $d + N \in {}^{D}/_{N}$ και $r \neq 0$. Τότε, υπάρχει $c \in D$ ώστε $r \cdot c = d$, επομένως έχουμε ότι $r \cdot (c + N) = d + N$.

□

Πρωτού προχωρήσουμε στο ακόλουθο θεώρημα υπενθυμίζουμε το λήμμα του Zorn, που ισοδυναμεί με το αξίωμα της επιλογής, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 1.8.1 (Zorn)**.** Έστω P ένα μερικά διατεγμένο σύνολο με την ιδιότητα κάθε αλυσίδα στον P να έχει άνω φράγμα στο P. Τότε το P περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Θεώρημα 1.8.1. Έστω R περιοχή κύριων ιδεωδών. Τότε ένα R - πρότυπο M είναι διαιρέσιμο αν και μόνο αν είναι ενριπτικό.

Απόδειξη. Ο αντίστροφος ισχυρισμός αποδείχθηκε παραπάνω. Για τον ευθύ ισχυρισμό, υποθέτουμε ότι M είναι ένα διαιρέσιμο R - πρότυπο, $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ μονομορφισμός R - προτύπων και R - γραμμική $D \xrightarrow{f} A$. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \subseteq B$. Έτσι ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{S}$ με στοιχεία του ζεύγη (A_i, φ_j), όπου το R - πρότυπο A_j ικανοποιεί την σχέση $A \subseteq A_j \subseteq B$ και η R - γραμμική απεικόνιση $A_j \xrightarrow{\varphi_j} M$ έχει την ιδιότητα το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό, δηλαδή $\varphi_j\big|_A = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] & \subseteq & A_j \arrow[dll, "\varphi_j"] & \subseteq & B \\
M & & & &
\end{tikzcd}$$

Προφανώς το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι μη κενό, αφού $(A, f) \in \mathcal{S}$. Θεωρούμε μερική διάταξη $\preceq$ (αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική) στο $\mathcal{S}$ ως εξής

$$(A_i, \varphi_i) \preceq (A_j, \varphi_j) \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} A_i \subseteq A_j \quad \text{και} \quad \varphi_j\big|_{A_i} = \varphi_i.$$

Έστω $\{(A_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ μια αλυσίδα στο σύνολο $\mathcal{S}$ [2], όπου J είναι ένα σύνολο δεικτών. Θεωρούμε το στοιχείο $\left(\bigcup_{j\in J} A_j, \bigcup_{j\in J} \varphi_j\right)$ με $\bigcup_{j\in J} \varphi_j(a_k) = \varphi_k(a_k)$, για κάθε $a_k \in A_k$, το οποίο είναι άνω φράγμα

[2] Έστω $(\mathcal{S}, \preceq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ένα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται **αλυσίδα** στο $\mathcal{S}$ αν κάθε δύο στοιχεία του είναι συγκρίσιμα, δηλαδή αν για κάθε $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, τότε $c_1 \preceq c_2$ ή $c_2 \preceq c_1$.

της παραπάνω αλυσίδας στο $\mathcal{S}$. Επομένως, από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχειο $\left(\overline{A}, \overline{\varphi}\right)$ του $\mathcal{S}$ και θα δείξουμε ότι $\overline{A} = B$. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $b \in B \setminus \overline{A}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\overline{A} + Rb \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \subseteq & \overline{A} \arrow[dll, "\overline{\varphi}"] & \subseteq & \overline{A}+Rb \arrow[dllll, bend left, "\tilde{\varphi}"] \\
M & & & &
\end{tikzcd}$$

αντιβαίνοντας ότι το $\left(\tilde{A}, \tilde{\varphi}\right)$ είναι μεγιστικό. Θεωρούμε το (αριστερό) ιδεώδες

$$I = \left\{ r \in R \mid rb \in \tilde{A} \right\} = Rr_0 \ ,$$

για κάποιο $r_0 \in R$, αφού R είναι Π.Κ.Ι. . Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $r_0 = 0$, τότε έχουμε ότι $\overline{A} \cap Rb = \{0\}$ επομένως έχουμε ότι $\overline{A} + Rb \cong \overline{A} \oplus Rb$ και θεωρώντας της απεικονίσεις $\overline{A} \xrightarrow{\overline{\varphi}} M$ και την R - γραμμική $Rb \to M$ με $b \mapsto c$, για κάποιο $c \in M$, από την Πρόταση 1.4.1, υπάρχει R - γραμμική $A + Rb \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M$ με $\tilde{\varphi}\big|_{\overline{A}} = \overline{\varphi}$, δηλαδή $\left(\overline{A}, \overline{\varphi}\right) \precneqq (A + bR, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{S}$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

- Έστω ότι $r_0 \neq 0$. Τότε, $r_0 b \in \overline{A}$ και αφού το M είναι διαιρέσιμο, υπάρχει $c \in M$ ώστε $\overline{\varphi}(r_0 b) = r_0 c$. Ορίζουμε την απεικόνιση $A + Rb \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M$ με $\tilde{\varphi}(x + rb) = \overline{\varphi}(x) + rc$. Αρχικά η $\tilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $x + rb = x' + r'b$ έχουμε ότι $x - x' = (r' - r)\, b \in \overline{A}$, επομένως έχουμε ότι $r' - r \in I = Rr_0$, δηλαδή υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $\xi r_0 = \lambda' - \lambda$ επομένως έχουμε ότι

  $$\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(x') = \overline{\varphi}(x - x') = \overline{\varphi}\left((r' - r)\, b\right) = \overline{\varphi}(\xi r_0 b) = \xi \overline{\varphi}(r_0 b) = \xi r_0 c = (r' - r)\, c.$$

  Ομοίως με την πρώτη περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Πόρισμα 1.8.1. Έστω R περιοχή κύριων ιδεωδών.

(α) Κάθε πηλικό ενριπτικού R προτύπου είναι ενριπτικό.

(β) Αν $\{M_i\}_{i \in I}$ οικογένεια R - ενριπτικών προτύπων, τότε το $\bigoplus_{i \in I} M_i$ είναι ενριπτικό.

Πόρισμα 1.8.2. Κάθε αβελιανή ομάδα M εμφυτεύεται σε μια ενριπτική αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.5.1 θεωρούμε τον επιμορφισμό $\mathbb{Z}^{(M)} \xrightarrow{\varepsilon} M$. Τότε, προκύπτει ότι $M \cong \mathbb{Z}^{(M)} / \ker \varepsilon \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(M)} / \ker \varepsilon$ [3], όπου το τελευταίο πρότυπο είναι ενριπτικό (ως διαιρέσιμο πάνω από Π.Κ.Ι.) □

Παρατήρηση 1.8.3. Σε αναλογία με το γεγονός ότι πάνω από Π.Κ.Ι. υποπρότυπα προβολικών προτύπων είναι προβολικών, δυϊκά έχουμε ότι πάνω από Π.Κ.Ι. πηλίκα ενριπτικών είναι ενριπτικά.

[3] Με $\mathbb{Z}^{(M)}$ συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα $\mathbb{Z}^{(M)} = \bigoplus_{s \in M} \mathbb{Z}_s$ με $\mathbb{Z}_s = \mathbb{Z}$.

1.9 Hom σύνολα και ακριβείς ακολουθίες

Έστω $\varphi\colon A \to B$ ομομορφισμός R - προτύπων και X ένα R - πρότυπο. Τότε ορίζονται ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων ως εξής :

$$\varphi_*\colon \mathrm{Hom}_R(X,A) \to \mathrm{Hom}_R(X,B),\ f \mapsto \varphi\circ f \quad \text{και} \quad \varphi^*\colon \mathrm{Hom}_R(B,X) \to \mathrm{Hom}_R(A,X),\ f \mapsto f\circ\varphi.$$

Πρόταση 1.9.1. Έστω $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ β.α.α. R - προτύπων και X ένα R - πρότυπο. Τότε οι παρακάτω επαγόμενες ακολουθίες (αβελιανών ομάδων) είναι ακριβείς :

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X,A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(X,B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_R(X,C) \tag{1.4}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,X) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_R(B,X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(A,X) \tag{1.5}$$

Απόδειξη.

- Αρχικά δείχνω ότι i_* είναι μονομορφισμός. Πράγματι, αν $i_*(f) = i\circ f = 0$, τότε $i(f(x)) = 0$, για κάθε $x \in A$, και αφού i είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$.
- Θα δείξουμε την ακρίβεια στο $\mathrm{Hom}_R(X,B)$, δηλαδή $\mathrm{im}(i_*) = \ker\varepsilon_*$. Για κάθε $X \xrightarrow{f} A \in \mathrm{Hom}_R(X,A)$ έχουμε ότι $\varepsilon_*(i_*(f)) = \varepsilon\circ i\circ f = 0$, άρα έχουμε ότι $\mathrm{im}(i_*) \subseteq \ker\varepsilon_*$. Τώρα, αν $f \in \ker\varepsilon_*$, τότε $\varepsilon_*(f) = \varepsilon\circ f = 0$, άρα $\varepsilon(f(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την ακρίβεια στο B, για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $a_x \in A$ ώστε $i(a_x) = f(x)$. Αν $h\colon X \to A$ με $h(x) = a_x$ έχουμε ότι $f = i\circ h \in \mathrm{im}(i_*)$.

$$\begin{tikzcd} & & X, \arrow[dl, "a_x"'] \arrow[d, "f"] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

Παρατήρηση 1.9.1. Έστω M ένα R - πρότυπο.

(α) Αν $B \xrightarrow{\varepsilon} C$ επιμορφισμός R - προτύπων και M είναι προβολικό, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $\varepsilon_*\colon \mathrm{Hom}(M,B) \to \mathrm{Hom}(M,C)$ είναι επιμορφισμός αβελιανών ομάδων.

(β) Αν $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ μονομορφισμός R - προτύπων και M είναι ενριπτικό, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $i^*\colon \mathrm{Hom}(B,M) \to \mathrm{Hom}(A,M)$ είναι επιμορφισμός αβελιανών ομάδων.

Πόρισμα 1.9.1. Έστω $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία και X ένα R - πρότυπο.

(α) Το X είναι προβολικό αν και μόνο αν

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X,A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(X,B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_R(X,C) \to 0$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία.

(β) Το X είναι ενριπτικό αν και μόνο αν

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,X) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_R(B,X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(A,X) \to 0$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία.

1.10 Ασκήσεις

1.1. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Να δείξετε ότι μια αβελιανή ομάδα M επιδέχεται δομή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ –προτύπου αν και μόνο αν $nM = 0$.

1.2. Έστω $(M, +)$ αβελιανή ομάδα και R δακτύλιος. Να δείξετε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ απεικονίσεων (συνόλων) $R \times M \to M$ που πληρούν τα αξιώματα των R–προτύπων $(M_1) - (M_4)$ και ομομορφισμών δακτυλίων $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$

1.3. Έστω θετικοί ακέραιοι m, n. Να δείξετε ότι υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$$

αν και μόνο αν οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους.

1.4. Εξετάστε εάν το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι προβολικό εάν ιδωθεί ως:

(α) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

(β) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

(γ) $\mathbb{Z}$ – πρότυπο.

1.5. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R - προτύπων και X ένα R - πρότυπο. Να δείξετε τα ακόλουθα :

(α) Εαν $\{\varphi_i \colon X \to M_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια R - γραμμικών απεικονίσεων, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$u \colon X \to \prod_{i\in I} M_i$$

τέτοια ώστε για κάθε $i \in I$ να έχουμε $\varphi_i = \pi_i \circ u$, όπου $\pi_i \colon \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ είναι η απεικόνιση προβολής $\pi_j\left(\{m_i\}_{i\in I}\right) = m_j$.

(β) Υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_R\left(X, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(X, M_i\right).$$

(γ) Το R - πρότυπο $\prod_{i\in I} M_i$ είναι ενριπτικό αν και μόνο αν για κάθε i στο I το M_i είναι ενριπτικό.

1.6. (α) Έστω R δακτύλιος και e ένα μη μηδενικό στοιχείο του R για το οποίο ισχύει $e^2 = e$. Να δείξετε ότι το Re είναι ένα προβολικό R - πρότυπο.

(β) Θεωρούμε ένα σώμα k και τον δακτύλιο

$$R \coloneqq \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}.$$

Να δείξετε ότι οι στήλες $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ είναι προβολικά R - πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα.

1.7. Έστω R δακτύλιος. Δίνονται R –πρότυπα και ομομορφισμοί

$$A \xrightarrow{\quad i \quad} B \xrightarrow{\quad \pi \quad} C$$

(χωρίς να υποθέτουμε καμία συνθήκη ακρίβειας). Υποθέτουμε ότι για κάθε R – πρότυπο X η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\quad i_* \quad} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{\quad \pi_* \quad} \mathrm{Hom}_R(X, C)$$

είναι ακριβής. Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad i \quad} B \xrightarrow{\quad \pi \quad} C$$

είναι ακριβής. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι για κάθε R –πρότυπο X ο ομομορφισμός

$$\pi_* : \mathrm{Hom}_R(X, B) \to \mathrm{Hom}_R(X, C)$$

είναι επί, να δείξετε ότι $B \cong A \oplus C$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

2.1 Η έννοια της κατηγορίας

Ορισμός 2.1.1 (κατηγορία)**.** Μια **(τοπικά μικρή) κατηγορία** $\mathcal{C}$ αποτελείται από :

(α) μια κλάση αντικειμένων $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ και

(β) για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ένα **σύνολο μορφισμών** $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ γράφουμε $f\colon X \to Y$ και ονομάζουμε $X := \mathrm{dom}(f)$ **πεδίο της** f και $Y := \mathrm{codom}(f)$ **συνπεδίο της** f ώστε να πληρούνται τα ακόλουθα :

- για κάθε αντικείμενο X υπάρχει μορφισμός $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ που ονομάζεται **ταυτοτικός μορφισμός του** X
- για κάθε X, Y, Z αντικείμενα υπάρχει συνάρτηση (συνόλων)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (g, f) \mapsto g \circ f.$$

ώστε αν $f\colon A \to B,\ g\colon B \to C, h\colon C \to D$ είναι μορφισμοί, τότε να ισχύουν τα εξής

i. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

ii. $\mathrm{id}_B \circ f = f$ και $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Παράδειγμα 2.1.1.

Κατηγορίες	**Αντικείμενα**	**Μορφισμοί**
Set	Σύνολα	Συναρτήσεις Συνόλων
Top	Τοπολογικοί Χώροι	Συνεχείς Συναρτήσεις
Mod(R)	(Αριστερά) R - πρότυπα	R - γραμμικές απεικονίσεις
Mod($\mathbb{Z}$)	Αβελιανές Ομάδες	Ομομορφισμοί Ομάδων
Group	Ομάδες	Ομομορφισμοί Ομάδων
Proj(R)	R - προβολικά πρότυπα	R - γραμμικές απεικονίσεις
Poset	Μερικώς διατεταγμένα σύνολα	Απεικονίσεις που διατηρούν τη διάταξη

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω $(X, \preceq)$ προ-διατεταγμένο σύνολο. Ορίζεται κατηγορία $\mathcal{C}$ με $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = X$ και σύνολο μορφισμών [1]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \preceq, & \text{αν } x \preceq y \\ \emptyset, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω G ομάδα. Ορίζουμε κατηγορία $\mathcal{C}$ η οποία έχει ακριβώς ένα αντικείμενο $*$ και ορίζουμε ως σύνολο μορφισμών το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *) = G$. Τότε, ο ταυτοτικός μορφισμός είναι το στοιχείο $\mathrm{id}_* = e_G$ και η σύνθεση δίνεται από το γινόμενο στην G.

Παράδειγμα 2.1.4. Ορίζουμε κατηγορία Δ με αντικείμενα τα $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, θεωρώντας τα $n \in \mathbb{N}$ ως διατακτικούς αριθμούς, και μορφισμούς $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [m])$ τις απεικονίσεις που διατηρούν τη φυσική διάταξη.

Παράδειγμα 2.1.5. Ορίζουμε την κατηγορία Simp η οποία έχει ως αντικείμενα τους παρακάτω τοπολογικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^{k+1}$

$$\left|\Delta^k\right| = \{(a_0, \ldots, a_k) \mid 0 \leq a_0, \ldots, a_k \leq 1,\ a_0 + \cdots + a_k = 1\}.$$

Θέτουμε $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \left|\Delta^k\right|$ όπου στην i - θέση βρίσκεται το 1 και σε όλες τις άλλες θέσεις 0. Τα στοιχεία $e_1, \ldots, e_k$ ονομάζονται **κορυφές** του $\left|\Delta^k\right|$ και για κάθε $x = (a_0, \cdots, a_k) \in \left|\Delta^k\right|$ έχουμε ότι

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i e_i, \quad \text{και} \quad a_0 + \cdots + a_k = 1 .$$

Ορίζουμε διάταξη στις κορυφές ως εξής $e_i \leq e_j \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} i \leq j$. Οι μορφισμοί στην Simp θα είναι οι αφφινικές απεικονίσεις $f\colon \left|\Delta^k\right| \to \left|\Delta^\ell\right|$, δηλαδή για κάθε $x = \sum_{i=0}^{k} a_i e^i$ τότε $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(e_i)$ ώστε η f να διατηρεί τη διάταξη στις κορυφές. Αποδεικνύεται ότι η Simp είναι κατηγορία.

Πρόταση 2.1.1. Έστω $f\colon X \to Y$ συνάρτηση συνόλων. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $Z \xrightarrow{g} X,\ Z \xrightarrow{h} X$ με $f \circ g = f \circ h$, τότε $g = h$.

(β) Η f είναι 1-1.

Αν $X \neq \emptyset$, τότε τα (α) και (β) είναι ισοδύναμα με το παρακάτω.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $g\colon Y \to X$ τέτοια ώστε $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Απόδειξη.

- (α) → (β) Έστω $x, y \in X$ ώστε $f(x) = f(y)$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\{*\} \xrightarrow{\mathcal{X}} X$ με $\mathcal{X}(*) = x$ και $\{*\} \xrightarrow{\mathcal{Y}} X$ με $\mathcal{Y}(*) = y$. Τότε, έχουμε ότι $f \circ \mathcal{X} = f \circ \mathcal{Y}$ επομένως ισχύει ότι $x = y$.

[1] Με τον παραπάνω συμβολισμό εννοούμε ότι $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{(x, y)\}$ στην περίπτωση που $x \preceq y$. Βλέπε ορισμό διμελούς σχέσης και διάταξης.

