Άσκηση 1

(Α1) Να λυθεί το ΠΑΤ: $\dot{y} = Ay$, $y(0) = y_0$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -5 & \lambda+3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow (\lambda+4)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$$

Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1 = -4: \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow y + 5x = 0 \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow x = y \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $A = U\Lambda U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{6}$$

$$y(t) = e^{At}y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{2t} \\ -5e^{-4t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(7e^{2t} - e^{-4t}) \\ \frac{1}{6}(7e^{2t} + 5e^{-4t}) \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7e^{2t} - e^{-4t} \\ 7e^{2t} + 5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

(A2) Δείξτε ότι ο πίνακας $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$, $t>0$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \underline{y}(t) := A(t)\,\underline{y}(t)$$

Λύση : Αρχικά να δείξουμε ότι $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$, $t>0$.

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}.$$

$$A(t)\,\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}.$$

Άρα $\Phi' = A\Phi$ και ο Φ είναι θ.π.λ. αφού οι δύο στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$W[\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}](t) = \det \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \frac{2}{t} \neq 0, \quad t>0$$

(A3) Έστω $\underline{y} = A\underline{x}$ γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον (σταθερό) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, δηλ. $A(E) \subseteq E$. Έστω το σύστημα: $\underline{z}' = A\underline{z}$, $\underline{z}(0) = \underline{z_0}$. Δείξτε ότι αν $\underline{z_0} \in E$ τότε $\underline{z}(t) \in E$ γιά κάθε $t \geq 0$.

Λύση : Η λύση του ΠΑΤ είναι $\underline{z}(t) = e^{At}\underline{z_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{z}(t) = \left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \right] \underline{z_0}$. Εφόσον $\underline{z_0} \in E$

έχουμε $A\underline{z_0} \in E$, $A^2\underline{z_0} = A(A\underline{z_0}) \in E$ και γενικά $A^k\underline{z_0} \in E$, $k \in \mathbb{N}_0$

Άρα $\underline{z}(t) \in E$ $\forall t \geq 0$.

A4 Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $e^{(A+B)t}=e^{At}\cdot e^{Bt}$ ~~αν~~ γιά κάθε $t\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $AB=BA$

<u>Λύση:</u>

Έστω $\Phi(t)=e^{(A+B)t}e^{-Bt}e^{-At}$. Παραγωγίζοντας:

$$\Phi'(t)=e^{(A+B)t}(A+B)e^{-Bt}e^{-At}+e^{(A+B)t}(-B)e^{-Bt}e^{-At}$$

$$+\,e^{(A+B)t}e^{-Bt}(-A)e^{-At}$$

$$=e^{(A+B)t}\left((A+\cancel{B})e^{-Bt}-\cancel{B}e^{-Bt}-e^{-Bt}A\right)e^{-At}$$

$$=e^{(A+B)t}\left(Ae^{-Bt}-e^{-Bt}A\right)e^{-At}$$

Όμως $Ae^{-Bt}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kB^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kAB^k}{k!}$

και εφόσον $AB=BA$ έχουμε $AB^k=B^kA$ γιά κάθε $k\in\mathbb{N}_0$.
Άρα $Ae^{-Bt}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kB^k}{k!}\right)A=e^{-Bt}A$ και άρα $\Phi'(t)=0$

$$\Phi'(t)=0\Rightarrow\Phi(t)=C=\Phi(t)\big|_{t=0}=I_n.\ \text{Άρα}$$

$$\Phi(t)=e^{(A+B)t}e^{-Bt}e^{-At}=I_n\Rightarrow e^{(A+B)t}e^{-Bt}=e^{At}$$

$$\Rightarrow e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}\ \left(=e^{Bt}e^{At}\right).$$

Αντίστροφα αν $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$ γιά κάθε t, τότε

$$\left(e^{(A+B)t}\right)''\Big|_{t=0}=\cancel{\left(e^{At}\right)'\Big|_{t=0}\left(e^{Bt}\right)'}\ \left(e^{At}e^{Bt}\right)''\Big|_{t=0}$$

Έχουμε $\left(e^{(A+B)t}\right)'=(A+B)e^{(A+B)t}$, $\left(e^{(A+B)t}\right)''=(A+B)^2e^{(A+B)t}$

Επίσης:

$$(e^{At}e^{Bt})' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

$$(e^{At}e^{Bt})'' = A^2e^{At}e^{Bt} + Ae^{At}Be^{Bt} + Ae^{At}Be^{Bt} + e^{At}B^2e^{Bt}$$

$$\Rightarrow (e^{At}e^{Bt})''|_{t=0} = A^2 + 2AB + B^2 = (e^{At}e^{Bt})''|_{t=0} =$$

$$= (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

και επομένως $2AB = AB + BA \Rightarrow AB = BA$.

(A5) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_3 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}$$

<u>Λύση</u>:

Γράφουμε $\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} := A\underline{x}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda+1) - 0\right] + 2(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$$

Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα ο πίνακας διαγωνιοποιείται:
Ιδιοδιανύσματα

$$\lambda_1=1: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow z=0,\ x=y, \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=i: \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 2 \\ 0 & i-1 & 0 \\ -1 & 1 & i+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow y=0,\ x=(i+1)z, \quad u_2 = \begin{bmatrix} i+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(και $\lambda_3=-i$, $\underline{u}_3 = \bar{\underline{u}}_2$). Γράφουμε

$$e^{At} = \underbrace{\left[\underline{u}_1 \,|\, Re(\underline{u}_2) \,\ Im(\underline{u}_2)\right]}_{\mathcal{U}} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \underbrace{\left[\ \cdot\ \right]^{-1}}_{\mathcal{U}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = e^{At}\hat{\underline{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\underline{c} = \mathcal{U}^{-1}\hat{\underline{c}}} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t & \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ e^t & 0 & \cancel{\sin t}\ 0 \\ 0 & \cos t & \cancel{0}\ \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cancel{\sin t}\ 0 \\ \cancel{0}\ \sin t \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2+c_3 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} c_3 \cancel{-c_2} \\ \cancel{c_3} \\ \cancel{0}\ c_3 \end{bmatrix} \sin t. \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

A6 Έστω τό σύστημα $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$. (i) Νά βρεθεί η γενική λύση του συστήματος. (ii) Νά προσδιοριστεί τό σύνολο αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις νά τείνουν στο $\underline{0}$ καθώς $t \to +\infty$.

