

Δυναμικά Συστήματα: Διαγράμματα φάσης, Πολλαπλότητες, Poincare-Bendixson

A. Διαγράμματα Φάσης:

A1: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ x_2(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Περιγράψτε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ευστάθεια σημείων ισορροπίας, ύπαρξη οριακών κύκλων) και σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης αν $\mu > 0$ και $\mu < 0$. Υπόδειξη: Μετασχηματίστε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση: Σε πολικές συντεταγμένες

$$r' = \mu r + r^3 - r^5, \quad \theta' = 1$$

Μοναδικό σημείο ισορροπίας η αρχή των αξόνων που αντιστοιχεί σε ευσταθή εστία αν $\mu < 0$ και ασταθή εστία αν $\mu > 0$.

Αν $\mu < 0$ έχουμε δύο οριακούς κύκλους: $r^2 = \frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}$ (ευσταθής) και $r^2 = \frac{1-\sqrt{1+4\mu}}{2}$ (ασταθής). Αν $\mu > 0$ έχουμε έναν οριακό κύκλο: $r^2 = \frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}$ (ευσταθής).

A2: Δίνεται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \\ x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, αναλύστε τις ιδιότητες ευστάθειας τους και σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $\mu > 0$, $\mu = 0$ και $\mu < 0$.

Λύση: Έστω $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Σημεία ισορροπίας:

$$x_2 = x_1(\mu - r^2), \quad x_2(\mu - r^2) + x_1 = 0 \Rightarrow x_1[1 + (\mu - r^2)^2] = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Επίσης:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \mu - 3x_1^2 - x_2^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_1x_2 - 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1x_2 + 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \mu - x_1^2 - 3x_2^2$$

Ο πίνακας Jacobian στο σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι

$$Df(0) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(\lambda) := \det(\lambda I_2 - Df(0)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \mu & 1 \\ -1 & \lambda - \mu \end{bmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. Επομένως αν $\mu < 0$ το γραμμικοποιημένο σύστημα αντιστοιχεί σε ευσταθή εστία, αν $\mu = 0$ σε κέντρο και αν $\mu > 0$ σε ασταθή εστία.

Σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) έχουμε $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ και

$$(1) \quad x'_1 = r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = r \cos \theta (\mu - r^2) - r \sin \theta$$

$$(2) \quad x'_2 = r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = r \sin \theta (\mu - r^2) + r \cos \theta$$

Έχουμε:

$$(1) \cos \theta + (2) \sin \theta = r' = r(\mu - r^2)$$

και

$$(1)(-\sin \theta) + (2) \cos \theta = r\theta' = r \Rightarrow \theta' = 1 \Rightarrow \theta = \theta_0 + t$$

Περίπτωση $\mu < 0$: Θέτουμε $\mu = -\gamma^2$. Χωρίζοντας μεταβλητές:

$$\frac{dr}{r(r^2 + \gamma^2)} = -dt \Rightarrow \left(\frac{1/\gamma^2}{r} - \frac{(1/\gamma^2)r}{r^2 + \gamma^2} \right) dr = -dt$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\frac{1}{\gamma^2} \ln(r) - \frac{1}{2\gamma^2} \ln(r^2 + \gamma^2) = \frac{1}{\gamma^2} \ln \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + \gamma^2}} \right) = -t + c$$

Αρχικές συνθήκες:

$$t = 0, r = r_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\gamma^2} \ln \left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \gamma^2}} \right)$$

Επομένως:

$$\frac{1}{\gamma^2} \ln \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + \gamma^2}} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \ln \left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \gamma^2}} \right) = -t$$

Ισοδύναμα

$$\sqrt{\frac{1 + \gamma/r_0^2}{1 + \gamma/r^2}} = e^{-\gamma t} \Rightarrow r(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{(1 + \frac{\gamma}{r_0^2})e^{2\gamma t} - 1}} \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow +\infty$ που αντιστοιχεί σε ευσταθή εστία.

