

Ασκήσεις - Ευστάθεια Lyapunov

B1: Έστω το σύστημα: $x'_1 = 1 - e^{x_2}$, $x'_2 = 1 - e^{x_2 - x_1}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$. Δείξτε επίσης ότι $V(x_1, x_2) = x_1 + e^{-x_1} + e^{x_2} - x_2 - 2$ είναι συνάρτηση Lyapunov για το x^* και ότι το x^* είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση: Σημεία ισορροπίας:

$$e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0, 1 - e^{-x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Άρα $x^* = (0, 0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας. Γράφουμε

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad V_1(x_1) = x_1 + e^{-x_1} - 1, \quad V_2(x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$$

Έχουμε

$$V'_1(x_1) = 1 - e^{-x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad V''_1(x_1)|_{x_1=0} = e^{-x_1}|_{x_1=0} = 1 > 0$$

και άρα η V_1 έχει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$, δηλαδή $V_1(x_1) > V_1(0) = 0$ για κάθε $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Παρόμοια $V_2(x_2) > V_2(0) = 0$ για κάθε $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και επομένως $V(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Άρα η V είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης,

$$V'(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{x_2}) + (e^{x_2} - 1)(1 - e^{x_2 - x_1}) = -e^{-x_1}(1 - e^{x_2})^2$$

για κάθε $(x_1, x_2) \neq (\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}$. Όμως

$$x_2 \equiv 0 \Rightarrow x'_2 \equiv 0 \Rightarrow 1 - e^{-x_1} \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0$$

Από το Θεώρημα Lassale $x^* = (0, 0)$ ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Εφόσον η $V(x_1, x_2)$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη το x^* είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B2: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2), \quad f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

(α) Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα $P_0(0, 0)$ και $P_1(1, 1)$.

(β) Γραμμικοποιώντας στο σύστημα δείξτε ότι το σημείο P_1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Είναι το P_1 ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq x_1^3, x_2 \leq x_1^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο. (Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο $f = (f_1, f_2)$ στο σύνορο του Γ). Επομένως δείξτε ότι το σημείο P_0 είναι ασταθές.

Λύση: (α) $f_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1^3$. $f_2 = 0 \Rightarrow x_2^3 = x_1^6$. Άρα $x_2^3 = x_1^6 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$ και επομένως $x_2 = 0$ ή $x_2 = 1$. Αν $x_2 = 0$ τότε $x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Αν $x_2 = 1$ τότε $x_1^3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$. Άρα τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι $P_0(0, 0)$ και $P_1(1, 1)$.

(β) Ο πίνακας Jacobian είναι:

$$J(1, 1) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 6x_1^5 & -3x_2^2 \end{bmatrix} (1, 1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -6 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = (\lambda + 3)^2 - 6 = (\lambda + 3 + \sqrt{6})(\lambda + 3 - \sqrt{6})$$

Άρα οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -3 - \sqrt{6} < 0, \lambda_2 = -3 + \sqrt{6} < 0$$

είναι αρνητικές και επομένως το $P_1(1,1)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αφού δεν είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

(γ) Το σύνολο Γ αντιστοιχεί στην περιοχή μεταξύ των γραφημάτων των $x_2 = x_1^2$ και $x_2 = x_1^3$ στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (x_1, x_2) . Έχουμε $\partial\Gamma = \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2$ όπου

$$\partial\Gamma_1 = \{(x_1, x_1^2) : 0 \leq x_1 \leq 1\}, \quad \partial\Gamma_2 = \{(x_1, x_1^3) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$$

Αν $(x_1, x_2) \in \partial\Gamma_1$:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2(1 - x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

και επομένως $f_2 = 0$ και $f_1 > 0$ ($x_1 \neq 0, x_1 \neq 1$). Αν $(x_1, x_2) \in \partial\Gamma_2$:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^6 - x_1^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^6(1 - x_1^3) \end{bmatrix}$$

και επομένως $f_1 = 0$ και $f_2 > 0$ ($x_1 \neq 0, x_1 \neq 1$). Άρα αν $x_0 \in \Gamma$ η τροχιά του συστήματος δεν μπορεί να εξέλθει από το Γ (μέσω του $\partial\Gamma_1$ ή του $\partial\Gamma_2$ και επομένως το Γ είναι θετικά αναλλοίωτο. Εφόσον σε σημεία του Γ αυθαίρετα κοντά στο P_0 έχουμε $f_1 > 0$ και $f_2 > 0$ το σημείο P_0 είναι ασταθές.

