27/10/2021

Ασκήσεις

2.1

Classification, $G \in \{1, 2, \dots, K\}$

$$G = k \iff T = t_k = (0, 0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)$$

$K = 3$

G	T	
1	(1, 0, 0)	t_1
2	(0, 1, 0)	t_2
3	(0, 0, 1)	t_3
⋮	(1, 0, 0)	t_1
	(1, 0, 0)	t_1

Έστω ότι χρησιμοποιούμε μια μέθοδο πρόβλεψης που (1) προβλέπει το T μέσω διανύσματος $\hat{y} = (y_1, \dots, y_K)$

τ.ω. $\sum_{k=1}^{K} y_k = 1$ $\quad \hat{y}_k \geq 0$.

(2)

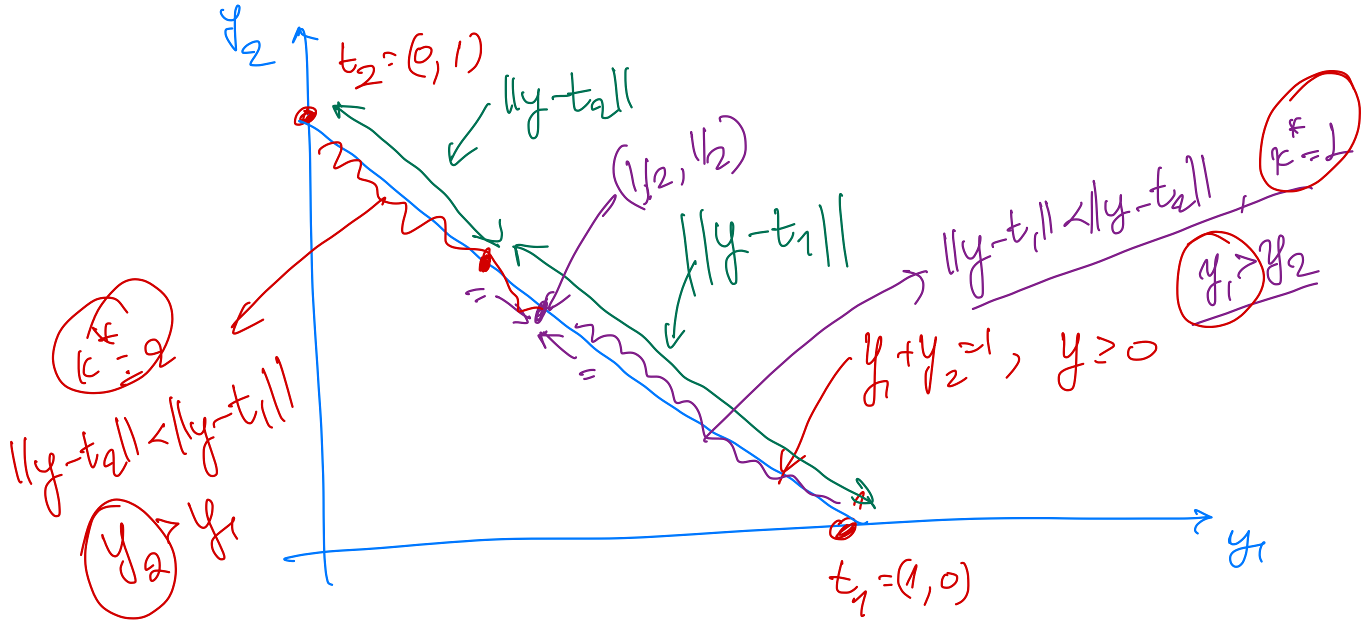
Πρόβλεψη του T (G):