Λύση

$x_1' = x_1 \Rightarrow x_1 = c_1 e^{t}$, $x_2' = -x_1 - x_2 \Rightarrow x_2' + x_2 = -c_1 e^{+t}$

Γενική λύση ομογενούς $x_{2,o\mu} = c_2 e^{-t}$, $x_{2,pi} = \beta e^{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{2,pi}' + x_{2,pi} = 2\beta e^{t} = -c_1 e^{t} \Rightarrow \beta = -\frac{c_1}{2}$.

Άρα γενική λύση: $x_2(t) = c_2 e^{-t} - \frac{c_1}{2} e^{t}$, $x_1 = c_1 e^{t}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to 0$ αν καί μόνο αν $c_1 = 0$, δηλ. $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{c}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A7 Έστω $\Phi(t)$ ο θ.π.λ. της $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}(t)$. Δείξτε ότι η γενική λύση της $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$ είναι $\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt$.

Λύση

Εφαρμόζουμε την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων καί επιζητούμε λύση της μορφής $\underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{x}(t)$. Τότε

$$\underline{y}' = \Phi'\underline{x} + \Phi\underline{x}' = A\underline{y} + \underline{b} \Rightarrow \cancel{A\Phi\underline{x}} + \Phi\underline{x}' = \cancel{A\Phi\underline{x}} + \underline{b}$$

$$\Rightarrow \cancel{\underline{x}' = \Phi^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int}$$

$$\Rightarrow \Phi\underline{x}' = \underline{b} \Rightarrow \underline{x}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{c} + \int \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt \quad , \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

A8 Νά βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $t^2x''-2x=0$, $(t>0)$, της μορφής $x(t)=t^p$. Μέ την χρήση αυτών των λύσεων νά βρεθεί η γενική λύση της ~~$t^2x''-2x=t^2$~~ ~~$(t>0)$~~. εξίσωσης

$$\underline{y}'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2t^{-2} & 0\end{pmatrix}\underline{y}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Λύση:

$$x(t)=t^p \Rightarrow x'=pt^{p-1} \Rightarrow x''=p(p-1)t^{p-2}.$$ Αρα·

$$t^2\left[p(p-1)t^{p-2}\right]-2t^p=0 \Rightarrow (p^2-p-2)t^p=0$$

$$\Rightarrow (p-2)(p+1)=0 \Rightarrow p_1=2,\ p_2=-1.$$

Αρα εχουμε δύο γραμμικά-ανεξάρτητα λύσεις $\{t^2, t^{-1}\}$ στό $(0,\infty)$. Ορίζοντας $y_1=x$ καί $y_2=x'$ η εξίσωση γράφεται

$$\begin{bmatrix}x'\\ x''\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}}_{\underline{y}'}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2t^{-2} & 0\end{bmatrix}}_{A(t)}\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Εφόσον η δ.ε. έχει δύο λύσεις (γραμ. ανεξάρτητες) $x_1=t^2$ καί $x_2=t^{-1}$ ενας θ.π.λ. του συστήματος είναι:

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t^{-1}\\ 2t & -t^{-2}\end{bmatrix} \qquad (t>0).$$

Από την A7 η γενική λύση του συστήματος $\underline{y}'=A\underline{y}+\underline{b}$ είναι:

$$\underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt$$

Έχουμε: $\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-2} & t^{-1} \\ 2t & -t^{2} \end{bmatrix}.$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(t)\,\underline{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-2} & t^{-1} \\ 2t & -t^{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-1} \\ -t^{2} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \int \Phi^{-1}(t)\,\underline{b}\,dt = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \int t^{-1}dt \\ -\int t^{2}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \ln(t) \\ -\frac{t^3}{3} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ln(t) \\ -\frac{1}{9}t^3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ln(t) \\ -\frac{1}{9}t^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1t^2 + c_2t^{-1} + \frac{1}{3}t^2\ln(t) - \frac{1}{9}t^2 \\ 2c_1t - c_2t^{-2} + \frac{2}{3}t\ln(t) + \frac{1}{9}t \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \left(c_1 - \frac{1}{9}\right)t^2 + c_2t^{-1} + \frac{1}{3}t^2\ln(t) \\ \left(2c_1 + \frac{1}{9}\right)t - c_2t^{-2} + \frac{2}{3}t\ln(t) \end{bmatrix}.$$

(A9) Έστω σύστημα Σ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (σταθερός). Το σύστημα Σ': $\underline{x}' = -A^T\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ονομάζεται συζυγές του Σ. Δείξτε ότι αν $\underline{\varphi}(t)$ και $\underline{\psi}(t)$ οι λύσεις των Σ και Σ' αντίστοιχα, τότε $\underline{\psi}^T(t)\,\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0^T\underline{y}_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

Λύση: $\underline{\varphi}(t) = e^{At}\underline{y}_0$, $\underline{\psi}(t) = e^{-A^Tt}\underline{x}_0$ και επομένως

$$\underline{\psi}^T(t)\,\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0^T\left(e^{-A^Tt}\right)^T e^{At}\underline{y}_0 = \underline{x}_0^T e^{-At}e^{At}\underline{y}_0 =$$

$$= \underline{x}_0^T\underline{y}_0.$$

A12 Έστω το σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}(t)$ όπου f συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει 2π-περιοδική λύσεις αν και μόνο αν

$$\int_0^{2\pi} \underline{x}^T(t)\, \underline{f}(t)\, dt = 0$$

για κάθε 2π-περιοδική λύση $\underline{x}(t)$ του συζυγούς συστήματος $\underline{x}' = -A^T \underline{x}(t)$.