- (β) → (α) Αφήνεται ως άσκηση.
- (β) → (γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1. Αν $x_0 \in X$, τότε ορίζουμε

$$g\colon Y \to X, \quad g(y) = \begin{cases} x, & \text{αν } y = f(x) \\ x_0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

  Αφού η f είναι 1-1, τότε η g είναι καλά ορισμένη και από την παραπάνω κατασκευή έχουμε ότι $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

- (γ) → (α) Θεωρούμε τα ζεύγη συναρτήσεων $Z \xrightarrow{h} X$ και $Z \xrightarrow{h'} X$ ώστε $f \circ h = f \circ h'$. Τότε, προκύπτει ότι

$$f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

□

Πρόταση 2.1.2. Έστω $f\colon X \to Y$ συνάρτηση συνόλων. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $Y \xrightarrow{h} Z$ και $Y \xrightarrow{h} Z$ με $h \circ f = g \circ f$, τότε $g = h$.

(β) Η f είναι επί.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $s\colon Y \to X$ τέτοια ώστε $f \circ s = \mathrm{id}_Y$.

Απόδειξη.
- (α) → (β) Έστω $y \in Y$. Θεωρούμε $Y \xrightarrow{e_1} \{0,1\}$ τη σταθερή συνάρτηση 1 και χ_{im_f} την χαρακτηριστική συνάρτηση του im_f. Τότε, παρατηρούμε ότι $e_1 \circ f = \chi_{\mathrm{im}_f} \circ f$. Από την αρχική υπόθεση προκύπτει ότι $\chi_{\mathrm{im}_f} = e_1$ και έχουμε το ζητούμενο.
- (β) → (γ) Το ζητούμενο προκύπτει με χρήση του αξιώματος της επιλογής.

Οι υπόλοιπες συνεπαγωγές αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $f\colon X \to Y$ μορφισμός.

(α) Ο f ονομάζεται **μονομορφισμός** εαν για κάθε ζεύγος μορφισμών $Z \xrightarrow{g} X$, $Z \xrightarrow{h} X$ με $f \circ g = f \circ h$, τότε $g = h$.

(β) Ο f ονομάζεται **επιμορφισμός** εαν για κάθε ζεύγος μορφισμών $Y \xrightarrow{h} Z$ και $Y \xrightarrow{h} Z$ με $h \circ f = g \circ f$, τότε $g = h$.

(γ) Ο f ονομάζεται **διασπώμενος μονομορφισμός** εαν υπάρχει μορφισμός $g\colon Y \to X$ τέτοια ώστε $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(δ) Ο f ονομάζεται **διασπώμενος επιμορφισμός** εαν υπάρχει μορφισμός $s\colon Y \to X$ τέτοια ώστε $f \circ s = \mathrm{id}_Y$.

(ε) Ο f καλείται **ισομορφισμός** αν υπάρχει $g\colon Y \to X$ τέτοια ώστε $g \circ f = \mathrm{id}_X$ και $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Παρατήρηση 2.1.1. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Οι διασπώμενοι μονομορφισμοί είναι μονομορφισμοί.

(β) Οι διασπώμενοι επιμορφισμοί είναι επιμορφισμοί.

Παράδειγμα 2.1.6. Στην κατηγορία Ring των δακτυλίων με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων. Θεωρούμε την φυσική εμφύτευση $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ η οποία είναι μονομορφισμός (γιατί ;). Τώρα, θεωρούμε ζεύγη μορφισμών $\mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} S$ και $\mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} S$ με $\varphi \circ i = \psi \circ i$ και θα δείξουμε ότι $\varphi = \psi$, δηλαδή θα έχουμε δείξει ότι ότι i είναι επιμορφισμός. Πράγματι, για κάθε $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi(m)\left(\varphi(n)\right)^{-1} = \psi(m)\left(\psi(n)\right)^{-1} = \psi\left(\frac{m}{n}\right).$$

Όμως δεν υπάρχει μορφισμός ώστε $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ώστε $i \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$, γιατί τότε f θα ήταν δηλαδή 1-1 το οποίο δεν μπορεί να ισχύει (γιατί ;). Άρα η i δεν μπορεί να είναι διασπώμενος επιμορφισμός.

Ορισμός 2.1.3. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $\{C_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των $\{C_i\}_{i\in I}$ ένα αντικείμενο $\prod_{i\in I} C_i$ εφοδιασμένο με μορφισμούς $\left\{\prod_{i\in I} C_i \xrightarrow{p_i} C_i\right\}_{i\in I}$ το οποίο έχει την καθολογική ιδιότητα :

" Για κάθε αντικείμενο X και οικογένεια μορφισμών $\left\{X \xrightarrow{\varphi_i} C_i\right\}_{i\in I}$ υπάρχει **μοναδικός** μορφισμός $X \xrightarrow{u} \prod_{i\in I} C_i$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό για κάθε $i \in I$. "

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "u"'] & C_i \\ & \prod_{i\in I} C_i \arrow[u, "p_i"] \end{tikzcd}$$

Δυϊκά αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να ορίσει με ανάλογο τρόπο την έννοια του **συνγινομένου** $\coprod_{i\in I} C_i$ της $\{C_i\}_{i\in I}$ εφοδιασμένο με μορφισμούς $\left\{C_i \xrightarrow{j_i} \coprod_{i\in I} C_i\right\}_{i\in I}$.

Παρατήρηση 2.1.2. Το γινόμενο και το συνγινόμενο μιας οικογένειας αντικειμένων χαρακτηρίζονται μοναδικά ως προς ισομορφισμό.

Απόδειξη. Για το συνγινόμενο, θεωρούμε αντικείμενα Q, Q' και οικογένειες μορφισμών

$$\{q_i\colon C_i \to Q\}_{i\in I} \quad \text{και} \quad \{q_i'\colon C_i \to Q'\}_{i\in I}$$

τα οποία πληρούν την καθολική ιδιότητα του συνγινομένου. Τότε, υπάρχουν μοναδικοί $Q \xrightarrow{u} Q'$ και $Q' \xrightarrow{\tau} Q$ ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά :

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "q_i'"'] & Q \arrow[d, "u"] \\ & Q' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "q_i'"'] & Q' \arrow[d, "\tau"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

Τότε, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $Q \xrightarrow{\tau\circ u} Q$ ικανοποιεί την σχέση $(\tau \circ u)\, q_i = q_i$, για κάθε $i \in I$. Άρα, λόγω μοναδικότητας έχουμε ότι $\tau \circ u = \mathrm{id}_Q$. Ομοία δείχνουμε ότι $u \circ \tau = \mathrm{id}_{Q'}$. $\square$

Παρατήρηση 2.1.3.

(α) Οι μορφισμοί $\prod_{i\in I} C_i \xrightarrow{p_i} C_i$ στο Ορισμό 2.1.3 είναι διασπώμενοι επιμορφισμοί.

(β) Δυϊκά, οι μορφισμοί $C_i \xrightarrow{j_i} \coprod_{i\in I} C_i$ είναι διασπώμενοι μονομορφισμοί.

Απόδειξη. Έστω $i_0 \in I$. Ορίζουμε ως $\varphi_{i_0} = \mathrm{id}_{C_{i_0}}$ και $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{i_0}, C_i)$ ένας οποιοσδήποτε μορφισμός (αν υπάρχει) και θεωρούμε την οικογένεια μορφισμών $\left\{C_{i_0} \xrightarrow{\varphi_i} C_i\right\}_{i\in I}$. Από τον ορισμό του γινομένου υπάρχει μοναδική $C_{i_0} \xrightarrow{u} \prod_{i\in I} C_i$ με την ιδιότητα $p_{i_0} \circ u = \mathrm{id}_{C_{i_0}}$, άρα συμπεραίνουμε ότι p_{i_0} είναι διασπώμενος επιμορφισμός. Το (β) αποδεικνύεται όμοια. □

Παράδειγμα 2.1.7. (α) Στην κατηγορία $\mathrm{Mod}(R)$, το $\prod_{i\in I} C_i$ είναι το ευθύ γινόμενο προτύπων και το $\coprod_{i\in I} C_i = \bigoplus_{i\in I} C_i$ το ευθύ άθροισμα προτύπων.

(β) Στην κατηγόρια Set το $\prod_{i\in I} C_i$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των $\{C_i\}_{i\in I}$, δηλαδή

$$\prod_{i\in I} C_i = \{\{x_i\}_{i\in I} \mid x_i \in C_i,\ \forall i \in I\}$$

το οποίο έχει τη ζητούμενη καθολική ιδιότητα αφού για κάθε $\left\{X \xrightarrow{\varphi_i} C_i\right\}_{i\in I}$ το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "u"'] & C_i \\ & \prod_{i\in I} C_i \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \varphi_i(x) \\ & \{\varphi_i(x)\}_{i\in I} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Τώρα, το αντίστοιχο συνγινόμενο μιας οικογένειας $\{C_i\}_{i\in I}$ είναι η διαζευγμένη ένωση συνόλων

$$\coprod_{i\in I} C_i = \{(x, i) \mid x \in C_i\}.$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε οικογένεια απεικονίσεων $\left\{C_i \xrightarrow{\varphi_i} X\right\}_{i\in I}$ υπάρχει μοναδική $\coprod_{i\in I} C_i \xrightarrow{u} X$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \coprod_{i\in I} C_i \arrow[dl, "u"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, i) \arrow[dl, mapsto] \\ \varphi_i(x) & \end{tikzcd}$$

Ορισμός 2.1.4. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και X, Y αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ σύνολο έχει δομή αβελιανής ομάδας. Έστω $f\colon X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

(α) Ο **πυρήνας** της f είναι ένας μορφισμός $k \xrightarrow{j} X$ ώστε $f \circ j = 0$ και για κάθε άλλο μορφισμό $k' \xrightarrow{j'} X$ με $f \circ j' = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u \colon k' \to k$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ k' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "j'"] & & \end{tikzcd}$$

(β) Ο **συνπυρήνας** της f είναι ένας μορφισμός $Y \xrightarrow{\varepsilon} C$ ώστε $\varepsilon \circ f = 0$ και για κάθε άλλο μορφισμό $Y \xrightarrow{\varepsilon'} C'$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $C \xrightarrow{u} C'$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & C \arrow[dl, dashed, "u"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.1.4. Ο πυρήνας και ο συνπυρήνας της f προσδιορίζονται ως προς μοναδικό ισομορφισμό. (άσκηση)

Πρόταση 2.1.3. Έστω $f \colon X \to Y$ μορφισμός στην $\mathrm{Mod}(R)$. Τότε,

(α) ο πυρήνας της f, με βάση τον Ορισμός 2.1.4, είναι ο μορφισμός $\ker f \overset{i}{\hookrightarrow} X$.

(β) ο συνπυρήνας της f είναι ο μορφισμός $Y \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker} f$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά το (β). Έστω C ένα R - πρότυπο και ομομορφισμός R - προτύπων $Y \xrightarrow{g} C$ ώστε $g \circ f = 0$. Τότε, προκύπτει ότι $\mathrm{im} f \subseteq \ker g$. Από το Θεώρημα 1.2.1 προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική R - γραμμική απεικόνιση $\mathrm{coker} f \xrightarrow{u} C$ ώστε $u \circ \pi = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{coker} f = Y / \mathrm{im} f \arrow[dl, dashed, "\exists ! u"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

□

Πρόταση 2.1.4. Έστω $f \colon X \to Y$ μορφισμός στην $\mathrm{Mod}(R)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι επιμορφισμός. (Με την έννοια του Ορισμού 2.1.2)

(β) Για κάθε μορφισμό $g \colon Y \to Z$ με $g \circ f = 0$ ισχύει ότι $g = 0$.

(γ) Η f είναι επί.

Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να διατυπώσει και να αποδείξει το αντίστοιχο δϋικό αποτέλεσμα.

Απόδειξη.

- (α) → (β) Έστω $Y \xrightarrow{g} Z$ με $g \circ f = 0$. Θεωρούμε την μηδενική απεικόνιση $Y \xrightarrow{0} Z$. Έπομένως έχουμε ότι $g \circ f = 0 \circ f$, άρα προκύπτει ότι $g = 0$.

- (β) → (γ) Αν $Y \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} f$ ο φυσικός επιμορφισμός, τότε έχουμε ότι $\pi \circ f = 0$, επομένως $\pi = 0$.

- (γ) → (α) Θεωρούμε ζεύγος μορφισμών $Y \xrightarrow{h} Z$ και $Y \xrightarrow{h} Z$ με $h \circ f = g \circ f$, τότε $g = h$. Έστω $y \in Y$. Αφού η f είναι επί, τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$. Επομένως, προκύπτει ότι $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$ και έχουμε το ζητούμενο.

□

2.2 Δυϊσμός

Ορισμός 2.2.1. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία. Η **δυϊκή κατηγορία** $\mathcal{C}^\circ$ έχει αντικείμενα $\operatorname{Obj}(\mathcal{C}^\circ) = \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ και για κάθε X, Y στην $\operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ ισχύει ότι

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Παρατήρηση 2.2.1. (α) Με βάση τον παραπάνω ορισμό, αν $f^\circ \colon X \to Y \leftrightsquigarrow f \colon Y \to X$ και $g^\circ \colon Y \to Z \leftrightsquigarrow g \colon Z \to Y$ επομένως έχουμε ότι $g^\circ \circ f^\circ \colon X \to Z \leftrightsquigarrow f \circ g \colon Z \to X$. Μέσω των παραπάνω παρατηρήσεων συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{C}^\circ$ είναι πράγματι κατηγορία.

(β) Ισχύει γενικά ότι $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$.

(γ) Αν μια πρόταση ισχύει σε κάθε κατηγορία, προφανώς θα ισχύει και στη δυϊκή της. Ως εφαρμογή αυτού αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει τα ακόλουθα :

i. Οι διασπώμενοι μονορφισμοί είναι μονομορφισμοί.

ii. Οι διασπώμενοι επιμορφισμοί είναι επιμορφισμοί.

Παράδειγμα 2.2.1. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται παραδείγματα εννοίων ιδωμένα μέσω της κατηγορίας $\mathcal{C}^\circ$.

$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}^\circ$
Γινόμενα	Συνγινόμενα
Μονομορφισμοί	Επιμορφισμοί
Πυρήνας	Συνπυρήνας

2.3 Συναρτητές

Ορισμός 2.3.1. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας **συναρτητής** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ αντιστοιχίζει

- κάθε αντικείμενο C της $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ σε ένα αντικείμενο $F(C)$ της $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$,
- κάθε μορφισμό $f\colon C \to C'$ της $\mathcal{C}$ σε ένα μορφισμό $F(f)\colon F(C) \to F(C')$ της $\mathcal{D}$ έτσι ώστε

  i. για κάθε X στην $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, τότε $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ και

  ii. για κάθε διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & C' \arrow[d, "g"] \\ & C'' \end{tikzcd}$$

  να επάγεται το ακόλουθο *μεταθετικό* διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(C') \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(C'') \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 2.3.1 (ταυτοτικός συναρτητής)**.** Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία. Ορίζουμε $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ με $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ και $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$.

Παράδειγμα 2.3.2. Έστω R δακτύλιος. Ο *επιλήσμων* (forgetful) συναρτητής $\mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{u} \mathrm{Set}$ με $u(M) = M$ (το M ιδωμένος ως σύνολο) και $u(f) = f$ (ιδωμένη ως συνάρτηση συνόλων). Ομοίως, ορίζονται συναρτητές $\mathrm{Group} \to \mathrm{Set}$, $\mathrm{Ring} \to \mathrm{Set}$ κ.λ.π.

Παράδειγμα 2.3.3. Έστω G ομάδα ιδωμένη ως κατηγορία $\mathcal{C}_G$ με ένα αντικείμενο $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}} = \{*\}$ και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *) = G$. Θεωρούμε συναρτητή $F\colon \mathcal{C}_G \to \mathrm{Set}$, δηλαδή $F(*) = X$ για κάποιο σύνολο X και για κάθε $* \xrightarrow{g} *$ υπάρχει συνάρτηση $X \xrightarrow{F(g)} X$. Ορίζουμε $g \cdot x = F(g)(x)$, για κάθε $x \in X$. Ο F είναι συναρτητής, επομένως $F(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_X$, άρα $F(e_G) = \mathrm{id}_X$, δηλαδή

$$e_G \cdot x = x, \quad \text{για κάθε } x \in X\ .$$

Επίσης, αφού για κάθε $g, h \in G$ ισχύει ότι $F(g \cdot h) = F(g) \circ F(h)$, τότε έχουμε ότι

$$(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Άρα, η F επάγει συνάρτηση $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ ώστε να πληρούνται οι προηγούμενες δύο ιδιότητες. Η F λοιπόν ορίζει *δράση* της G στο σύνολο X.

Παράδειγμα 2.3.4 (Hom - συναρτητές)**.** Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και X αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Ορίζουμε

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$$

όπου για κάθε Y αντικείμενο της $\mathcal{C}$, τότε ισχύει ότι $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \mathrm{Set}$. Για κάθε μορφισμό $Y \xrightarrow{f} Y'$ ορίζεται

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y'), \quad h \mapsto f \circ h.$$

Για τις συνθέσεις έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ & Y'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "f\circ -"] \arrow[dr, "(g\circ f)\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \arrow[d, "g\circ -"] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y'') \end{tikzcd}$$

το τελευταίο διάγραμμα είναι μεταθετικό διότι για κάθε μορφισμό $h\colon X \to Y$ έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "f\circ h"] & & \\ & Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ & & Y'' \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 2.3.5. Ορίζουμε $\Delta \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Simp}$ (βλέπε Παραδείγματα 2.1.4, 2.1.5) με $\Gamma([n]) = |\Delta^n|$. Για κάθε μορφισμό $[n] \xrightarrow{f} [m]$ ορίζεται $|\Delta^n| \xrightarrow{\tilde{f}=F(f)} |\Delta^m|$ ώστε για κάθε $x = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$ έχουμε ότι

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i e_{f(i)}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο Γ είναι συναρτητής.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C}^{\circ} \to \mathcal{D}$ καλείται **ανταλλοίωτος** από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$.

