Ουρές Αναμονής

Λύσεις Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1

1. Άσκηση 1.4
   $G|M|1$ ουρά
   $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
   $\alpha_j = (1-\alpha)a^j, j \geq 0$
   $i)E[Q^-]$
   $E[Q^-] = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-\alpha)\alpha^j = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j$

   - $(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

   $ii)E[S|Q^- = j]$
   $E[S|Q^- = j] = E[\sum_{i=1}^{j+1} B_i|Q^- = j] = \frac{j+1}{\mu}$
   $B_2, ...B_{j+1}$ ανεξάρτητοι του Q^-,ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και B_1 ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη που εξυπηρετείται,ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ(λόγω αμνήμονης).
   $iii)E[S]$
   $E[S] = E[E[S|Q^-]] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^- = j]E[S|Q^- = j] = \frac{1}{\mu(1-\alpha)}$

2. Άσκηση 1.5
   $M|G|1|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ,μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης b,$\rho = b\lambda$.
   Θέλουμε την κατανομή ισορροπίας συναρτήσει του ρ.

$$E[Q] = \lambda E[S](Little)$$

$$E[S] = Pr[Q^- = 0]E[S|Q^- = 0] + Pr[Q^- = 1]E[S|Q^- = 1] = b\alpha_0$$

$$E[Q] = p_0\rho \Rightarrow E[Q] = p_1$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho}, p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Κεφάλαιο 2

1. Άσκηση 2.1
   Έστω σύστημα με μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις,αρχικά κενό.
   Q_n^- = πλήθος πελατών πριν την $n-$οστή άφιξη
   Q_n^+ = πλήθος πελατών μετά την $n-$οστή αναχώρηση
   $i)$Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, για κάθε $k \geq 0$ ισχύει:
   $\{Q_n^+ \leq k\} = \{Q_{n+k+1}^- \leq k\}$
   $\{Q_n^+ \leq k\} = \{$μέχρι την στιγμή D_n^+ έχουν έρθει το πολύ $n+k$ πελάτες $\}$.
   $\{$ μέχρι την στιγμή D_n^+ έχουν έρθει το πολύ $n+k$ πελάτες$\} = \{$ ο $(n+k+1)-$οστός πελάτης που φτάνει έρχεται μετά την $n-$οστή αναχώρηση $\}$.
   $\{D_n < A_{n+k+1}\} = \{$ Μέχρι την στιγμή A_{n+k+1}^- έχουν γίνει τουλάχιστον n αναχωρήσεις$\} = \{Q_{n+k+1}^- \leq k\}$
   $ii)a_n = d_n$
   $\lim_{n\to\infty} Pr[Q_{n+k+1}^- \leq k] = \lim_{n\to\infty} Pr[Q_n^+ \leq k] = Pr[Q_n^- \leq k] = Pr[Q^+ \leq k] \Rightarrow a_j = d_j \forall j.$

2. Άσκηση 2.4

Έστω μια $M|M|c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες ανά ώρα,$b = 78$ λεπτά.

$i)$ Βρείτε το ελάχιστο c για ευστάθεια

$\lambda = \frac{5}{60}$ πελάτες το λεπτό.

Ευστάθεια:$\rho < c \Leftrightarrow c > \frac{78}{12}$

Άρα το ελάχιστο c είναι 7.

$ii)$ Βρείτε το ελάχιστο c ώστε το ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος να είναι το πολύ 80%.

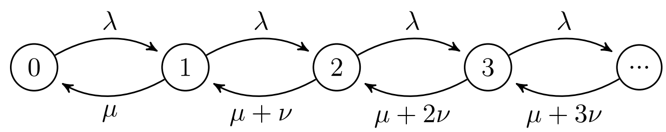
$\frac{\rho}{c} < 0.8 \Leftrightarrow c \geq \frac{195}{24}$ Άρα το ελάχιστο c είναι 9.

3. Άσκηση 2.5
   Έστω σύστημα εξυπηρέτησης με διαδικασία αφίξεων $Poisson$ με ρυθμό αφίξεων $\lambda = 10($ πελάτες ανά λεπτό),και χωρητικότητα 9,$E[Q] = 75$.
   $i)$Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής αφιχθέντα
   Νόμος $Little : E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow E[S] = 0.75$ λεπτά.
   $ii)$Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής εισελθόντα.
   Πρώτος τρόπος:
   Νόμος $Little$ για πελάτες που μπαίνουν:
   $E[Q^{enter}] = \lambda(1 - a_9)E[S_{enter}] \Rightarrow E[S_{enter}] = 3.75$.
   Δεύτερος τρόπος:
   $E[S] = Pr[Q^- < 9]E[S|Q^- < 9]+Pr[Q^- = 9]E[S|Q^- = 9] \Rightarrow E[S_{enter}] = 3.75$.

