2/11/21 10ο μάθημα

$F(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$

$F \uparrow$, δεξ. συνεχής, $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$

Παρατήρηση $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $F(x_0-) = P(X < x_0)$

$$F(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} F(x) = \lim_{x \uparrow x_0} F(x)$$

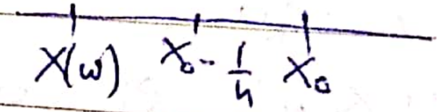
$x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ $\quad x_n \uparrow x_0$

$$F(x_0-) \overset{F \text{ αύξουσα}}{=} \lim_n F(x_0 - \tfrac{1}{n}) = \lim_n P(X \le x_0 - \tfrac{1}{n}) = \lim_n P(A_n)$$

$$A_n = \{X \le x_0 - \tfrac{1}{n}\} = \{w \in \Omega : X(w) \le x_0 - \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$$

$A_n \subseteq A_{n+1}$ $\quad w \in A_n \Rightarrow X(w) \le x_0 - \frac{1}{n} \Rightarrow X(w) \le x_0 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow w \in A_{n+1}$

$$A = \lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : X(w) \le x_0 - \tfrac{1}{n}\} = \{w \in \Omega : X(w) < x_0\}$$



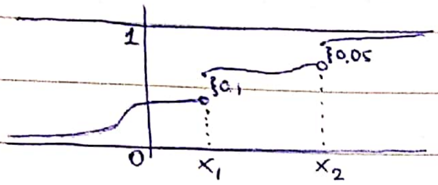

$$F(x_0-) = \lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n) = P(A) = P(X < x_0)$$

| |
|---|
| $P(X < x_0) = F(x_0-)$ |
| $P(X \le x_0) = F(x_0)$ |

$$
\begin{aligned}
P(X=x_0) &= P(\{X\le x_0\}\setminus\{X<x_0\}) \\
&\overset{(\supseteq)}{=} P(\{X\le x_0\}) - P(\{X\le x_0\}\cap\{X<x_0\}) \\
&= P(X\le x_0) - P(X<x_0) \\
&= F(x_0) - F(x_0^-)
\end{aligned}
$$

$P(X=x_0) = F(x_0) - F(x_0-)$ $F$ η σ.κ. της $X$, $x_0\in\mathbb{R}$

<u>Πόρισμα</u>: $P(X=x_0)=0 \Leftrightarrow$ το $x_0$ είναι σ. συνεχείας της $F$

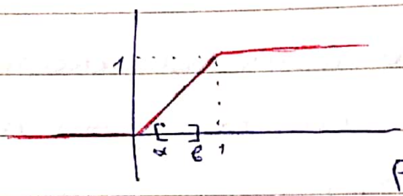



$P(X=x_1) = 0.10$

$P(X=x_2) = 0.05$

$U(0,1)$ $U$ = Uniform = ομοιόμορφη

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}
$$




Επειδή $F$ συνεχής

$\Rightarrow P(X=x_0)=0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$

$P(\alpha\le X\le \beta) = F(\beta)-F(\alpha) = \beta-\alpha$

$$
\begin{aligned}
P(\alpha<X\le\beta) &= P(\{X\le\beta\}\setminus\{X\le\alpha\}) \\
&\overset{(\subseteq)}{=} P(X\le\beta) - P(\{X\le\alpha\}\cap\{X\le\beta\}) \\
&= P(X\le\beta) - P(X\le\alpha) = F(\beta)-F(\alpha)
\end{aligned}
$$

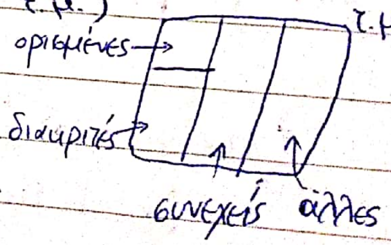
$P(\alpha\le X\le\beta) = F(\beta)-F(\alpha-)$ (1)

$P(\alpha<X<\beta) = F(\beta-)-F(\alpha)$ (2)

$P(\alpha\le X<\beta) = F(\beta^-)-F(\alpha-)$ (3)