B3: Το σύστημα Lienard ορίζεται από την εξίσωση: $y'' + h(y)y' + g(y) = 0$ όπου h, g συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις.

(α) Ορίζοντας $x_1 = y$ και $x_2 = y'$ γράψτε την εξίσωση σε διανυσματική μορφή: $x' = f(x)$ και βρείτε συνθήκες για τις συναρτήσεις h και g ώστε το $x^* = 0$ να είναι το μοναδικό μεμονομένο σημείο ισορροπίας.

(β) Χρησιμοποιώντας την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2$$

βρείτε (επιπλέον) συνθήκες για τις συναρτήσεις h και g ώστε το $x^* = 0$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(γ) Επαναλάβετε το (β) με υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{x_1} h(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2 \right]^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi$$

Λύση: (α) Σημεία ισορροπίας $x_2 = 0 \Rightarrow g(x_1) = 0$. Η συνάρτηση $g(x)$ πρέπει να έχει ρίζα στο σημείο $x = 0$.

(β) Έστω $V(x) = \int_0^{x_1} g(y) dy + \frac{1}{2} x_2^2$. Εφόσον $yg(y) > 0$ αν $y \neq 0$ έχουμε $V(x) > 0$ για $x \neq 0$. Επίσης:

$$V'(x) = g(x_1)x_2 + x_2(-h(x_1)x_2 - g(x_1)) = -h(x_1)x_2^2 \leq 0$$

αν $h(x_1) > 0$, για κάθε $x \in D$. Έστω,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : V'(x) = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Όμως:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x'_2(t) \equiv 0 \Rightarrow g(x_1) \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

και άρα $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(γ) Έστω

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[x_2 + \int_0^{x_1} h(y) dy \right]^2 + \int_0^{x_1} g(y) dy$$

Έχουμε:

$$V'(x) = \left[\left(x_2 + \int_0^{x_1} h(y) dy \right) h(x_1) + g(x_1) \right] x_2 + \left(x_2 + \int_0^{x_1} h(y) dy \right) (-h(x_1)x_2 - g(x_1))$$

Απλοποιώντας

$$V'(x) = x_2^2 h(x_1) + x_2 h(x_1) \int_0^{x_1} h(y) dy + x_2 g(x_1) - x_2^2 h(x_1) - h(x_1)x_2 \int_0^{x_1} h(y) dy - x_2 g(x_1) - g(x_1) \int_0^{x_1} h(y) dy$$

και έχουμε

$$V'(x) = -g(x_1) \int_0^{x_1} h(y) dy \geq 0 \quad \text{όπου} \quad \int_0^{x_1} h(y) dy \neq 0 \quad \text{για} \quad x_1 \neq 0$$

Επομένως

$$V'(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$$

και $x^* = (0, 0)$ ασυμπτωτικά ευσταθές.

B4: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2(1 - x_1^2), \quad x'_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)$$

Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας και ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της μορφής: $V(x) = x^T P x$ όπου $P = P^T > 0$. Επιλέξτε τα στοιχεία του P έτσι ώστε $V'(x) < 0$ σε περιοχή που περιέχει το x^*]. Είναι το x^* ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

Λύση: Έστω $V(x) = x^T P x = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$, όπου $P = P^T > 0$. Έχουμε:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2$$

Επομένως

$$V'(x) = (2p_{11}x_1 + 2p_{12}x_2)(1 - x_1^2) - (2p_{12}x_1 + 2p_{22}x_2)(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)$$

η

$$V'(x) = 2p_{11}x_1x_2 + 2p_{12}x_2^2 - 2p_{12}x_1^2 - 2p_{12}x_1x_2 - 2p_{22}x_1x_2 - 2p_{22}x_2^2 + R(x_1, x_2)$$

όπου $R(x_1, x_2)$ πολώνυμο με όρους βαθμού ≥ 3 . Έχουμε:

$$\begin{aligned} V'(x) &= -2p_{12}x_1^2 + 2(p_{11} - p_{12} - p_{22})x_1x_2 - 2(p_{22} - p_{12})x_2^2 + R(x_1, x_2) \\ &= -2[p_{12}x_1^2 - (p_{11} - p_{12} - p_{22})x_1x_2 + (p_{22} - p_{12})x_2^2] + R(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Άρα

$$V'(x) = -2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & -\frac{p_{11}-p_{12}-p_{22}}{2} \\ -\frac{p_{11}-p_{12}-p_{22}}{2} & p_{22}-p_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + R(x_1, x_2)$$

