

Δυναμικά Συστήματα: Διαγράμματα φάσης, Πολλαπλότητες, Poincare-Bendixson

A. Διαγράμματα Φάσης:

A1: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ x_2(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Περιγράψτε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ευστάθεια σημείων ισορροπίας, ύπαρξη οριακών κύκλων) και σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης αν $\mu > 0$ και $\mu < 0$. Υπόδειξη: Μετασχηματίστε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες.

A2: Δίνεται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \\ x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, αναλύστε τις ιδιότητες ευστάθειας τους και σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $\mu > 0$, $\mu = 0$ και $\mu < 0$.

B. Μετασχηματισμοί, Πολλαπλότητες:

B1: Έστω το σύστημα:

$$x' = f(x), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι $x^* = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Βρείτε την αναλυτική λύση το συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης. Συγκρίνετε με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος $y' = Df(0)y$ όπου $Df(0)$ είναι ο πίνακας Jacobian στο σημείο $x^* = 0$.

(β) Έστω H η συνεχής συνάρτηση $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $H^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Δείξτε επίσης ότι η H μετασχηματίζει το σύστημα $x' = f(x)$ στο γραμμικό σύστημα $y' = Df(0)y$ υπό την έννοια ότι αν $y = H(x)$ τότε $y' = Df(0)y$.

B2: Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$$

έχει συνεχή αντίστροφο: $h^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και ότι το μη γραμμικό σύστημα

$$x' = f(x), \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζεται κάτω από την απεικόνιση αυτή στο γραμμικό σύστημα $y' = Ay$ όπου $A = Df(0)$, δηλαδή αν $y = h(x)$ τότε $y' = Ay$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -\frac{x_1^2}{3}\}$ είναι αναλλοίωτο.

B3: Έστω $x' = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε αλλαγή μεταβλητών $z = T(x)$, όπου $T(0) = 0$ και $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφόριση σε κάποια περιοχή του 0 (δηλαδή η αντίστροφη απεικόνιση είναι καλά ορισμένη και $T(\cdot)$, $T^{-1}(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες).

(α) Δείξτε ότι το σύστημα στις νέες μεταβλητές γράφεται ως:

$$z' = \hat{f}(z), \quad \text{όπου} \quad \hat{f}(z) = \left. \frac{\partial T}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}$$

(β) Δείξτε ότι $x = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας του $x' = f(x)$ αν και μόνο αν $z = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας του $z' = \hat{f}(z)$.

(γ) Δείξτε ότι $x = 0$ είναι ευσταθές (ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν $z = 0$ είναι ευσταθές (ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές, αντίστοιχα).

Γ. Poincare-Bendixson:

Γ1: Έστω δυναμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 + x_1(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2 \\x'_2 &= -x_1 + x_2(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2\end{aligned}$$

- (i) Γράψτε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x_1 = r \cos \theta$ και $x_2 = r \sin \theta$. Δείξτε ότι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.
- (ii) Με χρήση του κριτηρίου Poincaré-Bendixson δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στην περιοχή $D = \{(r, \theta) : \frac{1}{2} \leq r \leq 2\}$.
- (iii) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του συστήματος.
- (iv) Μπορείτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο Poincaré-Bendixson να δείξετε ότι δεν υπάρχει οριακός κύκλος στην περιοχή $\hat{D} = \{(r, \theta) : 3 \leq r \leq 5\}$;

Γ2: Χρησιμοποιώντας το κριτήριο PB, δείξτε ότι το σύστημα

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1 + x_2 - 2x_2^2(x_1 + 2x_2)$$

έχει τουλάχιστον έναν οριακό κύκλο. [Υπόδειξη: Έστω $V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$. Δείξτε ότι για αρκούντως μεγάλο $c > 0$ έχουμε $\langle \nabla V(x_1, x_2), \mathbf{f} \rangle < 0$ επί της καμπύλης στάθμης $V(x_1, x_2) = c$].

Γ3: Έστω δυναμικό σύστημα της μορφής

$$x'_1 = x_2 + x_1(\alpha - \beta x_1^2 - \beta x_2^2), \quad x'_2 = -x_1 + \beta x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

όπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta - \alpha < 2$.

- (i) Βρείτε τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.
- (ii) Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, δείξτε ότι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.
- (iii) Έστω ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Poincaré-Bendixson δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στην περιοχή $D = \{(r, \theta) : \frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq 2\}$.
- (iv) Βρείτε τιμές r_{min} και r_{max} ώστε το συμπέρασμα στο (iii) να ισχύει για την μικρότερη περιοχή $\hat{D} = \{(r, \theta) : r_{min} \leq r \leq r_{max}\}$.

Γ4: Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα δείξτε ότι το σύστημα δεν έχει οριακό κύκλο:

- (i) $x'_1 = -x_1 + x_1^3 + x_1x_2^3$, $x'_2 = -x_2 + x_2^3 + x_1^2x_2$
- (ii) $x'_1 = 1 - x_1x_2^2$, $x'_2 = x_1$
- (iii) $x'_1 = -x_1 + x_2$, $x'_2 = g(x_1) + ax_2$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $a \neq 1$.

Γ5: Έστω το σύστημα: $x'_1 = ax_1 - x_1x_2$, $x'_2 = bx_1^2 - cx_2$ όπου $b > 0$ και $c > a > 0$. Έστω $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$.

- (i) Δείξτε ότι $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{D}$ για κάθε $t \geq 0$.
- (ii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να διέρχεται από κάποιο $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Γ6: Έστω το σύστημα: $x'_1 = -x_1 - x_2^3$, $x'_2 = x_1$.

- (i) Δείξτε ότι το σημείο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.
- (ii) Εξετάστε αν είναι δυνατόν να αποφανθείτε για τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας μέσω γραμμικοποίησης.
- (iii) Εφαρμόζοντας το κριτήριο Bendixson δείξτε ότι το σύστημα δεν έχει οριακό κύκλο.

ΓΧ, 13-11-2025