<u>Λύση</u> :

Η λύση του ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ είναι:

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \underline{f}(s)\, ds$$

Εφόσον f είναι 2π-περιοδική συνάρτηση, η $y(t)$ είναι 2π περιοδική αν και μόνο αν $y(2\pi) = y(0)$, δηλ.

$$y(2\pi) = e^{A2\pi}\underline{y}_0 + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} \underline{f}(s)\, ds = \underline{y}_0$$

$$\Rightarrow (I - e^{2\pi A})\underline{y}_0 = e^{2\pi A}\int_0^{2\pi} e^{-As} \underline{f}(s)\, ds.$$

$$\Rightarrow e^{-2\pi A}(I_n - e^{2\pi A})\underline{y}_0 = \int_0^{2\pi} e^{-As} \underline{f}(s)\, ds$$

$$\Rightarrow -\underbrace{(I_n - e^{-2\pi A})}_{B}\underline{y}_0 = \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-As} \underline{f}(s)\, ds}_{\beta}. \quad (*)$$

Η λύση του (αυτόνομου) συζυγούς συστήματος είναι 2π περιοδική αν

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 \Rightarrow x(2\pi) = e^{2\pi A}x_0 = x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x}_0 = e^{-2\pi A}\underline{x}_0 \Rightarrow \underbrace{(I - e^{-2\pi A})}_{B}\underline{x}_0 = \underline{0}.$$

Η εξίσωση (*) έχει λύση ως προς $\underline{y_0}$ αν και μόνο αν

$$\underline{\beta} \in Range(B) = Ker(B^{T})^{\perp}$$

Ενώ αρχικές συνθήκες $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουν περιοδική λύσεις γιά τό συζυγές σύστημα αν και μόνο αν $\underline{x_0} \in Ker(B)$.

Άρα τό σύστημα (*) έχει 2π-περιοδικές λύσεις αν και μόνο αν $\underline{x_0}^T \underline{\beta} = 0$ γιά κάθε αρχική συνθήκη $\underline{x_0}$ πού δημιουργεί 2π-περιοδικές λύσεις στό συζυγή σύστημα, δηλ αν και μόνο αν

$$\underline{x_0}^T \int_0^{2\pi} e^{-As} \underline{f}(s)\, ds = 0 \qquad \forall \underline{x_0} \in Ker(B)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \underline{x_0}^T e^{-As} \underline{f}(s)\, ds = 0 \qquad ''$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left(e^{-A^T s} \underline{x_0}\right)^T \underline{f}(s)\, ds = 0 \qquad ''$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \underline{\psi}^T(s)\, \underline{f}(s) = 0 \qquad \forall\, \underline{\psi}(t)\ 2\pi\text{-περιοδική λύση του συζυγούς.}$$

(A 11) Δείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = -G(t,\tau) A(\tau)$ όπου $G(t,\tau)$ είναι ο πίνακας μεταφοράς που αντιστοιχεί στό σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ καί $A = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μέ $a_{ij}(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στό διάστημα $I = (\alpha, \beta)$.

Λύση

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[G(t,\tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\right]$$ όπου $\Phi(t)$ θ.π.λ του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Έχουμε: $\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau) + \Phi(\tau)\left(\Phi^{-1}(\tau)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \left(\Phi^{-1}(\tau)\right)' = -\Phi^{-1}(\tau)\Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau)$$

Άρα $\frac{\partial}{\partial \tau}\left[G(t,\tau)\right] = -\underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)}\Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau)$

$$= -G(t,\tau)A(\tau)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = -G(t,\tau)A(\tau).$$

A12. Έστω τό σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$ όπου a_{ij} είναι συνεχείς συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τόν μετασχηματισμό: $\underline{x}(t) = P(t)\underline{y}(t)$ όπου $P = [P_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $P_{ij}(t)$ συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι P^{-1} είναι καλά ορισμένος γιά κάθε $t\in\mathbb{R}$ καί ότι $P^{-1} = [\hat{P}_{ij}]$ όπου $\hat{P}_{ij}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. (i) Δείξτε ότι $\underline{x}' = \tilde{A}(t)\underline{x}$ όπου $\tilde{A}(t) = (P' + PA)P^{-1}$. (ii) Αν $\tilde{G}(t,t_0)$ η συνάρτηση μεταφοράς πού αντιστοιχεί στό $\underline{x}' = \tilde{A}\underline{x}$, δείξτε ότι $\tilde{G}(t,t_0) = P(t)G(t,t_0)P^{-1}(t_0)$.

<u>Λύση:</u>

$$\underline{x}(t) = P(t)\underline{y}(t) \Rightarrow \underline{x}'(t) = P'(t)\underline{y}(t) + P(t)\underline{y}'(t) =$$

$$= P'P^{-1}\underline{x} + PAP^{-1}\underline{x}$$

$$\Rightarrow \underline{x}'(t) = \left(P'(t) + P(t)A(t)\right)P^{-1}(t)\,\underline{x}(t)$$

$$:= \tilde{A}(t)\,\underline{x}(t).$$

Επίσης:

$$\underline{x}(t) = \tilde{G}(t,t_0)\underline{x}(t_0) = P(t)G(t,t_0)\underline{y}(t_0) = P(t)G(t,t_0)P^{-1}(t_0)\underline{x}(t_0)$$

Επόμενον $\underline{x}(t) = P(t)G(t,t_0)P^{-1}(t_0)\underline{x}(t_0)$, $\tilde{G}(t,t_0) = P(t)G(t,t_0)\cdot$
$\cdot P^{-1}(t_0).$

A13 Είναι ο $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & e^t \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ θ.π.λ γιά σύστημα $\underline{x}' = A\underline{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (~~σταθερός πίνακας~~);

<u>Λύση</u>:

Αν ο $\Phi(t)$ ήταν θ.π.λ του $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ γιά κάποιον $A(t)$ θά είχαμε: $\Phi' = A\Phi$. Στήν συγκεκριμένη περίπτωση

$$\Phi'(t) - A(t)\Phi(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - t\,a_{11}(t) - 2a_{12}(t) & e^t - e^t a_{11}(t) \\ -a_{21}(t)\cdot t - 2a_{22}(t) & -a_{21}(t)\cdot e^t \end{bmatrix} = 0.$$

$(2,2) = 0 \Rightarrow a_{21}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$

$(2,1) = 0 \Rightarrow \cancel{t}\, a_{22}(t) = 0$ ~~$\Rightarrow a_{21}(t) = 0 \ \forall t \in I$ (στην περίπτωση που $0 \in I$ έχουμε $a_{21}(0)$ λόγω συνέχειας~~).