Έχουμε $P > 0 \Leftrightarrow p_{11} > 0, p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. Επίσης ο άνω πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν

$$p_{12} > 0, p_{22} > p_{12}, p_{12}(p_{22} - p_{12}) - \frac{(p_{11} - p_{12} - p_{22})^2}{4} > 0$$

Επιλέγοντας: $p_{11} = 3, p_{22} = 2, p_{12} = 1$ έχουμε $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = 5 > 0$ και επομένως $P > 0$. Επίσης

$$p_{11} > 0, p_{22} > p_{12} \text{ και } p_{12}(p_{22} - p_{12}) - \frac{(p_{11} - p_{12} - p_{22})^2}{4} = 1 > 0$$

Άρα για αρκούντως μικρό $\|x\|$ έχουμε $V'(x) < 0$ και $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το $x^* = (0, 0)$ δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αφού υπάρχει και άλλο σημείο ισορροπίας.

B5: Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

και ότι είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση: Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Έστω υποψήφια συνάρτηση Lyapunov: $V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2$ που είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Έχουμε:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = x_1^3x_2 + x_2(-x_1^3 - x_2^3) = -x_2^4 \leq 0$$

Έστω

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : V'(x) = 0\} = \{[x_1 \ 0] : x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Όμως

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x'_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

Από το Θεώρημα Lasalle, $x^* = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B6: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = -x_1 + x_1x_2, \quad x'_2 = -x_2$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ είναι συνάρτηση Lyapunov]. Είναι το x^* ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

Λύση: Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, αρα $x^* = (0, 0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας.

(α) Έχουμε: $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Επίσης:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = x_1(-x_1 + x_1x_2) + x_2(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2)$$

Η $-V'(x)$ είναι θετικά ορισμένη σε κάποια περιοχή του $x^* = (0, 0)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2 &\geq x_1^2 + x_2^2 - |x_1| \cdot |x_1| \cdot |x_2| \geq x_1^2 + x_2^2 - \|x_1\| \cdot |x_1| \cdot |x_2| \\ &= \begin{bmatrix} |x_1| & |x_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\|x\|}{2} \\ -\frac{\|x\|}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $1 - \frac{\|x\|^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \|x\| < 2$. Άρα $V'(x) < 0$ για κάθε $x \in B_2(0) \setminus \{0\}$ και $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το σύστημα λύνεται αναλυτικά:

$$x'_2 = -x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{-t}x_2(0) \Rightarrow x'_1 = -x_1(1 - x_2(0)e^{-t}) \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \ln|x_1| = -t - x_2(0)e^{-t} + c$$

Όταν $t = 0$, $\ln|x_1(0)| = -x_2(0) + c$ και άρα $c = x_2(0) + \ln|x_1(0)|$. Επομένως,

$$\ln|x_1(0)| = -t - x_2(0)e^{-t} + x_2(0) + \ln|x_1(0)| \Rightarrow |x_1(t)| = |x_1(0)|e^{x_2(0)}e^{-t}e^{-x_2(0)e^{-t}} \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow +\infty$ για κάθε $x_1(0) \in \mathbb{R}$. Εφόσον έχουμε επίσης $x_2(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow +\infty$ για κάθε $x_2(0) \in \mathbb{R}$, το $x^* = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B7: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

(α) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας. (β) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ η γραμμικοποίηση]. (γ) Με αλλαγή συντεταγμένων λύστε το σύστημα αναλυτικά και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

Λύση: Από τις $x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$ και $x_1 = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$ έχουμε $x_2[1 + (1 - r^2)^2] = 0$ όπου $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ και επομένως $x_1 = x_2 = 0$

Έχουμε

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = 2x_1[-x_2 - x_1(1 - r^2)] + 2x_2[x_1 - x_2(1 - r^2)]$$

Ισοδύναμα

$$V'(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = -2r^2(1 - r^2) < 0$$

αν $r < 1$, $r \neq 0$ και άρα το $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αλλά όχι ολικά ($V'(x) > 0$ αν $r > 1$ - ισοδύναμα ο οριακός κύκλος $r = 1$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο).

