14/10/21 6ο μάθημα

Άσκηση ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ

3 ζάρια άθροισμα 9 είναι λιγότερο πιθανό από άθροισμα 10

άθροισμα 9		10	
1+2+6	(6)	1+3+6	(6)
1+3+5	(6)	1+4+5	(6)
1+4+4	(3)	2+2+6	(3)
2+2+5	(3)	2+3+5	(6)
2+3+4	(6)	2+4+4	(3)
3+3+3	(1)	3+3+4	(3)
	25		27

(i_1, i_2, i_3) — 1ο, 2ο, 3ο

$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3), i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$

$N(\Omega) = 6^3 = 216$

$A_9 = \{(i_1, i_2, i_3) \in \Omega : i_1 + i_2 + i_3 = 9\}$

$A_{10} = \{ \quad -\!\!\prime\prime- \quad\quad -\!\!\prime\prime- \quad = 10\}$

$N(A_9), N(A_{10}) = 27 \qquad P(A_{10}) = \frac{27}{216}$

$P(A_9) = \frac{25}{216} < \frac{27}{216}$

$(1,3,6), (1,6,3), (3,1,6), (3,6,1), (6,1,3) (6,3,1) \qquad 3!$

$(2,2,6), (2,6,2), (6,2,2) \qquad \frac{3!}{2!1!} = 3$

Άσκηση Ρίχνω 10 ζάρια

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η μεγαλύτερη ένδειξη να είναι k

(β) -''- -''- η μικρότερη ενδ. να είναι k

$(k=1,2,\ldots,6)$

$\underline{\Omega} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{10}) : i_j \in \{1,\ldots 6\}$

$N(\underline{\Omega}) = 6^{10}$

$A_1 = \{$ο μεγ. να είναι $1\} = \{(1,1,\ldots,1)\}$ $\quad N(A_1) = 1$

$P(A_1) = \frac{1}{6^{10}}$ $\quad A_k = \{$ο μεγ. $k\}$. $\quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = \underline{\Omega}$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$B_k \overset{\text{op}}{=} \{(i_1, \ldots, i_{10}) : i_j \in \{1,2,\ldots,k\}, j=1,2,\ldots,10\}$

$= \{$η μέγ. ενδ είναι $\le k\}$

$B_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \qquad B_6 = \underline{\Omega}$

$A_k = B_k \setminus B_{k-1} = \{$να είναι ο μεγ. $\le k$ αλλά να μην είναι $\le k-1\}$

$N(B_k) = k^{10}$

$$P(A_k) = P(B_k \setminus B_{k-1}) = P(B_k) - P(\underbrace{B_k \cap B_{k-1}}_{B_{k-1}}) = P(B_k) - P(B_{k-1}) = \left(\frac{k}{6}\right)^{10} - \left(\frac{k-1}{6}\right)^{10}$$

Απάντηση: (α) Η πιθ η μεγ. ενδ. να είναι $=k$ είναι

$$P(A_k) = \left(\frac{k}{6}\right)^{10} - \left(\frac{k-1}{6}\right)^{10} \quad (k=1,2,\ldots,6).$$

(β) $\Gamma_k = \{$η μικρ. ενδ. είναι $k\}$.

$\Delta_k = \{$η μικρ. ενδ. είναι $\ge k\}$

$= \{(i_1, \ldots, i_{10}) : i_j \ge k, \forall j\}$

$i_1 \in \{k, k+1, \ldots, 6\} \qquad 6-k+1 = 7-k$

$N(\Delta_k) = (7-k)^{10} \qquad P(\Delta_k) = \frac{(7-k)^{10}}{6^{10}}$

$\Gamma_k = \Delta_k \setminus \Delta_{k+1}$

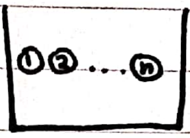
$$P(\Gamma_k) = P(\Delta_k) - P(\Delta_{k+1}) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^{10} - \left(\frac{6-k}{6}\right)^{10}$$