$$\min_{k=1,\dots,K} \|\hat{y} - t_k\| = \|\hat{y} - t_{k^*}\|_p$$

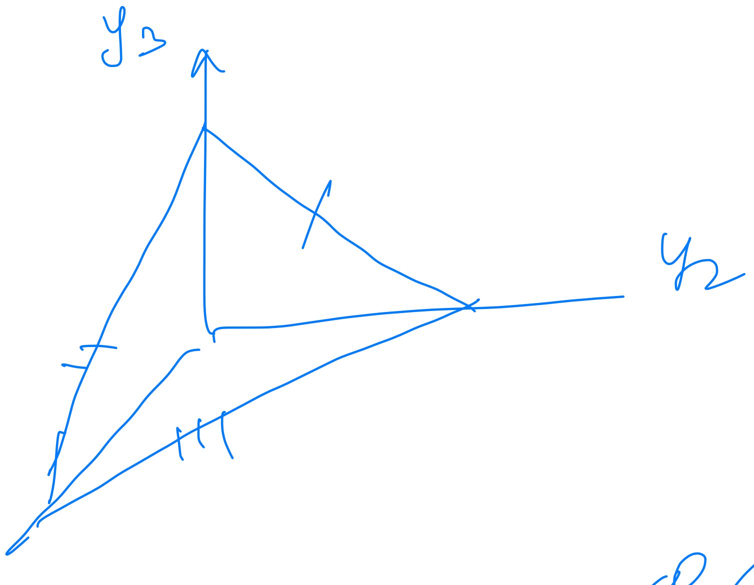
Να δ.ο. ότι το βέλτιστο k^* μπορεί να βρεθεί από $\max \hat{y}_k$

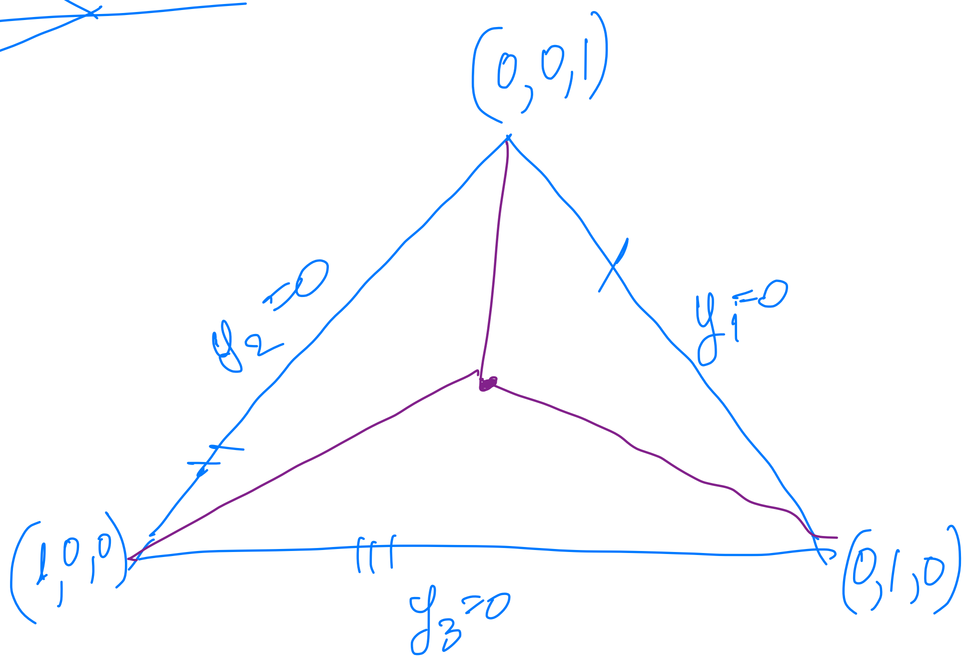
Παράδειγμα $k=2$, $\| \, \|_2$

$t_1=(1,0)$, $t_2=(0,1)$, $y \geq 0$ $y_1+y_2=1$



Αν $k=3$ $\{y_1+y_2+y_3=1, \; y\geq 0\}$





Απόδειξη για γενικό K

Επιχείρημα αναγωγής

Έστω y κ' ένα $\ell = 1, \dots, K$ τέτοια

ώστε $\underline{\hat{y}_\ell} < \max_k \hat{y}_k = \hat{y}_{k^*}$,

Πρέπει να δ.ο.