Περίπτωση $\mu = 0$: Έχουμε $r' = -r^3$. Διαχωρίζοντας μεταβλητές

$$\int \frac{dr}{r^3} = - \int dt \Rightarrow -\frac{r^{-2}}{2} = -t + c \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2t + c}$$

Αρχικές συνθήκες: $c = \frac{1}{r_0^2}$ και

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1 + 2r_0^2 t} \Rightarrow r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}} \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow \infty$.

Περίπτωση $\mu > 0$: Θέτοντας $\mu = \gamma^2$, $\gamma > 0$, έχουμε: $r' = r(\gamma + r)(\gamma - r)$. Αν $r = \gamma$ τότε $r' = 0$ και επομένως $r(0) = \gamma \Rightarrow r(t) = \gamma$ για κάθε $t \geq 0$ (περιοδική λύση). Αν $r > \gamma$, $r' < 0$ και $r \rightarrow \gamma$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Επίσης αν $r < \gamma$, $r' > 0$ και $r \rightarrow \gamma$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Άρα ο οριακός κύκλος $r = \gamma$ ελκύει κάθε αρχική κατάσταση.

B. Μετασχηματισμοί, Πολλαπλότητες:

B1: Έστω το σύστημα:

$$x' = f(x), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι $x^* = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Βρείτε την αναλυτική λύση το συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης. Συγκρίνετε με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος $y' = Df(0)y$ όπου $Df(0)$ είναι ο πίνακας Jacobian στο σημείο $x^* = 0$.

(β) Έστω H η συνεχής συνάρτηση $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $H^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Δείξτε επίσης ότι η H μετασχηματίζει το σύστημα $x' = f(x)$ στο γραμμικό σύστημα $y' = Df(0)y$ υπό την έννοια ότι αν $y = H(x)$ τότε $y' = Df(0)y$.

Λύση: (α) $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Λύνοντας την πρώτη εξίσωση: $x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$. Επομένως

$$x_2' - x_2 = x_1^2(0)e^{-2t}$$

Γενική λύση ομογενούς εξίσωσης: $x_2 = c_1 e^t$. Ειδική λύση μη ομογενούς: $x_2 = A e^{-2t}$ και άρα:

$$-2Ae^{-2t} - Ae^{-2t} = x_1^2(0)e^{-2t} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}x_1^2(0)$$

και επομένως

$$x_2(t) = c_1 e^t - \frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t}$$

Αρχική συνθήκη:

$$x_2(0) = c_1 - \frac{1}{3}x_1^2(0) \Rightarrow c_1 = x_2(0) + \frac{1}{3}x_1^2(0)$$

και έτσι

$$x_2(t) = \left(x_2(0) + \frac{1}{3}x_1^2(0) \right) e^t - \frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t}$$

Παρατηρούμε ότι

$$x_2(0) = -\frac{1}{3}x_1^2(0) \Rightarrow x_2(t) = -\frac{1}{3}x_1^2(t)$$

για κάθε $t \geq 0$ και επομένως η παραβολή $x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο (όπως και ο άξονας $x_2 = 0$).

(β) Έχουμε

$$H^{-1}(y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{1}{3}y_1^2 \end{bmatrix}$$

που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης:

$$y' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' + \frac{2}{3}x_1x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y$$

B2: Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$$

έχει συνεχή αντίστροφο: $h^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και ότι το μη γραμμικό σύστημα

$$x' = f(x), \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζεται κάτω από την απεικόνιση αυτή στο γραμμικό σύστημα $y' = Ay$ όπου $A = Df(0)$, δηλαδή αν $y = h(x)$ τότε $y' = Ay$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -\frac{x_1^2}{3}\}$ είναι αναλλοίωτο.

