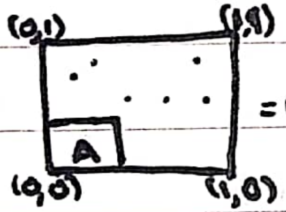
30/9/21

2ο μάθημα

Γεωμετρική Πιθανότητα

$\underline{\Omega}$ = 

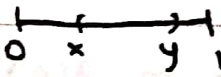
$= (0,1)^2$ Τυχαίο πείραμα: Επιλογή ενός σημείου του τετραγώνου έτσι ώστε όλα τα σημεία να είναι "ισοπίθανα".

A = ενδ $\subseteq \Omega$ π.χ. $A=(0,\frac{1}{2})\times(0,\frac{1}{2})$

$$P(A)=\frac{E(A)}{E(\Omega)}=\frac{1}{4}$$

$P(A)=\frac{E(A)}{E(\Omega)}$ για τα ενδ. A που μπορεί να οριστεί η έννοια του εμβαδού

Θεωρία μέτρου: η μαθηματική θεωρία που μελετάει μήκη, εμβαδά κ.α.κ.

Έστω $\Omega=[0,1]$ και $A\subseteq\Omega$  Γεωμ πιθ $\Rightarrow P(A)=\frac{\lambda(A)}{\underbrace{\lambda(\Omega)}_{=1}}$

$\lambda(A)$ = μήκος του A άρα $P(A)=\lambda(A)$

$A=(x,y)\subseteq[0,1]$ $\lambda(A)=y-x$ $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$ $(x_n,y_n)\subseteq\Omega\ \forall n$

$(x_n,y_n)\cap(x_m,y_m)=\emptyset\ \forall n\neq m$

$\lambda(A)=\sum_{n=1}^{\infty}(y_n-x_n)$ Όλα τα ανοιχτά $\subseteq[0,1]$ γράφονται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοιχτών διαστημάτων

A ανοιχτό αν $\forall x_0\in A,\ \exists\,\varepsilon>0 : (x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subseteq A$

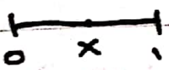
$\lambda(A')=1-\lambda(A)$

Αν $A_1,A_2,A_3,\dots$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο ($A_i\cup A_j=\emptyset,\ \forall i\neq j$) συνόλων με καλά ορισμένα μήκη $\lambda(A_1),\lambda(A_2),\dots$, τότε το $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ θα έχει $\lambda(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)$ και $\lambda(A')=1-\lambda(A)$

$A\cup A'=\Omega=(0,1)$ $\lambda(A\cup A')=\lambda(\Omega)=1$

$A=\{x\}=[x,x]$ $\lambda(A)=x-x=0$, $A'=[0,x)\cup(x,1]$

$\lambda(A')=(x-0)+(1-x)=1$



$A=\mathbb{Q}\cap[0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda(\{q_n\})$, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda(\{q_n\})=\lim_{N\to\infty}0=0=\lambda(A)$

x_0 αλγεβρ $\Leftrightarrow \exists\ P$ βαθμού n με ακέραιους συντελ.

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ $(a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z})$

τέτοιο ώστε $P(x_0)=0$. $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta x-\alpha=0$

Υπερβατικός = (trascendental) καλείται ο πραγμ. αριθμ. που δεν είναι αλγεβρικός

A τυχόν $\subseteq \Omega$ $\quad A' \subseteq \Omega$

$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U), U \text{ ανοικτό και } A \subset U\}$

$\lambda^*(A') = \inf\{\lambda(U), U \text{ αν. }, A' \subset U\}$

Αν A ανοικτό ή κλειστό $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda^*(A)$

$\lambda^*((x,y]) = y-x$

A τυχόν $\subseteq \Omega$ $\quad \lambda^*(A) + \lambda^*(A') \in [1,2]$ $\quad$ [Vitali, Bernstein] κατασκεύασαν $A \subseteq [0,1]$ για το οποίο $\lambda^*(A) + \lambda^*(A') > 1$

Τι κάνουμε τώρα με αυτά τα A τα παλαβά;

Ονομάζουμε "μετρήσιμο" οποιοδήποτε $A \subseteq \Omega$ για το οποίο $\lambda^*(A) + \lambda^*(A') = 1$

(Lebesgue-μετρήσιμα). Τα υπόλοιπα για τα οποία $\lambda^*(A) + \lambda^*(A') > 1$ τα ονομάζω <u>μη μετρήσιμα</u>. Θέτω $\mathcal{A} = \{A \subseteq [0,1], A \text{ μετρήσιμο}\}$

Σε αυτά ορίζω $\lambda(A) = \lambda^*(A)$. Στα υπόλοιπα A ΔΕΝ ορίζω $\lambda(A)$

ϕ, $\lambda(\phi) = \lambda((x,x)) = 0$ $\quad$, $\lambda(\Omega) = 1$, $\Omega = [0,1]$

$P(A) = \lambda(A)$ $\quad$, $\forall A \in \mathcal{A}$

ΔΕΝ ΘΑ ΟΡΙΣΩ $P(A)$ όταν $A \subseteq \Omega$ αλλά $A \notin \mathcal{A}$.