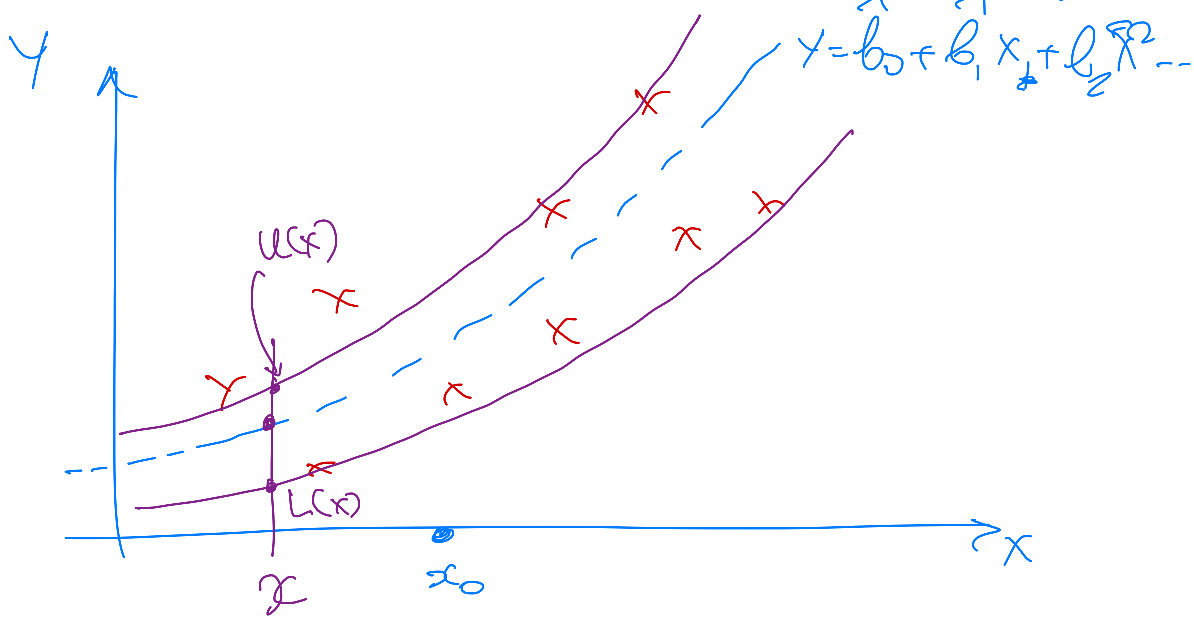
$$\| \hat{y} - t_\ell \| > \| \hat{y} - t_{k^*} \|$$

Εκφράσεις για $\| \hat{y} - t_k \|_p = \left(\sum_{i=1}^{K} |y_i - t_{ki}|^p \right)^{1/p}$

3.2 $\quad X, Y \in \mathbb{R}^N$

$$f(X_j) = \hat{Y}_j = b_0 + b_1 X_j + b_2 X_j^2 + b_3 X_j^3$$

Ζώνη Εμπιστοσύνης γύρω από το $\hat{Y}_j \sim X_j$



$(L(x), u(x))$ = 95% Δ.Ε. για το $\boxed{E(Y \mid X = x)}$

Ερώτημα $\quad$ Αν x_0 = fixed

κατασκ. ΔΕ για το $f(x_0) = b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^2 + b_3 x_0^3$

Γνωρίζουμε ΔΕ για b_j $\underline{(1-\alpha)\cdot 100\%}$

$$\text{ΔΕ}: \ b_j \in \left[\hat{b}_j \pm t_{\alpha/2,\, n-p-1} \cdot s_{\hat{b}_j}\right]$$

$\underline{1^{η}\ \text{μέθοδος}}$

Γνωρίζοντας $\hat{b} \sim \mathcal{N}\left(b, (X^T X)^{-1} \sigma^2\right)$

υπολ. ΔΕ για την $\underline{a^T b}$, a^T: γνωστό διάνυσμα.