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα η μικρότερη ένδειξη να είναι k και η μεγαλύτερη s, $(1 \le k \le s \le 6)$

Ζητούμενο: $P(\Gamma_k \cap A_s) = P(\Delta_k \cap B_s \cap \Delta_{k+1}' \cap B_{s-1}')$

$$\left(\begin{array}{l} \Gamma_k = \Delta_k \setminus \Delta_{k+1} = \Delta_k \cap \Delta_{k+1}' \\ A_s = B_s \setminus B_{s-1} = B_s \cap B_{s-1}' \end{array}\right)$$

Ασκ. Έχουμε $n \geq 3$ σφαιρίδια σε ένα δοχείο και εξάγουμε διαδοχικά 3 σφαιρ.



(α) Να βρεθεί η πιθ. το πρώτο εξαγόμενο σφ. να φέρει αριθμό > του αριθμού του 2ου εξαγ.

$\underline{\Omega} = \{ (i_1, i_2, i_3) : i_j \in \{1, \dots, n\},\ j=1,2,3,\ i_j \neq i_s \text{ για } j \neq s \}$

$N(\underline{\Omega}) = (n)_3 = n(n-1)(n-2)$

$A = \{ (i_1, i_2, i_3) \in \underline{\Omega},\ i_1 > i_2 \}$

$N(A) = ;$

$$N(A) = \binom{n}{2}(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2}$$

Ασκ. Έχω n επιστολές και θέλω να τις τοποθετήσω σε n φακέλους, κάθε επιστολή έχει ακριβώς έναν σωστό φάκελο. Μία μαϊμού, τις βάζει στην τύχη. Ποια η πιθανότητα όλες να μπουν σε λάθος φακελ.;

$\underline{\Omega} = \{ (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\},\ i_j \neq i_s \text{ για } j \neq s \}$

$E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_n$

$\vdots$

$1 \quad 2 \quad \dots \quad n$

ο $\underline{\Omega}$ περιέχει τις μεταθέσεις n στοιχείων δηλ. $N(\underline{\Omega}) = n!$

$A_j = \{$η επιστολή E_j τοποθετήθηκε σωστά (δηλ. στον j)$\}$
$= \{ (i_1, i_2, \dots, i_{j-1}, j, i_{j+1}, \dots, i_n) \} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

Ζητούμενο: $P(A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n') = 1 - S_{n,1} + S_{n,2} - \dots + (-1)^n S_{n,n} =$
$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_{n,k}$

$S_{n,0} = 1$, $S_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$, $k = 1, 2, \dots, n$

$P(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$P(A_j \cap A_s) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$P(A_j \cap A_s \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$ (δεν εξαρτάται από τα $i_1, \ldots, i_k$. μόνο απ'το k)

$$S_{n,k} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!} = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\Rightarrow S_{n,k} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad P(A_1' \cap \ldots \cap A_n') = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \longrightarrow e^{-1} \simeq 0{,}3$$

Άσκ. Σε ένα ράφι τοποθετούνται σε τυχαία σειρά 6 βιβλία μαθ/κών (Μ), 4 βιβ. φυσικής (Φ), 3 ιστορ. (Ι), 7 ξένων γλωσσών (Ξ) και 10 λεξικά (Λ).
Πόσο πιθανό είναι αν τα βιβλία μπουν σε τυχαία σειρά, να τοποθετηθούν όλα μαζί από του ίδιου είδους;

$M_1, M_2, \ldots, M_6$ $\qquad \Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{30}) : \text{μεταθέσεις}\}$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ $\qquad N(\Omega) = 30!$

I_1, I_2, I_3

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} M\ \Phi\ I\ \Xi\ \Lambda \\ M\ I\ \Xi\ \Lambda\ \Phi \\ I\ M \end{array}\right\} 5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10! \qquad \frac{5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10!}{30!}$$