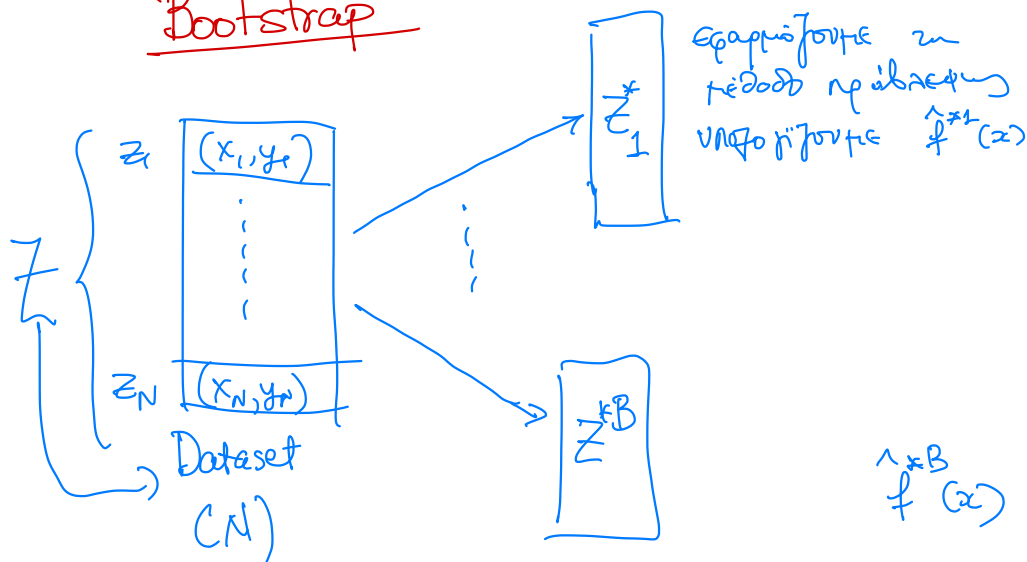


Bootstrap

Βήμα 1



Z_1^* = καιό δείγμα με επανάληψη από το Z , με μέγεθος N

Λαμβάνουμε N παρατηρήσεις από το σύνολο Z , κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι οποιαδήποτε $z_i \in Z$ με πιθαν. $\frac{1}{N}$

Εστω R σημ. $\in \{1, \dots, N\}$ $P(R=i) = \frac{1}{N}$, $i=1, \dots, N$

R_1, \dots, R_N ανεξ. $\sim R$

$$Z_1^* = \{z_{R_1}, z_{R_2}, \dots, z_{R_N}\}$$

Αλγόριθμος (a) $\forall b=1, \dots, B$

① Συμπεριφορίζουμε Z^{*b}

② υπολογίζουμε $\hat{f}^{*b}(x)$

③ Εφαρμόζουμε ως testset \hat{f}^{*b} στο αρχικό dataset Z
 $\Rightarrow \hat{f}^{*b}(x_i)$, $i=1, \dots, N$ = πρόβλεψη

(b)
$$\hat{Err}_{boot} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{N} \sum_{b=1}^B \sum_{i=1}^N L(y_i, \hat{f}^{*b}(x_i))$$

Cross Validation

Est. regression

$$k=N$$

Leave-one-out CV

Πείραμα Προσομοίωσης για Εκτίμηση Err_T, Err

$$\text{Εστω } X \sim \mathcal{U}(0,1)$$

$$Y|X=x \sim \mathcal{N}(f(x), \sigma^2)$$

$$f(x) = [3x + 2\sin(2\pi x)]e^{-x}$$

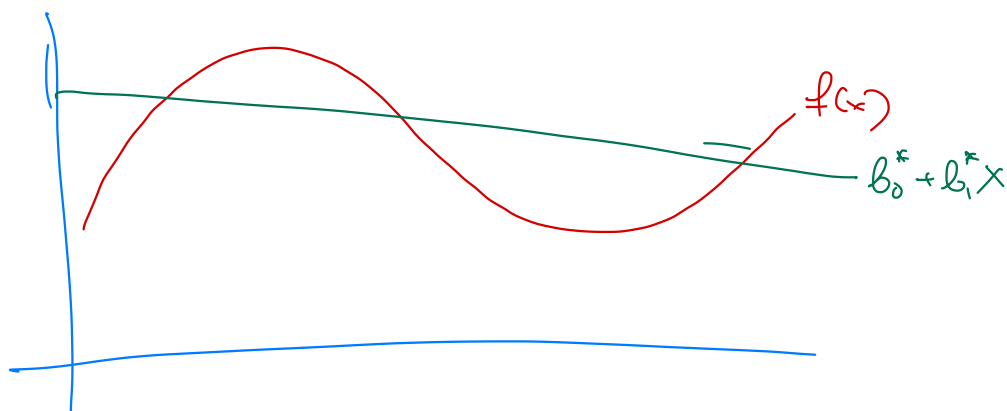
$$\sigma = 0.6$$

true values

Μέθοδος μινιμίστου τετραγώνων : $Y = b_0 + b_1 X$ (regression)