Κεφάλαιο 5

1. Άσκηση 5.1
   Σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη,διαδικασία αφίξεων $Poisson(\lambda_1)$ για τύπο πελατών 1 και $Poisson(\lambda_2)$ για τύπο πελατών 2,ανεξάρτητες.$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης και απόλυτη προτεραιότητα πελατών τύπου 1 έναντι των πελατών τύπου 2.
   $i)E[Q_1]$
   $ii)E[S_1]$
   Νόμος $Little$ για πελάτες τύπου 1.
   $E[Q_1] = \lambda_1 E[S_1]$
   $E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}$
   $E[S_1] = \frac{1}{\mu-\lambda_1}$ Οι πελάτες τύπου 1 δεν βλέπουν καθόλου τους πελάτες τύπου 2(Άρα βλέπουν μια $M|M|1$ ουρά).
   Όλο το σύστημα,αν ξεχάσω τον τύπο των πελατών,είναι

μία $M|M|1$ ουρά με μία ιδιαίτερη πειθαρχία.
$iii)E[Q_2]$
$iv)E[S_2]$
$E[Q_1+Q_2]=(\lambda_1+\lambda_2)E[S]$
$E[Q_1+Q_2]=\frac{\rho}{1-\rho}, \rho=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}$
$E[S]=\frac{1}{\mu(1-\rho)}$.
Άρα $E[Q_2]=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}-\frac{\rho_2}{1-\rho_2}$
$E[S]=E[S_1]\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+E[S_2]\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$
Εναλλακτικά,με νόμο $Little, E[Q_2]=\lambda_2 E[S_2]$

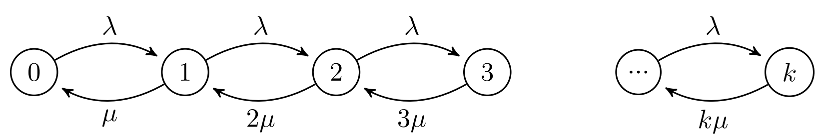


Σχήμα 1: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της 6.1 είναι το παραπάνω

Κεφάλαιο 6

1. Άσκηση 6.1
   $M|M|1$ ουρά με $Poisson(\lambda)$ διαδικασία αφίξεων, $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης και $Exp(\nu)$ χρόνους υπομονής για τους πελάτες που δεν εξυπηρετούνται.
   $i)$ Αιτιολογήστε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$k \geq 1$	$k+1$	$Exp(\lambda)$
$k \geq 1$	$k-1$	$Exp(\mu+(k-1)\nu)$



Σχήμα 2: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για μ=ν είναι το παραπάνω

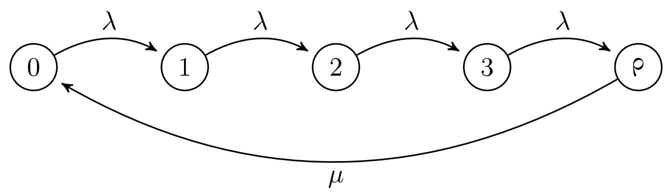
$ii)$ Βρείτε την κατανομή ισορροπίας όταν $\mu = \nu$.

Για μ=ν έχουμε: $B^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = e^{\rho}$,η ουρά πάντα ευσταθής.

Η κατανομή ισορροπίας είναι:

$p_j = e^{-\rho}\frac{\rho^j}{j!}$

δηλαδή η κατανομή ισορροπίας είναι $Poisson(\rho)$.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της 7.1 είναι το παραπάνω

Κεφάλαιο 7

1. Άσκηση 7.1
   Έστω $M|M|1$ ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις,με ρυθμό αφίξεων λ, $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης,1 υπηρέτη και μέγεθος εξυπηρετούμενης ομάδας r.Το σύστημα εξυπηρετεί αν είναι μη κενό.
   $\{Q(t)\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:
   Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

