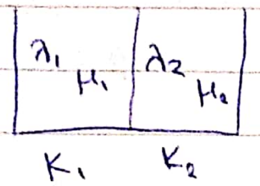
26/10/21 9ο μάθημα

Άσκηση Έχουμε 2 κάλπες, K_1 και K_2. Η K_1 περιέχει λ_1 λευκά και μ_1 μαύρα, η K_2 περιέχει λ_2 λευκά και μ_2 μαύρα.



Διαλέγω ένα σφαιρίδιο από την K_1 στην τύχη και το τοποθετώ στην K_2.

Μετά διαλέγω σφαιρ. από την K_2.

(α) Ποια η πιθ. το τελευταίο σφαιρ. (της K_2) να είναι λευκό;

(β) Δεδομένου ότι το τελευταίο σφ. ήταν λευκό, ποια η πιθανότητα να έχω επιλέξει λευκό από το K_1;

$B = \{$λευκό σφαιρ. από την $K_2\}$

$A_1 = \{$λευκό σφ. από την $K_1\}$

$A_2 = \{$μαύρο σφ. απ' την $K_1\}$

Γνωρίζουμε: $P(A_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}$, $P(A_2) = \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \Omega \supseteq B$

$P(B|A_1) = \frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_2+\mu_2}$, $P(B|A_2) = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\mu_2}$

α) Ζητούμενο: $\boxed{P(B) \overset{\text{θοπ}}{=} P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$

$$P(B) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_2+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\mu_2}$$

$$= \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)+\mu_1\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)(1+\lambda_2+\mu_2)}$$

β) $P(A_1|B) = ?$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_2+\mu_2}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}}{\frac{\lambda_1(1+\lambda_2)+\mu_1\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)(1+\lambda_2+\mu_2)}}$$

$$= \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_2(1+\lambda_2)+\mu_1\lambda_2}$$

Scanned with CamScanner

Ασκ. Σε μια κάλπη περιέχονται σφαιρίδια με τους αριθμούς $1,2,\dots,n$. Διαλέγουμε ένα σφαιρ. στην τύχη και μετά ρίχνω ένα αμερ. νόμισμα τόσες φορές, όσες δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου.

(α) Ποια η πιθ. όλες οι δοκιμές να είναι "Κ",

(β) Δεδ. ότι όλες οι δοκ. ήταν "Κ", ποια η πιθ. να έχει επιλέξει ένα σφαιρ. με τον αρ. j, $j=1,2,\dots,n$.

Αν ρίξω ένα νόμισμα k φορές, η πιθ. να έρθουν όλες οι δοκ "Κ" είναι $\frac{1}{2^k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

$B=\{$όλες οι δοκιμές είναι "Κ"$\}$

$A_i=\{$επέλεξα το σφ. με τον αρ. $i\}$ $i,1,2,\dots,n$

$P(A_i)=\frac{1}{n}$ $,i=1,2,\dots,n$

(α) $P(B) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ $\quad\left(P(B|A_i)=\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)$

$=\frac{1}{n}\,\frac{1}{2}(1+x+\dots+x^{n-1})$

$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1-x^n}{1-2}$

$$\boxed{P(B)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}}$$

(β) Ζητάμε $P(A_j|B)=?$ $(j=1,2,\dots,n)$

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j\frac{1}{n}}{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad,j=1,2,\dots,n$$

$\sum_{j=1}^{n}P(A_j|B)=P(\Omega|B)=1$

$\sum_{j=1}^{n}\frac{(1/2)^j}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$ $\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Άσκ. Ρίχνω ένα συμμ. νόμισμα $n \geq 2$ φορές. Θέτω

$A = \{$το νόμ. έφερε το πολύ 1 "Κ"$\}$

$B = \{$το νόμ. έφερε και τις δύο όψεις (από τουλ. 1 φορά το καθένα)$\}$

Για ποιες τιμές του n είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Υπολογίζω: $P(A) = P(A_0 \cup A_1) \overset{\xi\varepsilon\nu\alpha}{=} P(A_0) + P(A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

$P(B) = 1 - P(B') = 1 - P(\text{όλες "Κ" ή όλες "Γ"})$

$= 1 - P(\text{όλες "Κ"}) - P(\text{όλες "Γ"})$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

($A_0 = \{0$ "Κ"$\}$, $A_1 = \{$ακριβώς 1 "Κ"$\}$)

$P(A \cap B) = P(\text{το πολύ 1 "Κ" και να εμφ. οι 2 όψεις})$

$= P(\text{ακριβ. 1 "Κ"}) = P(A_1) = \frac{n}{2^k}$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A\cap B) &= \frac{n}{2^n} \\ P(A) &= \frac{n+1}{2^n} \\ P(B) &= 1 - \frac{2}{2^n} \end{aligned}}$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)$

$\Leftrightarrow n2^n = (n+1)(2^n - 2)$

$\Leftrightarrow n2^n = n2^n - 2n + 2^n - 2$

$\Leftrightarrow 2n + 2 = 2^n$

$\Leftrightarrow \boxed{2^{n-1} = n+1} \Leftrightarrow A, B$ ανεξ.

