12/10/21 5o Μαθημα

Ανισότητα Boole: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (α)

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (β) (υποπροσθετικότητα της πιθανότητας)

(β) ⇒ (α) Διότι στο (β) μπορώ να πάρω $A_{n+1} = \emptyset$, $A_{n+2} = \emptyset, \dots$

τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ $P(\emptyset) = 0$

Αποδ (β): Θέτω $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $B_4 = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, ...

$B_i = A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1})$

Το B_i περιέχει τα καινούργια στοιχεία δηλ. αυτά που περιέχ. στο A_i και σε κανένα από τα προηγούμενα $A_1, \dots, A_{i-1}$

$B_i \overset{\text{op}}{=} A_i \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1})' = A_i \cap A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{i-1}'$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i \neq j$

$i < j$ $B_i = A_i \cap A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{i-1}' \subseteq A_i$

$i \leq j-1$ $B_j = A_j \cap A_1' \cap \dots \cap \underbrace{A_{j-1}'}_{\substack{\vee\!\!\mid \\ i}} = A_j \cap A_1' \cap \dots \cap A_i' \cap \dots \cap A_{j-1}' \subseteq A_i'$

$B_i \subseteq A_i$ $B_j \subseteq A_i'$

$B_i \cap B_j \subseteq A_i \cap A_i' = \emptyset \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \underset{\subseteq}{\overset{\supseteq}{=}} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Θα δείξω ότι αν $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ τότε $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

Αν $\omega \in A$ τότε $\omega \in B$: $A \subseteq B$

Έστω $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, τότε το ω θα ανήκει σε τουλάχιστον 1 από τα $A_1, A_2, \dots$ άρα θα υπάρχει ο πιο μικρός δείκτης i_0 ώστε το $\omega \in A_{i_0}$ και δεν ανήκει στα προηγούμενα $A_1, A_2, \dots, A_{i_0-1}$. Τότε $\omega_0 \in A_{i_0} \cap A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{i_0-1}'$

δηλ. $\omega_0 \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$

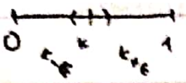
$\overset{\text{Ιξ3α}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \overset{B_i \subseteq A_i}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Scanned with CamScanner

Έστω $P(A_i)=0 \quad \forall\, i=1,2,\dots$

π.χ. στη γεωμ. πιθανότητα επιλογής σημείου /αριθμού από το διάστημα $[0,1]$ η πιθανότητα $\forall$ μονοσύνολο $\{x\}$ είναι 0

$\{x\} \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$



$P(\{x\}) \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon>0$

$a \geq 0, \quad \forall \varepsilon>0, \ a\leq 2\varepsilon \Rightarrow a=0$

$x\in \mathbb{Q}\cap[0,1]$

$P(\{x\})=0$

$A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$

$\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_1,q_2,q_3,\dots\}$

$A_i=\{q_i\} \qquad P(A_i)=0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) = \lim_N \sum_{i=1}^{N} 0$

π.χ. $A=\bigcup_{x\in[0,1]}\{x\}=[0,1] \quad , P(A)=P([0,1])=1$

<u>Πόρισμα</u>. Ανισότητα Bonferroni

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}P(A_i)-n+1 \qquad (\gamma)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i'\right)'\right) = 1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i'\right) \geq 1-n+\sum P(A_i)$$

- A_i έχουν $P(A_i)=1 \quad \forall i=1,2,\dots$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1$

Αποδ. $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right) = 1-P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)'\right) = 1-P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i'\right) = 1-0=1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i'\right) \overset{(\alpha)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i') = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\cancel{P(A_i)}^{\,0}) = 0$$

a_n ακολουθία πραγμ. αριθμών $a_n\in[0,1]$

$\lim_{n\to\infty}a_n=a \qquad \forall\varepsilon>0, \exists n_0: \forall n>n_0 \ |a_n-a|<\varepsilon$