$\underline{\left(\text{Στο πρόβλημά μας } a = (1, x_0, x_0^2, x_0^3)\right)}$

$$\underline{a^T \hat{b}} \sim \underline{\mathcal{N}\left(a^T b, \ \overbrace{a^T (X^T X)^{-1} a}^{h} \ \sigma^2\right)} \leftarrow (\text{απόδειξη})$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma), \quad Y = AX, \quad \left[Y \sim \mathcal{N}(A\mu, A \Sigma A^T)\right]$$

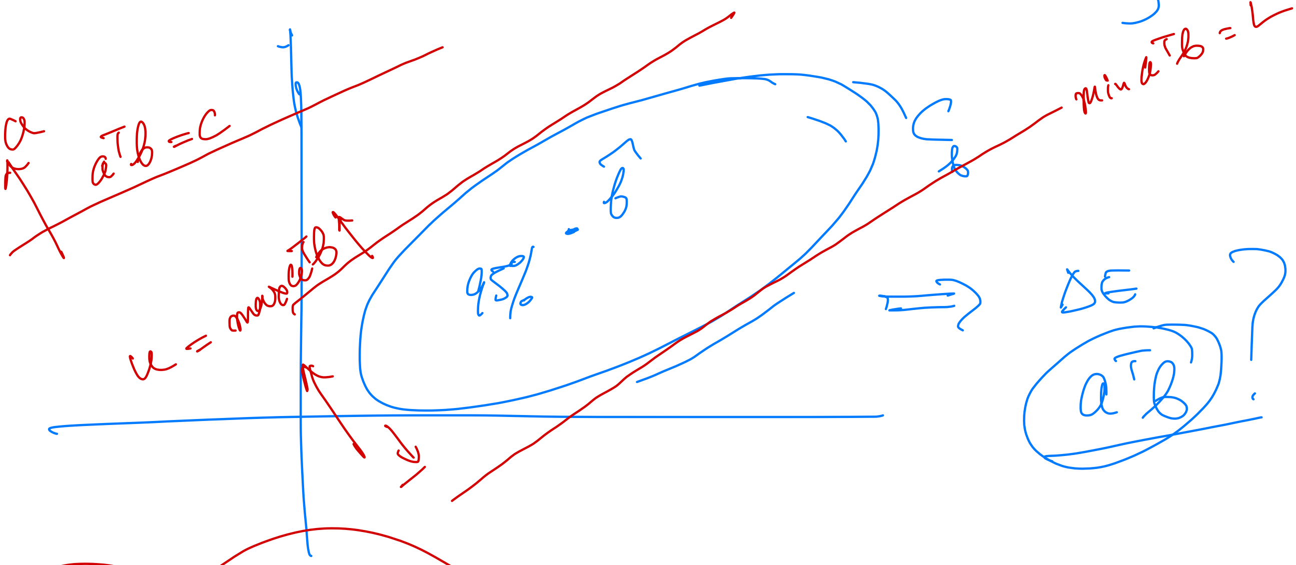
$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{RSS}{n-p-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^T \hat{b} - a^T b}{\hat{\sigma} \sqrt{h}} \sim t_{n-1-p} \Rightarrow \ldots \underline{\underline{\text{ΔΕ}}}$$

2η μέθοδος

Από κοινού δ.ε. του b (έλλειψη)

$$C_b = \{ b : (\hat b - b)^T X^T X (\hat b - b) \le h_1 \}$$



$\Longrightarrow$ ΔΕ $a^T b$?

$$\left.\begin{array}{l} \max\{a^T b : b \in C\} = U \\ \min\{a^T b : b \in C\} = L \end{array}\right\} \quad a^T b \in \underbrace{[U, L]}_{P(\text{κάλυψη}) \ge 95\%}$$

$$\forall\, b \in C \Rightarrow L \le a^T b \le U$$

$L, U = ?$

$$\max\ a^T b : (\hat b - b)^T X^T X (\hat b - b) \le h_1$$

Lagrangean - - - - $\nabla_b = 0 \Rightarrow b^*$