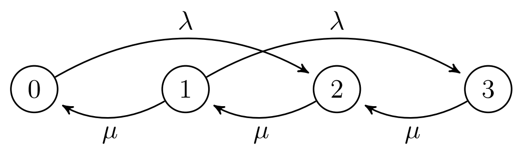
$$\lambda p_0 = \mu \sum_{j=1}^{r} p_j$$

$$(\lambda+\mu)p_j = \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1}, j \geq 1$$

   Από την μέθοδο των πιθανογεννητριών,καταλήγουμε στο εξής:

$$P(z) = \frac{\mu \sum_{j=0}^{r} p_j (z^r - z^j)}{(\lambda+\mu)z^r - \lambda z^{r+1} - \mu}$$

   Η ανάλυση γίνεται όπως στην κλασική $M|M|1$ ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις.



Σχήμα 4: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της 7.2 είναι το παραπάνω

2. Άσκηση 7.2
   Έστω $M|M|1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις, μεμονωμένες εξυπηρετήσεις,διαδικασία αφίξεων ομάδων $Poisson$ με ρυθμό λ,μέγεθος ομάδας 2, $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης,1 υπηρέτη,άπειρη χωρητικότητα.$\{Q(t)\} =$ πλήθος πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t.
   i)Αιτιολογήστε γιατί $\{Q(t)\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ. και κάντε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	2	$Exp(\lambda)$
$n, n \geq 1$	$n+2$	$Exp(\lambda)$
$n, n \geq 1$	$n-1$	$Exp(\mu)$

   Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί,άρα $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

$ii)$ Δώστε την πιθανογεννήτρια συναρτήσει των λ, μ, p_0.
Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι :

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$(\lambda + \mu)p_1 = \mu p_2$$
$$(\lambda + \mu)p_n = \lambda p_{n-2} + \mu p_{n+1}, n \geq 2$$

Με την μέθοδο των πιθανογεννητριών,καταλήγουμε στο εξής:

$$P(z) = \frac{\mu p_0(z-1)}{(\lambda + \mu)z - \mu - \lambda z^3}$$

$iii)$Δώστε την συνθήκη ευστάθειας και το p_0.

$$P(1) = 1 \Leftrightarrow p_0 = 1 - \frac{2\lambda}{\mu}$$

Ευστάθεια: $p_0 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda < \mu$

$iv)$Υπολογίστε την πιθανότητα σε στιγμή άφιξης πελάτη αυτός να καταλάβει την $n-$οστή θέση.
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:
$a_{n-1} = Pr$[αφικνούμενος πελάτης καταλαμβάνει την $n-$οστή θέση]
$=Pr$[η ομάδα βλέπει $n-1$]Pr[είναι ο πρώτος στην ομάδα του]$+$ Pr[η ομάδα βλέπει $n-2$]Pr[είναι ο δεύτερος στην ομάδα του]$=\frac{p_{n-1}}{2}+\frac{p_{n-2}}{2}$.
$v)$ Για $\lambda = 1, \mu = 6$ υπολογίστε την (p_n).
Για $\lambda = 1, \mu = 6$:

$$P(z) = \frac{4}{(2-z)(z+3)}$$

έχει ρίζες -3,+2.
Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$P(z) = \frac{A}{(2-z)} + \frac{B}{(z+3)}, A = B = \frac{4}{5}$$

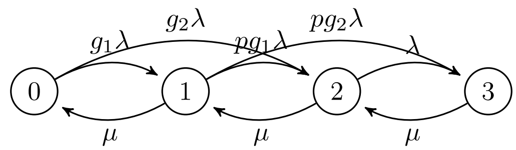
Επομένως:

$$P(z) = \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} z^n (\frac{1}{2})^n + \frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty} z^n (\frac{-1}{3})^n$$

Συνεπώς

$$p_n = \frac{2}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{4}{15}(\frac{-1}{3})^n, n \geq 0$$

.



Σχήμα 5: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της 7.3 είναι το παραπάνω

3. Άσκηση 7.3

   Έστω $M|M|1$ μία ουρά με ομαδικές αφίξεις,ρυθμό αφίξεων λ,συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους ομάδων (g_j). Σε κενό σύστημα μπαίνουν πάντα ομάδες.Σε μη κενό σύστημα οι ομάδες μπαίνουν με πιθανότητα p .

   Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ,και $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος πελατών στο σύστημα την στιγμή t.

   $i)$ Αιτιολοήστε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ.,γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και κάντε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	$j \geq 1$	$Exp(\lambda g_j)$
$n, n \geq 1$	$n + j$	$Exp(\lambda p g_j)$
$n, n \geq 1$	$n - 1$	$Exp(\mu)$

   Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί,άρα $\{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.

   Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(p\lambda + \mu)p_n = \lambda p_0 g_n + \mu p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda p p_k g_{n-k}$$

$ii)$ Δώστε την πιθανογεννήτρια και την συνθήκη ευστάθειας του συστήματος.
Έστω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$.
Πολλαπλασιάζω την εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση n με z_n και αθροίζω.
Τελικά:

$$P(z) = \left(\frac{\mu(z-1) + \lambda z(1-p)(G(z)-1)}{\lambda z p(1-G(z)) - \mu(1-z)}\right)p_0$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης,

$$p_0\left(\frac{\mu + (1-p)m\lambda}{\mu - mp\lambda}\right) = 1$$

Το σύστημα είναι ευσταθές όταν: $pm\lambda < \mu$ και τότε

$$p_0 = \frac{\mu - mp\lambda}{\mu + m(1-p)\lambda}$$

$iii)$Βρείτε την πιθανότητα αφικνούμενος πελάτης να καταλάβει την $n-$οστή θέση,συναρτήσει των p_n, g_n.
Δεσμεύω στο πόσους βλέπει η αφικνούμενη ομάδα.
$\sum_{k=0}^{\infty} Pr$ [η ομάδα βρίσκει k] Pr [ο αφικνούμενος πελάτης καταλαμβάνει την θέση $n|$ η ομάδα βρίσκει k] Για τις ομάδες ισχύει η ιδιότητα $PASTA$ άρα:
Pr[η ομάδα βρίσκει $k] = p_k$.
Η πιθανότητα ο αφικνούμενος πελάτης να καταλάβει την $n-$οστή θέση,δεδομένου ότη η ομάδα βρήκε k είναι:
Pr[είναι ο $n-$οστός στην ομάδα του],$k = 0$
pPr[είναι ο $(n-k)-$οστός στην ομάδα του],$k = 1, .n-1$
$0, k \geq n$

$$\tilde{g_n} = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} g_j}{m}$$

m : το μέσο μέγεθος ομάδας.

$iv)$ Βρείτε την κατανομή ισορροπίας όταν οι αφίξεις συμβαίνουν μεμονωμένα.
Για μεμονωμένες αφίξεις,$G(z) = z, m = 1$.

$$P(z) = \frac{1 + z(1-p)\rho}{1 - pz\rho}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Αναπτύσσω σε δυνάμεις του z^n με γεωμετρική σειρά.

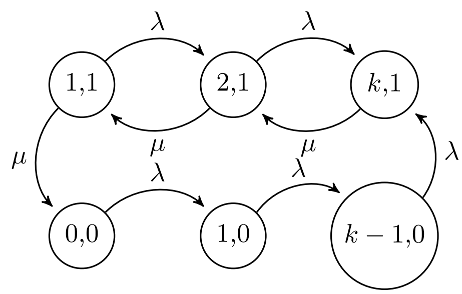
Κεφάλαιο 9

1. Άσκηση 9.3
   Έστω $M|M|1$ ουρά με διαδικασία αφίξεων $Poisson(\lambda), Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης.
   Αν το σύστημα είναι άδειο,παύουν οι εξυπηρετήσεις.
   Όταν συσσωρευθούν k πελάτες αρχίζουν ξανά οι εξυπηρετυήσεις.
   Αν το πλήθος $\{Q(t)\}$ πελατών στο σύστημα την στιμή t και $\{I(t)\}$ η κατάσταση του υπηρέτη την στιγμή t θέλουμε τα εξής:
   $i)$ Να δειχθεί ότι η $\{(Q(t), I(t))\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
$(0,0)$	$(1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(n,0), 1 \leq n \leq k-2$	$(n+1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(k-1,0)$	$(k,1)$	$Exp(\lambda)$
$(1,1)$	$(2,1)$	$Exp(\lambda)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$Exp(\mu)$
$(n,1), n \geq 2$	$(n+1,1)$	$Exp(\lambda)$
$(n,1), n \geq 2$	$(n-1,1)$	$Exp(\mu)$

   Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί,άρα $\{(Q(t), I(t))\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

   $ii)$ Να κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Σχήμα 6: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της 9.3