Λύση: Έχουμε:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = h^{-1}(y) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1^2 \\ y_3 - \frac{1}{3}y_1^2 \end{bmatrix}$$

και $h^{-1}(\cdot)$ είναι συνεχής. Το σύστημα γράφεται:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}, \quad x_2' + x_2 = x_1^2(0)e^{-2t}, \quad x_3' - x_3 = x_1^2(0)e^{-2t}$$

με λύση

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}, \quad x_2(t) = (x_2(0) + x_1^2(0))e^{-t} - x_1^2(0)e^{-2t}, \quad x_3(t) = \left(x_3(0) + \frac{1}{3}x_1^2(0)\right)e^t - \frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t}$$

Επίσης:

$$y' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' + 2x_1x_1' \\ x_3' + \frac{2}{3}x_1x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 + 2x_1(-x_1) \\ x_3 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - x_1^2 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ay$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Df(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,0,0)}$$

Έστω ότι $x_3(0) = -\frac{1}{3}x_1^2(0)$. Τότε:

$$x_3(t) = -\frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t} \quad \text{και} \quad x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$$

και επομένως $x_3(t) = -\frac{1}{3}x_1^2(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και άρα το σύνολο S είναι αναλλοίωτο.

B3: Έστω $x' = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε αλλαγή μεταβλητών $z = T(x)$, όπου $T(0) = 0$ και $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφόριση σε κάποια περιοχή του 0 (δηλαδή η αντίστροφη απεικόνιση είναι καλά ορισμένη και $T(\cdot)$, $T^{-1}(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες).

(α) Δείξτε ότι το σύστημα στις νέες μεταβλητές γράφεται ως:

$$z' = \hat{f}(z), \quad \text{όπου} \quad \hat{f}(z) = \frac{\partial T}{\partial x} f(x) \Big|_{x=T^{-1}(z)}$$

- (β) Δείξτε ότι $x = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας του $x' = f(x)$ αν και μόνο αν $z = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας του $z' = \hat{f}(z)$.
- (γ) Δείξτε ότι $x = 0$ είναι ευσταθές (ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν $z = 0$ είναι ευσταθές (ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές, αντίστοιχα).

Λύση: (α) Έστω $z = T(x)$. Παραγωγίζοντας:

$$z' = \frac{\partial T(x)}{\partial x} x' = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = \hat{f}(z)$$

όπου

$$\hat{f}(z) = \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}$$

(β) Έστω ότι $x = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας. Τότε $f(0) = 0$ και $z = T(0) = 0$ είναι σημείο ισορροπίας γιατί

$$\hat{f}(0) = \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(0)} = \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right|_{x=0} = \frac{\partial T(0)}{\partial x} f(0) = 0$$

Έστω (γιά αντίφαση) ότι το $z = 0$ δεν είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας. Τότε θα υπήρχε $\bar{z}$ αυθαίρετα κοντά στο $z = 0$ (δηλαδή με νόρμα $\|\bar{z}\|$ αυθαίρετα μικρή), τέτοιο ώστε $\hat{f}(\bar{z}) = 0$. Έστω $\bar{x} = T^{-1}(\bar{z})$. Τότε

$$f(\bar{x}) = \left[\frac{\partial T(\bar{x})}{\partial x} \right]^{-1} \hat{f}(\bar{z}) = 0$$

και το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας. Λόγω συνέχειας του $T^{-1}(\cdot)$ μπορούμε να πάρουμε το $\bar{x}$ αυθαίρετα κοντά στο 0 που είναι αδύνατον αφού το $x = 0$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας.

