

Δυναμικά Συστήματα (739) - Φεβρουάριος 2022

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B το άθροισμα των βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω το σύστημα: $x'_1 = 1 - e^{x_2}$, $x'_2 = 1 - e^{x_2 - x_1}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $x^* = (0, 0)$. Δείξτε επίσης ότι $V(x_1, x_2) = x_1 + e^{-x_1} + e^{x_2} - x_2 - 2$ είναι συνάρτηση Lyapunov για το x^* και ότι το x^* είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. [1,5 βαθμοί]

Θέμα 2: Έστω το σύστημα

$$x'' + \frac{x'}{1+x^2} + x = 0, \quad x(0) = u_0, \quad x'(0) = u_1, \quad t \geq 0$$

- (α) Δείξτε ότι το σύστημα γράφεται στη μορφή $z' = f(z)$, $z(0) = z_0$, όπου $z = [x \ x']^T \in \mathbb{R}^2$, $z_0 \in \mathbb{R}^2$ και $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. [0,5 βαθμός]
- (β) Βρείτε εκτίμηση της $\|f(z)\|$ της μορφής $\|f(z)\| \leq \gamma \|z\|$, $\gamma > 0$, όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα, $\|z\| = \sqrt{z^T z}$. [0,5 βαθμός]
- (γ) Έστω $J = [0, \beta)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης του συστήματος. Με χρήση της ανισότητας Gronwall δείξτε ότι $\|z(t)\| \leq \|z_0\| e^{\gamma \beta}$ για κάθε $t \in [0, \beta)$. Επομένως δείξτε ότι $\beta = \infty$, δηλαδή ότι η λύση του συστήματος είναι καλά ορισμένη για κάθε $t \geq 0$. [1 βαθμός]

Θέμα 3: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2), \quad f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

- (α) Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα $P_0(0, 0)$ και $P_1(1, 1)$. [0,5 βαθμός]
- (β) Γραμμικοποιώντας στο σύστημα δείξτε ότι το σημείο P_1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Είναι το P_1 ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές; [1 βαθμός]
- (γ) Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq x_1^3, x_2 \leq x_1^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο. Επομένως δείξτε ότι το σημείο P_0 είναι ασταθές. Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο $f = (f_1, f_2)$ στο σύνολο του Γ . [1 βαθμός]

Θέμα 4: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ x_2(\mu + x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Περιγράψτε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ευστάθεια σημείων ισορροπίας, ύπαρξη οριακών κύκλων) και σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης αν $\mu > 0$ και $\mu < 0$. Υπόδειξη: Μετασχηματίστε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες. [1 βαθμός]

συνέχεια στην πίσω σελίδα ...

Θέμα 5:

(α) Δείξτε ότι το σύστημα $x'(t) = 1 + x(t) \cos t$ δεν έχει 2π -περιοδική λύση. [1 βαθμός]

(β) Βρείτε την λύση του Π.Α.Τ.:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και τον αντίστοιχο ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$. [1,5 βαθμοί]

Θέμα 6: Έστω το σύστημα:

$$x' = f(x), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι $x^* = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Βρείτε την αναλυτική λύση του συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης. Συγκρίνετε με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος $y' = Df(0)y$ όπου $Df(0)$ είναι ο πίνακας Jacobian στο σημείο $x^* = 0$. [1 βαθμός]

(β) Έστω $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η συνεχής συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Δείξτε επίσης ότι η h μετασχηματίζει το σύστημα $x' = f(x)$ στο γραμμικό σύστημα $y' = Df(0)y$ υπό την έννοια ότι αν $y = h(x)$ τότε $y' = Df(0)y$. [1 βαθμός]

Ονοματεπώνυμο:

A.M.: