21/10/21 8ο μάθημα

(Στοχαστική) Ανεξαρτησία ενδεχομένων

A_1, A_2 ανεξ $\overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

(τότε π.χ. όταν $P(A_1) > 0 \overset{A_1, A_2 \text{ ανεξ}}{\Longrightarrow} \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = P(A_2)$ δηλ. $P(A_2 | A_1) = P(A_2)$

π.χ. $\Omega = \{(\kappa,\kappa), (\kappa,\Gamma), (\Gamma,\kappa), (\Gamma,\Gamma)\}$

$A_1 = \{$να φέρω κ στην πρώτη δοκιμή$\} = \{(\kappa,\kappa), (\kappa,\Gamma)\}$

$A_2 = \{$να φέρω κ στην δεύτερη δοκιμή$\} = \{(\kappa,\kappa), (\Gamma,\kappa)\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(\kappa,\kappa)\}$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$, $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_2)$ *

Τρία ενδεχόμενα καλούνται ανεξάρτητα όταν:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{array}\right\} \text{ανά 2 ανεξ.} \\ \text{και } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{array}\right\} 4 \text{ σχέσεις}$$

* $A_3 = \{$ίδιο αποτέλεσμα στις 2 δοκιμές$\} = \{(\kappa,\kappa), (\Gamma,\Gamma)\}$

$P(A_3) = \frac{1}{2}$

$A_1 \cap A_3 = \{(\kappa,\kappa)\}$

$A_2 \cap A_3 = \{(\kappa,\kappa)\}$ αλλά $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \frac{1}{8}$

Ορσ. $n \geq 2$ ενδ. $A_1, \dots, A_n$ ενός χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ καλούνται ανεξάρτητα όταν είναι ανεξ. ανά 2, ανεξ. ανά 3, ..., ανεξ. ανά n, δηλαδή όταν

$(*)$ $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$ $\quad k = 2, 3, \dots, n$

$\forall\, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

Για $k = 2$: $\binom{n}{2}$ σχέσεις

$k = 3$: $\binom{n}{3}$

$\vdots$

$k = n$: $\binom{n}{n}$

πλήθος $(*)$: $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = (1+1)^2 - 1 - n = 2^n - n - 1$

Ω ανεξ. από κάθε A (ακόμα και απ' τον εαυτό του)

$\emptyset$ τα ίδια

- $P(\Omega \cap A) = P(\Omega) P(A)$

  $\Rightarrow P(A) = 1 \cdot P(A)$ $\quad \forall A \in \mathcal{A}$

- $P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) P(A) = 0$

- A ανεξ. απ' τον εαυτό του αν: $P(A \cap A) = P(A) P(A)$

  $P(A) = P(A)^2 \iff \boxed{P(A) \in \{0, 1\}}$.

Έστω A, B ξένα. Μπορούν να είναι ανεξάρτητα

είναι $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$ $\quad$ τότε τα ξένα θα είναι ανεξ $\iff P(A)P(B) = 0$

$\iff P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$

$A_1, A_2, A_3 \dots$ ακολουθία ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ καλείται ανεξάρτητη όταν κάθε πεπερασμένη επιλογή $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ αποτελείται από ανεξ. ενδ.

$\iff \forall n \geq 2$, τα $A_1, \dots, A_n$ ανεξάρτητα

Άσκηση (εύκολη) $\quad$ Αν τα A_1, A_2 ανεξάρτητα, Νδο

α) τα A_1', A_2 ανεξ.

β) τα A_1, A_2' ανεξ.

(α, β: το ίδιο λένε)

γ) τα A_1', A_2' ανεξ.

α) $P(A_1' \cap A_2) = P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$
$= P(A_2)\{1 - P(A_1)\} = P(A_2)P(A_1')$

<u>Άσκηση</u> A_1, A_2, A_3 ανεξ. τότε α) τα A_1 και $A_2 \cup A_3$ ανεξ.
β) τα A_1 και $A_2 \cap A_3$ ανεξ.
γ) τα A_1 και $A_2 \setminus A_3$ ανεξ.

Παρόμοια για εξεταστική.

β) $P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_1)\underline{P(A_2)P(A_3)} = P(A_1)P(A_2 \cap A_3)$

α) $P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3))$
$= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)$
$= P(A_1)[P(A_2) + P(A_3) - P(A_2)P(A_3)]$
$= P(A_1)[P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)]$
$= P(A_1)P(A_2 \cup A_3)$

γ) $P(A_1 \cap (A_2 \setminus A_3)) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3') = P((A_1 \cap A_2) \setminus A_3)$
$= P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$\overset{\text{ανεξ}}{=} P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_2)P(A_3).$
$= P(A_1)[P(A_2) - P(A_2)P(A_3)]$
$= P(A_1)P(A_2 \setminus A_3)$

<u>Άσκηση</u> Ρίχνω 2 ζάρια. Ποια είναι η δεσμ. πιθανότητα να φέρω 6άρες, δεδομένου ότι έφερα τουλ. ένα 6άρι; $\Omega = \{(i,j), i,j \in \{1,2,\dots,6\}\}$

$A = \{$τα φέρω εξάρες$\}$ $N(\Omega) = 6^2 = 36$

$B = \{$να φέρω τουλ. ένα 6άρι$\}$

Ζητείται η $P(A|B)$

$P(A) = \{(6,6)\}$

$P(B) = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{P(A)}{=} \frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11}$$