Γ. Poincare-Bendixson:

Γ1: Έστω δυναμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 + x_1(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2 \\x'_2 &= -x_1 + x_2(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2\end{aligned}$$

- (i) Γράψτε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x_1 = r \cos \theta$ και $x_2 = r \sin \theta$. Δείξτε ότι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.
- (ii) Με χρήση του κριτηρίου Poincaré-Bendixson δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στην περιοχή $D = \{(r, \theta) : \frac{1}{2} \leq r \leq 2\}$.
- (iii) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του συστήματος.
- (iv) Μπορείτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο Poincaré-Bendixson να δείξετε ότι δεν υπάρχει οριακός κύκλος στην περιοχή $\hat{D} = \{(r, \theta) : 3 \leq r \leq 5\}$;

Λύση: (i) Έχουμε

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 + x_1(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2 \\x'_2 &= -x_1 + x_2(3 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες οι εξισώσεις γράφονται ως:

$$r' = r(3 - r^2)(r^4 - 1)^2 \text{ και } \theta' = -1$$

Οι πραγματικές, μη-αρνητικές ρίζες της πρώτης εξίσωσης είναι $r = 0$, $r = \sqrt{3}$ και $r = 1$. Οί ρίζες $r = \sqrt{3}$ και $r = 1$ αντιστοιχούν σε (δεξιόστροφους) οριακούς κύκλους. Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ (που αντιστοιχεί στην ρίζα $r = 0$).

(ii) Έχουμε

$$r = \frac{1}{2} : r' = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right)^2 > 0$$

και

$$r = 2 : r' = 2(3 - 4)(16 - 1)^2 < 0$$

Άρα τροχιές που εισέρχονται στο D δεν μπορούν να εξέλθουν και επομένως από το κριτήριο PB υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στο D (ακριβώς ένας από την προηγούμενη ανάλυση, ο $r = 1$).

(iii) Το σημείο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι ασταθής εστία. Επίσης, $r' > 0$ όταν $0 < r < 1$ και $1 < r < \sqrt{3}$ ή $r' < 0$ όταν $r > \sqrt{3}$. Άρα τροχιές με αρχικές συνθήκες $0 < r < 1$ συγκλίνουν στον (ημιευσταθή) οριακό κύκλο $r = 1$, ενώ τροχιές με αρχικές συνθήκες $1 < r < \sqrt{3}$ και $r > \sqrt{3}$ συγκλίνουν στον (ευσταθή) οριακό κύκλο $r = \sqrt{3}$. Όλες οι τροχιές είναι δεξιόστροφες.

(iv) Το $\hat{D}$ δεν είναι αναλλοίωτο, επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι από το κριτήριο PB.

Γ2: Χρησιμοποιώντας το κριτήριο PB, δείξτε ότι το σύστημα

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1 + x_2 - 2x_2^2(x_1 + 2x_2)$$

έχει τουλάχιστον έναν οριακό κύκλο. [Υπόδειξη: Έστω $V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$. Δείξτε ότι για αρκούντως μεγάλο $c > 0$ έχουμε $\langle \nabla V(x_1, x_2), \mathbf{f} \rangle < 0$ επί της καμπύλης στάθμης $V(x_1, x_2) = c$].

Λύση: Το σημείο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας. Το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_2^2 & 1 - 4x_1x_2 - 12x_2^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*=(0,0)} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

και άρα

$$\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

και το $\mathbf{x}^*$ είναι ασταθής εστία. Επίσης:

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x_1, x_2), \mathbf{f} \rangle &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = (6x_1 + 2x_2)x_2 + (2x_1 + 4x_2)(-x_1 + x_2 - 2x_1x_2^2 - 4x_2^3) \\ &= 4x_1x_2 - 2x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 - 16x_1x_2^3 - 16x_2^4 \\ &= -2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2^2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) \\ &= -2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2^2(x_1 + 2x_2)^2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) + 4x_2(x_1 + 2x_2) - 4x_2^2(x_1 + 2x_2)^2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) + 1 - [1 - 4x_2(x_1 + 2x_2) + 4x_2^2(x_1 + 2x_2)^2] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) + 1 - [1 - 2x_2(x_1 + 2x_2)]^2 \\ &\leq -2(x_1^2 + x_2^2) + 1 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

αν $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$. Επιλέγουμε σταθερά $c > 0$ τ.ω. η καμπύλη στάθμης $V(x_1, x_2) = c$ να περιέχει τον κύκλο $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ και ορίζουμε $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(x_1, x_2) \leq c\}$. Κάθε τροχιά του συστήματος με $\mathbf{x}(t_0) \in M$ παραμένει εντός του M για κάθε $t \geq t_0$ και εφόσον το μόνο σημείο ισορροπίας εντός του M (το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$) είναι ασταθής εστία, από το κριτήριο PB η περιοχή M περιέχει οριακό κύκλο.