Παρατήρηση 2.3.1. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C}^{\circ} \to \mathcal{D}$ "αντιστρέφει τα βέλη", δηλαδή για κάθε $f\colon c \to d$ στην $\mathcal{C}$ επάγεται $F(f)\colon F(d) \to F(c)$ στην $\mathcal{D}$. Παρατηρούμε επίσης ότι ικανοποιείται η σχέση $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, όπου f, g μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 2.3.6 (Hom - συναρτητές)**.** Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και X αντικείμενο της. Ορίζεται συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, όπου για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$ έχουμε ότι $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ είναι αντικείμενο της Set. Για κάθε μορφισμό $Y \xrightarrow{f} Y'$ στην $\mathcal{C}$ έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ Y' & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y',X) \arrow[u, "-\circ f"'] \end{tikzcd}$$

Προφανώς ο συναρτητής $S(X)$ είναι ανταλλοίωτος από την $\mathcal{C}$ στην Set.

Παράδειγμα 2.3.7. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε συναρτητή $S(X)\colon \Delta \to \mathrm{Set}$ με

$$S(x)([n]) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}\left(|\Delta^n|, X\right).$$

Έστω $[n] \xrightarrow{f} [m]$ μορφισμός στην Δ. Από το Παράδειγμα 2.3.5 επάγεται $|\Delta^n| \xrightarrow{\tilde{f}} |\Delta^m|$. Επομένως, προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S(X)[n] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}\left(|\Delta^n|, X\right) \\ S(X)[m] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}\left(|\Delta^m|, X\right) \arrow[u, "S(X)(f)=-\circ\tilde{f}"] \end{tikzcd}$$

δηλαδή για κάθε μορφισμό $|\Delta^m| \xrightarrow{g} X$ προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} |\Delta^m| \arrow[r, "g"] & X \\ |\Delta^n| \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "g\circ\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Προφανώς, ο συναρτητής $S(X)$ είναι ανταλλοίωτος από την Δ στην Set.

2.4 Φυσικοί Μετασχηματισμοί

Παράδειγμα 2.4.1. Θεωρούμε k σώμα και Vect_k την κατηγορία των k - διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης με μορφισμούς της k - γραμμικές απεικονίσεις. Θεωρούμε τον συναρτητή $\mathrm{Hom}_k(-,k) : \mathrm{Vect}_k^{\circ} \to \mathrm{Vect}_k$. Αν $V \xrightarrow{f} W$ είναι μια k - γραμμική προκύπτει η k - γραμμική απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_k(W,k) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}_k(V,k).$$

Είναι σαφές ότι ο παραπάνω συναρτητής μπορεί να θεωρηθεί και ως $\mathrm{Hom}_k(-,k) : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Vect}_k^\circ$ και για λόγους απλότητας θα τον συμβολίζουμε με $(-)^* := \mathrm{Hom}_k(-,k)$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "(-)^{**}"] \arrow[d, "(-)^*"'] & \mathrm{Vect}_k \\
\mathrm{Vect}_k^\circ \arrow[ur, "(-)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Για κάθε k διανυσματικό χωρό V ορίζεται η k - γραμμική απεικόνιση

$$V \to V^{**} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(V,k),k), \quad x \mapsto e_x^V : \mathrm{Hom}_k(V,k) \to k, \text{ με } e_x^V(f) = f(x).$$

Αν $V \xrightarrow{f} W$ είναι k - γραμμική, τότε ισχυριζόμαστε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "e^V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[r, "e^W"] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση $f^{**} \colon V^{**} \to W^{**}$ δρα ως εξής : για κάθε $\alpha \colon \mathrm{Hom}_k(V,k) \to k$ έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(V,k) \arrow[r, "\alpha"] & k \\
\mathrm{Hom}_k(W,k) \arrow[u, "-\circ f"] \arrow[ur, "f^{**}(\alpha)=\alpha\circ-\circ f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ελέγχουμε τη μεταθετικότητα του ζητούμενου διαγράμματος. Έστω $x \in V$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & e_x^V \arrow[r, mapsto] & f^{**}\left(e_x^V\right) \arrow[d, equal, ";"'] \\
f(x) \arrow[rr, mapsto] & & e^W_{f(x)}
\end{tikzcd}$$

Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι $f^{**}\left(e_x^V\right) : \mathrm{Hom}_k(W,k) \to k$ είναι ίση με την $e^W_{f(x)} \colon \mathrm{Hom}_k(W,k) \to k$. Όμως, αν $u \in \mathrm{Hom}_k(W,k)$ έχουμε ότι

$$f^{**}\left(e_x^V\right)(v) = e_x^V \circ u \circ f = u(f(x)) = e^W_{f(x)}(u)$$

και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Ορισμός 2.4.1. Έστω $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $\varphi \colon F \to G$ είναι μια οικογένεια μορφισμών [2]

$$\{\varphi_C \colon F(c) \to G(c)\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$$

[2] Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ καταχρηστικά για να δηλώσουμε ότι C είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}$, χωρίς να υποθέτουμε ότι η κλάση αντικειμένων της $\mathcal{C}$ είναι σύνολο.

ώστε για κάθε μορφισμό $f: c \to d$ στην $\mathcal{C}$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(d) \arrow[r, "\varphi_d"] & G(d) \end{tikzcd}$$

Συμβολίζουμε ως εξής :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Ο φ θα λέγεται **φυσικός ισομορφισμός** αν φ_C είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο C της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση 2.4.1. Με τους παραπάνω συμβολισμούς, απο το Παράδειγμα 2.4.1, έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow e^{(-)}"] & \mathrm{Vect}_k \end{tikzcd}$$

Ορισμός 2.4.2. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Η κατηγορία συναρτητών $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ έχει ως αντικείμενα τους συναρτητές $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε $\mathrm{Nat}(F, G) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F, G)$.

Παρατήρηση 2.4.2. Ελέγχουμε ότι $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ είναι πράγματι κατηγορία. Για κάθε F αντικείμενο της $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, δηλαδή για συναρτητή $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ορίζεται οικογένεια μορφισμών

$$\left\{\mathrm{id}_{F(c)}: F(c) \to F(c)\right\}_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}.$$

Είναι σαφές ότι για κάθε μορφισμό $f: c \to d$ στην $\mathcal{C}$ το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\mathrm{id}_c"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(c) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(d) \arrow[r, "\mathrm{id}_d"] & F(d) \end{tikzcd}$$

Για τις ″συνθέσεις″ θεωρούμε τους ακόλουθους φυσικούς μετασχηματισμούς :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $f\colon c \to d$ μορφισμό στην $\mathcal{C}$ το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "\varphi_c"] \arrow[d, "F(f)"] & G(c) \arrow[r, "\psi_c"] \arrow[d, "G(f)"] & H(c) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(d) \arrow[r, "\varphi_c"] & G(c) \arrow[r, "\varphi_d"] & H(d)
\end{tikzcd}
$$

Ορίζουμε ως $\psi \circ \varphi$ την οικογένεια μορφισμών $\{(\psi \circ \varphi)_c \coloneqq \psi_C \circ \varphi_c \colon F(c) \to H(c)\}_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$, όπου λόγω του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος προκύπτει ότι $\psi \circ f \in \mathrm{Nat}(F, H)$. Επομένως ορίζεται συνάρτηση

$$\mathrm{Nat}(G, H) \times \mathrm{Nat}(F, G) \to \mathrm{Nat}(F, H), \quad (\psi, \varphi) \mapsto \psi \circ \varphi.$$

Αποδεικνύεται άμεσα ότι $\mathrm{id} \circ \varphi$ και $\varphi \circ \mathrm{id} = \varphi$, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Nat}(F, G)$.

Παράδειγμα 2.4.2. Στο Παράδειγμα 2.3.7 δείξαμε ότι για κάθε τοπολογικό χώρο X ορίζεται συναρτητής $S(x)\colon \Delta^\circ \to \mathrm{Set}$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αναδιατυπωθεί ορίζοντας συναρτητή

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{\mathrm{Sing}} [\Delta^\circ, \mathrm{Set}]$$

όπου για κάθε τοπολογικό χώρο X ορίζουμε $\mathrm{Sing}(X) \coloneqq S(X)\colon \Delta^\circ \to \mathrm{Set}$. Για κάθε $f\colon X \to Y$ συνεχή απεικόνιση ορίζεται φυσικός μετασχηματισμός (γιατί ;)

$$
\begin{tikzcd}
\Delta^\circ \arrow[r, bend left=50, "S(X)"] \arrow[r, bend right=50, "S(Y)"'] \arrow[r, phantom, "S(f)\Downarrow"] & \mathrm{Set}
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή μια οικογένεια μορφισμών $\left\{ S(X)[n] \xrightarrow{S(f)[n]} S(Y)[n] \right\}_{[n] \in \mathrm{Obj}(\Delta^\circ}$ στην Set , όπου για κάθε $h\colon |\Delta|^n \to X \in S(X)[n]$ έχουμε ότι $S(f)([n])(h) = f \circ h \in S(Y)[n]$ η οποία περιγράφεται μέσω του παρακάτω διαγράμματος

$$
\begin{tikzcd}
|\Delta|^n \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f \circ h"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

Αποδεικνύεται άμεσα ότι ο Sing είναι συναρτητής.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω G ομάδα και $\mathcal{C}_G$ η επαγόμενη κατηγορία. Από το Παράδειγμα 2.3.3 δείξαμε ότι οι συναρτητές $F\colon \mathcal{C}_G \to \mathrm{Set}$ ορίζουν δράση της G στο σύνολο $F(*) = X$. Θεωρούμε φυσικό μετασχηματισμό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_G \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\varphi\Downarrow"] & \mathrm{Set} \end{tikzcd}$$

δηλαδή για κάθε $g \in G$ το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X = F(*) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "F(g)"] & Y = G(*) \arrow[d, "G(g)"] \\ X = F(*) \arrow[r, "\varphi_*"] & Y = G(*) \end{tikzcd}$$

Επομένως, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $g \in G$ προκύπτει ότι

$$g \cdot \varphi_*(x) = G(g)(\varphi_*(x)) = \varphi_*(F(g)(x)) = \varphi_*(g \cdot x).$$

Η απεικόνιση φ_* ονομάζεται *ισομεταβλητή απεικόνιση* μεταξύ των G - συνόλων X και Y.

Ορισμός 2.4.3. (α) Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\varphi\colon F \to G$, όπου $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές, καλείται **φυσικός ισομορφισμός** εαν για κάθε c αντικείμενο της $\mathcal{C}$ ο μορφισμός $\varphi_c\colon F(c) \to G(c)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$.

(β) Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ονομάζεται **αναπαραστάσιμος** εαν υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και φυσικός ισομορφισμός

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \cong F.$$

Τότε λέμε ότι ο F **αναπαρίσταται** από το αντικείμενο X.

Παράδειγμα 2.4.4. Θεωρούμε τον συναρτητή $\mathrm{id}\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$. Για κάθε σύνολο X ορίζουμε την συνάρτηση

$$\varphi_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{*\}, X) \to X, \quad \varphi_* \mapsto \varphi_*(*) = x \in X.$$

Προφανώς φ_X είναι ισομορφισμός στην Set. Αν $f\colon X \to Y$ συνάρτηση, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{*\}, X)X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f\circ -"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{*\}, Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Επομένως, ο συναρτητής id είναι αναπαραστάσιμος από το αντικείμενο $\{*\}$.

Παράδειγμα 2.4.5. Έστω R δακτύλιος και M ένα R - πρότυπο. Προκύπτει ότι $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$ ως R - πρότυπα (μέσω της $\varphi \mapsto \varphi(1_R)$), οπότε αν θεωρήσουμε τον επιλήσμων συναρτητή $u\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Set}$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{Hom}_R(R, -) \cong u.$$

2.5 Προσαρτημένοι συναρτητές

Έστω R δακτύλιος. Θεωρούμε τον επιλήσμων συναρτητή $u\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Set}$ (βλέπε Παράδειγμα 2.3.2) και τον συναρτητή $F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Mod}(R)$ με $F(S) = \bigoplus_{s\in S} R_s$ και $R_s = R$. Τότε το Λήμμα 1.6.1 επαναδιατυπώνεται ως εξής :

Για κάθε σύνολο S, το $F(S)$ μαζί με τη συνάρτηση συνόλων $S \xrightarrow{h_S} u(F(S))$ όπου $s \mapsto 1_s$ είναι τέτοια ώστε για κάθε άλλο R - πρότυπο M και συνάρτηση συνόλων $S \xrightarrow{f} u(M)$ υπάρχει **μοναδική** R - γραμμική απεικόνιση $F(S) \xrightarrow{\tilde{f}} M$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό στην κατηγορία των συνόλων.

$$\begin{tikzcd}
(u\circ F)(S) \arrow[r, "u(\tilde{f})"] & u(M) \\
S \arrow[u, "h_S"] \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.5.1. (α) Το $F(S)$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από μοναδικό ισομορφισμό (όπως συμβαίνει σε κάθε αντικείμενο με καθολική ιδιότητα).

(β) Με τον ίδιο τρόπο εκφράζονται καθολικές ιδιότητες 'ελεύθερων αντικειμένων' σε άλλες περιπτώσεις.

i. Αν $\mathrm{Group} \xrightarrow{u} \mathrm{Set}$ ο επιλήσμων συναρτητής και $\mathrm{Set} \xrightarrow{F} \mathrm{Group}$, όπου για κάθε σύνολο S ορίζουμε

$$F(S) = \left\{ w = s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n} \mid s_i \in S,\ k_i \in \mathbb{Z} \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n \right\}$$

την ελεύθερη ομάδα πάνω από το S. Ορίζουμε συνάρτηση $h_S\colon S \to F(S)$ που απεικονίζει το στοιχείο $s \in S$ στην λέξη s της ομάδας S. Τότε, για κάθε ομάδα G και απεικόνιση $S \xrightarrow{f} u(G)$ προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός ομάδων $\tilde{f}\colon F(S) \to G$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
(u\circ F)(S) \arrow[r, "u(\tilde{f})"] & u(G) \\
S \arrow[u, "h_S"] \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}$$

ii. Θεωρούμε τον συναρτητή $(-)^*$: Ring $\to$ Group, όπου για κάθε δακτύλιο R ορίζουμε ως R^* την ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του R. Επίσης, θεωρούμε τον συναρτητή $\mathrm{Group} \xrightarrow{F} \mathrm{Ring}$, όπου για κάθε ομάδα G ορίζουμε ως $F(G)$ τον ομαδο-δακτύλιο (group ring)

$$F(G) = \left\{ \sum_{g\in G} \lambda_g \cdot g \mid \lambda_g \in \mathbb{Z} \text{ και } \lambda_g \neq 0 \text{ για πεπερασμένο το πλήθος } g \in G \right\}.$$

Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $F(G)$ ικανοποιεί την ιδιότητα των καθολικών αντικειμένων για το ζεύγος συναρτητών

$$\mathrm{Ring} \underset{(-)^*}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathrm{Group}$$

Ορισμός 2.5.1. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ συναρτητές. Λέμε ότι ο F είναι **αριστερά προσαρτημένος** του G (και αντίστοιχα ο G είναι **δεξιά προσαρτημένος** του F) αν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και Y της $\mathcal{D}$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός :

$$\Phi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

δηλάδή υπάρχει $\Phi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ μια 1-1 και επί συνάρτηση, όπου για κάθε μορφισμό $X \xrightarrow{f} X'$ στην $\mathcal{C}$ και Y αντικείμενο της $\mathcal{D}$, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y) \arrow[u, "-\circ F(f)"] \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

και επίσης για κάθε μορφισμός $Y \xrightarrow{f} Y'$ στην $\mathcal{D}$ και X αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \arrow[d, "G(f)\circ -"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y') \arrow[r, "\Phi_{X,Y'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY')
\end{tikzcd}$$

Απλούστερα λέμε ότι το ζεύγος (F, G) είναι ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών και συμβολίζουμε με

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}.$$

Παράδειγμα 2.5.1. Έστω R δακτύλιος. Το ζεύγος συναρτητών

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{Mod}(R) \arrow[l, shift left, "u"]
\end{tikzcd}$$

είναι ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών, όπου F είναι ο αριστερά προσαρτημένος. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε S σύνολο και R - πρότυπο N υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$\Phi_{S,N}\colon \mathrm{Hom}_R(FS, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, u(N))$$

Ορίζουμε $\Phi_{S,N}\left(FS \xrightarrow{g} N\right)$ ως εξής :

$$\begin{tikzcd}
u(FS) \arrow[r, "u(g)"] & u(N) \\
S \arrow[u, "h_S"] \arrow[ur, "\Phi_{S,N}(g)=g\circ h_S"'] &
\end{tikzcd}$$

Επίσης αν $S \xrightarrow{f} u(N)$ συνάρτηση συνόλων, από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων υπάρχει μοναδική R - γραμμική $\tilde{f}\colon FS \to N$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
(u\circ F)(S) \arrow[r, "u(\tilde{f})"] & u(M) \\
S \arrow[u, "h_S"] \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Επομένως η συνάρτηση $\Phi_{S,N}$ είναι 1-1 και επί. Η φυσικότητα ως προς S, N αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 2.5.2. Για κάθε σύνολο X ορίζονται δύο συναρτητές

$$F \coloneqq (X \times -) : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}, \quad Y \mapsto X \times Y$$

και

$$G \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, -) \colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y).$$

Το ζεύγος $\mathrm{Set} \underset{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X,-)}{\overset{X\times -}{\rightleftarrows}} \mathrm{Set}$ είναι ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών. Για κάθε δύο σύνολα Y, Z ορίζουμε

$$\Phi_{Y,Z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Z))$$

όπου

$$\Phi_{Y,Z}\left(X \times Y \xrightarrow{f} Z\right) : Y \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Z), \quad y \mapsto (x \mapsto f(x, y))\,.$$

Ορίζεται επίσης στην αντίθεση κατεύθυνση

$$\Psi_{Y,Z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times Y, Z)$$

όπου

$$\Psi_{Y,Z}\left(Y \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Z)\right) : X \times Y \quad (x, y) \mapsto f(y)(x).$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις Φ και Ψ είναι αντίστροφες η μία της άλλης. Η φυσικότητα ως προς Y, Z αφήνεται ως άσκηση.

2.6 Όρια και Συνόρια

Ορισμός 2.6.1. Έστω $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ συναρτητής.