$(1,2) = 0 \Rightarrow a_{11}(t) = 1 \quad \forall t \in I.$

$(1,1) = 0 \Rightarrow a_{12}(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \quad t \in I.$

Άρα ο ~~$\Phi(t) =$~~ $A(t) = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{1}{2} - \frac{t}{2}}\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

καί οι εξισώσεις θά ήταν της μορφής

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \tfrac{1}{2}(1-t)\,y_2 \\ y_2' &= 0 \Rightarrow y_2 = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_1' - y_1 &= \frac{c}{2} - \frac{ct}{2} \\ y_1' - y_1 &= c_1 - c_1 t \end{aligned}$$

$$y_1 = \alpha e^t + \beta t + \gamma \Rightarrow y_1' - y_1 = \cancel{\alpha e^t} + \beta - (\cancel{\alpha e^t} + \beta t + \gamma) = c_1 - c_1 t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\beta + \gamma}_{c_1} - \underbrace{\beta}_{c_1} t = c_1 - c_1 t \Rightarrow \beta = c_1 , \gamma = 0$$

Άρα η γενική λύση : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t + c_1 t \\ 2c_1 \end{pmatrix}$ όπου $\alpha, c_1 \in \mathbb{R}$

Στην περίπτωση που ο A είναι σταθερός πίνακας ο $\Phi(t)$ δεν μπορεί να είναι θ.π.λ.

A14 Έστω σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$ όπου a_{ij} είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το συζυγές σύστημα $\underline{z}' = -A^T(t)\underline{z}$. Έστω $G(t,t_0)$ και $\hat{G}(t,t_0)$ οι αντίστοιχοι πίνακες μεταφοράς. Δείξτε ότι $\hat{G}(t,t_0) = G^T(t_0,t)$.

<u>Λύση:</u>

Έστω $Y(t) = G^T(t,t_0)\,\hat{G}(t,t_0)$. Τότε:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= [G^T(t,t_0)]'\,\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)\,\hat{G}'(t,t_0) \\ &= [G'(t,t_0)]^T\,\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)\,\hat{G}'(t,t_0) \\ &= [A(t)G(t,t_0)]^T\,\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)\,[-A^T(t)\,\hat{G}(t,t_0)] \\ &= G^T(t,t_0)\,A^T(t)\,\hat{G}(t,t_0) - G^T(t,t_0)\,A^T(t)\,\hat{G}(t,t_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(t) = G^T(t,t_0)\,\hat{G}(t,t_0)\big|_{t=t_0} = I_n \Rightarrow \hat{G}(t,t_0) = G^{-T}(t,t_0)$$

$$\Rightarrow \hat{G}(t,t_0) = G^T(t_0,t).$$

(A15) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι η σειρά $(e^{At})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)_{ij}\, t^k/k!$ συγκλίνει (απολύτως) για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Έστω $m = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Δείξτε (π.χ. επαγωγικά) ότι $|(A^k)_{ij}| \leq \frac{1}{n}(mn)^k$.

Λύση:

Έχουμε $$|(A^2)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|a_{kj}|$$

$$\leq nm^2 = \frac{(nm)^2}{n}$$

Παρόμοια:
$$|(A^3)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^2)_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|a_{ik}|}_{\leq m}\cdot \underbrace{|(A^2)_{kj}|}_{\leq nm^2}$$

$$\leq n^2m^3 = \frac{(nm)^3}{n}$$

και γενικά (π.χ. με επαγωγή)

$$|(A^k)_{ij}| \leq \frac{(nm)^k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Άρα,
$$\left|\sum_{k=0}^{p} (A^k)_{ij}\frac{t^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{p} |(A^k)_{ij}|\frac{|t|^k}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \frac{|t|^k n^k m^k}{n\,k!} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k(nm)^k}{k!} =$$

$$= \frac{1}{n} e^{|t|nm}$$

Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη (για κάθε t) και άρα συγκλίνει καθώς $p \to \infty$.

(A16) Εστω η εξίσωση: $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$, όπου $a_1(t), a_0(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Εστω οτι $y_1(t)$ είναι μία λύση της εξίσωσης στο διάστημα I και οτι $y(t) \neq 0$, $t \in I$. Εστω $y_2(t) = v(t) y_1(t)$ οπου $v \in C^2(I)$. Δείξτε ότι y_2 είναι επίσης λύση της εξίσωσης στο I, όπου

$$y_2(t) = y_1(t) \int y_1^{-2}(t) \cdot \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt$$

και οτι (y_1, y_2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

βρείτε εναν θεμελιώδη πίνακα λύσεων (θ.π.λ) του συστήματος $\underline{z}' = A(t)\,\underline{z}$

<u>Λύση:</u>

Έστω y_1 λύση της εξίσωσης και $y_2 = v y_1$. Αν y_2 επίσης λύση, τότε $y_2 = v y_1 \Rightarrow y_2' = v' y_1 + v y_1' \Rightarrow y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$ και αρα:

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + \cancel{v y_1''} + a_1(v' y_1 + \cancel{v y_1'}) + \cancel{a_0 v y_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v'' y_1 + (2y_1' + a_1 y_1) v' = 0 \text{ . Θέτοντας } v' = u$$

$$\Rightarrow \quad u' y_1 + (2y_1' + a_1 y) u = 0$$

$$\Rightarrow \quad u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) u = 0.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \exp\left\{\int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(t)\right) dt\right\}$

Τότε: $\mu u' + \mu\left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1\right)u = 0 \Rightarrow (\mu u)' = 0$

$$\Rightarrow \mu u = c_1 \Rightarrow u = c_1 \mu^{-1} = c_1 \exp\left\{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right)dt\right\}$$

Έχουμε: $\int \frac{2y_1'}{y_1}\,dt = 2\ln|y_1| = \ln(y_1^2)$ και άρα

$$u = c_1 y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)\,dt\right\}.$$

$$\Rightarrow \cancel{y_2} = v = c_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)\,dt\right\} dt + c_2, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_2 = c_1 y_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)\,dt\right\} dt + c_2 y_2$$

Άρα δύο (γραμμικά ανεξάρτητες) λύσεις είναι:

$$\left(y_1,\ y_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)\,dt\right\} dt \right).$$

Έστω $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, τότε $\begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$.