Ερώσημα Να εκτιμήσουν τα Err_T, Err
αν χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο.

(μπορούν να υπολογιστούν και αναλυτικά).



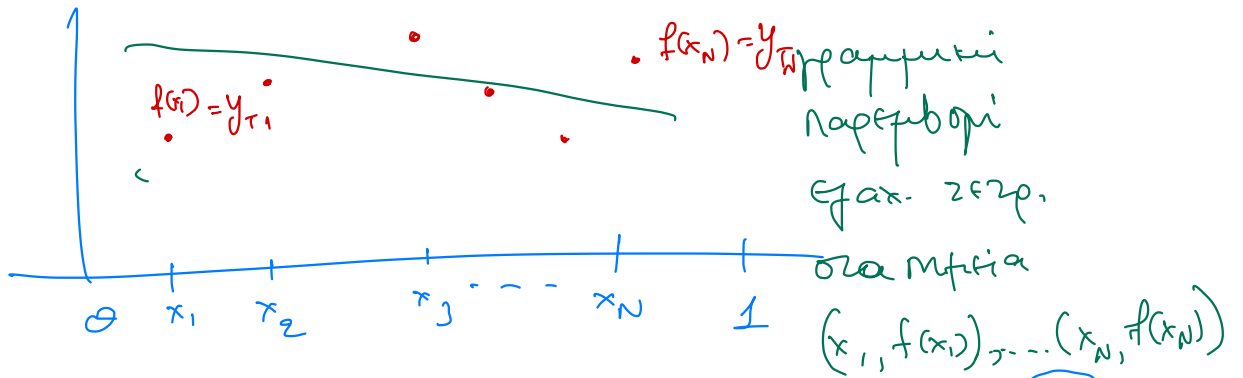
(a)

b^* : $b_0^* + b_1^* X$ η καλύτερη προσέγγιση της $f(x)$, $x \in [0,1]$
 $X \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$E_X \left[(f(X) - b_0 - b_1 X)^2 \right] = RS(b_0, b_1) \leftarrow \underline{\underline{\min}}$$

$$= \int_{x=0}^1 (f(x) - b_0 - b_1 x)^2 dx \leftarrow \min \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_0^* \\ b_1^* \end{matrix} \right\} \underline{\underline{\text{απόδοση}}}$$

β) Υπολογίστε τα συντελεστές b_0, b_1 (συντελεστές το $f(x)$)
 έτσι ώστε για τα $x_i, i=1, \dots, N$ του δείγματος T