(α) Ένας **συνκώνος** για τον F είναι ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ μαζί με μια οικογένεια μορφισμών

$$\{\mu_i \colon F(i) \to X\}_{i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})}$$

τέτοια ώστε για κάθε $i \xrightarrow{f} j$ μορφισμό στην $\mathcal{I}$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ F(i) \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[rr, "F(f)"] & & F(j) \arrow[ul, "\mu_j"'] \end{tikzcd}$$

(β) **Συνόριο** του F είναι ένας καθολικός συνκώνος δηλαδή είναι ένας συνκώνος $(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F, \{\lambda_i\})$ για τον F τέτοιος ώστε για κάθε άλλος συνκώνο $(X, \{\mu_i\})$ και $i \xrightarrow{f} j$ στην $\mathcal{I}$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[dr, "\lambda_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i"] & & \\
& \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F \arrow[r, "\exists! u"] & X \\
F(j) \arrow[ur, "\lambda_j"] \arrow[urr, bend right, "\mu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Αφήνεται ως άσκηση, δϋικά να ορισθούν οι έννοιες του κώνου για ένα συναρτητή F και του ορίου του F. Δίνεται ως υπόδειξη το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\exists! u"] \arrow[ddl, bend right, "\mu_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\mu_j"] & \\
& \lim_{\mathcal{I}} F \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\
F(i) \arrow[rr] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.6.1. Το όριο και το συνόριο του F (όταν υπάρχουν) προσδιορίζονται μονοσήμαντα ως προς μοναδικό ισομορφισμό.

Παράδειγμα 2.6.1. Θεωρούμε την κατηγορία $\mathcal{I}$ με στοιχεία 0,1 και μορφισμούς id_0 και id_1. Έστω $F\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Set}$ συναρτητής. Αν θέσουμε $X = F(0)$ και $Y = F(1)$, ο F περιγράφεται ως το διάγραμμα

$$X \qquad Y$$

Το όριο του F (αν υπάρχει) θα είναι ένα σύνολο S εφοδιασμένο με μορφισμούς $S \xrightarrow{\lambda_X} X$ και $S \xrightarrow{\lambda_Y} Y$ το οποίο είναι μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) με την παρακάτω ιδιότητα

$$\begin{tikzcd}
& S' \arrow[d, "\exists! u"] \arrow[ddl, bend right, "\mu_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\mu_Y"] & \\
& S \arrow[dl, "\lambda_X"'] \arrow[dr, "\lambda_Y"] & \\
X \arrow[rr] & & Y
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή προκύπτει ότι $\lim_{\mathcal{I}} F \cong X \times Y$. Δϋικά αποδεικνύεται ότι $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F \cong X \sqcup Y$. Γενικότερα, αν $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ συναρτητής, τότε $\lim_{\mathcal{C}} F \cong F(0) \times F(1)$ (γινόμενο στην $\mathcal{C}$, αν υπάρχει) και $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F \cong F(0) \sqcup F(1)$ (συνγινόμενο στην $\mathcal{C}$, αν υπάρχει).

Παράδειγμα 2.6.2. Έστω κατηγορία $\mathcal{I}$ με αντικείμενα $0, 1$ και έστω μορφισμούς(εκτός των ταυτοτικών)

$$0 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 1$$

και $F\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Mod}(R)$ ο συναρτητής που ορίζεται μέσω των σχέσεων $M = F(0) \overset{F(\alpha)=f}{\underset{F(\beta)=0}{\rightrightarrows}} F(1) = N$, όπου υποθέτουμε ότι $F(\beta) = 0$. Το όριο του F θα είναι ένα αντικείμενο K της $\mathrm{Mod}(R)$ μαζί με R - γραμμικές απεικονίσεις

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & N \\
K \arrow[u, "\lambda_M"] \arrow[ur, "\lambda_N"'] &
\end{tikzcd}$$

Επίσης το K θέλουμε να είναι καθολικό ως προς την ιδιότητα αυτή επομένως για κάθε άλλο συνκώνο $\{K', \{\mu_M, \mu_N\}\}$, υπάρχει μοναδική R - γραμμική $u\colon K' \to K$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
& K' \arrow[ul, dashed, "\exists! u"] \arrow[u, "\mu_M"] \arrow[ur, bend right, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα, προκύπτει ότι $\lim_{\mathcal{I}} F \cong \ker f$. Δϋικά αποδεικνύεται ότι $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F \cong \mathrm{coker} f$.

Θεώρημα 2.6.1. Έστω $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$, $\perp$. ζεύγους προσαρτημένων συναρτητών (όπου F είναι ο αριστερά προσαρτημένος). Τότε η F διατηρεί συνόρια, δηλαδή εαν $\Gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ συναρτητής, τότε

$$F\left(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F\right) \cong \mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\left(F \circ \mathcal{I}\right).$$

Δϋικά η G διατηρεί όρια, δηλαδή εαν $\Gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ τότε

$$G(\lim_{\mathcal{I}} \Gamma) \cong \lim_{\mathcal{I}} (G \circ \Gamma).$$

Απόδειξη. Έστω i, j αντικείμενα της $\mathcal{I}$ και μορφισμός $i \xrightarrow{f} j$. Το $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \Gamma$ ορίζει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \Gamma & \\
\Gamma(i) \arrow[ur, "\gamma_i"] \arrow[rr, "\Gamma(f)"] & & \Gamma(j) \arrow[ul, "\gamma_j"']
\end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στο παραπάνω διάγραμμα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& F(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \Gamma) & \\
F(\Gamma(i)) \arrow[ur, "F(\gamma_i)"] \arrow[rr, "F(\Gamma(f))"] & & F(\Gamma(j)) \arrow[ul, "F(\gamma_j)"']
\end{tikzcd}$$

που αποδεικνύει ότι $(F(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\Gamma), \{F(\gamma_i)\}_i)$ είναι συνκώνος για τον συναρτητή $F \circ \Gamma$. Για να δείξουμε την καθολικότητα θεωρούμε συνκώνο $(X, \{\varphi_i\}_i)$ για τον συναρτητή $F \circ \gamma$, i, j αντικείμενα της $\mathcal{I}$ και μορφισμό $i \xrightarrow{f} j$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
F \circ \Gamma(i) \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[rr, "F\circ\Gamma(f)"] & & F \circ \Gamma(j) \arrow[ul, "\varphi_j"']
\end{tikzcd}
$$

όπου λόγω προσάρτησης προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$
\begin{tikzcd}
 & GX & \\
\Gamma(i) \arrow[ur, "\Phi_{\Gamma(i),X}(\varphi_i)"] \arrow[rr, "\Gamma(f)"] & & \Gamma(j) \arrow[ul, "\Phi_{\Gamma(j),X}(\varphi_j)"']
\end{tikzcd}
$$

Λόγω του συνορίου του Γ έχω ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\Gamma \xrightarrow{u} GX$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(i) \arrow[dr, "\gamma_i"] \arrow[dd, "\Gamma(f)"'] \arrow[drr, bend left, "\Phi_{\Gamma(i),X}(\varphi_i)"] & & \\
 & \mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\Gamma \arrow[r, "\exists! u"] & GX \\
\Gamma(j) \arrow[ur, "\gamma_j"] \arrow[urr, bend right, "\Phi_{\Gamma(j),X}(\varphi_j)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Τέλος, λόγω προσάρτησης, υπάρχει μοναδικός $F(u)\colon F\left(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\Gamma\right) \to X$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
F \circ \Gamma(i) \arrow[dr, "F(\gamma_i)"] \arrow[dd, "F\circ\Gamma(f)"'] \arrow[drr, bend left, "\varphi_i"] & & \\
 & F(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\Gamma) \arrow[r, "\exists! F(u)"] & X \\
F \circ \Gamma(j) \arrow[ur, "F(\gamma_j)"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

2.7 Διάγραμμα εφέλκυσης και εξώθησης

Ορισμός 2.7.1. Έστω $\mathcal{I}$ κατηγορία, $1 \xrightarrow{a_{10}} 0 \xleftarrow{a_{20}} 2$ στην $\mathcal{I}$ και έστω $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ συναρτητής. Αν θέσουμε $F(0) = Z$. $F(1) = X, F(2) = Y$ και $f = F(a_{10}),\ g = F(a_{20})$ μας δίνεται διάγραμμα στην $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & \\ Z & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Ένα όριο για τον συναρτητή F είναι ένα αντικείμενο P μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $\left\{P \xrightarrow{p_{F(i)}} F(i)\right\}_i$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι καθολικό ως προς την ιδιότητα

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "\mu_Y"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_X"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

με το παραπάνω διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Το $\lim_I F = P$ (αν υπάρχει) μαζί με τους μορφισμούς p_X, p_Y ονομάζεται **εφέλκυση** (pullback) του διαγράμματος $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$.

Αφήνεται να ορισθεί δϋικά η **εξώθηση** (pushout) ενός διαγράμματος δίνοντας ως υπόδειξη το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, bend left, "\mu_Y"] & \\ Z \arrow[r, "i_Z"] \arrow[drr, bend right, "\mu_Z"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] & \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 2.7.1. Στην $\mathrm{Mod}(R)$ θεωρούμε το διάγραμμα (R - γραμμικών απεικονίσεων)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & \\ Z & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Τότε, το R - πρότυπο $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ μαζί με τις φυσικές προβολές p_X, p_Y είναι η εφέλκυση του παραπάνω διαγράμματος. Πράγματι, αν υπάρχει R - πρότυπο Q ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "\mu_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

υπάρχει μοναδική R - γραμμική απεικόνιση $u \colon Q \to P$ με $u(q) = (\mu_X(q), \mu_Y(q))$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "\mu_Y"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_X"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Τώρα, αν θεωρήσουμε το διάγραμμα (R - γραμμικών απεικονίσεων)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \\
Z &
\end{tikzcd}$$

Τότε, το R - πρότυπο $Q = {}^{Y \oplus Z}\Big/_{\langle \{(f(x), -g(x) \mid x \in X\} \rangle}$ μαζί με τις R - γραμμικές i_Y, i_Z όπου $i(y) = \overline{(y, 0)}$ και $i(z) = \overline{(0, z)}$ για κάθε $y \in Y$ και $z \in Z$, είναι η εξώθηση του παραπάνω διαγράμματος. Πράγματι, θεωρούμε R - πρότυπο A και μορφισμούς μ_Y, μ_Z ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\
Z \arrow[r, "\mu_Z"] & A
\end{tikzcd}$$

Τότε, ορίζουμε την απεικόνιση $\overline{u} \colon Y \oplus Z \to A$ με $\overline{u}(y, z) = \mu_Y(y) + \mu_Z(z)$. Τότε, παρατηρούμε ότι

$$\langle \{(f(x), -g(x) \mid x \in X\} \rangle \subseteq \ker \overline{u}$$

επομένως από Θεώρημα 1.2.1 υπάρχει μοναδική R - γραμμική $u \colon Q \to A$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, bend left, "\mu_Y"] & \\
Z \arrow[r, "i_Z"] \arrow[drr, bend right, "\mu_Z"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

3.1 Ορισμοί

Ορισμός 3.1.1. Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος. Ορίζουμε ως τον **αντίθετο δακτύλιο** του R, τον δακτύλιο R° με ίδια στοιχεία και προσθετική πράξη με τον R, αλλά η πολλαπλασιατική του πράξη $*$ ορίζεται ως εξής : για κάθε $r, r' \in R^{\circ}$ ισχύει ότι

$$r * r' = r' \cdot r.$$

Ορισμός 3.1.2. Έστω R δακτύλιος. Ένα **δεξί** R **- πρότυπο** είναι μια αβελιανή ομάδα $(M, +)$ εφοδιασμένη με μια απεικόνιση $M \times R \xrightarrow{\varphi} M$ (δεξιά δράση), όπου συμβολίζουμε $\varphi(m, r) = m \cdot r$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) $m \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = m \cdot \lambda_1 + m \cdot \lambda_2$

(β) $m \cdot (\lambda_1 \lambda_2) = (m \cdot \lambda_1)\, \lambda_2$

(γ) $m \cdot 1_R = m$

(δ) $(m_1 + m_2) \cdot \lambda = m_1 \cdot \lambda + m_2 \cdot \lambda$

για κάθε $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ και για κάθε $m, m_1, m_2 \in M$.

Παρατήρηση 3.1.1. Έστω M_R ένα δεξί R - πρότυπο. Τότε, ορίζεται αριστερή δράση $\delta \colon R^{\circ} \times M \to M$ με $\delta(r, m) \coloneqq m \cdot r$. Η δράση αυτή δίνει στο M δομή αριστερού R° - προτύπου. Ενδεικτικά θα αποδειχθεί το (β) του Ορισμού 1.1.1. Έστω $m \in M$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in R^{\circ}$. Τότε

$$\delta\left(\lambda_1 * \lambda_2, m\right) = m \cdot \left(\lambda_1 * \lambda_2\right) = m \cdot \left(\lambda_2 \cdot \lambda_1\right) = \left(m \cdot \lambda_2\right) \cdot \lambda_1 = \delta\left(\lambda_1, \delta(\lambda_2, m)\right)$$

Ομοίως, αν N είναι ένα αριστερό R - πρότυπο, τότε ορίζεται δεξιά δράση

$$N \times R^{\circ} \to N, \quad (n, r) \mapsto r \cdot n.$$

Έτσι, προκύπτει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ αριστερών και δεξιών R - προτύπων. Με βάση τα παραπάνω αν ένας δακτύλιος είναι μεταθετικός, τότε τα αριστερά και τα δεξιά πρότυπα ταυτίζονται.

Ορισμός 3.1.3. Έστω R δακτύλιος, M_R δεξί R - πρότυπο, ${}_RN$ αριστερό R - πρότυπο και X μια αβελιανή ομάδα. Μια απεικόνιση $M \times N \xrightarrow{f} X$ λέγεται R **- διγραμμική** [1]
εαν για κάθε $m, m_1, m_2 \in M,\ n, n_1, n_2 \in N,\ r \in R$ ισχύουν

(α) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$,

(β) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$,

(γ) $f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n)$.

Έστω M_R δεξί R - πρότυπο, ${}_RN$ αριστερό R - πρότυπο. Αναζητούμε αβελιανή ομάδα $T_{M,N}$ μαζί με μια διγραμμική απεικόνιση

$$M \times N \xrightarrow{\tau} T_{M,N}$$

ώστε για κάθε άλλη αβελιανή ομάδα X και διγραμμική $M \times N \xrightarrow{f} X$ να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $T_{M,N} \xrightarrow{u} X$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό (στην κατηγορία των συνόλων).

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & X \\ T_{M,N} \arrow[ur, "u"] & \end{tikzcd}$$

Θα δείξουμε ότι μια τέτοια αβελιανή ομάδα $T_{M,N}$ υπάρχει, θα συμβολίζεται με $M \otimes_R N$, και ονομάζεται το **τανυστικό γινόμενο** των M, N, το οποίο είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό (λόγω της καθολικής ιδιότητας).

Θεώρημα 3.1.1. Η αβελιανή ομάδα $T_{M,N}$ και η διγραμμική απεικόνιση τ, όπως περιγράφονται παραπάνω, υπάρχουν.

Απόδειξη. Θεωρούμε το ελεύθερο $\mathbb{Z}$ - πρότυπο $F(M \times N)$ πάνω από το $M \times N$ και την απεικόνιση $M \times N \xrightarrow{j} F(M \times N)$ με $(m, n) \mapsto 1_{(m,n)}$. Έστω X αβελιανή ομάδα και $M \times N \xrightarrow{f} X$ μια R - διαγραμμική απεικόνιση. Λόγω της καθολογικής ιδιότητας των ελεύθερων προτύπων υπάρχει μοναδική $\mathbb{Z}$ - γραμμική $\tilde{f} \colon F(M \times N) \to X$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό στην κατηγορία των συνόλων.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & X \\ F(M \times N) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[1] Σημειώνουμε ότι, ανάλογα με την εκάστοτε βιβλιογραφία, οι διγραμμικές απεικονίσεις ενδέχεται να καλούνται *διπροσθετικές* (βλέπε Rotman).

Όμως η ενδέχεται να μην είναι R - διγραμμική. Θεωρούμε λοιπόν το υποπρότυπο k του $F(M \times N)$ που παράγεται από τα στοιχεία

$$\begin{aligned}
&j(m, n_1 + n_2) - j(m, n_1) - j(m, n_2) \\
&j(m_1 + m_2, n) - j(m_1, n) - j(m_2, n) \\
&j(mr, n) - j(m, rn)
\end{aligned}$$

για κάθε $m, m_1, m_2 \in M$, για κάθε $n, n_1, n_2 \in N$ και $r \in R$. Έτσι ορίζουμε ως $M \otimes_R N := F(M \times N)/_k$. Επομενως, προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "\otimes"'] & F(M \times N) \arrow[r, "\pi"] & M \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

είναι διγραμμική. Θα δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ απεικονίζει τα στοιχεία του k στο 0. Τότε, από Θεώρημα 1.2.1 υπάρχει μοναδική $\mathbb{Z}$ - γραμμική $u\colon M \otimes_R N \to X$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] \arrow[dd, bend right=60, "\otimes"'] & X \\
F(M \times N) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
M \otimes_R N \arrow[uur, dashed, bend right, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $m \in M$ και $n_1, n_2 \in N$ έχουμε ότι

$$\tilde{f}(j(m, n_1 + n_2)) = f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2) = \tilde{f}(j(m, n_1)) + \tilde{f}(j(m, n_2)).$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$\tilde{f}(j(m_1 + m_2, n)) = f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) = \tilde{f}(j(m_1, n)) + \tilde{f}(j(m_2, n))$$

και

$$\tilde{f}(j(mr, n)) = \tilde{f}(j(m, rn)).$$

□

Παρατήρηση 3.1.2. Έχουμε ότι $F(M \times N) = \bigoplus_{(m,n) \in M \times N} \mathbb{Z}_{(m,n)}$ όπου για κάθε $(m, n) \in M \times N$ έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{(m,n)} \arrow[r, "\varphi_{(m,n)}"] \arrow[d, "\lambda(m,n)"'] & \sum\limits_{(m,n) \in M \times N} \mathbb{Z}_{(m,n)} \\
\bigoplus\limits_{(m,n) \in M \times N} \mathbb{Z}_{(m,n)} \arrow[ur, "\sum \varphi(m,n)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
z_{(m,n)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z_{(m,n)} \cdot 1_{(m,n)} \\
(0, \dots, 0, , z_{(m,n)}, 0, \dots) \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Άρα κάθε τυπικό στοιχείο του $F(M\times N)$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά στη μορφή $\sum_{(m,n)} z_{(m,n)}\cdot 1_{(m,n)}$. Άρα, το τυπικό στοιχείο του $M\otimes_R N$ της μορφής

$$\sum_{(m,n)} z_{(m,n)}\cdot \overline{1_{(m,n)}} = \sum_{(m,n)} z_{(m,n)}(m\otimes n).$$

Αφού το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο του $M\otimes_R N$ είναι της μορφής $\sum_{i=1}^{k} n_i(m_i\otimes n_i)$. Τα $m_i\otimes n_i$ σε μια τέτοια παράσταση καλούνται **στοιχειώδεις τανυστές** (pure tensors)

Παρατήρηση 3.1.3. Η R - διγραμμικότητα της απεικόνισης $\otimes\colon M\times N\to M\otimes_R N$ επάγει τις ακόλουθες σχέσεις : για κάθε $r\in R$, για κάθε $m, m_1, m_2\in M$ και για κάθε $n, n_1, n_2\in N$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
&m\otimes(n_1+n_2) = m\otimes n_1 + m\otimes n_2\\
&(m_1+m_2)\otimes n = m_1\otimes n + m_2\otimes n\\
&m\otimes(rn) = (mr)\otimes n
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω R δακτύλιος και M αριστερό R - πρότυπο. Θα δείξουμε ότι $R\otimes_R M\cong M$ (ισομορφισμός αβελιανών ομάδων). Έστω X αβελιανή ομάδα και $R\times M\xrightarrow{f} X$ R - διγραμμική. Αναζητούμε R - γραμμική $\varphi\colon R\times M\to M$ και μοναδικό ομομορφισμό αβελιανών ομάδων ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \\
M \arrow[ur, dashed, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε

$$\varphi\colon R\times M\to M,\quad (r,m)\mapsto r\cdot m.$$

και $u(m) = f(1,m)$. Η φ είναι R - διγραμμική και u είναι η μοναδική $\mathbb{Z}$ - γραμμική που κάνει το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Από την καθολικότητα του $R\otimes_R M$ προκύπτει ότι $R\otimes_R M\cong M$. Για την ακρίβεια ο ισομορφισμός υλοποιείται από τις απεικονίσεις $u\colon M\to R\otimes_R M$ με $u(m) = 1\otimes m$ και $\tau\colon R\otimes_R M\to M$ με $\tau(r\otimes m) = r\cdot m$.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω n θετικός ακέραιος. Τότε, $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχειώδη τανυστή $\overline{z}\otimes\frac{\kappa}{\lambda}$ ισχύει ότι

$$\overline{z}\otimes\frac{\kappa}{\lambda} = (\overline{z}\cdot n)\times\frac{\kappa}{n\lambda} = 0.$$

Παράδειγμα 3.1.3. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι αν R δακτύλιος, τότε $R[X]\otimes_R R[Y]\cong R[X,Y]$.