(γ) Κατά τα γνωστά έχουμε: $r' = -r(1 - r^2)$ και $\theta' = 1 \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + t$. Άρα τροχιές με $r(0) < 1$ είναι αριστερόστροφες σπείρες που συγκλίνουν στο $x^* = (0, 0)$. Αν $r(0) = 1$ έχουμε αριστερόστροφες περιοδικές τροχιές πάνω στον οριακό κύκλο $r = 1$ (με περίοδο $T = 2\pi$) ενώ αν $r > 1$ έχουμε αριστερίστροφες σπείρες με $|r(t)| \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Με γραμμικοποίηση στο $x^* = (0, 0)$ έχουμε

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda = -1 \pm i$ που επιβεβαιώνει το συμπέρασμα ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

B8: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -g(x_1)(x_1 + x_2)$$

όπου g τοπικά Lipschitz, $g(y) \geq 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. (α) Δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Δείξτε ότι:

$$V(x) = \int_0^{x_1} yg(y)dy + x_1x_2 + x_2^2$$

είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^2$. (γ) Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση: (α) Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow g(x_1)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (εφόσον $g(x_1) \geq 1$).

(β) Έχουμε:

$$\int_0^{x_1} yg(y)dy \geq \int_0^{x_1} ydy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x_1} = \frac{x_1^2}{2}$$

Άρα

$$V(x) \geq \frac{1}{2} [x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2] = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2)^2 + x_2^2]$$

Επίσης $V(x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ και επομένως η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στον $\mathbb{R}^2$. Θέτοντας $x_2 = \lambda x_1$ έχουμε

$$V(x_1, \lambda x_1) \geq \frac{1}{2} [(1 + \lambda)^2 + \lambda^2] x_1^2 \rightarrow \infty$$

καθώς $|x_1| \rightarrow \infty$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Παρόμοια $V(0, x_2) \geq x_2^2 \rightarrow \infty$ καθώς $|x_2| \rightarrow \infty$ και επομένως η $V(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη. Επίσης:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 \\ &= (x_1 g(x_1) + x_2) x_2 + (x_1 + 2x_2)(-g(x_1)(x_1 + x_2)) \\ &= g(x_1)[x_1 x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_1 x_2 - 2x_2^2] + x_2^2 \\ &= -g(x_1)(x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2) + x_2^2 \\ &\geq -x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2^2 + x_2^2 \\ &= -(x_1 + x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

και άρα $x^* = (0, 0)$ ευσταθές. Επίσης,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = 0\} = \{\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Όμως

$$(x_1 + x_2)(t) \equiv 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)' \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) - g(x_1(t))(x_1 + x_2)(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

και απο το Θεώρημα Lasalle το $x^* = (0, 0)$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές.

B9: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 x_3 + 1 \\ x_1 x_3 - x_2 \\ x_3^2(1 - x_3) \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Γραμμικοποιώντας το σύστημα δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

B10: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = -x_1, x'_2 = (x_1 x_2 - 1)x_2^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_1^2)x_2$$

(α) Δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας. (β) Γραμμικοποιώντας το σύστημα δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (γ) Δείξτε ότι το $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο. (δ) Είναι το $x^* = (0, 0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

Λύση: (α) Έχουμε:

$$x'_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow -x_2^3 - x_2 = -x_2(1 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

(β) Ο πίνακας Jacobian:

$$Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_2^4 + x_2^2 + 2x_1x_2 & 4x_1x_2^3 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 1 + x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές, άρα το $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(γ) Έστω $V(x_1, x_2) = x_1x_2$. Έχουμε:

$$V'(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = x_2(-x_1) + x_1[(x_1x_2 - 1)x_2^3 + (x_1x_2 - 1 + x_1^2)x_2]$$

Επομένως:

$$V'|_{x_1x_2=2} = 2x_2^2 + 2(1 + x_1^2) - 2 = 2(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

και επομένως το σύνολο Γ είναι θετικά αναλλοίωτο.

(δ) Το $x^* = (0, 0)$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές καθώς τροχιές που αρχίζουν εντός του Γ δεν συγχλίνουν στο x^* .