$iii)$ Να βρεθεί η κατανομή ισορροπίας
Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_{0,0} = \mu P_{1,1}$$
$$\lambda P_{n,0} = \lambda P_{n-1,0}, 1 \leq n \leq k-1$$
$$(\lambda + \mu) P_{1,1} = t\mu P_{2,1}$$
$$(\lambda + \mu) P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1} + \mu P_{n+1,1}, 2 \leq n \leq k-1$$
$$(\lambda + \mu) P_{k,1} = \lambda P_{k-1,1} + \mu P_{k+1,1} + \lambda P_{k-1,0}$$
$$\mu P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1}, n \geq k+1$$

Έστω $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_{n,1} = \rho^{n-k} P_{k,1}, n \geq k+1$$

$$P_{n,0} = P_{0,0}, 1 \leq n \leq k-1$$

$$P(z) = \sum_{n=1}^{k} P_{n,1} z^n$$

$(\lambda+\mu)P(z) = \mu \sum_{n=1}^{k} P_{n+1,1}z^n + \lambda P_{k-1,0}z^k + \lambda \sum_{n=2}^{k} P_{n-1,1}z^n$
Με την μέθοδο των πιθανογεννητριών καταλήγουμε στο:

$$P(z) = \frac{\mu\rho P_{k,1}z^{k+1} - \rho\mu P_{0,0}z - \lambda z^{k+2}P_{k,1} + \lambda z^{k+1}P_{0,0}}{(\lambda+\mu)z - \mu - z^2\lambda}$$

Βρίσκω τις άγνωστες παραμέτρους $P_{0,0}, P_{k,1}$ απαιτώντας ο αριθμητής της $P(z)$να έχει ρίζα $\frac{\mu}{\lambda}$,και με την εξίσωση κανονικοποίησης,αναπτύσσω την πιθανογεννήτρια σε α-πλά κλάσματα και προχωρώ.
$iv)$ Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος.
Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1} = P(1) + P_{k,1}\frac{\rho}{1-\rho}$$

Κεφάλαιο 11

1. Άσκηση 11.1
   Έστω O_1, O_2 συστήματα εξυπηρέτησης.
   Το σύστημα O_i έχει εξωτερικό ρυθμό αφίξεων λ_i,1 υ-πηρέτη και $Exp(\mu_i)$ εξυπηρέτησης,$i = 1, 2$.
   $i)$ Βρείτε την συνθήκη ευστάθειας.
   Εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 + P_2\Lambda_2 \\ \Lambda_2 = \lambda_2 + P_1\Lambda_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = \dfrac{\lambda_1 + P_2\Lambda_2}{1 - P_1P_2} \\ \Lambda_2 = \dfrac{\lambda_2 + P_1\Lambda_1}{1 - P_1P_2} \end{cases} \tag{1}$$

   Ευστάθεια:

$$\frac{\lambda_1 + P_2\Lambda_2}{1 - P_1P_2} < \mu_1$$

$$\frac{\lambda_2 + P_1\Lambda_1}{1 - P_1P_2} < \mu_2$$

   $ii)$ Βρείτε την κατανομή ισορροπίας.

$$p_1(n_1) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}, n_1 \geq 0, \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

$$p_2(n_2) = (1 - \rho_2)\rho_2^{n_2}, n_2 \geq 0, \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

$$p(n_1, n_2) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}, n_1, n_2 \geq 0$$

2. Άσκηση 11.2

Έστω 5 συστήματα O_1, O_2, O_3, O_4, O_5.

Για $i = 1, 2, 3, 4$ ισχύει:

Το σύστημα O_i έχει εξωτερική διαδικασία αφίξεων $Poisson$ με ρυθμό $i\lambda$, 1 υπηρέτη και $Exp(\mu_i)$ χρόνους εξυπηρέτησης.

Μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης στον σταθμό O_i,έχουμε:

–Δρομολόγηση στον σταθμό O_{i+1} με πιθανότητα $\frac{1}{i}$.

–Επανάληψη εξυπηρέτησης στον σταθμό O_i με πιθανότητα $\frac{i-1}{i}$.

Για $i = 5$ ισχύει:

Το σύστημα O_5 έχει εξωτερική διαδικασία αφίξεων $Poisson$ με ρυθμό 5λ,άπειρους υπηρέτες και $Exp(\mu_5)$ χρόνους εξυπηρέτυησης.Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης στον σταθμό 5 συνεπάγεται αναχώρηση από το δίκτυο.