Γ3: Έστω δυναμικό σύστημα της μορφής

$$x_1' = x_2 + x_1(\alpha - \beta x_1^2 - \beta x_2^2), \quad x_2' = -x_1 + \beta x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

όπου $\alpha > 0, \beta > 0, \beta - \alpha < 2$.

- (i) Βρείτε τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.
- (ii) Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$, δείξτε ότι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.
- (iii) Έστω ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Poincaré-Bendixson δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στην περιοχή $D = \{(r, \theta) : \frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq 2\}$.
- (iv) Βρείτε τιμές r_{min} και r_{max} ώστε το συμπέρασμα στο (iii) να ισχύει για την μικρότερη περιοχή $\bar{D} = \{(r, \theta) : r_{min} \leq r \leq r_{max}\}$.

Λύση: (i) Το γραμμικοποιημένο σύστημα στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2} [\alpha + \beta \pm i\sqrt{4 - (\alpha - \beta)^2}] \right\}$$

και επομένως το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι ασταθής εστία.

(ii) Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται ως:

$$r' = r(\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \theta - \beta r^2), \quad \theta' = \frac{\beta - \alpha}{2} \sin 2\theta - 1$$

Εφόσον $\theta' < 0$ για κάθε θ δεν υπάρχει άλλο σημείο ισορροπίας.

(iii) Για $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ οι εξισώσεις είναι:

$$r' = r(2 + \sin^2 \theta - 3r^2), \quad \theta' = \frac{1}{2} \sin 2\theta - 1 < 0$$

Επομένως

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} : r' = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 + \sin^2 \theta) > 0, \quad r = 2 : r' = 2(2 + \sin^2 \theta - 12) < 0$$

Άρα, τροχιά που εισέρχεται στο D σε κάποιο χρόνο t_0 , παραμένει στο D για κάθε $t \geq t_0$ και επομένως υπάρχει οριακός κύκλος που περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο D (κριτήριο PB).

(iv) Στο εσωτερικό σύνορο του $\tilde{D}$ πρέπει τα έχουμε:

$$\begin{aligned} r' > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) &\Leftrightarrow 2 + \sin^2 \theta - 3r^2 > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow r^2 < \frac{2 + \sin^2 \theta}{3} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r^2 < \min_{\theta \in [0, 2\pi)} \frac{2 + \sin^2 \theta}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow r < \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Στο εξωτερικό σύνορο του $\tilde{D}$ πρέπει τα έχουμε:

$$\begin{aligned} r' < 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) &\Leftrightarrow 2 + \sin^2 \theta - 3r^2 < 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow r^2 > \frac{2 + \sin^2 \theta}{3} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r^2 > \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \frac{2 + \sin^2 \theta}{3} = 1 \Leftrightarrow r > 1 \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$D_\epsilon = \{(r, \theta) : \sqrt{\frac{2}{3}} - \epsilon \leq r \leq 1 + \epsilon\}$$

για κάποιο μικρό $\epsilon > 0$. Το D_ϵ δεν περιέχει σημείο ισορροπίας και είναι κλειστό και φραγμένο. Στο εσωτερικό σύνορο του ισχύει $r' > 0$ και στο εξωτερικό σύνορο του ισχύει $r' < 0$. Άρα τροχιές που εισέρχονται στο D_ϵ σε χρόνο t_0 παραμένουν στο D_ϵ για $t \geq t_0$. Άρα (κριτήριο B) υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος που περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο D_ϵ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι κύκλοι $r = \sqrt{2/3}$ και $r = 1$ δεν είναι τροχιές του συστήματος και μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{D} = D_0 = \{(r, \theta) : \sqrt{2/3} \leq r \leq 1\}$ ως το μικρότερο σύνολο με την παραπάνω ιδιότητα.