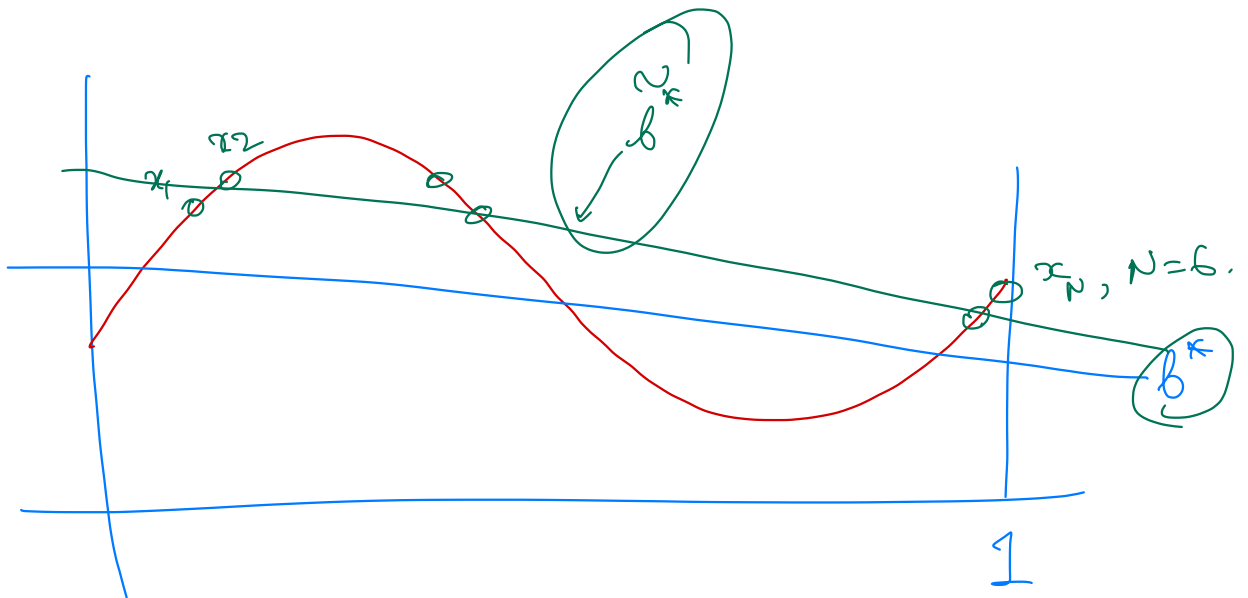


Regression ($y_T \sim x$)

$$R: \text{lm}(y_T \sim x) \Rightarrow \tilde{b}^*$$

$$\tilde{b}^* = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y_T$$

π.χ.



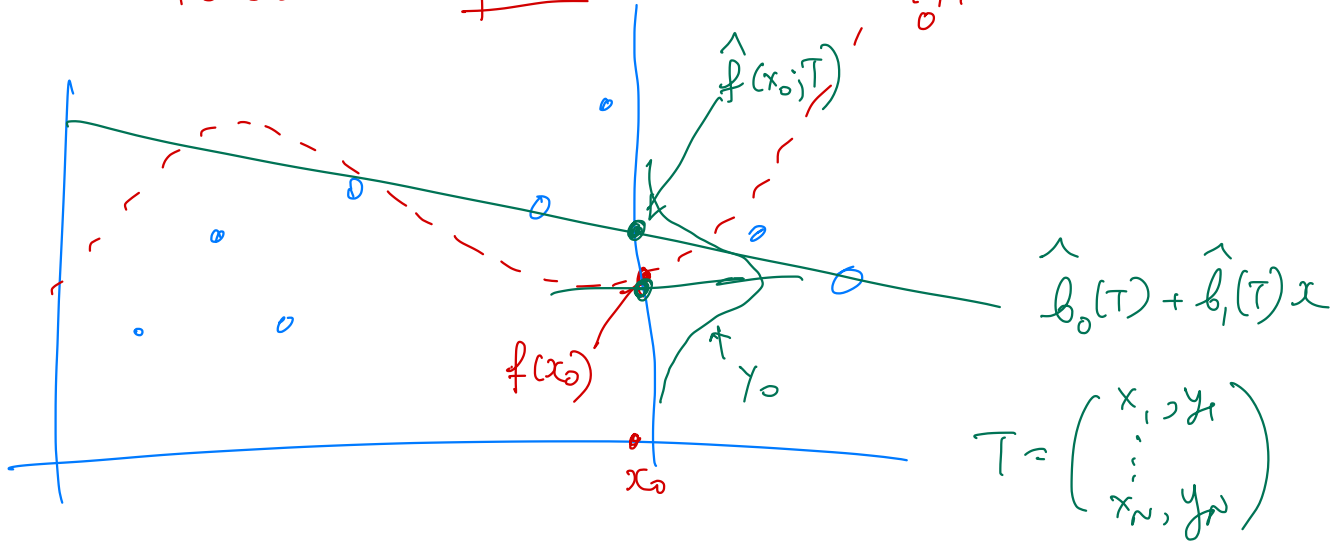
Αν $N \gg k'$ x_1, \dots, x_N iid $u(0,1)$

$$\Rightarrow \tilde{b}_N^* \rightarrow b^*$$

① $Err_T = ?$

$$Err_T(x_0) = E_{y_0} \left[(y_0 - \hat{f}(x_0; T))^2 \mid X = x_0 \right]$$

Τυχαίωση: μια από τα $Y \mid X = x_0$



$$Err_T(x_0) = \dots = \underbrace{(f(x_0) - \hat{f}(x_0; T))^2}_{\text{απόκλιση}} + \sigma^2 \quad \left(\text{δειξτε το!} \right)$$

Επίσης: ① θα το ελαφρύνουμε μέσω προσομοίωσης

② θα δείμε το Err