$i)$ Βρείτε την συνθήκη ευστάθειας του δικτύου

Εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda \\ \Lambda_2 = 6\lambda \\ \Lambda_3 = 18\lambda \\ \Lambda_4 = 40\lambda \\ \Lambda_5 = 15\lambda \end{cases} \tag{2}$$

Έχουμε 4 $M|M|1$ ουρές και μία $M|M|\infty$ ουρά.

Συνθήκη ευστάθειας:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ 6\lambda_2 = \mu_2 \\ 18\lambda_3 = \mu_3 \\ 40\lambda_4 = \mu_4 \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda = min\{\mu_1, \frac{\mu_2}{6}, \frac{\mu_3}{18}, \frac{\mu_4}{40}\}$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2 = \frac{6\lambda}{\mu_2}, \rho_3 = \frac{10\lambda}{mu_3}, \rho_4 = \frac{40\lambda}{\mu_4}, \rho_5 = \frac{15\lambda}{\mu_5}$$

$ii)$Βρείτε την κατανομή ισορροπίας του πλήθους πελατών στο δίκτυο

$$p(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (\prod_{i=1}^{4}(1-\rho_i)\rho_i^{n_i})e^{-\rho_5}\frac{\rho_5^{n_5}}{n_5!}$$

$iii)$ Βρείτε τον μέσο αριθμό πελατών στο δίκτυο

$$E[Q] = (\frac{\rho_1}{1-\rho_1})(\frac{\rho_2}{1-\rho_2})(\frac{\rho_3}{1-\rho_3})(\frac{\rho_4}{1-\rho_4}) + \rho_5$$

$iv)$Βρείτε τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο

Με νόμο $Little$ στο δίκτυο,έχουμε:

$$E[S] = \frac{E[Q]}{15\lambda}$$

v) Βρείτε την κατανομή του αριθμού των επισκέψεων ενός πελάτη στον σταθμό O_i.

Έστω N_i = αριθμός επισκέψεων επιλεγμένου πελάτη του δικτύου στον σταθμό i.
$Pr[N_1 = n] =$

$$\begin{cases} \frac{14}{15}, n = 0 \\ \frac{1}{15}, n = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$Pr[N_2 = n] =$

$$\begin{cases} \frac{12}{15}, n = 0 \\ \frac{3}{15}(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2}), n \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

$Pr[N_3 = n] =$

$$\begin{cases} \frac{9}{15}, n = 0 \\ \frac{6}{15}(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{n-1}, n \geq 1 \end{cases} \tag{6}$$

$Pr[N_4 = n] =$

$$\begin{cases} \frac{5}{15}, n = 0 \\ \frac{10}{15}(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{n-1}, n \geq 1 \end{cases} \tag{7}$$

$Pr[N_5 = n] = 1$

1. Φεβρουάριος 2019-Θέμα Πρώτο

   Έστω $M|M|2$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 3λ,ρυθμό εξυπηρέτησης ανά υπηρέτη μ.

   Ο εισερχόμενος πελάτης είναι τύπου 1 με πιθανότητα $2/3$ και τύπου 2 με πιθανότητα $1/3$.

   Οι πελάτες τύπου 1 εισέρχονται πάντα στο σύστημα,ενώ οι πελάτες τύπου 2 εισέρχονται μόνο σε κενό σύστημα.

   $\{Q(t)\} =$ πλήθος πελατών στο σύστημα την στιγμή t.

   $i)$ Αιτιολογήστε γιατί η $\{Q(t)\}$είναι Μ.Α.Σ.Χ. τύπου γέννησης-θανάτου και κάντε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

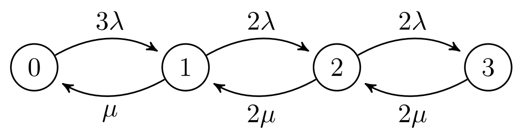
   $ii)$ Δώστε την συνθήκη ευστάθειας και την κατανομή ισορροπίας.

   $iii)$ Βρείτε τον πραγματικό ρυθμό αφίξεων και το μακροπρόθεσμο ποσοστό εξυπηρετούμενων πελατών.

   $iv)$ Βρείτε την πιθανότητα εισερχόμενος πελάτης να δει n.

   $v)$ Βρείτε τον μέσο χρόνο παραμονής εισελθόντα πελάτη.