$0,1,0,1,0,1,0,1$

$a_n=\begin{cases}1, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases} \qquad a_n\leq a_{n+1} \ \forall n \nearrow$

$a_n\geq a_{n+1} \searrow$

Scanned with CamScanner

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ενδεχομένων στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$ αύξουσα $\uparrow$ } μονότονη

$A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n$ φθίνουσα $\downarrow$

$\Updownarrow$

$A_n' \subseteq A_{n+1}'$

$$\limsup_n A_n \overset{op}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim} A_n \qquad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \limsup a_n \overset{op}{=} \inf_n \sup_{n \geq k} a_k = \overline{\lim}\, a_n \\ \liminf a_n \overset{op}{=} \sup_n \inf_{n \geq n} a_k = \underline{\lim}\, a_n \\ \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} a_k = \overline{\lim}\, a_n \\ \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} a_k = \underline{\lim}\, a_n \end{array}}$$

Θ1) (α) Αν $A_n \uparrow$ τότε $P(\lim A_n) = \lim_n P(A_n)$

(β) Αν $A_n \downarrow$ τότε -//-

(γ) γενικά ισχύει:

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$$

Άρα αν $A_n \to A$ τότε εξ' ορισμού:

$\liminf A_n = A = \limsup A_n$ $\quad P(A) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(A)$

$$\lim P(A_n) = P(A) = P(\lim A_n)$$

Scanned with CamScanner

[Λύνω σπίτι με 6,9,21]

<u>Άσκηση</u> Διαλέγω έναν αριθμό στην τύχη από τους 1,2,3,…,2100. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με τουλ. 1 από τους αριθμούς 3,5,7;

$A_1 = \{$οι αριθμοί του Ω που διαιρούνται με 3$\}$ $= \{3,6,9,\dots,2100\}$
$A_2 = \{$οι -//- -//- -//- με 5$\}$
$A_3 = \{$ -//- -//- -//- με 7$\}$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ = ζητούμενο

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{700}{2100} = \frac{1}{3}, \quad P(A_2) = \frac{400}{2100} = \frac{1}{5}, \quad P(A_3) = \frac{1}{7}$$

$P(A_1 \cap A_2) = P($να διαιρείται με 15$)$ $\{15,30,45,\dots,2100\} = \{1\cdot 15, 2\cdot 15, \dots, 140\cdot 15\}$

$= \frac{140}{2100} = \frac{1}{15}$

$P(A_1 \cap A_3) = P($να διαιρ. με $\overbrace{3 \text{ και } 7}^{21}) = \frac{1}{21}$

$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{35}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{105}$

Επομένως : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105}$

<u>Άσκηση</u> Ρίχνω 10 φορές ένα ζάρι. Ποια η πιθανότητα να εμφ. όλες οι ενδείξεις 4,5,6;

$\Omega = \{i_1, i_2, \dots, i_{10}\}, \quad i_1,\dots,i_{10} \in \{1,2,\dots,6\}$

$N(\Omega) = 6^{10}$

<u>Καταύστρωση</u>: $A_1 = \{$να μην εμφ. 4$\}$
$A_2 = \{$ -//- 5$\}$ $\quad P(A_1' \cap A_2' \cap A_3')$ = ζητούμενο
$A_3 = \{$ -//- 6$\}$.

Είναι :

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Scanned with CamScanner

$P(A_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = P(A_2) = P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{4}{6}\right)^{10} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{3}{6}\right)^{10}$

(ανταλλάξιμα: τα $A_1, \dots, A_n$ όταν $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ για $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ εξαρτάται ΜΟΝΟ από το k, όχι τα $i_1, i_2, \dots, i_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$)

Επομένως:

$$P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = 1 - 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 3\left(\frac{4}{6}\right)^{10} - \left(\frac{3}{6}\right)^{10} = \frac{6^{10} - 3 \cdot 5^{10} + 3 \cdot 4^{10} - 3^{10}}{6^{10}}$$

Scanned with CamScanner