B11: Έστω το σύστημα

$$x'_1 = -x_1 - x_2, \quad x'_2 = 2x_1 - x_2^3$$

Δείξτε ότι $x^* = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση: (α) Έχουμε:

$$x_1 = x_2, \quad -2x_2 - x_2^3 = 0 \Rightarrow -x_2(2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Εξετάζουμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov: $V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ που είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Έχουμε:

$$V'(x) = 2x_1(-x_1 - x_2) + x_2(2x_1 - x_2^3) = -2x_1^2 - x_2^4 < 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

και επομένως $x^* = (0, 0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B12: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2, \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2}$$

Έστω επίσης

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. (α) Δείξτε ότι $V(x) > 0$ και $V'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (β) Έστω το σύνολο:

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2(x_1 - \sqrt{2}) \geq 2\}$$

Δείξτε ότι το Γ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το σύστημα (δηλ. $x(0) \in \Gamma \Rightarrow x(t) \in \Gamma$ για κάθε $t \geq 0$) και ότι επομένως το $x^* = (0, 0)$ δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο (f_1, f_2) στο συνόρο του συνόλου Γ , $\partial\Gamma$].

Λύση: (α) Έχουμε

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow -x_1 \left(2 + \frac{6}{(1 + x_1^2)^2} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη (σε κάποια περιοχή του 0). Επίσης:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = \frac{2x_1(1+x_1^2) - x_1^2(2x_1)}{(1+x_1^2)^2} \left[\frac{-6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \right] + 2x_2 \left[-\frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \right]$$

Ισοδύναμα:

$$V'(x) = \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \left[2x_2 - \frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} \right] - \frac{4x_2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} = -\frac{12x_1^2}{(1+x_1^2)^2} - \frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} < 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και άρα το $x^* = (0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το σύνορο του Γ , $\partial\Gamma$, ορίζεται από το γράφημα της υπερβολής

$$x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}, \quad x_1 > \sqrt{2}$$

Η εφαπτόμενη της υπερβολής σε σημείο $(x_1, \frac{1}{x_1 - \sqrt{2}})$, $x_1 > \sqrt{2}$, έχει κλίση

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2}{(x_1 - \sqrt{2})^2}$$

και άρα κάποιο εφαπτομενικό διάνυσμα είναι της μορφής:

$$v = \left((x_1 - \sqrt{2})^2, -2 \right), \quad x_1 > \sqrt{2}$$

Το διανυσματικό πεδίο σε σημείο του $\partial\Gamma$ είναι:

$$(f_1, f_2) = \left(-\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, -\frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \right)_{x_2 = \frac{1}{x_1 - \sqrt{2}}}$$

Έχουμε:

$$f_1 = \frac{-6x_1 + \frac{4}{x_1 - \sqrt{2}}(1+x_1^2)^2}{(1+x_1^2)^2} = \frac{-6x_1(x_1 - \sqrt{2}) + 4(1+2x_1^2+x_1^4)}{(x_1 - \sqrt{2})(1+x_1^2)^2} = \frac{4x_1^4 + 2x_1^2 + 6\sqrt{2}x_1 + 4}{(x_1 - \sqrt{2})(1+x_1^2)^2}$$

και

$$f_2 = \frac{-2 \left(x_1 + \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}} \right)}{(1+x_1^2)^2} = \frac{-2(x_1^2 - \sqrt{2}x_1 + 2)}{(x_1 - \sqrt{2})(1+x_1^2)^2}$$

Άρα, εφόσον $x_1 > \sqrt{2}$, το διάνυσμα

$$\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2) = (4x_1^4 + 2x_1^2 + 6\sqrt{2}x_1 + 4, -2(x_1^2 - \sqrt{2}x_1 + 2))$$

είναι στην διεύθυνση του πεδίου σε κάθε σημείο της υπερβολής $\partial\Gamma$. Το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle v, \hat{f} \rangle = (4x_1^4 + 2x_1^2 + 6\sqrt{2}x_1 + 4)(x_1 - \sqrt{2})^2 + 4 \left[x_1(x_1 - \sqrt{2}) + 2 \right] > 0$$

για κάθε $x_1 > \sqrt{2}$ και επομένως $x(0) \in \partial\Gamma \Rightarrow x(t) \in \Gamma$ για $t \geq 0$ και άρα το σύνολο Γ είναι θετικά αναλλοίωτο.

Το σημείο ισορροπίας $x^* = (0,0)$ δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού η τροχιά του συστήματος με $x(0) \in \Gamma$ δεν συγκλίνει στο x^* .

B13: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_1^2 + x_1^2 x_2, \quad x'_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$ είναι ασταθές.