Καραθεοδωρής (Θ): Τα σύνολα της $\mathcal{A}$ (δηλ. τα μετρήσιμα σύνολα) πληρούν τις εξής ιδιότητες:

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (ισοδ. λόγω (2), $\phi \in \mathcal{A}$)

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \equiv \Omega - A \in \mathcal{A}$

(3) Αν $A_1, A_2, A_3 \dots$ είναι μια ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}$, τότε η ένωσή τους $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

σ-άλγεβρα στον Ω (σ-field)

Έστω Ω τυχόν σύνολο, και $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Η $\mathcal{A}$ καλείται σ-άλγεβρα στον Ω όταν: (1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$

(σ-κλειστ)

σ-κλειστότητα ≡ κλειστότητα ως προς αριθμ. ενώσεις

$$A = \bigcup_{x : x \in A} \{x\}$$

π.χ. σ-άλγεβρα των μετρήσιμων (κατά Lebesgue) συνόλων.

Στις πιθανότητες, τα σύνολα της $\mathcal{A}$ (και ΜΟΝΟ ΑΥΤΑ) καλούνται <u>ενδεχόμενα</u>.

$\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = \Omega' \in \mathcal{A}$ $\quad$ $\emptyset, \Omega$ τετριμμένα ενδεχόμενα

σ-άλγεβρα για "γέλια" : $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \overset{\text{ορ.}}{=} \{A : A \subseteq \Omega\}$

$\Delta \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad$ Δ τυχούσα

π.χ. $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad$ $\Delta = \{\{1\}, \{1,2\}\}$

- Υπάρχει και είναι μοναδική η <u>ελάχιστη</u> σ-άλγεβρα που περιέχει την Δ, καλείται $\sigma(\Delta)$.

$$\{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2\}\} = \sigma(\Delta)$$

- Αποδ: Η τομή <u>οποιουδήποτε</u> πλήθους σ-αλγ. στον Ω είναι σ-αλγ. στον Ω

(δείξτε το)

Αν Ω ένα σύνολο = δειγμ. χώρος του τυχαίου πειράματος και $\mathcal{A}$ μια σ-αλγ. στον Ω (η σ-αλγ. των ενδεχ. δηλ. A ενδ. $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{A}$)

$(\Omega, \mathcal{A})$ = μετρήσιμος χώρος

χώρος πιθανότητας είναι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ όπου $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

Ορισμός Πιθανότητας (Kolmogorov 1930)

(1) $P(A) \in [0, +\infty]$ $\forall A \in \mathcal{A}$

(2) $P(\Omega) = 1$ (νορμαλισμός)

(3) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ξένη ακολουθία ενδεχομένων (της $\mathcal{A}$) δηλ. $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$ και $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$, τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ αριθμήσιμο προσθετικότητα του μέτρου πιθανότητας σ-προσθετικότητα

Laplace κλασική πιθανότητα

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(A) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N} \qquad P : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = \frac{N}{N} = 1$$

$$P(\cup A_m) = \frac{N\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)}{N(\Omega)} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} N(A_m)}{N} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N(A_m)}{N} = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$$

Ιδιότητες της πιθ.

(Θ1) $P(\emptyset) = 0$ Απ: $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$P(\emptyset) \in [0, \infty] \setminus (0, \infty)$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} 1 \overset{(2)}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n \qquad x = x_n = P(\emptyset) \in [0, \infty]$$

$(= 1 + x + x + x \dots)$

$$= 1 + \lim_{N \to \infty} \sum_{2}^{N} x = 1 + \lim_{N \to \infty} (N-1)x = +\infty \quad \text{άτοπο}$$

(Θ2) πεπερ. προσθετικότητα

Αν $A_1,\dots,A_n$ ξένα ενδεχ. τότε $P(A_1\cup\dots\cup A_n) = P(A_1)+\dots+P(A_n)$

<u>Αποδ:</u> $P(A_1\cup\dots\cup A_n) = P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots) = P(A_1)+\dots+P(A_n)+\underbrace{P(\emptyset)+\dots}_{0}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{op}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(Θ3) $P(A') = 1-P(A)$

<u>Αποδ:</u> $\Omega = A\cup A'$ ξένα τα A, A'

$1 = P(\Omega) = P(A)+P(A')$

$\Rightarrow P(A') = 1-P(A)$

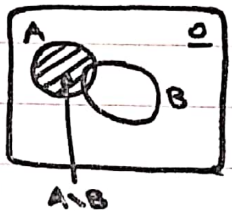
$P(A) = 1-P(A')$

(Θ4) $P(A) \leq 1 \quad \forall A\in\mathcal{A}$

δηλ. $P:\mathcal{A}\to[0,1]$

Για A,B ενδ:

(Θ5) $P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$



$A\setminus B \overset{op}{=} A\cap B'$

Να συμβεί το A αλλά όχι το B

$A\cap B' = (A'\cup B)' = (A'\cup B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots)'$

τύπος De-Morgan

$A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$ ξένη ένωση γιατί $(A\setminus B)\cap(A\cap B) = (A\cap B')\cap(A\cap B)$

$= A\cap A\cap B\cap B' = A\cap\emptyset = \emptyset$

$\overset{\Theta 2}{\Longrightarrow} P(A) = P(A\setminus B) + P(A\cap B)$ ο.ε.δ

(Θ6) Ειδικά αν $B\subseteq A \Rightarrow P(B)\leq P(A)$ (μονοτονία)

$B\subseteq A \Rightarrow A\cap B = B$

$0 \leq P(A\setminus B) \overset{\Theta 5}{=} P(A) - P(A\cap B)$

$= P(A) - P(B)$

$\Rightarrow P(A)-P(B)\geq 0 \Rightarrow P(A)\geq P(B)$