3.2 Τανυστικά γινόμενα και προσάρτηση

Παρατήρηση 3.2.1. Το τανυστικό γινόμενο ορίζει συναρτητή. Πράγματι, αν R δακτύλιος και M_R ένα δεξί R - πρότυπο ορίζουμε

$$M_R \otimes_R -\colon R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}, \quad {}_RN \mapsto M \otimes_R N.$$

Επίσης αν $f\colon N \to N'$ ομομορφισμός R - προτύπων τότε ορίζουμε

$$M \otimes_R f\colon M \otimes_R N \to M \otimes_R N', \quad m \otimes n \mapsto m \otimes f(n).$$

Ομοίως ορίζεται, για ${}_RM$ αριστερό R - πρότυπο συναρτητής $\mathrm{Mod} - R \xrightarrow{-\otimes_R M} \mathrm{Ab}$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω S, R δακτύλιο και $(M, +)$ αβελιανή ομάδα ώστε M να είναι αριστερό S - πρότυπο , δεξί R - πρότυπο και

$$\forall s \in S,\ \forall r \in R,\ \forall m \in M\colon \quad (sm)n = s(mn).$$

Τότε, το M λέγεται S, R **διπρότυπο**.

Παρατήρηση 3.2.2. Έστω S, R δακτύλιοι, ${}_SM_R$ αριστερό S πρότυπο και δεξί R - πρότυπο και ${}_SN$ αριστερό S - πρότυπο. Τότε η αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ αποκτά δομή αριστερού R - προτύπου με δράση

$$R \times \mathrm{Hom}_S(M, N), \quad (r, \varphi) \mapsto r \cdot \varphi.$$

όπου για κάθε $x \in M$ ορίζουμε $(r \cdot \varphi)(x) := \varphi(x \cdot r)$. Ενδεικτικά θα επαληθεύσουμε το (β) του ορισμού. Έστω $r, r' \in R$ και $\varphi\colon M \to N$ μια S - γραμμική απεικόνιση. Τότε, για κάθε $x \in M$, έχουμε ότι

$$(rr') \cdot \varphi(x) = \varphi\left[x(rr')\right] \varphi\left[(xr)r'\right] = r' \cdot \varphi(xr) = r' \cdot \left[r \cdot \varphi(x)\right].$$

Αντίστοιχα ο συναρτητής ${}_SM \otimes_R -$ της Παρατήρησης 3.2.1 μπορεί να θεωρηθεί ως

$${}_SM \otimes_R -\colon R - \mathrm{Mod} \to S - \mathrm{Mod}$$

μέσω της δράσης $s \cdot (m \otimes n) := (sm) \otimes n$, για κάθε $s \in S,\ m \in M$ και $n \in N$.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω R δακτύλιος και M_R δεξί R - πρότυπο. Υπάρχει ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών

$$\begin{tikzcd} R - \mathrm{Mod} \arrow[r, bend left, "M \otimes_R -"] & \mathrm{Ab} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)"] \end{tikzcd}$$

όπου $M \otimes_R -$ είναι ο αριστερά προσαρτημένος.

Απόδειξη. Έστω Z αβελιανή ομάδα και N ένα αριστερό R - πρότυπο. Θα δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, Z) \cong^{\Phi} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Z)).$$

Έστω $f \colon M \otimes_R N \to Z$ ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Ορίζουμε $N \xrightarrow{\Phi(f)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Z)$ με

$$\Phi(f)(n) \colon M \to Z, \quad m \mapsto f(m \otimes n) \in Z.$$

Θα δείξουμε ότι Φ είναι φυσικός ισομορφισμός.

- Από την διγραμμικότητα του $\otimes$ και τη γραμμικότητα της f προκύπτει ότι $\Phi(f)(n)$ είναι $\mathbb{Z}$ - γραμμική, για κάθε $n \in N$ και ότι $\Phi(f)$ είναι R - γραμμική.

- Θα δείξουμε ότι Φ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Έστω R - γραμμική $N \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Z)$. Ειδικότερα, για κάθε $n \in N$ η απεικόνιση $g(n) \colon M \to Z$ είναι $\mathbb{Z}$ - γραμμική. Τότε, αν $\tilde{g} \colon M \times N \to Z$ με $\tilde{g}(m, n) = g(n)(m)$, με $\tilde{g}$ να είναι R διγραμμική, τότε υπάρχει μοναδική $\mathbb{Z}$ - γραμμική $u \colon M \otimes_R N \to Z$ ώστε παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\ M \otimes_R N \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

  Επομένως, υπάρχει μοναδική u ώστε $\Phi(u) = g$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι Φ είναι 1-1 και επί.

- Η φυσικότητα ως προς N και Z αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

□

3.3 Εφαρμογές

Πόρισμα 3.3.1. Έστω R δακτύλιος, M_R ένα δεξί R - πρότυπο και $\{N_i\}_{i \in I}$ οικογένεια αριστερών - R προτύπων. Τότε υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i).$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο ισχύει καθώς ο συναρτητής $M \otimes_R -$ είναι αριστερά προσαρτημένος και άρα διατηρεί συνόρια, ειδικότερα, ευθέα αθροίσματα. Διαφορετικά, ο ισομορφισμός υλοποιείται μέσω της απεικόνισης $m \otimes \{n_i\}_{i \in I} \mapsto \{m \otimes n_i\}_{i \in I}$. □

Πόρισμα 3.3.2. Έστω M_R ελεύθερο δεξί R - πρότυπο και ${}_RN$ ελεύθερο αριστερό R - πρότυπο με $M \cong R^{(A)}$ και $N \cong R^{(B)}$. Τότε ισχύει ότι

$$M \otimes_R N \cong R^{(A \times B)}.$$

Απόδειξη. Αν $R_a = R$ και $R_b = R$, για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$, τότε ισχύει ότι

$$M \otimes_R N \cong \left(\bigoplus_{a\in A} R_a\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{b\in B} R_b\right) \cong \bigoplus_{a\in A}\bigoplus_{b\in B}(R_a \otimes_R R_b) \cong \bigoplus_{(a,b)\in A\times B} R_{(a,b)}$$

$\square$

Ειδικότερα, αν k σώμα και V, W δύο k - διανυσματικοί χώροι με βάσεις $\{v_i\}_{i=1}^n$ ($\dim_k(V) = n$) και $\{w_i\}_{i=1}^m$ ($\dim_k(W) = m$) αντίστοιχα, τότε $V \otimes_k W \cong k^{nm}$ με μιά βάση να είναι η $\{v_i \otimes w_j\}_{i,j}$.

Πόρισμα 3.3.3. Έστω R δακτύλιος και $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ μια βραχεία ακριβής ακόλουθια R - προτύπων και M_R ένα δεξί R - πρότυπο. Τότε

$$M \otimes_R A \xrightarrow{M\otimes_R(i)} M \otimes_R B \xrightarrow{M\otimes_R(\varepsilon)} M \otimes_R C \to 0$$

είναι ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $M \otimes_R 0 \cong 0_{\mathbb{Z}}$ και επίσης

$$\operatorname{coker}(M \otimes_R i) \cong M \otimes_R \operatorname{coker}(i) \cong M \otimes_R \left(B \big/ \mathrm{im(i)}\right) \cong M \otimes_R \left(B \big/ \ker(\varepsilon)\right) \cong M \otimes_R C.$$

Έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, "M\otimes_R(i)"] \arrow[d, equal] & M \otimes_R B \arrow[r, "M\otimes_R(\varepsilon)"] \arrow[d, equal] & M \otimes_R C \arrow[r] & 0 \\
M \otimes_R A \arrow[r, "M\otimes_R(i)"] & M \otimes_R B \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(M \otimes_R (i)) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & 0
\end{tikzcd}$$

και αφού η κάτω ακολουθία είναι ακριβής, τότε και η πάνω ακολουθία του διαγράμματος είναι ακριβής. $\square$

Παράδειγμα 3.3.1. Το τανυστικό γινόμενο **δεν** διατηρεί μονομορφισμούς εν γένει. Πράγματι, θεωρούμε την β.α.α.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$ έχουμε ότι

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}}(\cdot 2)} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}}(\pi)} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Όμως, η απεικόνιση $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} (\cdot 2)$ είναι η μηδενική απεικόνιση, επομένως δεν είναι μονομορφισμός. Επίσης, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$.

Πόρισμα 3.3.4. Έστω R δακτύλιος, I (αμφίπλευρο) ιδεώδες του R και R_M αριστερό R - πρότυπο. Τότε υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R - προτύπων

$$\left(R/I\right) \otimes_R M \cong M/IM.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to I \xrightarrow{j} R \xrightarrow{\pi} {}^{R}/_{I} \to 0$$

όπου εφαρμόζοντας τον συναρτητή $- \otimes_R M$ παίρνουμε την β.α.α.

$$0 \to I \otimes_R M \xrightarrow{j \otimes_R M} R \otimes_R M \xrightarrow{\pi \otimes_R M} \left({}^{R}/_{I}\right) \otimes_R M \to 0.$$

Μέσω του ισομορφισμού $R \otimes_R M \xrightarrow{\varphi} M$ με $r \otimes m \mapsto rm$ προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \otimes_R M \arrow[r, "j \otimes_R M"] \arrow[d, "\varphi\big|_{I \otimes_R}"] & R \otimes_R M \arrow[r, "\pi \otimes_R M"] \arrow[d, "\varphi"] & \left({}^{R}/_{I}\right) \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & IM \arrow[r] & M \arrow[r] & {}^{M}/_{IM} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου $\psi\left((r + I) \otimes_R m\right) = rm + IM$. Αφού οι απεικονίσεις $\varphi\big|_{I \otimes_R}, \varphi$ είναι ισομορφισμοί αβελιανών ομάδων και οι δύο ακολουθίες είναι ακριβείς, τότε ψ είναι ισομορφισμός. □

Πόρισμα 3.3.5. Έστω I, J ιδεώδη ενός δακτυλίου R. Τότε

$$\left({}^{R}/_{I}\right) \otimes_R \left({}^{R}/_{J}\right) \cong {}^{R}/_{I + J}.$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.3.4 έχουμε ότι

$$\left({}^{R}/_{I}\right) \otimes_R \left({}^{R}/_{J}\right) \cong {}^{R/J} \Big/ {}_{I\left({}^{R}/_{J}\right)} \cong {}^{R/J} \Big/ {}_{I + J/J} \cong {}^{R}/_{I + J}$$

□

Παράδειγμα 3.3.2. Από το Πόρισμα 3.3.5, για $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong {}^{Z}/_{n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}} \cong {}^{\mathbb{Z}}\Big/_{(m,n)\mathbb{Z}}.$$

3.4 Επίπεδα πρότυπα

Ορισμός 3.4.1. Έστω M_R δεξιό R - πρότυπο. Το M_R καλείται **επίπεδο** αν για κάθε μονομορφισμό αριστερών R - προτύπων $A \xrightarrow{i} B$, τότε η απεικόνιση $M \otimes_R A \xrightarrow{M \otimes_R (i)} M \otimes_R B$ είναι μονομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω k σώμα. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύνολο

$$V(XY) = \left\{(a,b) \in k^2 \mid ab = 0\right\}.$$

Η πολυωνυμική απεικόνιση $V(XY) \to k$ με $(a,b) \mapsto a$ επάγει ομομορφισμό δακτυλίων στους αντίστοιχους δακτύλιους συντεταγμένων

$$k[X] \to k[X,Y] \big/ \langle XY \rangle, \quad X \mapsto X + \langle XY \rangle.$$

Έτσι το $k[X,Y] \big/ \langle XY \rangle$ μπορεί να θεωρηθεί ως $k[X]$ - πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι το πρότυπο $k[X,Y] \big/ \langle XY \rangle$ δεν είναι επίπεδο $k[X]$ - πρότυπο. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $k[X]$ - προτύπων $k[X] \xrightarrow{\cdot X} k[X]$. Τότε, από το παράδειγμα 3.1.1 αν θέσουμε $S := k[X,Y] \big/ \langle XY \rangle$ έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
k[X] \otimes_R S \arrow[r, "(\cdot X)\otimes_R S"] \arrow[d, "\cong"] & k[X] \otimes_R S \arrow[d, "\cong"] \\
S \arrow[r, "\cdot X"] & S
\end{tikzcd}$$

Αφού η απεικόνιση $S \xrightarrow{\cdot X} S$, δεν είναι μονομορφισμός (αφού $\overline{XY} = 0$, ενώ $\overline{Y} \neq 0$ στο S), τότε και η απεικόνιση $(\cdot X) \otimes_R S$ δεν είναι μονομορφισμός.

Λήμμα 3.4.1. Έστω μια οικογένεια $\{M_i\}_{i\in I}$ δεξιών R - προτύπων. Τότε το $\bigoplus_{i\in I} M_i$ είναι επίπεδο αν και μόνο αν M_i είναι επίπεδο, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον μονομορφισμό $A \xrightarrow{j} B$ αριστερών R - προτύπων. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R A \arrow[r, "(\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes_R (j)"] & \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R B \\
\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes A) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes(j))"] & \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes B) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Επομένως, το M_i είναι επίπεδο, για κάθε $i \in I$ αν και μόνο αν $M_i \otimes (j)$ είναι μονομορφισμός, για κάθε $i \in I$ αν και μόνο αν $\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes (j))$ είναι μονομορφισμός. Από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα προκύπτει ότι $\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes (j))$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R (j)$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\bigoplus_{i\in I} M_i$ είναι επίπεδο. □

Πρόταση 3.4.1. Κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.4.1, αφού κάθε προβολικό πρότυπο είναι ευθύς προσθετέος ελέύθερου προτύπου, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι επίπεδο. Έστω F ένα ελεύθερο R - πρότυπο, δηλαδή είναι της μορφής $F = R^{(\Lambda)}$. Αφού το R είναι επίπεδο R - πρότυπο, από το Λήμμα 3.4.1, το F είναι επίπεδο. □

Παράδειγμα 3.4.2. Το $\mathbb{Q}$ είναι $\mathbb{Z}$ - επίπεδο πρότυπο, αλλά δεν είναι προβολικό (αφού $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι. και $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερο). Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι $\mathbb{Z}$ - επίπεδο πρότυπο.

1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R. Τότε, αν $A \xrightarrow{i} B$ μονομορφισμός R - προτύπων, τότε η απεικόνιση $S^{-1}A \xrightarrow{S^{-1}(i)} S^{-1}B$ με $S^{-1}(i)(\frac{a}{s}) = \frac{i(a)}{s}$ είναι μονομορφισμός $S^{-1}R$ - προτύπων, όπου $S^{-1}A, S^{-1}B$ και $S^{-1}R$ οι τοπικοποιήσεις των A, B και R αντίστοιχα.

2. Ισχύει ότι $S^{-1}R \otimes_R A \cong S^{-1}A$ (ισομορφισμός $S^{-1}R$ - προτύπων). Επομένως, για κάθε $A \xrightarrow{i} B$ μονομορφισμό R - προτύπων έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} S^{-1}R \otimes_R A \arrow[r, "S^{-1}R\otimes(i)"] & S^{-1}R \otimes_R B \\ S^{-1}A \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "S^{-1}(i)"] & S^{-1}B \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Για $R = \mathbb{Z}$ και $S^{-1} = R \setminus \{0\}$ προκύπτει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι $\mathbb{Z}$ - επίπεδο πρότυπο.

3.5 Προσθετικοί και ακριβείς συναρτητές

Ορισμός 3.5.1. Έστω R, S δακτύλιοι και συναρτητής $F : R - \mathrm{Mod} \to S - \mathrm{Mod}$. Ο F θα λέγεται **προσθετικός** αν η απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_R(X, Y) \to \mathrm{Hom}_S(FX, FY), \quad f \mapsto Ff$$

είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων για κάθε X, Y αριστερά R - πρότυπα. Δηλαδή, για κάθε αριστερά R - πρότυπα και $f, g \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ ισχύει ότι

$$F(f + g) = Ff + Fg.$$

Αποδεικνύεται ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$, για κάθε A, B αριστερά R - πρότυπα.