$n=2$	$2^1 = 2+1$	$2 = 3$	όχι
$n=3$	$2^2 = 3+1$	$4 = 4$	✓
$n=4$	$2^3 = 4+1$	$8 > 5$	όχι
$n \geq 4 \Rightarrow 2^{n-1} > n+1$		επαγωγή στο n	

Συμπ.: Τα A, B ανεξ. $\Leftrightarrow n = 3$.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χ.π. ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (=τ.μ.) $\circledast$

$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

Ο Ω πολλές φορές είναι περίπλοκος π.χ.: Ρίχνω 5 φορές ένα νόμισμα:

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_5), i_1, \ldots, i_5 \in \{K, \Gamma\}\}$

Ρίχνω n φορές ένα ζάρι:

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n)\, i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$

Στο πρώτο παράδειγμα μπορεί να με ενδιαφέρει ο αριθμός των "Κ" στις 5 δοκιμές

Scanned with CamScanner

$\omega \in \Omega$ Από που με ενδιαφέρει αριθμ. $\Rightarrow$ πραγματική συνάρτηση του ω

$(\Gamma,\Gamma,\Gamma,\Gamma,\Gamma)$ $0 \in \mathbb{R}$ $f: \Omega \to \mathbb{R}$

$f(\omega) \to X(\omega)$

$(K,\Gamma,\Gamma,\Gamma,\Gamma)$ $1 \in \mathbb{R}$

$(\Gamma,K,\Gamma,\Gamma,\Gamma)$ $1 \in \mathbb{R}$

(Γ,Γ,K,K,K) $3 \in \mathbb{R}$

Να ικανοποιείται η συνθήκη: $\boxed{\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\{x : f(x) = y\}$

$\{x : f(x) \leq y\} = f^{-1}((-\infty, y]) \overset{\text{ορ}}{=} f^{-1}(\{y\})$

$B \subseteq \mathbb{R}$ $\{x : f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$

(*) $\{\omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$ = το ίδιο πράγμα.

Ορισμός: Τυχαία μεταβλητή: Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι χ. πιθ. τότε τ.μ. X ονομ. κάθε συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με την προϋπόθεση ότι:

$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος $f : \Omega \to \mathbb{R}$, η f καλείται μετρήσιμη αν $f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Συνάρτηση κατανομής (πιθανότητας)

τμ ή σ.κ.

Ορσ: Για μία τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ορίζουμε συνάρτηση κατανομής της X την $F(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

$F(x) = P(A)$ $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

$0 \leq F(x) \leq 1$

Βασικές Ιδιότητες: (1) Η F αύξουσα

(2) Η F δεξιά συνεχής $\left[\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad (x \to x_0, x > x_0)\right]$

(3) Η F έχει όριο 1 στο $+\infty$. $F(+\infty)=1$ ή $F(\infty)=1$

(4) Η F έχει όριο 0 στο $-\infty$. $F(-\infty)=0$

1) Έστω $x<y \Rightarrow \underbrace{\{\omega: X(\omega)\leq x\}}_{A_x} \subseteq \underbrace{\{\omega: X(\omega)\leq y\}}_{A_y}$

$A_x \subseteq A_y \Rightarrow P(A_x)\leq P(A_y)$ δηλ. $F(x)\leq F(y)$.

$f\uparrow$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{n} f(x_0+\frac{1}{n})$

$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{n} f(x_0-\frac{1}{n})$

$$\lim_{x\to x_0+} F(x) = \lim_n F(x_0+\tfrac{1}{n}) = \lim_n P(A_n) = P(A) = F(x_0)$$

$$A_n = \{\omega: X(\omega)\leq x+\tfrac{1}{n}\} \quad A_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega: X(\omega)\leq x_0\} = A$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \overset{F\uparrow}{=} \lim_n F(n) = \lim_n P(A_n) = P(A) = P(\Omega) = 1$$

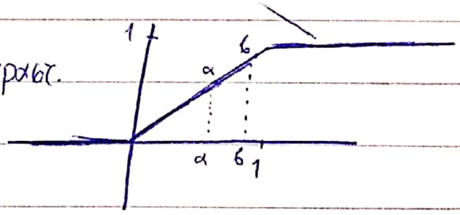
$$A_n = \{\omega: X(\omega)\leq n\} \uparrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_n P(A_n) = P(A) = P(\emptyset) = 0$$

$$A_n = \{\omega: X(\omega)\leq -n\} \downarrow A = \bigcap_{n=1} A_n = \emptyset$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x\leq 0 \\ x & , 0\leq x\leq 1 \\ 1 & , x\geq 1 \end{cases}$$

γρ. παράστ.



ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$

$A=[0,a]$

$P[X\in A] = P[X\leq a] = F(a) = a$

$A=(a,b] \quad 0<a<b<1$

$P(X\in A) = P((X\leq b)\setminus(X\leq a))$

$= P(X\leq b) - P((X\leq a)\cap(X\leq b))$

$= F(b) - F(a) = b-a$ = μήκος $(a,b]$

Θεώρημα Ύπαρξης (του Kolmogorov)

Δοθείσας μια συνάρτηση F που πληρεί τις ιδιότητες (1)-(4), υπάρχει χ.π $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και τ.μ $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $P(X \leq x) = F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Υποδ.</u> $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ((0,1), \mathcal{B}, \lambda)$ $\quad \mathcal{B} = \{\text{μετρ. του } (0,1)\}$
λ = το μήκος

$X(\omega) \stackrel{\text{ορ}}{=} \inf\{x : F(x) \geq \omega\}, \ 0<\omega<1$

$P(X \leq x) = \lambda(\omega \in (0,1) : X(\omega) \leq x) = F(x)$ (F η δοθείσα)

Αν ξέρω την σ.κ. F της X, ξέρω <u>τα πάντα</u> για τα χαρακτηριστικά $X = X(\omega)$ που με ενδιαφέρει. Διότι αποδεικνύεται ότι η γνώση της $F(x), x \in \mathbb{R}$ δηλ. των τιμών $\{P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), x \in \mathbb{R}\}$ καθορίζει όλες τις τιμές $\{P(X \in B), B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}\}$