   $vi)$ Βρείτε την μέση διάρκεια του κύκλου απασχόλησης του συστήματος.



Σχήμα 7: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της είναι το παραπάνω

<u>Λύση</u>

i)

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(3\lambda)$
1	2	$Exp(2\lambda)$
1	0	$Exp(\mu)$
$n, n \geq 2$	$n+1$	$Exp(2\lambda)$
$n, n \geq 2$	$n-1$	$Exp(2\mu)$

Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί,άρα $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

$ii)$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 ... \mu_n}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$B^{-1} = \frac{3\rho}{\rho - 1} + 1, \rho < 1$$

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 + 2\rho}$$

$$p_n = \frac{3(1 - \rho)\rho^n}{1 + 2\rho}, n \geq 1$$

$iii)$

$$\lambda^* = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j p_j = 3\lambda p_0 + 2\lambda \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 3\lambda \frac{1 + \rho}{1 + 2\rho}$$

Το μακροπρόθεσμο ποσοστό εξυπηρετούμενων πελατών είναι:

$$\frac{\lambda^*}{3\lambda} = \frac{1 + \rho}{1 + 2\rho}$$

$iv)$

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$$
$$a_0^{enter} = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$
$$a_n^{enter} = \frac{2(1-\rho)\rho_n}{1+\rho}, n \geq 1$$

$v)$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{3\rho}{(1-\rho)(1+2\rho)}$$

Από νόμο $Little:$

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*}$$
$$E[S^{enter}] = \frac{n}{\mu(1-\rho^2)}$$

$vi)$

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$$
$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho}, E[I] = \frac{1}{3\lambda}$$
$$E[Z] = \frac{1+2\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

2. <u>Φεβρουάριος 2019-Θέμα Δεύτερο</u>

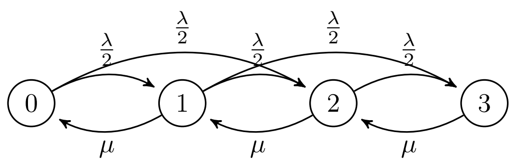
   Έστω μια $M|M|1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις,μεμονωμένες εξυπηρετήσεις. $\lambda = 8, \mu = 2, g_j = \frac{1}{2}, j = 1, 2.$

   $\{Q(t)\}$ = πλήθος πελατών στο σύστημα την στιγμή t

   $i)$ Αιτιολογήστε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ.,κάντε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας.

   $ii)$ Βρείτε την $P(z)$

   $iii)$ Βρείτε την (p_n)



Σχήμα 8: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Λύση $i)$

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(\frac{\lambda}{2})$
0	2	$Exp(\frac{\lambda}{2})$
$n, n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\frac{\lambda}{2})$
$n, n \geq 2$	$n+2$	$Exp(\frac{\lambda}{2})$
$n, n \geq 1$	$n-1$	$Exp(\mu)$

Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί,άρα $\{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.

Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda + \mu)p_n = \mu p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda p_k g_{n-k}, n \geq 1$$

$ii)$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$$

$$G(z) = \frac{1}{2}(z + z^2)$$

$$P(z) = \frac{\mu p_0 (1-z)}{\mu - (\mu + \lambda)z + z\lambda G(z)}$$

$$p_0 = 1 - \frac{m\lambda}{\mu}$$

Ευστάθεια: $p_0 > 0 \Leftrightarrow m\lambda < \mu$.

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)(1 - \frac{m\lambda}{\mu})}{\mu - (\mu + \lambda)z + zG(z)\lambda}$$

Για $\lambda = 2, \mu = 8, m = \frac{3}{2}$:

$$P(z) = \frac{5(1-z)}{z^3 + z^2 - 10z + 8}$$

$$P(z) = \frac{5}{(2-z)(z+4)}$$

Θέλουμε A, B ώστε:

$$P(z) = \frac{A}{(2-z)} + \frac{B}{(z+4)}$$

$$A = \frac{5}{6}, B = \frac{-5}{2}$$

$$P(z) = \frac{5}{6}(\frac{1}{2-z}) - \frac{5}{2}(\frac{1}{4+z})$$

$$P(z) = \frac{5}{12}\sum_{n=0}^{\infty} z^n (\frac{1}{2})^n - \frac{5}{8}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{-1}{4})^n z^n$$

Επομένως η κατανομή ισορροπίας είναι:

$$p_n = \frac{5}{12}(\frac{1}{2})^n - \frac{5}{8}(\frac{-1}{4})^n, n \geq 0$$

3. Φεβρουάριος 2019-Θέμα Τρίτο

α) Έστω $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ,ρυθμό εξυπηρετήσεων μ,και μια διαδικασία καταστροφών $Poisson$ με ρυθμό θ.Όταν συμβεί καταστροφή,απενεργοποιείται ο υπηρέτης και όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται.