Άσκηση Κάποιος ρίχνει συνηθισμένο νόμισμα 3 φορές. Δεδομένου ότι κάποια ρίψη ήρθε Κ, ποια η πιθανότητα τουλ. μία από τις άλλες ρίψεις να ήρθε Κ;

$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3),\ i_1, i_2, i_3 \in \{K, \Gamma\}\}$, $N(\Omega) = 8$

$B = \{\text{τουλ. } 1\ K\} = \Omega \setminus \{(\Gamma,\Gamma,\Gamma)\}$, $P(B) = \frac{7}{8}$

$A = \{\text{τουλ. } 2\ K\} = \{(K,K,K), (K,K,\Gamma), (K,\Gamma,K), (\Gamma,K,K)\}$, $A \subseteq B$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{4/8}{7/8} = \frac{4}{7}$$

Άσκηση

A B Γ

$K = \{\text{κερδίζω αλλάζοντας κουρτίνα}\}$

$A = \{\text{το δώρο στην } A\}$, $B = \{\text{το δώρο στην } B\}$, $\Gamma = \{\text{το δώρο στην } \Gamma\}$.

A, B, Γ ξένα, $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$

$P(A) = P(B) = P(\Gamma) = \frac{1}{3}$

$$P(K) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(A)P(K|A) + P(B)P(K|B) + P(\Gamma)P(K|\Gamma)$$
$$= \frac{1}{3}\Big(\underbrace{P(K|A)}_{0} + \underbrace{P(K|B)}_{1} + \underbrace{P(K|\Gamma)}_{1}\Big) = \frac{2}{3}$$

(επιλέγοντας πρώτο το A)

Άσκηση Δίλημμα Κατάδικου: Τρεις κατάδικοι, οι A, B, Γ, πρόκειται να εκτελεστούν. Αποφασίζεται να δοθεί χάρη σε 2 στην τύχη. Ο A φοβάται να ρωτήσει για τον εαυτό του, και ρωτάει τον φύλακα, "πες μου έναν από τους άλλους δύο που θα ελευθερωθεί" (τον B ή τον Γ). Μετά σκέφτηκε, "καλύτερα να μην μου πεις γιατί αν μάθω π.χ ότι ο B θα ελευθερωθεί, τότε θα έχω πιθανότητα 1/2 από 1/3 που είχα πριν μάθω". Έχει δίκιο;

$B_\varphi = \{\text{ο φύλακας λέει ότι ελευθ. ο } B\}$

$\Gamma_\varphi = \{\quad -//- \quad -//- \quad \text{ο } \Gamma\}$

$A = \{\text{ελευθ. ο } A\}$

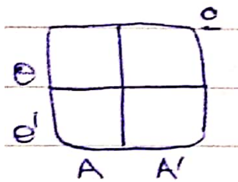
$$P(A|B_\varphi) = \frac{P(A\cap B_\varphi)}{P(B_\varphi)} = \frac{\overset{=1/3}{P(A\cap B)}}{\underset{=1/2}{P(B_\varphi)}} = \frac{2}{3}$$

$$P(B_\varphi) = P(B_\varphi|\{(A,B)\})\,P((A,B)) + P(B_\varphi|(A,\Gamma))\,P((A,\Gamma)) + P(B_\varphi|(B,\Gamma))\,P((B,\Gamma))$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\underset{1}{\underbrace{P(B_\varphi|(A,B))}} + \underset{0}{\underbrace{P(B_\varphi|(A,\Gamma))}} + \underset{1/2}{\underbrace{P(B_\varphi|(B,\Gamma))}}\Big]$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>Άσκηση</u> Σε έναν πληθυσμό, το 0,1% = 1‰ πάσχει από μια ασθένεια. Ένα test ανιχνεύει την ασθένεια σωστά στο 95% των πασχόντων και σωστά το 99% των υγιών. Πάω εγώ και κάνω το τεστ, και μαθαίνω ότι είναι θετικό! Ποιά η πιθανότητα να είμαι ασθενής;



A = {οι ασθενείς} Θ = {αυτοί που το τεστ βγ. θετικό}

A' = {οι υγιείς} Θ' = { -//- αρνητικό}

$$P(A|\Theta) = ? = \frac{P(A\cap\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|A)\,P(A)}{P(\Theta)} = \frac{95/10^5}{1094/10^5} = \frac{95}{1094} < 10\%$$

$P(\Theta) \overset{\text{θολ}}{=} P(\Theta|A)P(A) + P(\Theta|A')P(A')$ $\quad P(\Theta|A) = 0.95 \Rightarrow P(\Theta'|A) = 0.05$

$P(A) = 0{,}001$ $\quad P(\Theta'|A') = 0.99 \Rightarrow P(\Theta|A') = 0.01$

$$\rightarrow P(\Theta) = (0{,}001)(0{,}95) + (0.999)(0.01)$$

$$= \frac{1}{1000}\cdot\frac{95}{100} + \frac{999}{1000}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1094}{10^5}$$

$$P(\Theta|A)P(A) = \frac{1}{1000}\cdot\frac{95}{100} = \frac{95}{10^5}$$