Γ4: Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα δείξτε ότι το σύστημα δεν έχει οριακό κύκλο:

(i) $x'_1 = -x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^3, \quad x'_2 = -x_2 + x_2^3 + x_1^2 x_2$

(ii) $x'_1 = 1 - x_1 x_2^2, \quad x'_2 = x_1$

(iii) $x'_1 = -x_1 + x_2, \quad x'_2 = g(x_1) + a x_2, \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad a \neq 1.$

Λύση: (i) Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις του συστήματος

$$x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \text{και} \quad x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Το σύστημα έχει μεμονωμένο σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ και ένα συνεχές από σημεία ισορροπίας στον μοναδιαίο κύκλο $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Το σημείο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι ευσταθής κόμβος. Μετασχηματίζοντας το

σύστημα σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $r' = -r(1 - r^2)$. Επομένως κάθε τροχιά του συστήματος με αρχική συνθήκη εντός του μοναδιαίου κύκλου τείνει στο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Επίσης κάθε τροχιά του συστήματος με αρχική συνθήκη εκτός του μοναδιαίου κύκλου τείνει στο ∞ καθώς $t \rightarrow \infty$. Άρα δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι.

(ii) Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις του συστήματος: $1 - x_1x_2^2 = 0$ και $x_1 = 0$ και επομένως δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Εφόσον κάθε κλειστή τροχιά πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, το σύστημα δεν έχει οριακούς κύκλους.

(iii) Έχουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 + a \neq 0$$

Από το κριτήριο B δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι.

Γ5: Έστω το σύστημα: $x_1' = ax_1 - x_1x_2$, $x_2' = bx_1^2 - cx_2$ όπου $b > 0$ και $c > a > 0$. Έστω $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$.

(i) Δείξτε ότι $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{D}$ για κάθε $t \geq 0$.

(ii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να διέρχεται από κάποιο $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Λύση: (i) Στον x_1 -άξονα έχουμε $x_2' = bx_1^2 \geq 0$. Επομένως τροχιές με $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D}$ δεν μπορούν να εξέλθουν από το $\mathcal{D}$.

(ii) Έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = a - x_2 - c \leq -(c - a) < 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

Από το κριτήριο B δεν υπάρχει οριακός κύκλος που περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο $\mathcal{D}$. Εφόσον κάθε τροχιά του συστήματος με σημείο στο $\mathcal{D}$ δεν μπορεί να εξέλθει από το $\mathcal{D}$, κάθε οριακός κύκλος με σημείο στο $\mathcal{D}$ περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο $\mathcal{D}$. Άρα δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να διέρχεται από κάποιο $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Γ6: Έστω το σύστημα: $x_1' = -x_1 - x_2^3$, $x_2' = x_1$.

(i) Δείξτε ότι το σημείο $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας.

(ii) Εξετάστε αν είναι δυνατόν να αποφανθείτε για τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας μέσω γραμμικοποίησης.

(iii) Εφαρμόζοντας το κριτήριο Bendixson δείξτε ότι το σύστημα δεν έχει οριακό κύκλο.

Λύση: (i) $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ και άρα $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

(ii) Όχι: Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3x_2^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \{-1, 0\}$$

και επομένως το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ δεν είναι υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

(iii) Έστω $\mathcal{D}$ απλά συνεκτική περιοχή του $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

και από το κριτήριο B δεν υπάρχει οριακός κύκλος στο $\mathbb{R}^2$.