Αν η $F$ συνεχής ΟΛΑ ΣΥΜΠΙΠΤΟΥΝ $F(\beta)-F(\alpha)$

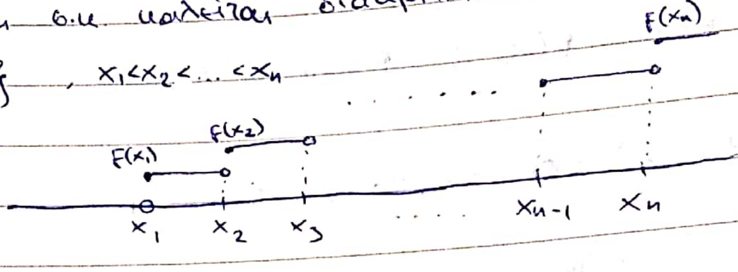
Θα μελετήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές (και τις σ.κ. τους), χωρίζοντάς τες σε 2 υποκατηγορίες (που ΔΕΝ εξαντλούν ΟΛΕΣ τις τ.μ.)



Διακριτές τ.μ. - Διακριτές σ.κ.

Μία τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ $[(\Omega,\mathcal{A},P),\{X\le x\}\in\mathcal{A}\ \forall x\in\mathbb{R}]$ καλείται διακριτή αν υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο $A$ υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $P(X\in A)=1$. Η αντίστοιχη σ.κ. καλείται διακριτή σ.κ.

π.χ. $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $x_1<x_2<\dots<x_n$




$P(X\in(-\infty,x_1))=0$ (1)

$P(X\in(x_1,x_2))=0$ (2)

$P(X\in(x_2,x_3))=0$

$\vdots$

$P(X\in(x_{n-1},x_n))=0$ (n)

$P(X>x_n)=0$

$P(X\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\})=0$

(1). $F(x_1-)=0$

$\Rightarrow F(x)=0\quad\forall x<x_1$

(2) $F(x_2-)-F(x_1)=0$

$F(x_2-)=F(x_1)$

Μία σταθερή κατά τμήματα δ. συνεχής συνάρτηση, που τα μόνα σημεία αλμάτων είναι τα σημεία του συνόλου $A$

$P_1=F(x_1)-F(x_1-)=P(X=x_1)$

$P_2=F(x_2)-F(x_2-)=P(X=x_2)$

$p_i=P(X=x_i)$

$P_1+P_2+\dots+P_n=P(X\in\{x_1,x_2,\dots,x_n\})=P(X\in A)=1$

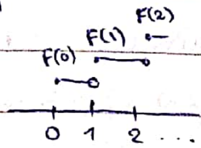
Μία τ.μ. $X$ είναι διακριτή αν και μόνο αν η σ.κ. της $F$ αυξάνει μόνο με άλματα. Τα σημεία των αλμάτων δηλ. τα σημεία $x_i$ που $F(x_i)>F(x_i-)$ απαρτίζουν το αριθμήσιμο σύνολο $A$ για το οποίο $P(X\in A)=1$

Τα ύψη των αλμάτων, $p_i=F(x_i)-F(x_i-)$

$=P(X=x_i)$

και αθροίζουν στο 1, $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$

$F(i-)=F(i-1)\quad\forall i\in\mathbb{N}$




$\boxed{P(X=i)=F(i)-F(i-1)}$ (*)

$\sum_{i=0}^{k}P(X=i)=P\left(\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i\}\right)=P(X\in\{0,1,\dots,k\})$

$A_i=\{X=i\}$ ξένα

$=P(\{X\le k\}\cap\underbrace{\{X\in\mathbb{N}\}}_{B})+\cancelto{0}{P(\{X\le k\}\cap\{X\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\})}$

$P(A\cap B) = P(A)$ όπου $P(B)=1 \Rightarrow P(B^c)=0$

$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ $\quad (P(A\cap B^c)\le P(B^c)=0)$

$P(A) = P(A\cap B) + \cancelto{0}{P(A\cap B^c)}$

$$\sum_{i=0}^{k} P(X=i) = P(X\le k),\ k\in\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$$

$x>0$ όχι φυσικός

$$F(x) \overset{op}{=} P(X\le x) = P(\underbrace{\{X\le x\}\cap\{X\in\mathbb{N}\}}) + \cancelto{0}{P(\{X\le x\}\cap\{X\in\mathbb{R}\})}$$

([x]: ακέραιο μέρος του x)

$$\{X\le x\}\cap\{X\in\mathbb{N}\} = \{X\in\{0,1,\dots,[x]\}\}$$

$$F(x) = P(X\in\{0,1,\dots,[x]\})$$
$$= \sum_{i=0}^{[x]} P(X=i) \qquad x\ge 0$$

$F(x) = \sum_{i\le x} P(X=i)$, $x\in\mathbb{R}$ όταν η X είναι διακριτή με τιμές στο N.