Παράδειγμα 3.5.1. Έστω R δακτύλιος και M_R δεξί R - πρότυπο. Οι παρακάτω συναρτητές είναι ακριβείς.

- $M \otimes_R - : R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -) : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \to R - \mathrm{Mod}$
- ο επιλήσμων συναρτητής $u : R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$

Ορισμός 3.5.2. Έστω $F\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ προσθετικός συναρτητής.

(α) Ο F θα λέγεται **αριστερά ακριβής** αν για $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\varepsilon}C$ ακριβή ακολουθία, τότε η ακολουθία $0\to FA\xrightarrow{F(i)}FB\xrightarrow{F(\varepsilon)}FC$ είναι ακριβής.

(β) Ο F θα λέγεται **δεξιά ακριβής** αν για $A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\varepsilon}C\to 0$ ακριβή ακολουθία, τότε η ακολουθία $FA\xrightarrow{F(i)}FB\xrightarrow{F(\varepsilon)}FC\to 0$ είναι ακριβής.

(γ) Ο F θα λέγεται **ακριβής** αν είναι αριστερά και δεξιά ακριβής.

Παράδειγμα 3.5.2. Έστω M ένα δεξιό R - πρότυπο. Οι συναρτητές

$$\mathrm{Hom}_R(M,-),\mathrm{Hom}_R(-,M)\colon \mathrm{Mod}-R\to\mathrm{Ab}$$

είναι αριστερά ακριβείς και ο συναρτητής $M\otimes_R-\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Ab}$. Ο επιλήσμων συναρτητής $u\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Ab}$ είναι ακριβής.

Παρατήρηση 3.5.1. Έστω M ένα δεξιό R - πρότυπο.

(α) Το M είναι προβολικό αν και μόνο αν $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ είναι ακριβής.

(β) Το M είναι επίπεδο αν και μόνο αν $M\otimes_R-$ είναι ακριβής.

3.6 Εμφυτεύσεις σε ενριπτικά πρότυπα

Στόχος είναι να αποδείξουμε, δοσμένου δακτυλίου R, την ύπαρξη αρκετών ενριπτικών R - προτύπων. Αυτό θα επιτευχθεί αποδεικνύοντας ότι κάθε R - πρότυπο εμφυτεύεται σε κάποιο ενριπτικό R - πρότυπο, επεκτείνοντας το αποτέλεσμα του Πορίσματος 1.8.2.

Πρόταση 3.6.1. Έστω R δακτύλιος και $\varphi\colon\mathbb{Z}\to R$ (ο μοναδικός) ομομορφισμός δακτύλιος. Ο επιλήσμων συναρτητής

$$\varphi_*\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Ab}$$

επιδέχεται

(α) **αριστερά προσάρτηση** τον συναρτητή $R\otimes_{\mathbb{Z}}-\colon\mathrm{Ab}\to R-\mathrm{Mod}$

(β) **δεξιά προσάρτηση** τον συναρτητή $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,-)\colon\mathrm{Ab}\to R-\mathrm{Mod}$

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί :

$$\varphi_*\cong\mathrm{Hom}_R(R,-)\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Ab} \tag{3.1}$$

$$\varphi_*\cong R\otimes_R-\colon R-\mathrm{Mod}\to\mathrm{Ab} \tag{3.2}$$

Τότε, για κάθε αβελιανή ομάδα M και αριστερό R - πρότυπο N υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$\mathrm{Hom}_R\left(R\otimes_{\mathbb{Z}}M,N\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\mathrm{Hom}_R(R,N)\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\varphi_*N\right).$$

και

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\varphi_*N,M\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(R\otimes_R N,M\right)\cong\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(R,M\right)).$$

1. Για την σχέση 3.1 θεωρούμε την οικογένεια απεικόνισεων

$$\left\{\tau^M : \varphi_*(M) \to \mathrm{Hom}_R(R, M)\right\}_{M \in \mathrm{Obj}(R-\mathrm{Mod})}$$

με $m \mapsto \tau^M_m : R \to M$ με $\tau^M_m(1) = m$, η οποία ορίζει φυσικό μετασχηματισμό. αφού αν $M \xrightarrow{f} N$ είναι R - γραμμική, τότε προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varphi_*(M) \arrow[r, "\tau^M"] \arrow[d, "\varphi_*(f)"'] & \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(R,f)"] \\
\varphi_*(N) \arrow[r, "\tau^N"] & \mathrm{Hom}_R(R, N)
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό, αφού για κάθε $m \in M$ έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
m, \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \tau^M_m : R \to M \arrow[d, mapsto] \\
f(m) \arrow[d, mapsto] & f \circ \tau^M_m \arrow[dl, equal] \\
\tau^N_{f(m)} &
\end{tikzcd}$$

Τώρα, για κάθε αριστερό R - πρότυπο M έχουμε ότι τ^M είναι ισομορφισμός (αβελιανών ομάδων). Πράγματι, ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$(f : R \to M) \mapsto f(1)$$

όπου f είναι R - γραμμική, είναι η αντίστροφη της τ^M.

2. Όμοια με το 1. η οικογένεια ομομορφισμών

$$\left\{\psi^M : \varphi_*(M) \to R \otimes_R M\right\}_{M \in \mathrm{Obj}(R-\mathrm{Mod})}$$

με $\psi^M(m) = 1 \otimes m$, ορίζει φυσικό ισομορφισμό μεταξύ των συναρτητών $\varphi_*(-)$ και $R \otimes_R -$

□

Λήμμα 3.6.1. Έστω R δακτύλιος και D ενριπτική (ή διαιρέσιμη) αβελιανή ομάδα. Τότε, το $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ είναι ενριπτικό R - πρότυπο.

Απόδειξη. Το $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ είναι ενριπτικό R - πρότυπο αν και μόνο αν ο συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R\left(-, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)\right)$$

είναι ακριβής. Όμως, από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι

$$\mathrm{Hom}_R\left(-, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\varphi_*(-), D\right).$$

Όμως, η σύνθεση

$$R - \mathrm{Mod} \xrightarrow{\varphi_*(-)} \mathrm{Ab} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,D)} R - \mathrm{Mod}$$

είναι ακριβής, καθώς οι επιμέρους συναρτητές είναι ακριβείς. Άρα, το $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ είναι ενριπτικό R - πρότυπο. $\square$

Θεώρημα 3.6.1. Έστω R δακτύλιος και M ένα R - πρότυπο. Τότε, υπάρχει ενριπτικό R - πρότυπο I και μονομορφισμός $i \colon M \hookrightarrow I$.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.8.2 θεωρούμε μονομορφισμό αβελιανών ομάδων $M \hookrightarrow D$, όπου D ενριπτική αβελιανή ομάδα. Τότε, έχουμε ότι

$$M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D).$$

Από το Λήμμα 3.6.1 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ

4.1 Αλυσωτά συμπλέγματα

Ορισμός 4.1.1. Έστω R δακτύλιος. Ένα **αλυσωτό σύμπλεγμα** (αριστερών) R - προτύπων δίνεται από πρότυπα και μορφισμούς

$$\mathbb{X}_\bullet: \qquad \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}^X} X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{\partial_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^X} \cdots$$

όπου για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $\partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X = 0$. Συμβολίζουμε με $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$.

Ορισμός 4.1.2. Έστω $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$, $\left(\mathbb{Y}_\bullet, \partial^Y\right)$ αλυσωτά συμπλέγματα R - προτύπων. Μια οικογένεια R - γραμμικών απεικονίσεων $\{f_i \colon X_i \to Y_i\}$ καλείται **μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων** και συμβολίζεται με

$$f \colon \left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right) \to \left(\mathbb{Y}_\bullet, \partial^Y\right)$$

αν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$f_{n-1} \circ \partial_n^X = \partial_n^Y \circ f_n,$$

δηλαδή αν το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "\partial_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "\partial_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Έτσι, για ένα δακτύλιο R, ορίζεται η κατηγορία $\mathrm{Ch}(R)$ των αλυσωτών συμπλεγμάτων R - προτύπων με αντικείμενα τα αλύσωτά συμπλέγματα $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$ και μορφισμούς όπως δοθηκαν στον Ορισμό 4.1.2., όπου ο ταυτικός μορφισμός ορίζεται με τον φυσιολογικό τρόπο

$$\mathrm{id}_{(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X)} = \left\{ X_n \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_n}} X_n \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

και η σύνθεση ως εξής : αν $f := \{f_n \colon X_n \to Y_n\}_n$ και $g := \{g_n \colon Y_n \to Z_n\}_n$ μορφισμοί αλυσωτών από το $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$ στο $\left(\mathbb{Y}_\bullet, \partial^Y\right)$ και από το $\left(\mathbb{Y}_\bullet, \partial^Y\right)$ στο $\left(\mathbb{Z}_\bullet, \partial^Z\right)$ αντίστοιχα, τότε ορίζουμε ως

$$g \circ f := \{g_n \circ f_n \colon X_n \to Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Παρατήρηση 4.1.1. Έστω $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$ αλυσωτό σύμπλεγμα. Αφού για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $\partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{im}\left(\partial_{n+1}^X\right) \subseteq \ker\left(\partial_n^X\right)$.

Ορισμός 4.1.3. Έστω $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$ αλυσωτό σύμπλεγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η αβελιανή ομάδα

$$H_n(\mathbb{X}) = \ker\left(\partial_n^X\right) \Big/ \mathrm{im}\left(\partial_{n+1}^X\right)$$

καλείται η n **- οστή ομάδα ομολογίας** του $\left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right)$.

Πρόταση 4.1.1. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ορίζεται συναρτητής $H_n(-) \colon \mathrm{Ch}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

Απόδειξη. Έστω $f \colon \left(\mathbb{X}_\bullet, \partial^X\right) \to \left(\mathbb{Y}_\bullet, \partial^Y\right)$ μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων και $n \in \mathbb{Z}$. Λόγω της μεταθετικότητας τους διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "\partial_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "\partial_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ορίζεται ο περιορισμός

$$f_n| := f\Big|_{\ker\left(\partial_n^X\right)} \colon \ker\left(\partial_n^X\right) \to \ker\left(\partial_n^Y\right), \quad x \mapsto f_n(x).$$

Θεωρούμε την σύνθεση

$$\ker\left(\partial_n^X\right) \xrightarrow{f_n|} \ker\left(\partial_n^Y\right) \xrightarrow{\pi} H_n(\mathbb{Y}).$$

Τώρα, λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτει ότι $\mathrm{im}\left(\partial_{n+1}^X\right) \subseteq \ker\left(\pi \circ f_n|\right)$, άρα από το Θεώρημα 1.2.1 υπάρχει μοναδική $H_n(f) \colon H_n(\mathbb{X}) \to H_n(\mathbb{Y})$ που να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\ker\left(\partial_n^X\right) \arrow[r, "\pi \circ f_n|"] \arrow[d] & H_n(\mathbb{Y}) \\
H_n(\mathbb{X}) \arrow[ur, "H_n(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι $H_n(\mathrm{id}_{\mathbb{X}}) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbb{X})}$ και $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$. □

Ορισμός 4.1.4. Έστω $\left(\mathbb{X}, \partial_n^X\right)$ αλυσωτό σύμπλεγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_n(\mathbb{X}) = \ker\left(\partial_n^X\right)$ καλούνται n **- κύκλοι** και τα στοιχεία του $B_n(\mathbb{X}) = \mathrm{im}\left(\partial_{n+1}^X\right)$ καλούνται n **- σύνορα**.

Παρατήρηση 4.1.2. Αν $\left(\mathbb{X}, \partial_n^X\right)$ αλυσωτό σύμπλεγμα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, επάγεται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to B_n(\mathbb{X}) \to Z_n(\mathbb{X}) \to H_n(\mathbb{X}) \to 0.$$

4.2 Ιδιάζουσα ομολογία

Θυμίζουμε την κατηγορία Δ που αναφέραμε στο Παράδειγμα 2.1.5 με αντικείμενα τους διατακτικούς αριθμούς $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ και μορφισμούς τις απεικονίσεις $f \colon [n] \to [m]$ που διατηρούν την διάταξη, δηλαδή για κάθε $1 \leq i \leq j \leq n-1$ ισχύει ότι $f(i) \leq f(j)$. Επίσης, θυμίζουμε την κατηγορία Simp με αντικείμενα τους τοπολογικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^{n+1}$

$$|\Delta^n| = \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq a_0, \ldots, a_n \leq 1, \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 \right\}$$

και μορφισμούς τις αφφινικές απεικονίσεις $f \colon |\Delta^n| \to \left|\Delta^\ell\right|$, βλέπε Παράδειγμα 2.1.5. Επίσης, θεωρούμε τον συναρτητή $\Gamma \colon \Delta \to \mathrm{Simp}$ (βλέπε Παράδειγμα 2.3.5). Θεωρούμε στην κατηγορία Δ τους εξής μορφισμούς : για $1 \leq i \leq n$

$$\delta_i \colon [n] \to [n+1], \quad \delta_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & i \leq j \end{cases}.$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & \cdots & i-1 \arrow[d] & i \arrow[dr] & i+1 \arrow[dr] & \cdots & n-1 \arrow[dr] & \\
0 & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \cdots & n
\end{tikzcd}$$

και για $0 \leq i \leq n+1$

$$\sigma_i \colon [n] \to [n-1], \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j-1, & i \leq j \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & \cdots & i-1 \arrow[d] & i \arrow[dl] & i+1 \arrow[dl] & \cdots & n-1 \arrow[dl] \\
0 & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & \cdots & n-2 &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.2.1. Οι δ_i, όπως ορίσθηκαν παραπάνω, ονομάζονται **απεικονίσεις όψεως** και οι σ_i ονομάζονται **απεικονίσεις εκφυλισμού**.

[1]

4.3 Συναλυσωτά συμπλέγματα

Ορισμός 4.3.1. Έστω R δακτύλιος. Ένα **συναλυσωτό σύμπλεγμα** (αριστερών) R - προτύπων δίνεται από πρότυπα και μορφισμούς

$$\mathbb{X}^\bullet : \qquad \cdots \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial_X^{n}} X^{n+1} \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} \cdots$$

όπου για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $\partial_{n+1}^X \circ \partial_n^X = 0$.

[1] Θα γίνουν προσθήκες στην συγκεκριμένη ενότητα.

Παρατήρηση 4.3.1. Ορίζεται κατηγορία $\mathrm{CoCh}(R)$ με αντικείμενα συναλυσωτά συμπλέγματα και μορφισμούς που δίνονται από οικογένειες ομομορφισμών (R - προτύπων) $\left\{X^i \xrightarrow{f_i} Y^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ τέτοιες ώστε για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X^i \arrow[r, "\partial_X^i"] \arrow[d, "f_i"'] & X^{i+1} \arrow[d, "f_{i+1}"] \\ Y^i \arrow[r, "\partial_Y^i"] & Y^{i+1} \end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.3.2. Αν $\left(\mathbb{X}^\bullet, \partial_X^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ συναλυσωτό σύμπλεγμα, τότε για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ η αβελιανή ομάδα

$$H^i(\mathbb{X}) = \ker\partial_X^i \Big/ \mathrm{im}\partial_X^{i-1}$$

είναι η i - οστή **ομάδα συνομολογίας** του $\mathbb{X}$.

Παράδειγμα 4.3.1. Θεωρούμε βραχεία ακριβή ακολουθία R - προτύπων $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ και R - πρότυπο M. Ορίζουμε συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$0 \longrightarrow C^{-1} = \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{i_*} C^0 = \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} C^1 = \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0.$$

Η ομάδες συνομολογίας του παραπάνω συμπλέγματος είναι οι

$$H^{-1}(\mathbb{X}) = 0, \quad H^0(\mathbb{X}) = 0 \quad \text{και} \quad H^1(\mathbb{X}) = \mathrm{Hom}_R(M, C) \big/ \mathrm{im}\varepsilon_*$$

4.4 Ομοτοπία

Ορισμός 4.4.1 (Ομοτοπία)**.** Έστω $\left(\mathbb{X}, \partial^X\right), \left(\mathbb{Y}, \partial^Y\right)$ αλυσωτά συμπλέγματα R - προτύπων και $f, g\colon \left(\mathbb{X}, \partial^X\right) \to \left(\mathbb{Y}, \partial^Y\right)$ μορφισμοί. Μια οικογένεια ομομορφισμών R - προτύπων

$$\{\delta_n \colon X_n \to Y_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

λέγεται **ομοτοπία** αν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$f_n - g_n = \delta_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ \delta_n$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^X"] & X_n \arrow[r, "\partial_n^X"] \arrow[dl, dashed, "\delta_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\delta_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "\partial_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Συμβολίζουμε $f \sim g$ και οι f, g καλούνται **ομοτοπικές απεικονίσεις**. Για συντομία αρκετές φορές θα γράφουμε $f - g = \partial \circ \delta + \delta \circ \partial$.

Πρόταση 4.4.1. Με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.3.2 αν $f \sim g$, τότε $H_n(f) = H_n(g)$.

Απόδειξη. Έστω $[x] \in H_n(\mathbb{X})$ με $x \in \ker \partial_n^X$. Αφού $f \sim g$, τότε

$$f_n(x) - g_n(x) = \delta_{n-1} \circ \partial_n^X(x) + \partial_{n+1}^Y \circ \delta_n(x) = \partial_{n+1}^Y \circ \delta_n(x).$$

Άρα, είναι σαφές ότι

$$H_n(f)([x]) = [f_n(x)] = [g_n(x)] = H_n(g)([x]).$$

□

Ορισμός 4.4.2. Ένα αλυσωτό σύμπλεγμα $\left(\mathbb{X}, \partial^X\right)$ λέγεται **διασπώμενα ακριβές** αν $\mathrm{id}_{\mathbb{X}} \sim 0$.

Παρατήρηση 4.4.1. Η συνθήκη $\mathrm{id}_{\mathbb{X}} \sim 0$ σημαίνει ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$\mathrm{id}_{X_n} = \partial_{n+1}^X \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ \partial_n^X.$$

Ειδικότερα αν το $\mathbb{X}$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$, τότε υπάρχουν απεικονίσεις $r \colon B \to A$ και $s \colon C \to B$ ώστε να κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθέτικο.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "0"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, dashed, "r"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dl, dashed, "s"] & 0 \arrow[dl, dashed, "0"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Άρα, η ακολουθία είναι διασπώμενη.