Και αν $\underline{x} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ τότε $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ και επομένως ένας θ.π.λ. είναι ο:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)\,dt\right\} \cdot dt \\ y_1' & y_1' \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1\,dt\right\} dt + y_1^{-1} \exp\left\{-\int a_1\,dt\right\} \end{bmatrix}$$

Η γραμμική ανεξαρτησία πε επιβεβαιώνεται και από την ορίζουσα Wronski:

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= y_1 y_1' \int y_1^{-2} \exp\left(\cancel{-\int a_1\,dt}\right) dt + \exp\left(-\int a_1\,dt\right) \\ &\quad - y_1 y_1' \int y_1^{-2} \cancel{\exp}\left(-\int a_1\,dt\right) dt \\ &= \exp\left(-\int a_1\,dt\right) \neq 0. \end{aligned}$$

A17 Δείξτε ότι $\varphi_1(t) = te^{t^2}$ είναι λύση της δ.ε.
$x'' - 4tx' + (4t^2-2)x = 0$ και βρείτε την λύση πού ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$.
Επομένως νά βρεθεί ~~x~~ η λύση του ΠΑΤ: $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2-4t^2 & 4t \end{pmatrix}\underline{y}$, $\underline{y}(1) = \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix}$

<u>Λύση</u>

$$\varphi_1 = te^{t^2} \Rightarrow \varphi_1' = e^{t^2} + 2t^2e^{t^2}, \quad \varphi_1'' = 2te^{t^2} + 4te^{t^2} + 4t^3e^{t^2}$$

Μέ αντικατάσταση: $\varphi_1'' - 4\varphi_1' + (4t^2-2)\varphi_1 =$
$$= \left[(6t+4t^3) - 4t(1+2t^2) + (4t^2-2)t\right]e^{t^2} = 0.$$

Επιζητούμε λύση της μορφής $\varphi_2 = v(t)e^{t^2}$ σέ διάστημα I, $0 \notin I$, ~~της μορφής φ_2~~. Από την A16 έχουμε

$$\varphi_2(t) = te^{t^2}\int t^{-2}e^{-2t^2}e^{\int 4t\,dt}dt = te^{t^2}\int t^{-2}e^{-2t^2}e^{2t^2}dt$$

$$= te^{t^2}\int t^{-2}dt = te^{t^2}\frac{t^{-1}}{-1} = -e^{t^2}$$

Αρα δύο γραμ.ανεξάρτητες λύσεις είναι (e^{t^2}, te^{t^2}).

Τό σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ έχει θ.π.λ.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2} & te^{t^2} \\ 2te^{t^2} & e^{t^2} + 2t^2e^{t^2} \end{bmatrix}.$$

$$\Phi(1) = \begin{bmatrix} e & e \\ 2e & 3e \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\Phi^{-1}(1) = \frac{1}{e}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G(t,1) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(1) =$$

$$= \frac{1}{e}\begin{bmatrix} e^{t^2} & te^{t^2} \\ 2te^{t^2} & (1+2t^2)e^{t^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ 2e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t^2} & te^{t^2} \\ 2te^{t^2} & (1+2t^2)e^{t^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t^2} \\ 2te^{t^2} \end{bmatrix}.$$

A18 Νά λυθεί τό ΠΑΤ: $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \underline{0}$

<u>Λύση</u>:

Η λύση είναι της μορφής: $\underline{y}(t) = \cancel{e^{At}\underline{y}_0}^{\,0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,\underline{b}\,dt$

Έχουμε: $e^{At} = e^t\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix}$

Επομένως:

$$e^{A(t-\tau)}\,\underline{b} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

και:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{t-\tau}d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\int_0^t e^{-\tau}d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t\left[e^{-\tau}\right]_t^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(1-e^{-t}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t-1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(A19) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σε μορφή companion, δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

<u>Λύση:</u> Επαγωγικά. Αν $n=2$: $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}$

και $\varphi_2(\lambda) = \lambda(\lambda + a_1) + a_0 = \lambda^2 + \lambda a_1 + a_0$.

Έστω ότι για πίνακα $A_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & \cdots & \cdots & - & a_{n-1} \end{bmatrix}$, $\lambda I - A_{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ a_1 & & & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$

$\varphi_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1$. Τότε για πίνακα

$$\lambda I - A_n = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & -1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \varphi_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη:

$$\varphi_n(\lambda) = \lambda \det(\lambda I_{n-1} - A_{n-1}) + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} a_0 =$$
$$= \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1) + a_0 = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

(A20) Δείξτε ότι υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$ έτσι ώστε $Q^{-1}AQ = A_c$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας σε μορφή companion,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

αν και μόνο αν υπάρχει $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\det(\Gamma) \neq 0$ όπου $\Gamma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Gamma = [\underline{\beta} \; A\underline{\beta} \cdots A^{n-1}\underline{\beta}]$.

