(Παπαδάτος 330) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Βιβλία: Χαραλαμπίδης, Ross

28/9/21

1ο μάθημα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \rightarrow \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ σειρά

$\left[\overset{\shortparallel}{\zeta(3)}\right] \rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{N^3}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αρμονική σειρά $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

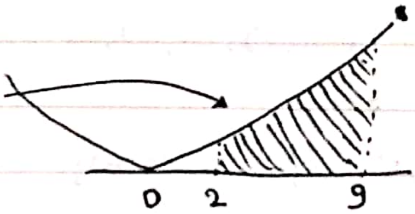
$\rightarrow \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}\right) = +\infty$

«Ολοκληρώματα»

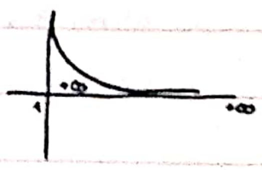
$\int x^2\,dx =$ μία παράγουσα (αρχική) της $x^2 = \frac{x^3}{3}$

$\int f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots \quad f(x) = F(x)$

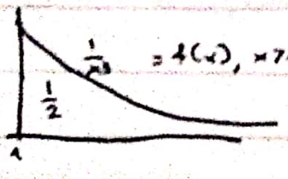
$\int_2^9 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^9 = \frac{9^3}{3} - \frac{2^3}{3}$ = ναί μερο



$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b - \cancel{\ln 1}^{\,0} = \lim_{b\to\infty} \ln b = +\infty$



$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^{\infty} = \cancel{\frac{1}{2\infty^2}}^{\,0} + \frac{1}{2\cdot 1^2} = \frac{1}{2}$ $\left(\int x^{-3} = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2} \text{ παράγ.}\right)$



$\frac{1}{x^3} = f(x),\ x \geq 1$ (πυκνότητα)

Πιθανότητες $\quad \dfrac{\#\text{ευνοϊκών αποτελ.}}{\#\text{δυνατών αποτελ.}}$

π.χ. Ρίχνω δύο ζάρια. Ποια η πιθανότητα να φέρω διπλές;

$z_2 \backslash z_1$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)				
2	(1,2)	(2,2)				
3			(3,3)			
4				...		
5					...	
6						...

$$\pi\iota\vartheta = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ΟΛΕΣ οι ζαριές (και οι 36) είναι ισοπίθανες

Ορισμός (κλασικής πιθανότητας κατά Laplace): Αν ο Ω είναι ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ (τα $\omega_1, \dots \omega_N$ καλούνται στοιχειώδη ενδεχόμενα) και A ένα υποσύνολο του Ω ($A \subseteq \Omega$) τότε ορίζω $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)}$

$$\begin{cases} N(A) = \text{πλήθος στοιχείων του } A \\ N(\Omega) = N = \quad -\text{''}- \quad \text{του } \Omega \end{cases}$$

π.χ. $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\}$ → δειγματικός χώρος και περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα

$N(\Omega) = N = 36$

$A = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$ → $A \subseteq \Omega$ και καλείται ενδεχόμενο

$N(A) = 6$

[Τα μονοσύνολα του Ω καλούνται στοιχειώδη ενδεχόμενα ($A = \{\omega_2\}$)
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ $\quad A = \{:\}$ όχι στοιχ. ενδ.]

Άσκηση: (το πρόβλημα των γενεθλίων)

Σε μια παρέα με K ($K \leq N$) άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;

1η υπόθεση: Υπάρχουν $N = 365$ πιθανές ημέρες γενεθλίων (σε μη δίσεκτο έτος)

2η υπ.: Όλες οι $N = 365$ ημερ/νίες είναι εξίσου πιθανές για γενέθλια κάποιου

3η υπ.: Κάθε άτομο της παρέας έχει γενέθλια ανεξάρτητα απ' τους άλλους.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ $(k=55)$

$$N(\Omega) = \underbrace{365 \times 365 \times 365 \times \dots \times 365}_{k} = 365^k$$

$N(A) =$ δεν είναι εύκολο !

$$\begin{bmatrix} w_1 = (1,1,1,\dots 1) \\ w_2 = (1,1,1,\dots,1,2) \\ \vdots \\ w_{700000} = (15,41,69,1,\dots\dots) \end{bmatrix}$$

$A = \{$Να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα με ίδια γεν.$\}$

A' (η A^c ή $\Omega - A$) $= \{$δεν υπάρχουν άτομα με ίδια γεν.$\}$

$$\left[N(A') = \underset{\alpha_1}{\underset{\uparrow}{N}} \times \underset{\alpha_2}{\underset{\uparrow}{(N-1)}} \times \underset{\alpha_3}{\underset{\uparrow}{(N-2)}} \times \dots \times \underset{\alpha_k}{\underset{\uparrow}{(N-(k-1))}} = \underbrace{N\cdot(N-1)\cdot\dots\cdot(N-k+1)}_{k \text{ παρ.}} \right]$$

Άρα $N(A) = N(\Omega) - N(A') = N^k - (N)_k$

$(N)_k$ = καθοδικό παραγοντικό του N τάξης k, π.χ. $(N)_0 = 1$, $(N)_1 = N$, $(N)_2 = N(N-1)$, $(N)_3 = N(N-1)(N-2)$, $(N)_N = (N)_{N-1} = N!$ $(N)_{N+1} = 0$, $(N)_k = 0$, $k>0$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N^k - (N)_k}{N^k} = 1 - \frac{(N)_k}{N^k}$$ γν. αύξουσα συνάρτηση του k

Ερώτημα: Για ποιο k η πιθ. ξεπερνάει το $\frac{1}{2}$ $(N=365)$ $\boxed{k^* = 23}$

Εργασία: Σε μια οικογένεια με 7 παιδιά α) ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 αγόρια; β) ποια η πιθ. να υπάρχουν τουλ. 3 αγόρια;

__Γενικευμένος ορισμός Laplace__ :

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ πεπερ. ή αριθμήσιμα άπειρος

(2) $P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$

(3) Τα $p_i \geq 0 \ \forall i$, και $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Ορίζω για $A \subseteq \Omega$: $\boxed{P(A) = \sum_{i=1, \omega_i \in A}^{\infty} p_i}$

π.χ. $\Omega = \{\overset{\omega_1}{1}, \overset{\omega_2}{2}, 3, 4, \dots\}$

$p_i = \frac{1}{2^i}$ $\qquad P(\{1\}) = \frac{1}{2}$

$\qquad P(\{2\}) = \frac{1}{4}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \qquad \left(* \to 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \right)$$

Ποια η πιθανότητα να φέρω ζυγό αριθμό; $P(A) = ;$ $\quad A = \{2, 4, 6, \dots\}$

__Ορισμός__ $P(A) = \sum_{i=1, \omega_i \in A}^{\infty} p_i = \sum_{i \text{ ζυγός}} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} = p_2 + p_4 + p_6 + \dots$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Άλλα μοντέλα πιθανοτήτων (πιο ρεαλιστικά!)

__Στατιστική πιθανότητα__ (von Misses)

Έστω Ω ένας δ.χ. και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχ. προκειμένου να βρω την $P(A)$ κάνω το εξής: Επαναλαμβάνω το πείραμα τύχης N (πολλές) φορές. Έστω $n_N(A) = \#$ φορών που εμφ. το A στις πρώτες N δοκιμές. Ορίζω $P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_N(A)}{N}$

(υπάρχει το όριο;)

(είναι ίδιο για όλους τους παρατηρητές;)

(είναι εφικτό να επαναλ. το πείραμα πολλές φορές;)