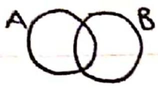
5/10/21 3ο Μάθημα

$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$: Λάθος! π.χ. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$

Αν το $B \subseteq A$ τότε $A \cap B = B$ οπότε $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

Θ [ΑΡΧΗ ΕΓΚΛ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ] baby

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



Αποδ.

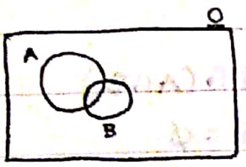
$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + [P(B) - P(A \cap B)]$

Πόρισμα: $P(A' \cap B') = P((A \cup B)')$
$= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$A \cup B$ = να συμβεί τουλ 1 από τα A, B $= (A' \cap B')'$
$A' \cap B'$ = να μη συμβεί κανένα από τα A, B
$(A \cup B)' = A' \cap B'$ DeMorgan

π.χ. Το 10% του πληθυσμού της Ελλάδας καπνίζει τσιγάρο. Το 7% καπνίζει πούρο.
Τι ποσοστό των Ελλήνων δεν καπνίζει τίποτα; Το 2% καπν. και τα δύο.



A = {αυτοί που καπν. τσιγάρο} $P(A) = 0,1$

B = {πούρο} $P(B) = 0,07$

$P(A' \cap B') = ;$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - 0,1 - 0,07 - 0,02$

$= 0,85 = 85\%$

• $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

άσκηση:

15% καπνίζουν τσιγάρο με φίλτρο : A_1 $P(A_1)=0,15$

10% άφιλτρο : A_2 $P(A_2)=0,1$

5% πούρο : A_3 $P(A_3)=0,05$

7% φίλτρο και άφιλτρο $P(A_1\cap A_2)=0,07$

3% φίλτρο και πούρο $P(A_1\cap A_3)=0,03$

2% άφιλτρο και πούρο $P(A_2\cap A_3)=0,02$

1% τα πάντα $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0,01$

Τι ποσοστό καπνίζει; , Τι ποσοστό δεν καπνίζει;

είναι: $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$

$=0,15+0,1+0,05-0,07-0,03-0,02+0,01$

$=0,19=19\%$ καπνίζει

είναι $P(A_1\cup A_2\cup A_3)'=1-0,19=0,81=81\%$ δεν καπνίζει

Γενικός τύπος: $P($να συμβεί τουλ. 1 από τα $A_1,\dots,A_n)=P(A_1\cup\dots\cup A_n)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)$

$=S_{n,1}-S_{n,2}+S_{n,3}-S_{n,4}+\dots+(-1)^{n-1}S_{n,n}$

$S_{n,k}$ = το άθροισμα των πιθανοτήτων των τομών των $A_1,\dots,A_n$ ανά k

$$S_{n,k}=\sum_{1\le i_1\le i_2<\dots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})$$

$$S_{n,1}=\sum_{1\le i_1\le n}P(A_{i_1})=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}P(A_{i_1})=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$$S_{n,2}=\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2})$$

$\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ προσθεταίοι στο $S_{n,2}$

$\binom{n}{3}$ -"- στο $S_{n,3}$

[συνδυασμοί] $\binom{n}{k}$ προσθ. στο $S_{n,k}$

$\binom{n}{k}\overset{\text{ορ}}{=}\frac{(n)_k}{k!}\overset{k\le n}{=}\frac{n!}{k!(n-k)!}$ όπου $k!=1\cdot2\cdot\dots\cdot k$ $(0!\overset{\text{ορ}}{=}1)$

$(n)_k\overset{\text{ορ}}{=}n(n-1)\dots(n-k+1)$

π.χ. είναι $\binom{40}{12} = \frac{(40)_{12}}{12!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12}$

$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$

Λίγα στοιχεία συνδυαστικής

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ένα σύνολο με n στοιχεία π.χ. $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

Απλή διάταξη των n ανά k ονομάζεται κάθε διατεταγμένη k-άδα με διαφορετικά στοιχεία του Ω

Επαναληπτική Διάταξη των n ανά k ονομάζ. κάθε διατετ. k-άδα (επιτρέπεται να έχει και όμοια στοιχεία)

$(1,2)$ απλή διάταξη n ανά 2

$(1,2)$ επαναλ. διάταξη

$(2,2)$ επαναλ. (όχι απλή)

$(1,1,2,3,4)$ επαναλ. διάτ. των n ανά 5

(Θ_1) Το πλήθος επαναλ. διατάξεων των n ανά k είναι ίσο με n^k.

Αποδ: κατασκευή = φτιάχνω διατ. k-άδα

$$\Big(\underset{1_o}{\underset{\uparrow}{n^{\text{τρόποι}}}}, \underset{2_o}{\underset{\uparrow}{n^{\text{τρ.}}}}, \ldots, \underset{k_o}{\underset{\uparrow}{n^{\text{τρ.}}}} \Big) \qquad \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

(Θ_2) Το πλήθος απλών διατάξεων των n ανά k είναι ίσο με $(n)_k$

Πόρισμα: Το πλήθος επαναλ. διατ. που δεν είναι απλές $n^k - (n)_k$

Αποδ Θ_2:

$$\Big(\underset{1_o}{\underset{\uparrow}{n^{\text{τρόποι}}}}, \underset{2_o}{\underset{\uparrow}{n-1^{\text{τρόποι}}}}, \ldots, \underset{k_o}{\underset{\uparrow}{n-(k-1)^{\text{τρ.}}}} \Big) \qquad n(n-1)\ldots(n-k+1) = (n)_k$$

Ορισμός: Μετάθεση n στοιχείων καλείται $\forall$ απλή διάταση των n ανά n.

$n = 4 \quad \Omega = \{1,2,3,4\}$

Πόρισμα 2 Οι απλές διατάξεις των n ανά $n-1$ είναι

$$(n)_{n-1} = n(n-1)\cdots(n-(n-1)+1)$$
$$= n(n-1)\cdots 2$$
$$= n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

(Απλός) συνδυασμός των n ανά k καλείται κάθε υποσύνολο του Ω μεγέθους k.

(Θ_3) Το πλήθος απλών συνδυασμών των n ανά k ισούται με $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

Αποδ: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$

$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \Omega$ και $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$

$y =$ οι συνδ. n ανά k

$x =$ απλές διατ. $x = k!\cdot y \Rightarrow y = \frac{x}{k!} = \frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}$