<u>Λύση</u>

Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q = [\underline{q}_1 \; \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n]$. Έστω ότι $AQ = QA_c$. Τότε

$$A[\underline{q}_1 \; \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1} \; \underline{q}_n] = [\underline{q}_1 \; \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1} \; \underline{q}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} A\underline{q}_n &= \underline{q}_{n-1} - a_{n-1}\underline{q}_n \\ A\underline{q}_{n-1} &= \underline{q}_{n-2} - a_{n-2}\underline{q}_n \\ &\vdots \\ A\underline{q}_2 &= \underline{q}_1 - a_1\underline{q}_n \\ A\underline{q}_1 &= -a_0\underline{q}_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \underline{q}_{n-1} &= A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{q}_n \\ \underline{q}_{n-2} &= A\underline{q}_{n-1} + a_{n-2}\underline{q}_n \\ &\vdots \\ \underline{q}_1 &= A\underline{q}_2 + a_1\underline{q}_n \\ A\underline{q}_1 &= -a_0\underline{q}_n \end{aligned}\right.$$

Ισοδύναμα

$$\underline{q}_{n-1} = A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{q}_n$$

$$\underline{q}_{n-2} = A\underline{q}_{n-1} + a_{n-2}\underline{q}_n = A(A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{q}_n) + a_{n-2}\underline{q}_n$$
$$= A^2\underline{q}_n + a_{n-1}A\underline{q}_n + a_{n-2}\underline{q}_n$$
$$\vdots$$
$$\underline{q}_1 = A^{n-1}\underline{q}_n + a_{n-1}A^{n-2}\underline{q}_n + \cdots + a_1\underline{q}_n$$

καί $A\underline{q}_1 = A^n\underline{q}_n + a_{n-1}A^{n-1}\underline{q}_n + \cdots + a_1 A\underline{q}_n =$
$= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A)\,\underline{q}_n$
$= -a_0\underline{q}_n$ από το Θεώρημα Cayley-Hamilton

Ισοδύναμα οι σχέσεις γράφονται ως:

$$\underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q} = \underbrace{[\underline{q}_n\ A\underline{q}_n \cdots A^{n-1}\underline{q}_n]}_{\Gamma}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1} & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{T}$$

Δηλ. $Q = \Gamma T$

Εφόσον $\det(T) = (-1)^{n+1} \neq 0$, έχουμε:

$\det(Q) = \det(\Gamma)$ καί επομένως $\det(Q) \neq 0$ αν καί μόνο αν υπάρχει $\underline{q}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\det(\Gamma) \neq 0$.

A21 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $(\sigma + i\omega, \underline{x} + i\underline{z})$ ζεύγος ιδιοτιμής / ιδιοδιανύσματος του A μέ $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$. Έστω $V = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle = \{c_1\underline{x} + c_2\underline{z} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι ο V είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $\underline{y} \in V \Rightarrow A\underline{y} \in V$.

Λύση: Αν $\underline{y} \in V$ τότε $\underline{y} = c_1\underline{x} + c_2\underline{z}$ γιά κάποια $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Άρα:

$$A\underline{y} = A[x ; z]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [x ; z]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\sigma c_1 + \omega c_2)\underline{x} + (-\omega c_1 + \sigma c_2)\underline{z} =: \hat{c}_1\underline{x} + \hat{c}_2\underline{z}$$

δηλαδή $A\underline{y} \in V$.

(A22) Νά βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$\underline{y}' = A\underline{y}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -(\lambda+2) & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2)\det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\left\{(\lambda+1)(\lambda+1-1) + \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Άρα έχουμε $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-2$ με αλγεβρικές πολ/τες 1 και 2 αντίστοιχα. Υπολογίζουμε ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1=1: \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = y+z \\ 2y = x+z \end{array}\right\}.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = 2x-y \\ 2y = x+(2x-y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=x=y \\ x=y \end{array}\right\} \quad \underline{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2=-2: \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow x+y+z=0.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

και ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$ έχει διάσταση 2. Άρα $\tau_2=d_2=2$ και ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Έχουμε

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = e^{At}\underline{y_0} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}\underline{y_0} = Pe^{\Lambda t}\underline{c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

A23 Νά λυθεί τό ΠΑΤ: $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & +1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2+1\right].$$

Καί ο A είναι απλής δομής μέ ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 1-i$. Ιδιο~~τιμές~~διανύσματα:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow y = z = 0, \ \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1+i: \quad \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & +1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = iz \end{matrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

καί $\lambda_3 = 1-i$, $\underline{u}_3 = \bar{\underline{u}}_2$. Επομένως:

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \underline{y}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \\ 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y}_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cos t & -e^t\sin t \\ 0 & e^t\sin t & e^t\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

A24 Νά βρεθεί ο εκθετικός πίνακας e^{At} αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 5 & \lambda+3 & 7 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2(\lambda+3) + (5\lambda+7) - 2(\lambda+3) =$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

Αρα έχουμε $\lambda = -1$ με $r = 3$. Ιδιοδιανυσμα(τα):

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta+2\gamma = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\gamma = 0. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = -\gamma, \quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως $d = 1$ καί η διάσταση του Jordan block είναι 3x3. Η αλυσίδα είναι της μορφής

$$\left.\begin{matrix} (A+I)\underline{v_1} = 0 \\ (A+I)\underline{v_2} = \underline{v_1} \\ (A+I)\underline{v_3} = \underline{v_2} \end{matrix}\right\} \quad (A+I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(~~καί πρέπει νά έχουμε~~ θέτουμε (αυθαίρετα) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{v_2} = (A+I)\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

πού επιβεβαιώνει τον προηγούμενο υπολογισμό του $\underline{v}_1$

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

A25 Έστω $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων πίνακα A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, δηλ.

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I)\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1} \\ (A-\lambda I)\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2} \\ &\vdots \\ (A-\lambda I)\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\ (A-\lambda I)\underline{v}_1 &= \underline{0} \end{aligned}\right\}$$

όπου $(\lambda I - A)^k \underline{v}_k = 0$, $(\lambda I - A)^{k-1}\underline{v}_k \neq 0$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

<u>Λύση</u> : Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_{k-1} &= (A-\lambda I)\underline{v}_k \\ \underline{v}_{k-2} &= (A-\lambda I)\underline{v}_{k-1} = (A-\lambda I)^2\underline{v}_k \\ &\vdots \\ \underline{v}_1 &= (A-\lambda I)^{k-1}\underline{v}_k \end{aligned}\right\}$$

και γενικά

$$\underline{v}_i = (A-\lambda I)^{k-i}\underline{v}_k$$

για $i = 1, 2, \dots, k$.