Παρατήρηση 4.4.2. Μέσω της παραπάνω παρατηρήσης είναι σαφές ότι δεν ισχύει γενικά το αντίστροφο της Πρότασης 4.4.1. Αν $\mathbb{X}$ είναι μια μη διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία, τότε από την παραπάνω πρόταση $\mathrm{id}_{\mathbb{X}} \not\sim 0$, αλλά $H_n(\mathrm{id}_{\mathbb{X}}) = H_n(0) = 0$, αφού $H_n(\mathbb{X}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 4.4.2. Έστω $\left(\mathbb{X}, \partial^X\right)$, $\left(\mathbb{Y}, \partial^Y\right)$ αλυσωτά συμπλέγματα. Η ομοτοπία ορίζει σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μορφισμών $\mathrm{Hom}_{Ch}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Απόδειξη. Έστω $f, g, h \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ αλυσωτά συμπλέγματα.

(α) Είναι προφανές ότι $f \sim f$, για $\delta_n = 0$.

(β) Αν $f \sim g$ είναι σαφές ότι $g \sim f$.

(γ) Υποθέτουμε ότι $f \sim g$ και $g \sim h$, δηλαδή

$$f - g = \delta \circ \partial^X + \partial^Y \circ \delta \quad \text{και} \quad g - h = \delta' \circ \partial^X + \partial^Y \circ \delta'.$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$f - h = (\delta + \delta') \circ \partial^X + \partial^Y \circ (\delta + \delta')$$

δηλαδή προκύπτει ότι $f \sim h$.

□

Ορισμός 4.4.3. Έστω R δακτύλιος. Η **ομοτοπική κατηγορία αλυσωτών συμπλεγμάτων** $K(R)$ έχει ως αντικείμενα τα αλυσωτά συμπλέγματα R - προτύπων (όπως η $\mathrm{Ch}(R)$) και για κάθε δύο συμπλέγματα $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ ορίζουμε ως σύνολο μορφισμών

$$\mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) /_{\sim}.$$

Παρατήρηση 4.4.3. Η $K(R)$ είναι πράγματι κατηγορία.

Απόδειξη. Για συμπλέγματα $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ και $\mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\circ \colon \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \to \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f].$$

Ελέγχουμε ότι η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι αν $f, f' \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $g, g' \colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ μορφισμοί με $f \sim f'$ και $g \sim g'$, τότε $g \circ f \sim g' \circ f'$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r, "\partial^X"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "f'"] & X_\bullet \arrow[r, "\partial^X"] \arrow[dl, dashed, "\delta"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "f'"] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\delta"'] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_\bullet \arrow[r, "\partial^Y"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & Y_\bullet \arrow[r, "\partial^Y"] \arrow[dl, dashed, "\delta'"'] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\delta'"'] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z_\bullet \arrow[r, "\partial^Z"] & Z_\bullet \arrow[r, "\partial^Z"] & Z_\bullet \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Αφού $f \sim f'$, ισχύει ότι

$$f - f' = \delta \circ \partial^X + \partial^Y \circ \delta \Rightarrow g \circ f - g \circ f' = (g \circ \delta) \circ \partial^X + \left(g \circ \partial^Y\right) \circ \delta.$$

Αφού g είναι μορφισμός συμπλεγμάτων είναι σαφές ότι $g \circ \partial^Y = \partial^Z \circ g$, άρα έχουμε ότι

$$g \circ f - g \circ f' = (g \circ \delta) \circ \partial^X + \partial^Z \circ (g \circ \delta)$$

επομένως είναι σαφές ότι $g \circ f \sim g \circ f'$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $g' \circ f \sim g' \circ f'$. Αφού $g \sim g'$, τότε $g - g' = \delta \circ \partial^Y + \partial^Z \circ \delta$. Παρόμοια, συνθέτοντας με f (από τα δεξιά) και χρησιμοποιώντας ότι f είναι μορφισμός συμπλεγμάτων έχουμε ότι $g \circ f \sim g' \circ f \sim g' \circ f'$, άρα προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος είναι άμεσο ότι για κάθε αλυσωτό σύμπλεγμα $(\mathbb{X}, \partial^X)$ υπάρχει ο αντίστοιχος ταυτοτικός μορφισμός $[\mathrm{id}_{\mathbb{X}}] \in \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ ώστε για κάθε μορφισμός $[f]\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ στην $K(R)$ να ισχύει ότι

$$[f] \circ [\mathrm{id}_{\mathbb{X}}] = [f] \quad \text{και} \quad \mathrm{id}_{\mathbb{Y}} \circ [f] = [f].$$

□

Παρατήρηση 4.4.4. Ορίζεται συναρτητής

$$\pi\colon \mathrm{Ch}(R) \to K(R), \quad \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}, \quad \text{και} \quad f \mapsto [f]$$

με $\pi(f \circ g) = \pi(f) \circ \pi(g)$ (άμεσο από τον ορισμό της σύνθεσης). Ισχύει επίσης ότι $\pi(f+g) = \pi(f)+\pi(g)$, δηλαδή ο π είναι προσθετικός (αν $f = \{f_n\}_n$ και $g = \{g_n\}_n$ ορίζουμε $f+g \coloneqq \{f_n+g_n\}_n$ και $[f]+[g] \coloneqq [f+g]$.

Πρόταση 4.4.3. Έστω $F\colon \mathrm{Ch}(R) \to \mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ προσθετικός συναρτητής. Τότε, αν $f, g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ στην $\mathrm{Ch}(R)$ ισχύει η εξής συνεπαγωγή

$$f \sim g \Rightarrow Ff \sim Fg.$$

Απόδειξη. Αφού $f \sim g$, τότε $f - g = \delta \circ \partial^X + \partial^Y \circ \delta$. Εφαρμόζοντας τον F και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητά του έχουμε ότι

$$Ff - Fg = F(\delta) \circ \partial^{FX} + \partial^{FY} \circ F(\delta).$$

□

Πόρισμα 4.4.1. Αν $F\colon \mathrm{Ch}(R) \to \mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ προσθετικός συναρτητής, τότε

$$f \sim g \Rightarrow H_n(Ff) = H_n(Fg).$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από τις Προτάσεις 4.4.1 και 4.4.3. □

4.5 Προβολικές επιλύσεις

Ορισμός 4.5.1. Έστω M ένα R - πρότυπο. **Προβολική επίλυση** του M ονομάζεται ένα αλυσωτό σύμπλεγμα

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n^P} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} M \to 0$$

όπου για κάθε $i \geq 0$ έχουμε ότι P_i είναι R - προβολικό πρότυπο και το σύμπλεγμα είναι ακριβές. Συμβολίζουμε $\mathbb{P}_\bullet \to M$. Το αλυσωτό σύμπλεγμα

$$\mathbb{P}_\bullet\colon \cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n^P} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{0} 0$$

λέγεται **διαγεγραμμένη προβολική επίλυση** .

Παρατήρηση 4.5.1. Με τους παραπάνω συμβολισμούς παρατηρούμε ότι υπάρχει μορφισμός

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] \arrow[d, "0"] & P_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^P"] \arrow[d, "0"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "0"] & P_0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\partial_0^P"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

που επάγει ισομορφισμό στην ομολογία, αφού

$$P_0 \big/ \mathrm{im}\partial_1^P \cong P_0 \big/ \ker \partial_0^P \cong M.$$

Παράδειγμα 4.5.1. Η βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ είναι προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ πάνω από το $\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 4.5.2. Έστω k σώμα και $R = k[x] \big/ \langle x^2 \rangle$. Το παρακάτω αλυσωτό σύμπλεγμα είναι προβολική επίλυση του k, όπου καταδεικνύεται και ο τρόπος κατασκευής του.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "\cdot x"] \arrow[dr, two heads] & R \arrow[r, "\cdot x"] & R \arrow[rr, "\cdot x"] \arrow[dr, two heads] & & R \arrow[r, "{[F] \mapsto F(0)}"] & k \arrow[r] & 0 \\
& & xR \arrow[ur, tail] & & xR \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

Αν $R = k[x,y] \big/ \langle xy \rangle$ αφήνεται ως άσκηση να βρεθεί μια προβολική επίλυση του k.

Πρόταση 4.5.1. Κάθε πρότυπο M επιδέχεται προβολική επίλυση.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή.

- **Βάση.** Από το Θεώρημα 1.5.1, γνωρίζουμε ότι υπάρχει επιμορφισμός $P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} M \to 0$, όπου P_0 είναι ελεύθερο (άρα και προβολικό).
- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^P} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} M \to 0$$

Τότε, από το Θεώρημα 1.5.1 υπάρχει επιμορφισμός $P_n \xrightarrow{p} \ker \partial_{n-1}^P$, όπου P_n είναι προβολικό. Αν $\ker \partial_{n-1}^P \xrightarrow{i} P_{n-1}$ η φυσική εμφύτευση και $\partial_n^P \coloneqq i \circ p$, τότε προκύπτει ότι η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής

$$P_n \xrightarrow{\partial_n^P} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^P} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} M \to 0$$

□

Πρόταση 4.5.2. Έστω $f\colon M \to N$ ομομορφισμός R - προτύπων και $\mathbb{P}_\bullet \to M$ και $\mathbb{Q}_\bullet \to N$ προβολικές επιλύσεις των M και N αντίστοιχα.

(α) Τότε, για κάθε $n \geq 0$ υπάρχουν ομομορφισμοί R - προτύπων $P_n \xrightarrow{f_n} Q_n$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}:=f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

δηλαδή για κάθε $n \geq 0$ ισχύει ότι $f_{n-1} \circ \partial_n^P = \partial_n^Q \circ f_n$. Ο μορφισμός συμπλεγμάτων

$$\left\{ P_n \xrightarrow{f_n} Q_n \right\}_{n \geq 0}$$

που επάγεται στις διαγεγραμμένες προβολικές επιλύσεις ονομάζεται **ανύψωση** της f.

(β) Αν $\tilde{f} = \left\{ P_n \xrightarrow{f_n} Q_n \right\}_{n\geq 0}$ και $\tilde{g} = \left\{ P_n \xrightarrow{g_n} Q_n \right\}_{n\geq 0}$ ανυψώσεις της f, τότε $\tilde{f} \sim \tilde{g}$.

Απόδειξη. (α) Θα κατασκευάσουμε την ζητούμενη ακολουθία $\{f_n\}_{n\geq 0}$ επαγωγικά.

- **Βάση.** Αφού $f \circ \partial_0^P\colon P_0 \to N$ είναι R - γραμμική και $\partial_0^Q\colon Q_0 \to N$ είναι επιμορφισμός R - προτύπων, από την προβολικότητα του P_0 υπάρχει R - γραμμική $f_0\colon P_0 \to Q_0$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, dashed, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- **Επαγωγικό βήμα.** Υποθέτουμε την ύπαρξη R - γραμμικών $f_i\colon P_i \to Q_i$ με $f_{i-1} \circ \partial_i^P = \partial_i^Q \circ f_i$ για $0 \leq i \leq n-1$. Μέσω του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[rr, "\partial_n^P"] \arrow[dr, two heads, "\partial_n^P"'] \arrow[dd, dashed, "f_n"] & & P_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^P"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & P_{n-2} \arrow[dd, "f_{n-2}"] \\
& \ker \partial_{n-1}^P \arrow[ur, tail] \arrow[dd] & & \\
Q_n \arrow[rr, "\partial_n^Q"] \arrow[dr, two heads, "\partial_n^Q"'] & & Q_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^Q"] & Q_{n-2} \\
& \ker \partial_{n-1}^Q \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

αφού $f_{n-1} \circ \partial_n^P \colon P_n \to \ker \partial_{n-1}^Q$ είναι R - γραμμική και $\partial_n^Q \colon Q_n \to \ker \partial_n^Q$ είναι επιμορφισμός, τότε από την προβολικότητα του P_n, υπάρχει R - γραμμική $f_n \colon P_n \to Q_n$ με τη ζητούμενη ιδιότητα.

(β) Έστω $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ ανυψώσεις της f. Θα κατασκευάσουμε μια ομοτοπία από την $\tilde{f}$ στην $\tilde{g}$ επαγωγικά.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- **Βάση.** Έχουμε ότι $\partial_0^Q \circ f_0 = f \circ \partial_0^Q$ και $\partial_0^Q \circ g_0 = f \circ \partial_0^Q$, επομένως $\partial_0^Q \left(f_0 - g_0\right) = 0$. Από την Πρόταση 2.1.3 προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $P_0 \xrightarrow{h} \ker \partial_0^Q$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "f_0 - g_0"] & \\
\ker \partial_0^Q \arrow[r, tail] & Q_0
\end{tikzcd}$$

Αφού $Q_1 \xrightarrow{\partial_1^P} \ker \partial_0^Q$ είναι επιμορφισμός και $P_0 \xrightarrow{h} \ker \partial_0^Q$ είναι R - γραμμική, από την προβολικότητα του P_0 υπάρχει R - γραμμική $P_0 \xrightarrow{\delta_0} Q_1$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, "f_0 - g_0"] \arrow[dll, dashed, "\delta_0"'] \arrow[ddl, dashed, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\delta_{-1}=0"] & 0 \\
Q_1 \arrow[rr, "\partial_1^Q"] \arrow[dr, two heads, "\partial_1^Q"'] & & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & \ker \partial_0^Q \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος είναι σαφές ότι $f_0 - g_0 = \partial_1^P \circ \delta^0 + \delta_{-1} \circ \partial_0^P$.

- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε ότι έχουν κατασκευασθεί $\delta_i \colon P_i \to Q_{i+1}$ για $0 \leq i \leq n-1$ ώστε

$$f_i - g_i = \partial_{i+1}^Q \circ \delta_i + \delta_{i-1} \circ \partial_i^P.$$

Ειδικότερα, ισχύει ότι $f_{n-1} - g_{n-1} = \partial_n^Q \circ \delta_{n-1} + \delta_{n-2} \circ \partial_{n-1}^P$. Αναζητούμε $\delta_n \colon P_n \to Q_{n+1}$ ώστε

$$f_n - g_n = \partial_{n+1}^Q \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ \partial_n^P.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\partial_n^Q \left(f_n - g_n - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P\right) = \partial_n^Q \circ f_n - \partial_n^Q \circ g_n - \partial_n^Q \circ \delta_{n-1} \circ \partial_n^P$$

και

$$\begin{aligned} & \left(\partial_n^Q \circ \delta_{n-1}\right) \circ \partial_n^P = \left(f_{n-1} - g_{n-1} - \delta_{n-2} \circ \partial_{n-1}^P\right) \circ \partial_n^P \\ = \quad & f_{n-1} \circ \partial_n^P - f_{n-1} \circ \partial_n^P - \underbrace{\delta_{n-2} \circ \partial_{n-1}^P \circ \partial_n^P}_{=0} = \partial_n^Q \circ f_n - \partial_n^Q \circ g_n \end{aligned}$$

Αν $h = f_n - g_n - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P$, τότε προκύπτει ότι $\partial_n^Q \circ h = 0$. Εφαρμόζοντας την μέθοδο της Βάσης για την h έχουμε το ζητούμενο.

□

Ορισμός 4.5.2. Έστω $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ και $g \colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ μορφισμοί αλυσωτών συμπλεγμάτων. Τα $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ λέγονται **ομοτοπικά ισοδύναμα** και οι f, g **ομοτοπικές ισοδυναμίες** αν

$$f \circ g \sim \mathrm{id}_{\mathbb{Y}} \quad \text{και} \quad g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$$

ή ισοδύναμα αν $[f], [g]$ είναι ισομορφισμοί στην κατηγορία $K(R)$ με $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}_{\mathbb{Y}}]$ και $[g] \circ [f] = [\mathrm{id}_{\mathbb{X}}]$.