Λύση: (α) Σημεία ισορροπίας: $x_1^2(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 + x_2 = 0$. $x_1 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$ που συνεπάγεται $x_2 = 0$ ή $x_2 = 1$. $x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 - x_1^3 = x_1(1 - x_1^2) = 0$ και $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ ή $x_1 = -1$. Επομένως έχουμε τα ακόλουθα σημεία ισορροπίας: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ και $(-1, 1)$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Chataev με $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$. Η συνάρτηση $V(x) > 0$ σε σημεία αυθαίρετα κοντά στο $(0, 0)$. Έχουμε

$$V'(x) = x_1(x_1^3 + x_1^2x_2) - x_2(-x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3) = x_1^4 + 2x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^3 - x_1x_2^2$$

Ισοδύναμα:

$$V'(x) = (x_1^2 + x_1x_2)^2 + x_2^2(1 - x_1^2 - x_2 - x_1) > 0$$

σε περιοχή του $x^* = (0, 0)$. Άρα το $x^* = (0, 0)$ είναι ασταθές.

B14: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2, \quad x_2' = f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

(α) Δείξτε ότι το σύνολο

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1^3 \leq x_2 \leq x_1^2\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο. [Υπόδειξη: Βρείτε την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου (f_1, f_2) στο σύνορο του Γ .] Επομένως δείξτε ότι το $x^* = (0, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για την ευστάθεια των P_0 και P_1 μέσω γραμμικοποίησης;

Λύση: Σημεία ισορροπίας: $x_2 = x_1^3 \Rightarrow x_2^2(1 - x_2) = 0$ και άρα $x_2 = 0$ ή $x_2 = 1$. Επομένως έχουμε δύο σημεία ισορροπίας, $P_0 = (0, 1)$ και $P_1 = (1, 1)$.

Έχουμε $\partial\Gamma = \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2$ όπου

$$\partial\Gamma_1 = \{(x_1, x_1^3) : 0 \leq x_1 \leq 1\}, \quad \partial\Gamma_2 = \{(x_1, x_1^2) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$$

Το διανυσματικό πεδίο είναι: (f_1, f_2) , $f_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^3$ και $f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$. Αν $(x_1, x_2) \in \partial\Gamma_1$, $f_1(x_1, x_2) = 0$ και $f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_2^3 = x_2^2(1 - x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $(x_1, x_2) \neq (1, 1)$. Αν $(x_1, x_2) \in \partial\Gamma_2$, $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^3 = x_1(1 - x_1^2) > 0$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $(x_1, x_2) \neq (1, 1)$ και $f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_1^6 = 0$. Άρα τροχιές του συστήματος δεν μπορούν να εξέλθουν από το σύνολο Γ και άρα το Γ είναι θετικά αναλλοίωτο. Από την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου f εντός του Γ συμπεραίνουμε ότι κάθε $x(0) \in \Gamma$ έλκεται από το $P_1(1, 1)$ και επομένως το $P_0(0, 0)$ είναι ασταθές.

Ο πίνακας Jacobian είναι:

$$Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 6x_1^5 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Df(1, 1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές του πίνακα $Df(0, 0)$ είναι 0 (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του $P_0(0, 0)$ μέσω γραμμικοποίησης. Οι ιδιοτιμές του $Df(1, 1)$ είναι:

$$\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -6 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = (\lambda + 3)^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 + \sqrt{6} < 0, \quad \lambda_2 = -3 - \sqrt{6} < 0$$

από όπου προκύπτει ότι το $P_1(1, 1)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

B15: Έστω το σύστημα $x' = f(x)$ όπου $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ότι ο πίνακας Jacobian $Df(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$P \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T P \leq -I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

όπου $P = P^T > 0$ (Σημείωση: Για δύο συμμετρικούς πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \leq B$ σημαίνει ότι ο $B - A$ είναι θετικά ημιορισμένος).

(α) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$$

(αφού την αποδείξετε), δείξτε ότι:

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x = -\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(β) Δείξτε ότι $V(x) = f^T(x) P f(x)$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση και ακτινικά μη φραγμένη.