Επίσης

$$(A-\lambda I)\underline{v}_1 = \underline{0}$$

$$(A-\lambda I)^2 \underline{v}_2 = (A-\lambda I)\underbrace{(A-\lambda I)\underline{v}_2}_{\underline{v}_1} = (A-\lambda I)\underline{v}_1 = 0$$

και γενικά:

$$(A-\lambda I)^i \underline{v}_i = \underline{0} \qquad (i=1,2,\dots,k).$$

Έστω αυθαίρετος γραμμικός συνδιασμός των $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^k$ ίσος με $\underline{0}$:

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A-\lambda I)^{k-i} \underline{v}_k \, , \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Τότε:

$$\underline{0} = (A-\lambda I)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i = (A-\lambda I)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A-\lambda I)^{k-i} \underline{v}_k$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A-\lambda I)^{2k-i-1} \right) \underline{v}_k =$$

$$= \Big(\alpha_1 (A-\lambda I)^{2k-2} + \alpha_2 (A-\lambda I)^{2k-3} + \dots + \alpha_{k-1} (A-\lambda I)^{k} + \alpha_k (A-\lambda I)^{k-1} \Big) \underline{v}_k$$

$$\Rightarrow \alpha_k (A-\lambda I)^{k-1} \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \alpha_k \underline{v}_1 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_k = 0}$$

Επομένως

$$\underline{0} = (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i = (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \underline{v}_i =$$

$$= (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (A-\lambda I)^{k-i} \underline{v}_k =$$

$$= (A-\lambda I)^{k-2} \Big[\alpha_1 (A-\lambda I)^{k-1} + \alpha_2 (A-\lambda I)^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-2} (A-\lambda I)^2 + \alpha_{k-1} (A-\lambda I) \Big] \underline{v}_k$$

$$= (A-\lambda I)^{k-1} \Big[\alpha_1 (A-\lambda I)^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-2} (A-\lambda I) + \alpha_{k-1} \Big] \underline{v}_k$$

$$\Rightarrow (A-\lambda I)^{k-1} \underline{v}_k \cdot \alpha_{k-1} = \underline{0} \Rightarrow \alpha_{k-1} \underline{v}_1 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_{k-1} = 0}$$

Καί γενικά (π.χ. μέ επαγωγή) $\alpha_i = 0$ γιά κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.
Άρα $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

A26 Έστω δυναμικό σύστημα $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}u$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ καί $u(t)$ αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση. Στην θεωρία Ελέγχου η συνάρτηση $u(t)$ μπορεί νά επιλεγεί ως "ανάδραση καταστάσεων", ~~δηλ.~~ $u(t) = \underline{f}^T x(t)$, $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$, ώστε τό αντίστοιχο σύστημα "κλειστού βρόγχου", $\underline{x}' = (A + \underline{b}\,\underline{f}^T)\underline{x}$ νά έχει επιθυμητές ιδιότητες. Έστω ότι

$$\Gamma = [\,\underline{b} \mid A\underline{b} \mid \cdots \mid A^{n-1}\underline{b}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det(\Gamma) \neq 0$$

Δείξτε ότι τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_c) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$$

όπου $A_c = A + \underline{b}\,\underline{f}^T$, μπορεί νά επιλεχθεί αυθαίρετα (μέσω της επιλογής του διανύσματος $\underline{f}$). Δείξτε (μέ απλό παράδειγμα) ότι τό αποτέλεσμα δέν ισχύει αν $\det(\Gamma) = 0$.
Υπόδειξη: Με χρήση του αποτελέσματος της A20 νά οριστεί κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών $\underline{y} = Q^{-1}\underline{x}$, $\det(Q) \neq 0$, ώστε τό ισοδύναμο σύστημα: $\underline{y}' = \hat{A}\underline{y} + \hat{\underline{b}}u$, $\hat{A} = Q^{-1}AQ$, $\hat{\underline{b}} = Q^{-1}\underline{b}$, μέ πίνακα $\hat{A}$ σέ μορφή companion καί $\hat{\underline{b}} = [0\ 0 \cdots 0\ 1]^T$.

Λύση

Έστω ότι A σε μορφή companion και $\underline{b} = [0 \cdots 0\ 1]^T$, δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν $\underline{f}^T = [\, f_0\ f_1 \cdots f_{n-1} \,]$, τότε ο πίνακας

$$A_c = \underline{A} + \underline{b}\,\underline{f}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & \cdots & \cdots & f_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - f_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - f_1)\lambda + (a_0 - f_0)$$

και επομένως μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μέσω των f_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & * \\ 0 & 1 & & & * \\ 1 & * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix}$$

και $\det(\Gamma) \neq 0$, όπου $*$ υποδηλώνει κάποιον πραγματικό αριθμό.

Στην γενική περίπτωση ορίζουμε (άσκηση Α.20)

$$Q = [\,\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \dots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{ως εξής}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{q}_n &= \underline{b}\\ \underline{q}_{n-1} &= A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{b} = A\underline{b} + a_{n-1}\underline{b}\\ &\ \vdots\\ \underline{q}_1 &= A\underline{q}_2 + a_1\underline{b} = A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \dots + a_1\underline{b}\end{aligned}\right\}$$

Τότε (1) $A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = A(A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}\underline{b} + \dots + a_1\underline{b}) + a_0 b$
$= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 I)\,\underline{b} = 0$ (από το Θεώρημα Cayley-Hamilton) και

$$\underbrace{[\,\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n\,]}_{Q} = \underbrace{[\,\underline{b}\ A\underline{b} \cdots A^{n-1}\underline{b}\,]}_{\Pi}\ \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ \vdots & & 1 & 0\\ a_{n-1} & 1 & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}}_{T}$$

όπου $\det(T) = (-1)^{n+1}$
και άρα $\det(Q) = (-1)^{n+1}\det(\Pi)$
$\neq 0.$

Επομένως: $Q\hat{A} = AQ$ και $Q\hat{\underline{b}} = \underline{b}$ και εφόσον $\det(Q) \neq 0$ έχουμε $Q^{-1}AQ = \hat{A}$ και $\hat{\underline{b}} = Q^{-1}\underline{b}$ με $\hat{A}$ σε μορφή companion και $\hat{\underline{b}} = [0\ 0 \dots 0\ 1]^T$.

