

## Δυναμικά Συστήματα: Ύπαρξη/Μοναδικότητα λύσης

**A1:** Έστω το σύστημα

$$x'' + \frac{x'}{1+x^2} + x = 0, \quad x(0) = u_0, \quad x'(0) = u_1, \quad t \geq 0$$

- (α) Δείξτε ότι το σύστημα γράφεται στη μορφή  $z' = f(z)$ ,  $z(0) = z_0$ , όπου  $z = [x \ x']^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  και  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (β) Βρείτε εκτίμηση της  $\|f(z)\|$  της μορφής  $\|f(z)\| \leq \gamma \|z\|$ ,  $\gamma > 0$ , όπου  $\|\cdot\|$  η Ευκλείδεια νόρμα,  $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ .
- (γ) Έστω  $J = [0, \beta)$  το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης του συστήματος. Με χρήση της ανισότητας Gronwall δείξτε ότι  $\|z(t)\| \leq \|z_0\| e^{\gamma \beta}$  για κάθε  $t \in [0, \beta)$ . Επομένως δείξτε ότι  $\beta = \infty$ , δηλαδή ότι η λύση του συστήματος είναι καλά ορισμένη για κάθε  $t \geq 0$ .

**A2:** Βρείτε την ροή  $\phi_t(x_0)$ ,  $\phi_t(x_0) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  του συστήματος:  $x' = \frac{1}{x^2}$  και το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης  $J(x_0) = (\alpha, \beta)$ . Αν  $\alpha > -\infty$  και  $\beta < \infty$  δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \phi_t(x_0) \in \bar{E} \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \beta^-} \phi_t(x_0) \in \bar{E}$$

όπου  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Σχεδιάστε το σύνολο  $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \in J(x_0)\}$ . Δείξτε ότι  $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$  για  $s \in J(x_0)$  και  $s+t \in J(x_0)$ .

**A3:** Έστω το σύστημα  $x' = A(t)x + b(t)$ ,  $x(0) = x_0$ , όπου  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b(t) \in \mathbb{R}^n$  συνεχείς στο  $[0, T]$ . Δείξτε με χρήση της ανισότητας Gronwall ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική στο διάστημα  $[0, T]$ .

**A4:** (α) Δείξτε την παρακάτω επέκταση του Λήμματος Gronwall: Έστω  $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και  $\mu : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και μή αρνητική συνάρτηση. Αν η συνεχής συνάρτηση  $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί την ανισότητα:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_{\alpha}^t \mu(s)y(s)ds$$

για κάθε  $t \in [\alpha, \beta]$ , τότε:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_{\alpha}^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}ds$$

για κάθε  $t \in [\alpha, \beta]$ .

(β) Έστω  $f(t, x)$  συνεχής ως προς  $t$  και τοπικά Lipschitz ως προς  $x$ , τέτοια ώστε

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2\|x\|, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad k_1, k_2 > 0$$

Δείξτε ότι η λύση του ΠΑΤ  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(t-t_0)} - 1)$$

για κάθε  $t \geq t_0$  και ότι επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε  $t \in [t_0, \infty)$ .

(γ) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}, \quad x_2' = -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}, \quad x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b$$

έχει μοναδική λύση για κάθε  $t \geq 0$ .

**A5:**

(α) Έστω το σύστημα:  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι συνάρτηση τοπικά Lipschitz και φραγμένη. Δείξτε ότι η λύση του συστήματος  $x(t)$  υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

(β) Έστω  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  συνεχώς διαφορίσιμη στο  $\mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε την συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 + \|g(x)\|^2}, \quad \text{όπου } \|g(x)\| = \sqrt{g^T(x)g(x)}$$

Δείξτε ότι: (i)  $\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  και ότι, (ii) η λύση του συστήματος  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

**A6:** Έστω  $f : X \rightarrow Y$  τοπικά Lipschitz και  $A \subseteq X$  συμπαγές. Δείξτε ότι η  $f$  είναι Lipschitz στο  $A$ .

**A7:** Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις  $f_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τοπικά Lipschitz, τότε  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 f_2$  και  $f_2 \circ f_1$  είναι τοπικά Lipschitz.

**A8:** Έστω το ΠΑΤ:  $x' = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  όπου η  $f : \bar{B}_b(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά  $L > 0$ . Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα δώστε μία διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Picard-Lindelof (Θεώρημα 1, σελ. 12) έτσι ώστε το διάστημα  $J_a = [t_0 - a, t_0 + a]$  στο οποίο έχουμε μοναδική λύση να μην εξαρτάται από την σταθερά Lipschitz  $L$ .

- (i) Ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο με νόρμα  $\mathcal{X} = (C^0(J_a, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ . Εξετάζουμε τις δύο νόρμες:  $\|x\|_C = \max_{t \in J_a} \|x(t)\|$  (sup-νόρμα) και  $\|x\|_K = \max_{t \in J_a} (\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|})$  (νόρμα Bielecki) όπου  $K > L$ . Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες. Άρα δείξτε ότι το σύνολο  $C^0(J_a, \bar{B}_b(x_0))$  (δηλ. το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $f : J_a \rightarrow \bar{B}_b(x_0)$ ), εφοδιασμένο με την νόρμα  $\|\cdot\|_K$  είναι πλήρης μετρικός χώρος (έστω  $N$ ).
- (ii) Έστω ο τελεστής  $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds$ ,  $t \in J_a$ . Δείξτε ότι αν  $a \leq \frac{b}{M}$  όπου  $M = \max_{x \in \bar{B}_b(x_0)} \|f(x)\|$ , τότε  $T : N \rightarrow N$ . Δείξτε επίσης ότι ο  $T$  είναι τελεστής συστολής στο  $N$ .
- (iii) Συμπεράνετε από το Θεώρημα Συστολής ότι αν  $a \leq b/M$ , ο  $T$  έχει μοναδικό σταθερό σημείο  $x^* = T(x^*)$  που αντιστοιχεί στην μοναδική λύση του ΠΑΤ.

ΓΧ, 13-11-2025