

Ασκήσεις - Ευστάθεια Lyapunov

B1: Έστω το σύστημα: $x'_1 = 1 - e^{x_2}$, $x'_2 = 1 - e^{x_2 - x_1}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$. Δείξτε επίσης ότι $V(x_1, x_2) = x_1 + e^{-x_1} + e^{x_2} - x_2 - 2$ είναι συνάρτηση Lyapunov για το x^* και ότι το x^* είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B2: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2), \quad f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

- (α) Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα $P_0(0, 0)$ και $P_1(1, 1)$.
- (β) Γραμμικοποιώντας στο σύστημα δείξτε ότι το σημείο P_1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Είναι το P_1 ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;
- (γ) Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq x_1^3, x_2 \leq x_1^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο. (Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο $f = (f_1, f_2)$ στο σύνορο του Γ). Επομένως δείξτε ότι το σημείο P_0 είναι ασταθές.

B3: Το σύστημα Lienard ορίζεται από την εξίσωση: $y'' + h(y)y' + g(y) = 0$ όπου h, g συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις.

- (α) Ορίζοντας $x_1 = y$ και $x_2 = y'$ γράψτε την εξίσωση σε διανυσματική μορφή: $x' = f(x)$ και βρείτε συνθήκες για τις συναρτήσεις h και g ώστε το $x^* = 0$ να είναι το μοναδικό μεμονομένο σημείο ισορροπίας.
- (β) Χρησιμοποιώντας την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2$$

βρείτε (επιπλέον) συνθήκες για τις συναρτήσεις h και g ώστε το $x^* = 0$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

- (γ) Επαναλάβετε το (β) με υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{x_1} h(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2 \right]^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi$$

B4: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2(1 - x_1^2), \quad x'_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)$$

Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας και ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της μορφής: $V(x) = x^T P x$ όπου $P = P^T > 0$. Επιλέξτε τα στοιχεία του P έτσι ώστε $V'(x) < 0$ σε περιοχή που περιέχει το x^*]. Είναι το x^* ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

B5: Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

και ότι είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B6: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = -x_1 + x_1x_2, \quad x'_2 = -x_2$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ είναι συνάρτηση Lyapunov]. Είναι το x^* ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

B7: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

(α) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας. (β) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ η γραμμικοποίηση]. (γ) Με αλλαγή συντεταγμένων λύστε το σύστημα αναλυτικά και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

B8: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -g(x_1)(x_1 + x_2)$$

όπου g τοπικά Lipschitz, $g(y) \geq 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. (α) Δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Δείξτε ότι:

$$V(x) = \int_0^{x_1} yg(y)dy + x_1x_2 + x_2^2$$

είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^2$. (γ) Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B9: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2x_3 + 1 \\ x_1x_3 - x_2 \\ x_3^2(1 - x_3) \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Γραμμικοποιώντας το σύστημα δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

B10: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = (x_1x_2 - 1)x_2^3 + (x_1x_2 - 1 + x_1^2)x_2$$

(α) Δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Γραμμικοποιώντας το σύστημα δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (γ) Δείξτε ότι το $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 \geq 0\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο. (δ) Είναι το $x^* = (0, 0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

B11: Έστω το σύστημα

$$x'_1 = -x_1 - x_2, \quad x'_2 = 2x_1 - x_2^3$$

Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

B12: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2}$$

Έστω επίσης

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. (α) Δείξτε ότι $V(x) > 0$ και $V'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (β) Έστω το σύνολο:

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2(x_1 - \sqrt{2}) \geq 2\}$$

Δείξτε ότι το Γ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το σύστημα (δηλ. $x(0) \in \Gamma \Rightarrow x(t) \in \Gamma$ για κάθε $t \geq 0$) και ότι επομένως το $x^* = (0, 0)$ δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο (f_1, f_2) στο συνόρο του συνόλου Γ , $\partial\Gamma$].

B13: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_1^2 + x_1^2 x_2, \quad x'_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασταθές.

B14: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2, \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

(α) Δείξτε ότι το σύνολο

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1^3 \leq x_2 \leq x_1^2\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο. [Υπόδειξη: Βρείτε την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου (f_1, f_2) στο σύνολο του Γ .] Επομένως δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για την ευστάθεια των P_0 και P_1 μέσω γραμμικοποίησης;

B15: Έστω το σύστημα $x' = f(x)$ όπου $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ότι ο πίνακας Jacobian $Df(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$P \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T P \leq -I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

όπου $P = P^T > 0$ (Σημείωση: Για δύο συμμετρικούς πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \leq B$ σημαίνει ότι ο $B - A$ είναι θετικά ημιορισμένος).

(α) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$$

(αφού την αποδείξετε), δείξτε ότι:

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x = -\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(β) Δείξτε ότι $V(x) = f^T(x) P f(x)$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση και ακτινικά μη φραγμένη.

(γ) Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B16: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3), \quad x'_3 = x_2 - x_3$$

όπου $h_i(x)$ τοπικά Lipschitz, $h_i(0) = 0$ και $y h_i(y) > 0$ αν $y \neq 0$, $i = 1, 2$.

(α) Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $x^* = 0$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_3} h_2(y)dy > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(γ) Δείξτε ότι το $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ) Κάτω απο ποιές συνθήκες στις $h_1(\cdot)$ και $h_2(\cdot)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;