Από το πρώτο μέρος, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\hat{\varphi} = \det(\hat{A} + \hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T)$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μέσω διανύσματος $\hat{\underline{f}} \in \mathbb{R}^n$. Αν $\underline{y} = Q^{-1}\underline{x}$, τότε
$\underline{y}' = Q^{-1}\underline{x}' = Q^{-1}(A\underline{x} + \underline{b}u) = Q^{-1}AQ\,\underline{y} + Q^{-1}\underline{b}\,u$
δηλ. $\underline{y}' = \hat{A}\underline{y} + \hat{\underline{b}}u$. Ορίζοντας $\underline{f}^T = \hat{\underline{f}}^T Q^{-1}$ έχουμε
$\varphi = \det(A + \underline{b}\underline{f}^T) = \det(Q\hat{A}Q^{-1} + Q\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T Q^{-1}) =$
$= \det(\hat{A} + \hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T) = \hat{\varphi}.$

(A27) Δείξτε ότι αν $y' = A(t)\,y(t)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}(t)]$, $a_{ij}(t)$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$$

όπου $n_1 + n_2 = n$, τότε ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(t,t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ 0 & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

όπου $G_{ii}(t,t_0)$ είναι λύση του ΠΑΤ

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ii}(t,t_0) = A_{ii}(t)\,G_{ii}(t,t_0), \quad G_{ii}(t_0,t_0) = I_{n_i}$$

και $G_{12}(t,t_0)$ είναι λύση του ΠΑΤ

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{12}(t,t_0) = A_{11}(t)\,G_{12}(t,t_0) + A_{12}(t)\,G_{22}(t,t_0), \quad G_{12}(t,t_0) = 0.$$

Επομένως, βρείτε τον πίνακα μεταφοράς $G(t,t_0)$ αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και υπολογίστε το όριο $\lim_{t\to\infty} y(t)$, αν $y(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ όπου $t_0 = 0$, $y_0 = \binom{0}{1}$.

Λύση: Έστω $G(t,t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ G_{21}(t,t_0) & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$

Τότε:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} G_{11}(t,t_0) & \frac{\partial}{\partial t} G_{12}(t,t_0) \\ \frac{\partial}{\partial t} G_{21}(t,t_0) & \frac{\partial}{\partial t} G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ G_{21}(t,t_0) & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_{11}(t_0,t_0) & G_{12}(t_0,t_0) \\ G_{21}(t_0,t_0) & G_{22}(t_0,t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G_{21}(t,t_0) = A_{22}(t)\, G_{21}(t,t_0), \quad G_{21}(t_0,t_0) = 0.$$

Λόγω μοναδικότητας λύσης $G_{21}(t,t_0) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα.

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{11}(t,t_0) = A_{11}(t)\, G_{11}(t,t_0), \quad G_{11}(t_0,t_0) = I_{n_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{22}(t,t_0) = A_{22}(t)\, G_{22}(t,t_0), \quad G_{22}(t_0,t_0) = I_{n_2} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{12}(t,t_0) = A_{11}(t)\, G_{12}(t,t_0) + A_{12}(t)\, G_{22}(t,t_0), \quad G_{12}(t_0,t_0) = 0.$$

όπου $G_{ii}(t,t_0)$ ο πίνακας μεταφοράς των $\underline{y}_i' = A_{ii}\underline{y}_i$ $(i=1,2)$

Αν $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$\frac{\partial}{\partial t} g_{11}(t,t_0) = -g_{11}(t,t_0)$; Έστω $\hat{g}_{11}(t) = g_{11}(t,t_0)$. Τότε

$\hat{g}_{11}(t) = -\hat{g}_{11}(t) \Rightarrow \hat{g}_{11}(t) = c e^{-t}, \; c \in \mathbb{R} \Rightarrow g_{11}(t,t_0) = c e^{-t}$ και

$g_{11}(t_0,t_0) = c e^{-t_0} = 1 \Rightarrow g_{11}(t,t_0) = e^{-t+t_0}$. Παρόμοια $g_{22}(t) = e^{-t+t_0}$.

Επίσης αν $\hat{g}_{12}(t) = g_{12}(t,t_0)$, τότε $\hat{g}_{12}'(t) = -\hat{g}_{12}(t) + e^{2t}e^{-t+t_0}$

$\Rightarrow \hat{g}_{12}'(t) + \hat{g}_{12}(t) = e^{t+t_0} \Rightarrow \hat{g}_{12}(t) = c e^{-t} + B e^{t}$,

$2Be^{t} = e^{t+t_0} \Rightarrow B = \frac{1}{2} e^{t_0} \Rightarrow \hat{g}_{12}(t) = c e^{-t} + \frac{1}{2} e^{t+t_0}$

και $g_{12}(t,t_0) = ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{t+t_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_{12}(t_0,t_0) = 0 = ce^{-t_0} + \frac{1}{2}e^{2t_0} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}e^{3t_0}.$

$\Rightarrow g_{12}(t,t_0) = \cancel{\frac{1}{2}e^{2t_0}} - \frac{1}{2}e^{3t_0-t} + \frac{1}{2}e^{t+t_0}.$

$$\Rightarrow G(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{t_0-t} & -\frac{1}{2}e^{3t_0-t} + \frac{1}{2}e^{t_0+t} \\ 0 & e^{t_0-t} \end{bmatrix}$$

και $\underline{y}(t) = G(t,0)\,\underline{y_0} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \overset{\sinh}{\cancel{\cosh}}(t) \\ e^{-t} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

και άρα $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = +\infty.$