(γ) Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση: (α) Θέτουμε $g(\sigma) = f(\sigma x)$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Έχουμε:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\sigma) d\sigma$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(\sigma) = (f(\sigma x))' = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) \frac{\partial(\sigma x)}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x$$

Επομένως:

$$f(x) = f(x) - f(0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\sigma) d\sigma = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} x^T P f(x) + f^T(x) P x &= x^T P \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma + \int_0^1 x^T \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) \right]^T d\sigma \cdot P x \\ &= x^T \left\{ \int_0^1 \left(P \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) \right]^T P \right) d\sigma \right\} x \\ &= \int_0^1 x^T \left(P \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) \right]^T P \right) x d\sigma \\ &\leq - \int_0^1 x^T x d\sigma = -x^T x = -\|x\|^2 \end{aligned}$$

(β) Εφόσον $P = P^T > 0$ η συνάρτηση $V(x) = f^T P f(x)$ είναι (τουλάχιστον) θετικά ημιορισμένη. Θα δείξουμε ότι $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow P f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ (εφόσον $P = P^T > 0$). Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι $p \neq 0 \Rightarrow f(p) \neq 0$, δηλαδή ότι $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Υποθέτουμε για αντίφαση ότι $f(p) = 0$ για κάποιο $p \neq 0$. Τότε,

$$\|p\|^2 = p^T p \leq p^T P f(p) + f^T(p) P p \leq 0 \Rightarrow p = 0$$

(άτοπο). Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η V είναι ακτινικά μη φραγμένη. Έστω αυθαίρετο $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Τότε:

$$\frac{x^T P f(x)}{\|x\|^2} = \frac{1}{2\|x\|^2} (x^T P f(x) + f^T P x) \leq -\frac{1}{2}$$

Έστω ότι $\|f(x)\| \leq c$ καθώς $\|x\| \rightarrow \infty$. Τότε:

$$\frac{\|x^T P f(x)\|}{\|x\|^2} \leq \frac{\|x^T\| \|P\| \|f(x)\|}{\|x\|^2} \leq \frac{\|P\| c}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|x\| \rightarrow \infty$$

που είναι άτοπο αφού

$$\frac{x^T P f(x)}{\|x\|^2} \leq -\frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Άρα στο όριο $\|x\| \rightarrow \infty$, $|f_i(x)| \rightarrow \infty$ για ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και άρα $V(x) \rightarrow \infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow \infty$.

(ς) Έχουμε ότι η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον:

$$f'(x) = Df(x)x' = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] f(x)$$

και άρα

$$V'(x) = [f'(x)]^T P f(x) + f^T(x) P f'(x) = f^T(x) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \right\} f(x) \leq -\|f(x)\|^2 \leq 0$$

Εφόσον $V(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ η $V'(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ και $x = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

B16: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3), \quad x'_3 = x_2 - x_3$$

όπου $h_i(x)$ τοπικά Lipschitz, $h_i(0) = 0$ και $y h_i(y) > 0$ αν $y \neq 0$, $i = 1, 2$.

(α) Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $x^* = 0$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y) dy + \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} h_2(y) dy > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(γ) Δείξτε ότι το $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ) Κάτω απο ποιές συνθήκες στις $h_1(\cdot)$ και $h_2(\cdot)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

Λύση: (α) Έχουμε

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow h_1(x_1) - h_2(0) = h_1(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

(αν $x_1 \neq 0$ έχουμε $x_1 h_1(x_1) \neq 0 \Rightarrow h_1(x_1) \neq 0$).

(β) Έχουμε: $\int_0^{x_1} h_1(y)dy > 0$ αν $x_1 \neq 0$ (και 0 αν $x_1 = 0$). Η $V(x)$ είναι αθροισμα τριών μη αρνητικών όρων, άρα θετικά ημιορισμένη. Αν $V(x) = 0$ τότε

$$\int_0^{x_1} h_1(y)dy = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{x_3} h_2(y)dy = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

και άρα η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη.

(γ) Έχουμε:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}x'_3 \\ &= h_1(x_1)x_2 + x_2(-h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3)) + h_2(x_3)(x_2 - x_3) \\ &= -x_2^2 - x_3h(x_3) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Επίσης: $V'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$. Έστω,

$$S = \{(0 \ x_2 \ x_3)^T : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

και έστω λύση $x(t) \in S$, δηλαδή $x_1(t) \equiv 0$. Τότε $x'_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$. Άρα $h_1(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow h_2(x_2(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_3(t) \equiv 0$. Άρα $x(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$ και από το Θεώρημα Lasalle το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ) Θέλουμε η $V(x)$ να είναι ακτινικά μη φραγμένη, δηλαδή

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_0^{x_1} h_1(y)dy = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \int_0^{x_3} h_2(y)dy = \infty$$