Ο χρόνος για να ενεργοποιηθεί ξανά ο υπηρέτης είναι $Exp(\eta)$,και κατά την διάρκειά του δεν συμβαίνουν νέες αφίξεις. Δώστε Μαρκοβιανή περιγραφή του συστήματος.

β) Έστω δίκτυο $Jackson$ με N σταθμούς.

Κάθε σταθμός έχει 1 υπηρέτη,$Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης,άπειρη χωρητικότητα και εξωτερική διαδικασία αφίξεων $Poisson(\lambda)$.

Κάθε αναχώρηση από σταθμό πάει με πιθανότητα $\frac{1}{N}$ σε άλλο σταθμό ή με πιθανότητα $\frac{1}{N}$ στο εξωτερικό του δικτύου.

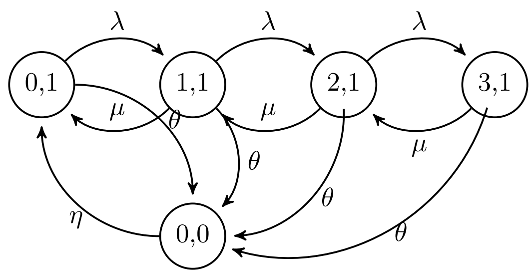
Να βρεθούν:

i) Η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου και ο μέσος αριθμός πελατών σε 1 σταθμό του δικτύου.

ii) Ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής πελάτη $E[S]$,και ο μέσος αριθμός επισκέψεων σταθμών $E[M]$.

iii) Ο μέσος χρόνος από την άφιξη πελάτη σε κενό δίκτυο μέχρι το δίκτυο να είναι ξανά κενό.

Λύση



Σχήμα 9: Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ουράς της είναι το παραπάνω

$\alpha)$
$Q(t) =$ πλήθος πελατών την στιγμή t
$I(t) = 1$, ο υπηρέτης ενεργός την στιγμή t
$I(t) = 0$, ο υπηρέτης ανενεργόις την στιγμή t
$\{(Q(t), I(t))\}$ Μ.Α.Σ.Χ. με χώρο καταστάσεων
$\mathcal{S}$=$\{(0,0),(n,0) : n \geq 1\}$
$\beta)$
$i)$
Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} p_{ij}\Lambda_i$$

Λόγω συμμετρίας,$\Lambda_j = \Lambda, \forall j = 1,,, N$

$$\Lambda = N\lambda$$

Ευστάθεια: $N\Lambda < \mu$
Η ουρά είναι με ρυθμό αφίξεων και ρυθμό εξυπηρέτησης.
Επομένως:

$$Pr[Q_j = n] = (1 - \frac{N\lambda}{\mu})(\frac{N\lambda}{\mu})^n, n \geq 0$$

$$E[Q_j] = \frac{N\lambda}{\mu - N\lambda}$$

$ii)$

$$\lambda_\Delta = N\lambda$$
$$E[Q] = \sum_{j=1}^{N} E[Q_j] = \frac{N^2\lambda}{\mu - N\lambda}$$
$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda_\Delta} = \frac{N}{\mu - N\lambda}$$
$$Pr[M = n] = (\frac{N-1}{N})^{n-1}\frac{1}{N}, n \geq 1$$
$$E[M] = N$$

$iii)$
Ζητάμε την μέση διάρκεια κύκλου συνεχούς λειτουργίας του δικτύου.
$p_{(0,\ldots 0)}$ =πιθανότητα κενού δικτύου.

$$p_{(0,\ldots 0)} = \frac{E[I]}{E[I] + E[Y]}$$
$$E[I] = \frac{1}{N\lambda}$$
$$p_{(0,\ldots 0)} = (1 - \frac{N\lambda}{\mu})^N$$
$$(1 - \frac{N\lambda}{\mu})^N = \frac{\frac{1}{N\lambda}}{\frac{1}{N\lambda} + E[Y]}$$

Λύνοντας ως προς $E[Y]$ έχουμε το ζητούμενο.