Ορσ. • Συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) διακριτής τ.μ. X με τιμές στο N.
Είναι η συνάρτηση $\boxed{f(x)=P(X=x),\ x\in\mathbb{N}}$ (εύκολη)

$$F(y) = \sum_{i\le y} f(i) = \sum_{x\le y} f(x)$$

$$\boxed{F(y)=\sum_{x\le y} f(x)} \qquad \boxed{F(x)-F(x-1)=f(x),\ x\in\mathbb{N}}$$

∀ σ.π. f ικανοποιεί 2 ιδιότητες:

(i) $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{N}$

(ii) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \left[\lim_{y\to\infty}\sum_{x=0}^{y} f(x) = \lim_{y\to\infty} F(y) = F(\infty)=1\right]$

$f(x)=P(X=x)$ : $\sum_{x=0}^{\infty} f(x)=1$

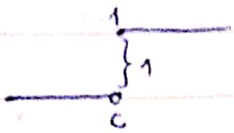
παραδείγματα Εκφυλισμένη τ.μ. $P(X=c)=1$ για κάποιο $c\in\mathbb{R}$

$A=\{c\}$ $\quad P(X=c)=P(X\in A)=1$

σ.π. $f(x) = \begin{cases} 1, & x=c \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} = 1,\ x\in\{c\}$

$f\ge 0$, $\sum f(x) = \sum_{x=c} f(x) = f(c)=1$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$$




Διακριτή που παίρνει 2 τιμές

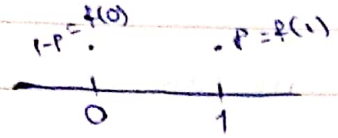
$X(K) = 1$

$X(\Gamma) = 0$ $\quad \Omega = \{K, \Gamma\}$ $\quad P(X \in \{0,1\}) = 1$

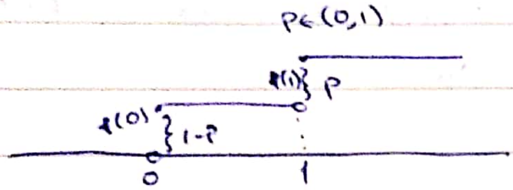
$\Rightarrow X$ διακρ. με 2 τιμές τις 0, 1.

$f(x) = P(X = x)$, $x = 0$ και $x = 1$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= P(X=1) = p \\ f(0) &= 1-p \end{aligned}\right\} \boxed{f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \ x \in \{0,1\}}$$




$f \ge 0$ και $\sum_x f(x) = f(0) + f(1) = (1-p) + p = 1$




$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & x \in [0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$f(x) = F(x) - F(x-1)$, $x = 0, 1, \dots$

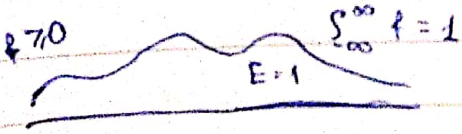
$f(0) = F(0) - F(-1) = (1-p) - 0 = 1-p$

$f(1) = F(1) - F(0) = 1 - (1-p) = p$

Συνεχής τ.μ. (= απόλυτα συνεχής τ.μ.) καλείται μια τ.μ. όταν υπάρχει μία συνάρτηση $f \ge 0$ με $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ τέτοια ώστε η σ.κ. $F$ της τ.μ. $X$ να δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \ x \in \mathbb{R}}$$

Η $f$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σ.π.π. ή απλά πυκνότητα (πιθανότητας)




π.χ. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases} \ge 0$

Scanned with CamScanner

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad , x \in \mathbb{R}$$

Αν $x \leq 0$ $\quad f(t) = 0$ για $t \leq x$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Αν $x \in [0,1]$ $\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + t\Big|_{0}^{x} = 0 + x + 0 = x$$

$$x \geq 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} 1 + \int_{1}^{x} 0 = \int_{0}^{1} 1 = 1$$