Πρόταση 4.5.3. Κάθε δύο (διαγεγραμμένες) προβολικές επιλύσεις $\mathbb{P}_\bullet \to M$ και $\mathbb{Q}_\bullet \to M$ ενός προτύπου M είναι ομοτοπικά ισοδύναμες.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.5.2 υπάρχουν ανυψώσεις $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ της id_M όπως περιγράφονται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_\bullet & \longrightarrow & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} \\ \mathbb{Q}_\bullet & \longrightarrow & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{g}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} \\ \mathbb{P}_\bullet & \longrightarrow & M \end{array}$$

Συνεπώς, $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ και $\mathrm{id}_{\mathbb{P}}$ είναι ανυψώσεις της id_M, άρα από την Πρόταση 4.5.2 έχουμε ότι $\tilde{g} \circ \tilde{f} \sim \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\tilde{f} \circ \tilde{g} \sim id_{\mathbb{Q}}$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

5.1 Αριστερά παραγόμενοι συναρτητές

Έστω $F\colon R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ προσθετικός συναρτητής. Θα ορίσουμε για κάθε $n \geq 0$ συναρτητές

$$L_nF\colon R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$$

που θα καλούνται **αριστερά παραγόμενοι συναρτητές** του F. Έστω N ένα αριστερό R - πρότυπο. Από την Πρόταση 4.5.1 διαλέγουμε μια (διαγεγραμμένη) προβολική επίλυση του N

$$\mathbb{P}_\bullet^N\colon \cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n^P} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{0} 0$$

όπου εφαρμόζοντας τον F προκύπτει το ακόλουθο σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων

$$F\mathbb{P}_\bullet^N\colon \cdots \to FP_n \xrightarrow{\partial_n^{FP}} FP_{n-1} \to \cdots \to FP_1 \xrightarrow{\partial_1^{FP}} FP_0 \xrightarrow{0} 0$$

Ορίζουμε $L_nF^{\mathbb{P}_\bullet^N}(N) \coloneqq H_n\left(F\mathbb{P}_\bullet^N\right)$. Έστω $f\colon N \to N'$ ομομορφισμός R - προτύπων και $\mathbb{P}_\bullet^N, \mathbb{P}_\bullet^{N'}$ προβολικές επιλύσεις των N και N' αντίστοιχα. Τότε, από την Πρόταση 4.5.2 υπάρχει $\tilde{f}\colon \mathbb{P}_\bullet^N \to \mathbb{P}_\bullet^{N'}$ ανύψωση της f. Τότε, $F(\tilde{f})\colon F\mathbb{P}_\bullet^N \to F\mathbb{P}_\bullet^{N'}$ είναι μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων. Αν $\tilde{g}$ είναι μια άλλη ανύψωση της f, από την Πρόταση 4.5.2 ισχύει ότι $\tilde{f} \sim \tilde{g}$, άρα από το Πόρισμα 4.4.1 ισχύει ότι $H_nF(\tilde{f}) = H_nF(\tilde{g})$. Έτσι ορίζουμε

$$L_nF^{\mathbb{P}_\bullet^N, \mathbb{P}_\bullet^{N'}}(f) \coloneqq H_nF(\tilde{f}).$$

Αν $f\colon N \to N'$ και $g\colon N' \to N''$ ομομορφισμοί R προτύπων θα δείξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet}(N) \arrow[r, "L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet,\mathbb{P}^{N'}_\bullet}(f)"] \arrow[dr, "L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet,\mathbb{P}^{N'}_\bullet}(g\circ f)"'] & L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet}(N') \arrow[d, "L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet,\mathbb{P}^{N''}_\bullet}(g)"] \\ & L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet}(N'') \end{tikzcd}$$

Έστω $\tilde{f}, \tilde{g}$ και $\widetilde{g\circ f}$ ανυψώσεις των f, g και $g \circ f$ αντίστοιχα. Τότε, $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ είναι ανύψωση της $g\circ f$, άρα από την Πρόταση 4.5.2 και το Πόρισμα 4.4.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & H_n\left[F(\tilde{g}\circ\tilde{f})\right] = H_n\left[F(\widetilde{g\circ f})\right] \\ \Rightarrow\quad & H_n\left[F(\tilde{g})\circ F(\tilde{f})\right] = H_n\left[F(\widetilde{g\circ f})\right] \\ \Rightarrow\quad & H_n\left[F(\tilde{g})\right]\circ H_n\left[F(\tilde{f})\right] = H_n\left[F(\widetilde{g\circ f})\right] \\ \Rightarrow\quad & L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet,\mathbb{P}^{N''}_\bullet}(g)\circ L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet,\mathbb{P}^{N''}_\bullet}(f) = L_nF^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet,\mathbb{P}^{N''}_\bullet}(g\circ f). \end{aligned}$$

Τέλος, είναι σαφές ότι $L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet,\mathbb{P}^N_\bullet}(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet}(N)}$. Άρα, αν για κάθε αριστερό R - πρότυπο N έχουμε επιλέξει προβολική επίλυση $\mathbb{P}^N_\bullet$, τότε η αντιστοίχιση $N \mapsto L_nF^{\mathbb{P}^N_\bullet}(N)$ ορίζει συναρτητή $R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$. Θα δείξουμε ότι οι συναρτητές είναι μοναδικοί ως προς φυσικό ισομορφισμό, δηλαδή για κάθε δύο επιλογές προβολικών επιλύσεων τότε οι αντίστοιχοι συναρτητές είναι φυσικά ισόμορφοι μεταξύ τους.

Παρατήρηση 5.1.1. Αν $\mathbb{P}^N_\bullet \to N$ και $\mathbb{Q}^N_\bullet \to N$ δύο προβολικές επιλύσεις του N, τότε αν α, β ανυψώσεις όπως καταδεικνύεται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^N_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Q}^N_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[d, equal] \\ \mathbb{P}^N_\bullet \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

ισχύει ότι $\alpha\circ\beta \sim \mathrm{id}$ και $\beta\circ\alpha \sim \mathrm{id}$, δηλαδή από το Πόρισμα 4.4.1 έχουμε ότι $H_n(F\alpha)\circ H_n(F\beta) = \mathrm{id}$ και $H_n(F\beta)\circ H_n(F\alpha) = \mathrm{id}$, δηλαδή οι επαγόμενες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί.

Παρατήρηση 5.1.2. Έστω $f\colon N \to N'$ ομομορφισμός R - προτύπων, $\mathbb{P}^N_\bullet, \mathbb{Q}^N_\bullet$ προβολικές επιλύσεις για το N και $\mathbb{P}^{N'}_\bullet, \mathbb{Q}^{N'}_\bullet$ προβολικές επιλύσεις για το N' αντίστοιχα. Έστω $u\colon \mathbb{P}^N_\bullet \to \mathbb{P}^{N'}_\bullet$ και $u'\colon \mathbb{Q}^N_\bullet \to \mathbb{P}^{Q'}_\bullet$ ανυψώσεις της f. Επίσης έστω $\alpha\colon \mathbb{P}^N_\bullet \to \mathbb{Q}^N_\bullet$ ανύψωση της id_N και $\beta\colon \mathbb{P}^{N'}_\bullet \to \mathbb{Q}^{N'}_\bullet$ ανύψωση της

$\mathrm{id}_{N'}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^N_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend right, "u"'] & N \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Q}^N_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dd, bend right, "u'"'] & N \arrow[d, equal, "f"] \\
\mathbb{P}^{N'}_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & N' \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Q}^{N'}_\bullet \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

Αφού $\beta \circ u$ και $u' \circ \alpha$ ανηψώσεις της f, τότε από την Πρόταση 4.5.2 και το Πόρισμα 4.4.1 έχουμε ότι

$$L_n F^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet, \mathbb{Q}^{N'}_\bullet}(\beta) \circ L_n F^{\mathbb{P}^N_\bullet, \mathbb{P}^{N'}_\bullet}(u) = L_n F^{\mathbb{Q}^N_\bullet, \mathbb{Q}^{N'}_\bullet}(u') \circ L_n F^{\mathbb{P}^N_\bullet, \mathbb{Q}^N_\bullet}(\alpha)$$

δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
L_n F^{\mathbb{P}^N_\bullet}(N) \arrow[r, "L_n F^{\mathbb{P}^N_\bullet, \mathbb{P}^{N'}_\bullet}(u)"] \arrow[d, "L_n F^{\mathbb{P}^N_\bullet, \mathbb{Q}^N_\bullet}(\alpha)"'] & L_n F^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet}(N') \arrow[d, "L_n F^{\mathbb{P}^{N'}_\bullet, \mathbb{Q}^{N'}_\bullet}(\beta)"] \\
L_n F^{\mathbb{Q}^N_\bullet}(N) \arrow[r, "L_n F^{\mathbb{Q}^N_\bullet, \mathbb{Q}^{N'}_\bullet}(u')"] & L_n F^{\mathbb{Q}^{N'}_\bullet}(N')
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 5.1.1. Από τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις, αν F προσθετικός συναρτητής, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται συναρτητής $L_n F \colon R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$, μοναδικός ως προς φυσικό ισομορφισμό (ανεξάρτητα από την επιλογή των προβολικών επιλύσεων), και ονομάζεται ο n **- οστός αριστερά παραγόμενος συναρτητής του** F.

Πρόταση 5.1.1. Έστω $F \colon R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ προσθετικός.

(α) Αν F είναι ακριβής, τότε $L_n F = 0$, για κάθε $n \geq 1$.

(β) Εαν F είναι δεξιά ακριβής, τότε $L_0 F \cong F$.

Απόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Έστω N ένα R - πρότυπο και προβολική επίλυση

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} N \to 0$$

και αφού F είναι ακριβής, τότε η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής

$$\cdots \longrightarrow FP_2 \xrightarrow{\partial_2^{FP}} FP_1 \xrightarrow{\partial_1^{FP}} FP_0 \xrightarrow{\partial_0^{FP}} FN \to 0$$

Αλλά έχουμε ότι
$$L_0(N) = FP_0 \Big/ \operatorname{im}\left(\partial_1^{FP}\right) \cong FP_0 \Big/ \ker \partial_0^{FP}.$$
Με βάση το παραπάνω, η φυσική ισομορφία αφήνεται ως άσκηση.

□

5.2 Συναρτητές Tor

Ορισμός 5.2.1. Θεωρούμε M δεξίο R - πρότυπο και $F := M \otimes_R - \colon R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$\mathrm{Tor}_n^R(M, -) := L_n F$$
δηλαδή $\mathrm{Tor}_n^R(M,-) \colon R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ και για κάθε N αριστερό R - πρότυπο, αν $\mathbb{P}_\bullet^N$ (διαγεγραμμένη) προβολική επίλυση του N, τότε
$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = H_n\left(M \otimes_R \mathbb{P}_\bullet^N\right).$$

Παρατήρηση 5.2.1. Από την Πρόταση 5.1.1 έχουμε ότι $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N$.

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και $r \in R$ που δεν είναι μηδενοδιαιρέτης. Τότε, για κάθε R - πρότυπο M ισχύει ότι
$$\mathrm{Tor}_1^R\left(M, {}^{R}/_{rR}\right) \cong \{m \in M \mid rm = 0\}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την παρακάτω R - προβολική επίλυση του ${}^{R}/_{rR}$:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[rr, "\cdot r"] \arrow[dr, two heads] & & R \arrow[r, "\pi"] & {}^{R}/_{rR} \arrow[r] & 0 \\ & & rR \arrow[ur, tail] & & & \end{tikzcd}$$
άρα η διαγεγραμμένη προβολική επίλυση είναι η
$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot r} R \longrightarrow 0$$
και εφαρμόζοντας τον συναρτητή $M \otimes_R -$ έχουμε ότι
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \otimes_R R \arrow[r, "M\otimes_R(\cdot r)"] \arrow[d, "\cong"] & M \otimes_R R \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ & M \arrow[r, "\cdot r"] & M & \end{tikzcd}$$
Από τους παραπάνω ισομορφισμούς είναι σαφές ότι και οι αντίστοιχοι πυρήνες είναι ισόμορφοι επομένως
$$\mathrm{Tor}_1^R\left(M, {}^{R}/_{rR}\right) = {}^{\ker\left(M \otimes_R (\cdot r)\right)}/_{0} \cong \{m \in M \mid rm = 0\}.$$

□

5.3 Παραγόμενοι συναρτητές και μακριές ακριβείς ακολουθίες

Εν γένει γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $M \otimes_R -$ δεν είναι αριστερά ακριβής. Μπορούμε να αναζητήσουμε κάτι ασθενέστερο αυτού ; Θα δούμε ότι η απάντηση είναι καταφατική, δηλαδή αν $0 \to A \to B \to C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία θα κατασκευάσουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{tikzcd}
0 & M \otimes C \arrow[l] & M \otimes B \arrow[l] & M \otimes A \arrow[l] \\
& \mathrm{Tor}_1^R(M,C) \arrow[urr, "\delta^0"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,B) \arrow[l] & \mathrm{Tor}_1^R(M,A) \arrow[l] \\
& \mathrm{Tor}_2^R(M,C) \arrow[urr, "\delta^1"] & \cdots\cdots \arrow[l] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Τα αντίστοιχα ερωτήματα θα μπορούσε να αναφέρει κανείς και για τον συναρτητή $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, όπου γνωρίζουμε ότι είναι αριστερά ακριβής. Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα θα χρειαστούμε δύο σημαντικά λήμματα.

Λήμμα 5.3.1 (Λήμμα του φιδιού)**.** Έστω το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "\varepsilon'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

με ακριβής γραμμές. Τότε, υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\ker\alpha \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \ker\gamma \arrow[dll, "\delta"] \\
\mathrm{coker}\alpha \arrow[r] & \mathrm{coker}\beta \arrow[r] & \mathrm{coker}\gamma
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα R - προτύπων

$$\begin{tikzcd}
& \ker\alpha \arrow[r, "i|"] \arrow[d, tail] & \ker\beta \arrow[r, "\varepsilon|"] \arrow[d, tail] & \ker\gamma \arrow[d, tail] & \\
& A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, two heads] & B' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, two heads] & C' \arrow[d, two heads] & \\
& \mathrm{coker}\alpha \arrow[r, "\overline{i'}"] & \mathrm{coker}\beta \arrow[r, "\overline{\varepsilon'}"] & \mathrm{coker}\gamma &
\end{tikzcd}$$

Αναζητούμε R - γραμμική $\delta\colon \ker\gamma \to \mathrm{coker}\alpha$. Έστω $\xi \in \ker\gamma$. Τότε, υπάρχει $b \in B$, ώστε $\varepsilon(b) = \xi$. Λόγω της μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $\beta(b) \in \ker\varepsilon'$. Λόγω ακρίβεις $\ker\varepsilon' = \mathrm{im}(i')$, δηλαδή υπάρχει $\sigma_b \in A'$ ώστε $i'(\sigma_b) = \beta(b)$. Ορίζουμε $\delta(\xi) = \sigma_b + \mathrm{im}(\alpha)$. Η διαδικασία περιγράφεται διαγραμματικά παρακάτω

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, mapsto, "\varepsilon"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & \xi \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
\sigma_b \arrow[r, mapsto, "i'"] \arrow[d, mapsto] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\varepsilon'"] & 0 \\
\sigma_b + \mathrm{im}(\alpha) & &
\end{tikzcd}$$

Η δ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $b, b' \in B$ τέτοια ώστε $\varepsilon(b) = \varepsilon(b')$, δηλαδή $b - b' \in \ker \varepsilon = \mathrm{im}(i)$. Συνεπώς, υπάρχει $z \in A$ ώστε $i(z) = b - b'$ και λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος

$$\beta \circ i(z) = i' \circ \alpha(z) \Leftrightarrow \beta(b) - \beta(b') = i'(\alpha(z)) \Leftrightarrow i'(\sigma_b - \sigma_{b'}) = \beta(b) - \beta(b') = i'(\alpha(z)).$$

Αφού i' είναι 1-1, τότε ισχύει ότι $\sigma_b - \sigma_{b'} \in \mathrm{im}(\alpha)$, δηλαδή $\sigma_b + \mathrm{im}(\alpha) = \sigma_{b'} + \mathrm{im}(\alpha)$. □

Λήμμα 5.3.2 (Horseshoe lemma)**.** Έστω $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R - προτύπων και $\mathbb{P}_\bullet^A \to A, \mathbb{P}_\bullet^C \to C$ προβολικές επιλύσεις των A, C αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει προβολική επίλυση $\mathbb{P}_\bullet^B \to B$ τέτοια ώστε

$$0 \to \mathbb{P}_\bullet^A \to \mathbb{P}_\bullet^B \to \mathbb{P}_\bullet^C \to 0$$

να είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων (δηλαδή καθεμιά από τις γραμμές να είναι ακριβής).

Απόδειξη. Θα κατασκεύασουμε επαγωγικά την ζητούμενη προβολική επίλυση. Για $n = 0$, έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0^A \arrow[r, "\nu^A"] \arrow[d, "\partial_0^A"] & P_0^B := P_0^A \oplus P_0^C \arrow[r, "\pi^C"] & P_0^C \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0^C"] \arrow[dl, "\widetilde{\partial_0^C}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου $\widetilde{\partial_0^C}$ η επαγόμενη απεικόνιση από την προβολικότητα του P_0^C. Από την καθολική ιδιότητα του ευθέως γινόμενου υπάρχει μοναδική $\partial_0^B : P_0^B \to B$ η οποία να κάνει το διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0^A \arrow[r, "\nu^A"] \arrow[d, "\partial_0^A"] & P_0^B := P_0^A \oplus P_0^C \arrow[r, "\pi^C"] \arrow[d, dashed, "\partial_0^B"'] & P_0^C \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0^C"] \arrow[dl, "\widetilde{\partial_0^C}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Αφού $\partial_0^A, \partial_0^C$ είναι επί, προκύπτει ότι ∂_0^B είναι επίσης επιμορφισμός. □

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Εκτός από τις σημειώσεις το εκάστοτε διαλέξεων για τη συγγραφή των σημειώσεων χρησιμοποιήθηκαν και οι παρακάτω πηγές.

[1] *"Nlab - Category Theory"*

[2] *""A Course in Homological Algebra"*, Peter J. Hilton, Urs Stammbach

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ακριβής συναρτητής, 59
αλυσωτό σύμπλεγμα προτύπων, 63
αναπαραστάσιμος συναρτητής, 40
αντίθετος δακτύλιος, 49
ανταλλοίωτος συναρτητής, 35
ανύψωση, 71
αριστερά ακριβής συναρτητής, 59
αριστερά προσαρτημένος συναρτητής, 42
βάση, 15
γραμμική θήκη, 15
δεξί πρότυπο, 49
δεξιά ακριβής συναρτητής, 59
διαγεγραμμένη προβολική επίλυση, 69
διαιρέσιμο πρότυπο, 20
διανυσματικοί χώροι, 7
διασπώμενα ακριβές σύμπλεγμα, 67
διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία, 17
διασπώμενος επιμορφισμός, 29
διασπώμενος μονομορφισμός, 29
διγραμμική απεικόνιση, 50
δράση, 7
δυϊκή κατηγορία, 33
εικόνα, 8
ελεύθερο πρότυπο, 15
ενριχτικό πρότυπο, εμφυτευτικό πρότυπο, 20
εξώθηση (pushout), 47
επίπεδο πρότυπο, 56
επιλήσμων (forgetful) συναρτητής, 34
επιμομορφισμός προτύπων, 8
επιμορφισμός, 29
ευθύ άθροισμα, 13
ευθύ γινόμενο, 13
εφέλκυση (pullback), 47
ισομεταβλητή απεικόνιση, 40
ισομομορφισμός προτύπων, 8
ισομορφισμός, 29
μονομομορφισμός προτύπων, 8
μονομορφισμός, 29
μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων, 63
ομάδα ομολογίας, 64
ομομορφισμός προτύπων, 8
ομοτοπία, 66
ομοτοπικά ισοδύναμα συμπλέγματα, 73
ομοτοπική ισοδυναμία, 73
ομοτοπική κατηγορία αλυσωτών συμπλεγμάτων, 68

πεδίο μορφισμού, 27
πεπερασμένα παραγόμενο, 15
προβολική επίλυση, 69
προβολικό πρότυπο, 18
προσθετικός συναρτητής, 58
πρότυπο, 7
πυρήνας, 8
πυρήνας μορφισμού, 32
στοχειώδεις τανυστές, 52
συναλυσωτό σύμπλεγμα προτύπων, 65
συναρτητής, 34
συνκώνος, 43
συνπεδίο μορφισμού, 27
συνπυρήνας, 8
συνπυρήνας μορφισμού, 32
σύνολο γεννητόρων, 15

σύνολο μορφισμών, 27
τανυστικό γινόμενο, 50
ταυτοτικός μορφισμός, 27
ταυτοτικός συναρτητής, 34
τοπικά μικρή κατηγορία, 27
υποπρότυπο, 8
φυσικός ισομορφισμός, 38, 40
φυσικός μετασχηματισμός, 37